

Estática dos Fluidos

PME 3230 - Mecânica dos Fluidos I

PME/EP/USP

Prof. Antonio Luiz Pacífico

2º Semestre de 2018

Conteúdo da Aula

- 1 Introdução
- 2 Conceito de Pressão
- 3 A Equação Básica de Estática dos Fluidos
- 4 Atmosfera Padrão
- 5 Variação da Pressão em Um Fluido Estático
- 6 Exercícios de Aula

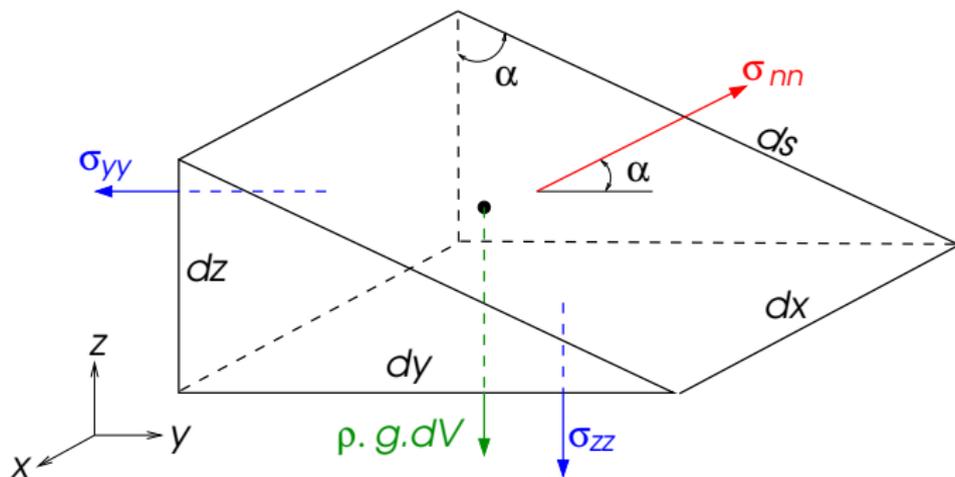
Introdução

Uma vez que um fluido é definido como sendo um meio material incapaz de resistir a qualquer valor de tensão de cisalhamento, segue-se que para um fluido em repouso (estático) somente tensões normais podem estar presentes.

A pressão que se encontra num fluido em repouso tem muitas aplicações práticas que vão desde cálculos de forças sobre objetos submersos, instrumentação para medição de pressão até dedução de propriedades associadas à atmosfera e aos oceanos. Os mesmos princípios poderão ser utilizados para determinar forças envolvidas em sistemas hidráulicos, como prensas, freios de automóveis, etc.

Conceito de Pressão

Parte-se de uma situação generalizada: um fluido perfeito (não estão presentes tensões de cisalhamento) escoando pode ser analisado por meio de um elemento de fluido de forma arbitrária, como ilustrado na figura abaixo.



Conceito de Pressão

Aplicando a 2ª Lei de Newton nas direções z e y :

Direção z :

$$dF_z = dF_{zz} + dF_n + dF_m = dm \cdot a_z$$

onde dF_{zz} é devida à σ_{zz} ; dF_n é devida a σ_{nn} ; e dF_m é devida à massa (força peso).

$$-\sigma_{zz} \cdot dx \cdot dy + \sigma_{nn} \cdot ds \cdot dx \cdot \text{sen}\alpha - \rho \cdot g \cdot dV = \rho \cdot dV \cdot a_z$$

Uma vez que $dV = [(dy \cdot dz)/2] \cdot dx$ e $\text{sen}\alpha = dy/ds$, segue-se que:

$$-\sigma_{zz} \cdot dx \cdot dy + \sigma_{nn} \cdot ds \cdot dx \cdot \frac{dy}{ds} - \rho \cdot g \cdot \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2} = \rho \cdot \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2} \cdot a_z$$

Dividindo por $dx \cdot dy$ e rearranjando,

$$\sigma_{nn} = \sigma_{zz} + \rho \cdot g \cdot \frac{dz}{2} + \rho \cdot \frac{dz}{2} \cdot a_z = \sigma_{zz} + \rho \cdot \frac{dz}{2} \cdot (g + a_z)$$

como dz é infinitesimalmente pequeno, segue-se que

$$\sigma_{nn} = \sigma_{zz}$$

Conceito de Pressão

Direção y :

$$-\sigma_{yy} \cdot dx \cdot dz + \sigma_{nn} \cdot ds \cdot dx \cdot \cos \alpha = \rho \cdot dV \cdot a_y$$

Uma vez que $dV = [(dy \cdot dz)/2] \cdot dx$ e $\cos \alpha = dz/ds$, segue-se que:

$$-\sigma_{yy} \cdot dx \cdot dz + \sigma_{nn} \cdot ds \cdot dx \cdot \frac{dz}{ds} = \rho \cdot \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2} \cdot a_y$$

Dividindo por $dx \cdot dz$ e rearranjando,

$$\sigma_{nn} = \sigma_{yy} + \rho \cdot \frac{dy}{2} \cdot a_y$$

como dy é infinitesimalmente pequeno, segue-se que

$$\sigma_{nn} = \sigma_{yy}$$

Analogamente, para a direção x , a mesma conclusão seria obtida:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx}.$$

Conceito de Pressão

Assim, para o escoamento de fluido perfeito (invíscido), a tensão normal em um ponto é a mesma em todas as direções. Ela é, portanto, uma grandeza escalar.

A tensão normal em um escoamento de fluido perfeito é igual à *pressão termodinâmica* com sinal contrário: $\sigma_{nn} = -p$

Para a situação do fluido em repouso, $a_z = a_y = 0$ e os resultados obtidos continuam válidos: $\sigma_{zz} = \sigma_{yy} = \sigma_{xx} = \sigma_{nn} = -p$.

Há dois modos de interpretar a propriedade pressão: (1) escala microscópica onde cada molécula é considerada individualmente; ou (2) escala macroscópica onde é o conjunto de moléculas que determina o comportamento médio do meio contínuo.

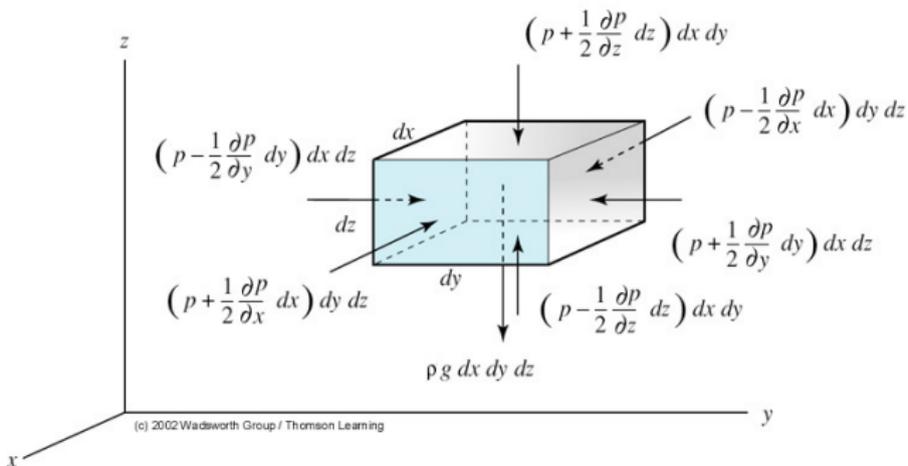
Conceito de Pressão

Do ponto de vista microscópico, o fluido é composto por um grande número de moléculas movendo-se de forma randômica e, frequentemente, colidindo-se umas contra as outras e contra as paredes do reservatório que as contém. Durante estas colisões há mudança de velocidade das partículas e, conseqüentemente, mudança de quantidade de movimento. Assim, a pressão num fluido (segundo este ponto de vista) é uma medida a quantidade de movimento linear médio do moléculas no fluido.

Do ponto de vista macroscópico a pressão de fluido é uma variável (propriedade) de estado, como a temperatura e a massa específica, e a mudança da propriedade pressão durante um processo é governada pelas leis da termodinâmica.

A Equação Básica de Estática dos Fluidos

Considere o elemento de fluido em repouso mostrado na figura abaixo.



Para este elemento, a força de campo (peso, associada ao campo gravitacional) é dada por:

$$d\vec{F}_c = \vec{g} \cdot dm = \vec{g} \cdot \rho \cdot dV = \vec{g} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

A Equação Básica de Estática dos Fluidos

A força de superfície resultante (devida à pressão atuante nas faces do elemento) pode ser escrita por:

$$d\vec{F}_s = \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz \right] \cdot \vec{i}$$

$$\left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz \right] \cdot \vec{j}$$

$$\left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) \cdot dx \cdot dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) \cdot dx \cdot dy \right] \cdot \vec{k}$$

$$d\vec{F}_s = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{k} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\therefore d\vec{F}_s = -\vec{\nabla}p \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

A Equação Básica de Estática dos Fluidos

A força resultante sobre o elemento será a soma da força de campo e de superfície:

$$d\vec{F}_R = d\vec{F}_c + d\vec{F}_s = \left(-\vec{\nabla}p + \rho \cdot \vec{g} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \left(-\vec{\nabla}p + \rho \cdot \vec{g} \right) \cdot dV$$

$$\frac{d\vec{F}_R}{dV} = -\vec{\nabla}p + \rho \cdot \vec{g}$$

Para o fluido em repouso esta força resultante deve ser nula.

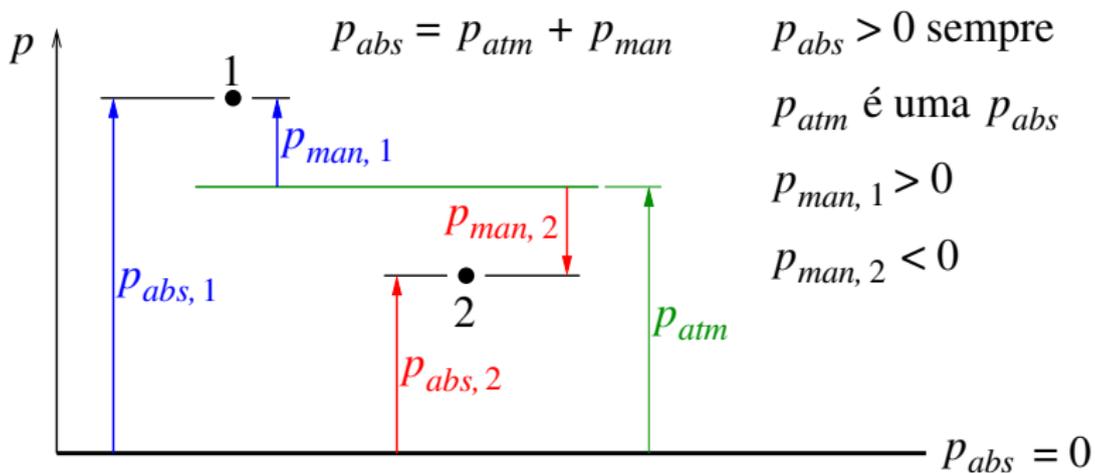
Conclui-se, portanto, que:

$$-\vec{\nabla}p + \rho \cdot \vec{g} = 0$$

Como a aceleração da gravidade só atua em uma direção, no caso do elemento ilustrado na direção do eixo Oz ($g_z = -g$), segue-se que a equação vetorial acima acima, decomposta, resulta em:

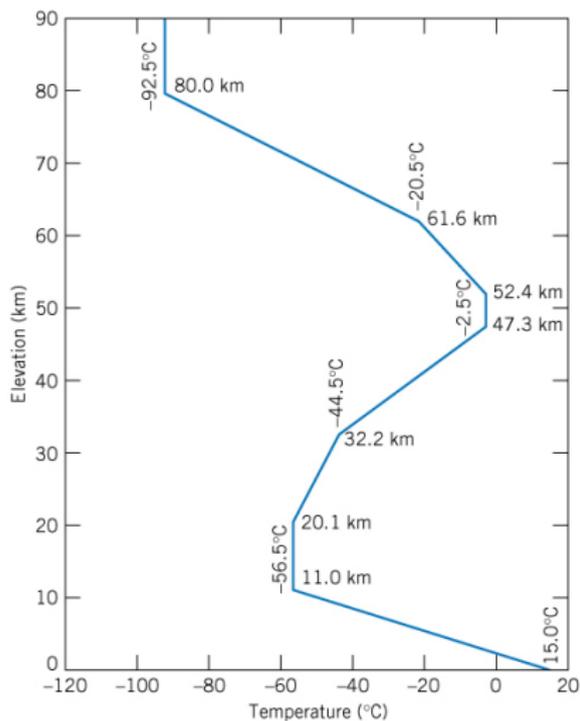
$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial p}{\partial y} = 0 ; \text{ e } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g = -\gamma$$

Medição da Pressão



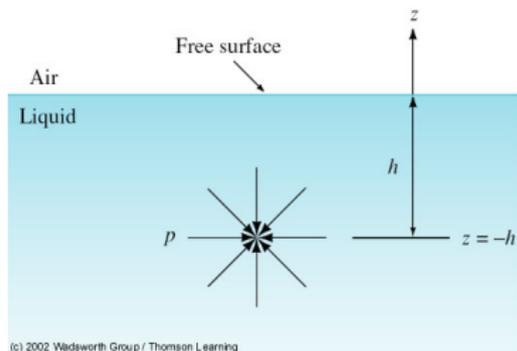
Subscritos: *abs* ≡ absoluta; *man* ≡ manométrica; *atm* ≡ atmosférica.

Atmosfera Padrão



Em aviação o estabelecimento de uma atmosfera (fictícia) padrão é importante para que se tenha um padrão de comparação e de referência. Um dos padrões utilizados é a atmosfera padrão americana, ilustrada na figura ao lado. É importante salientar que esta atmosfera não é real, mas é uma tentativa de reprodução da atmosfera real dentro de certos limites observáveis de correlação com esta. Na atmosfera padrão americana, ao nível do mar, tem-se: $15\text{ }^{\circ}\text{C}$; $101,3\text{ kPa}$; $1,225\text{ kg/m}^3$; e $1,789 \times 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Variação da Pressão em Um Fluido Estático



Tomando a equação deduzida anteriormente:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g = -\gamma$$

e integrando-a dentro dos limites (ver figura ao lado) estabelecidos, para um fluido incompressível, resulta:

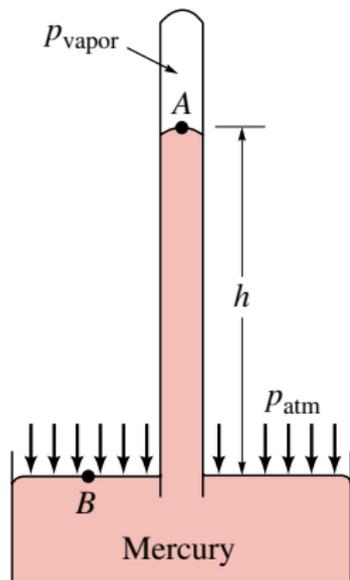
$$\int_{p(z)}^{p_0} dp = -\gamma \cdot \int_{z=-h}^0 dz$$

$$p_0 - p(z) = -\gamma \cdot [0 - (-h)]$$

$$p(z) = p_0 + \gamma \cdot h = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

Lei de Stevin

Medição da Pressão Atmosférica



Inicialmente em vácuo ($p_{abs} \approx 0$) o tubo é mergulhado num recipiente com mercúrio. A pressão atmosférica atuante na superfície do recipiente empurra a coluna de mercúrio para cima. No equilíbrio a pressão atmosférica suporta a coluna de mercúrio. A altura da coluna é uma indicação da pressão atmosférica local. O mercúrio é muito utilizado em barômetros, uma vez que a sua pressão de vapor é baixíssima. Assim, independente da temperatura ambiente, a contra-pressão que o vapor de mercúrio faz no sentido de empurrar a coluna de mercúrio para baixo é insignificante e pode ser desprezada: $p_{atm} = p_{vapor} + \gamma \cdot h = \gamma \cdot h$

Variação da Pressão na Atmosfera Padrão Americana

Gases, por serem compressíveis, apresentarão variação da sua massa específica com a variação da pressão. Como a pressão num meio fluido estático varia com a altura, segue-se que para gases haverá variação da sua massa específica com a altura. Considerando ar atmosférico como gás ideal:

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz = -\frac{\rho \cdot g}{R \cdot T} \cdot dz = -\frac{\rho \cdot g}{R \cdot (T_0 - m \cdot z)} \cdot dz$$

onde $T = T_0 - m \cdot z$ é um modelo de variação de T com a altura z nos primeiros 11 km da atmosfera padrão americana. O símbolo m é a razão de decremento de $T(z)$ [coeficiente angular da reta $T = f(z)$]. Procedendo à integração desde $p = p_0$ em $z = 0$ até uma pressão p e altura z genéricos, obtém-se:

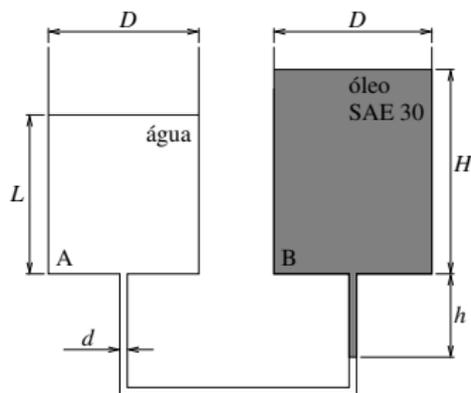
$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^z \frac{g}{R \cdot (T_0 - m \cdot z)} \cdot dz$$

O resultado é:

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{m \cdot z}{T_0}\right)^{g/m \cdot R} = p_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{g/m \cdot R}$$

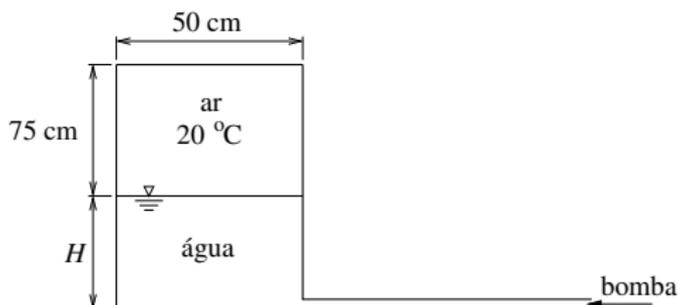
Exercício de Aula 1

Enunciado: Para mostrar o efeito das dimensões dos manômetros considere a figura abaixo. Os reservatórios A e B são cilíndricos e estão sujeitos à mesma pressão nas suas superfícies livres. Suponha que a interface água-óleo mova-se para cima a uma distância $\Delta h < h$. Nesta situação, encontre uma expressão para a diferença de pressões nos níveis dos reservatórios quando: (a) $d \ll D$; e (b) $d = 0,15.D$. Qual a diferença percentual entre os resultados dos itens (a) e (b)? [White, Ex. 2.34, 4a Edição]



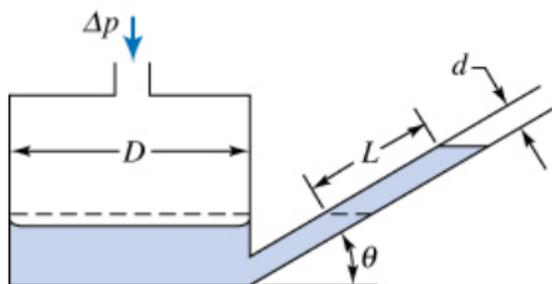
Exercício de Aula 2

Enunciado: O tanque cilíndrico ilustrado na figura abaixo contém água e ar a $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. A água é fornecida por uma bomba que alimenta o tanque na sua parte inferior. No instante ilustrado na figura a pressão no compartimento de ar é de 110 kPa e $H = 35\text{ cm}$. A bomba interrompe o fornecimento de água quando a pressão na água no nível da sua descarga para o tanque for de 175 kPa . Nesta situação final, determine o valor de H . [White, Ex. 2.47, 4a Edição]



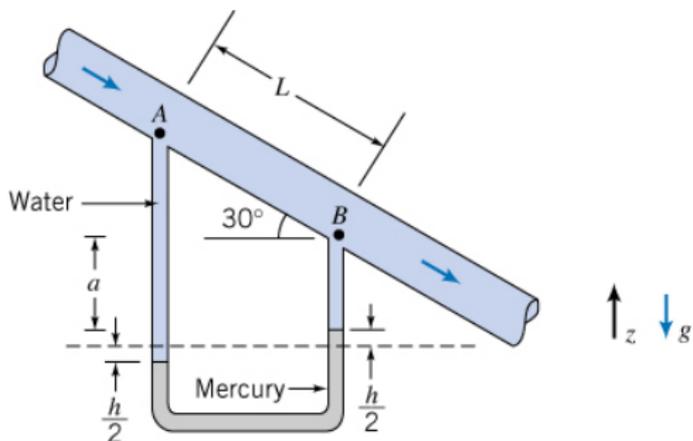
Exercício de Aula 3

Enunciado: Um manômetro de reservatório com tubo inclinado é construído como mostrado na figura abaixo. Analise o manômetro para obter uma expressão geral para a deflexão do líquido, L , no tubo inclinado, em termos da diferença de pressão aplicada, Δp . Obtenha, também, uma expressão geral para a sensibilidade do manômetro. [Fox, McDonald e Pritchard, Ex. 3.2, 6a Edição]

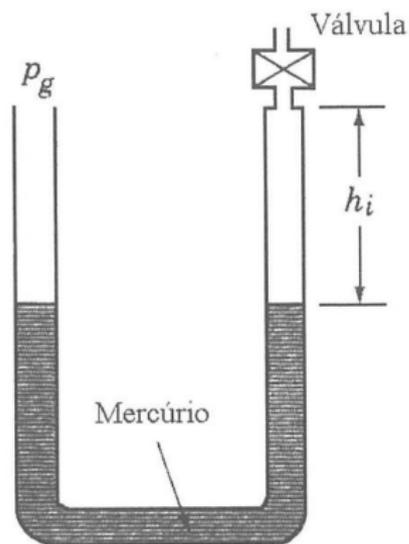


Exercício de Aula 4

Enunciado: Água flui para baixo ao longo de um tubo inclinado de 30° em relação à horizontal conforme mostrado na figura. A diferença de pressão $p_A - p_B$ é causada parcialmente pela gravidade e parcialmente pelo atrito. Obtenha uma expressão algébrica para a diferença de pressão citada. Calcule esta diferença se $L = 5$ pés e $h = 6''$. [Fox, McDonald e Pritchard, 3.24, 6a Edição]



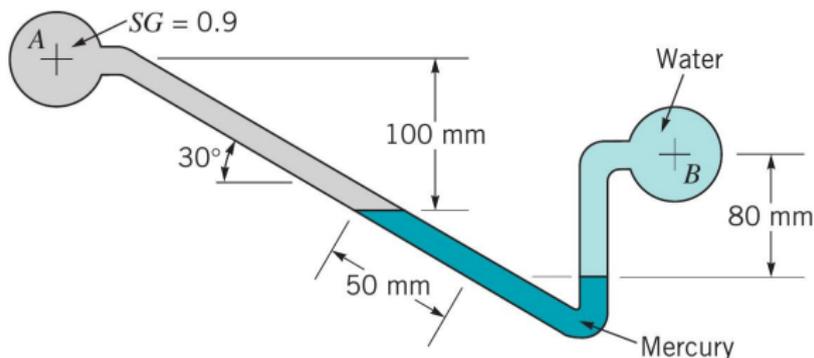
Exercício de Aula 5



Enunciado: As duas extremidades do manômetro de mercúrio em **U** mostrado na figura ao lado estão inicialmente abertas para a atmosfera e sob a ação da atmosfera padrão. Quando a válvula no topo da perna direita é aberta o nível de mercúrio abaixa h_i . Após isto, a válvula é fechada e ar comprimido é aplicado na perna esquerda do manômetro. Determine a relação entre a leitura diferencial do manômetro e a pressão aplicada na perna esquerda do manômetro, p_g . Mostre, num gráfico, como a leitura diferencial varia com p_g para $h_i = 25, 50, 75$ e 100 mm e na faixa $0 \leq p_g \leq 300$ kPa. Admita que a temperatura do ar aprisionado no manômetro permanece constante. [Munson, 2.39, 4a Edição]

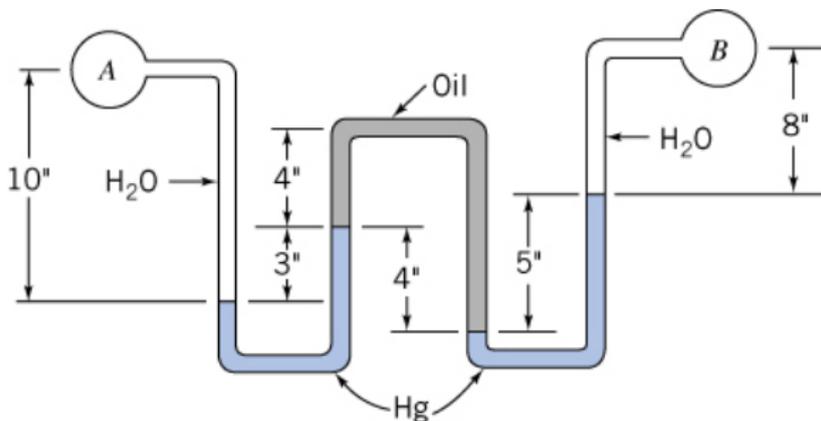
Exercício de Aula 6

Enunciado: A leitura diferencial no manômetro inclinado mostrado na figura abaixo é de 50 mm. Determine a nova leitura diferencial no manômetro se a pressão em A aumentar em 10 kPa e a pressão em B permanecer a mesma. O fluido em A tem densidade de 0,9 e o fluido em B é água. [Munson, 2.45, 4a Edição]



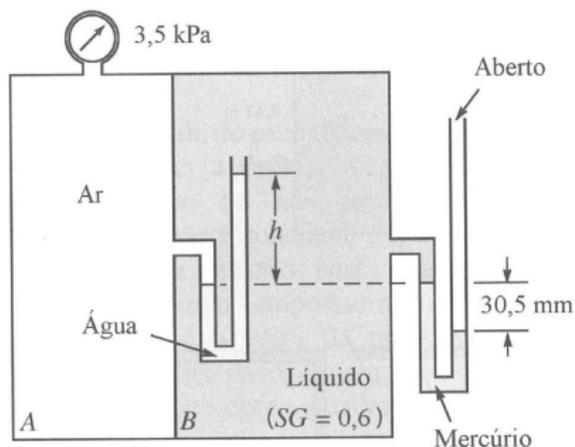
Exercício Proposto 1

Enunciado: Água escoa no interior dos tubos A e B . Óleo lubrificante ($SG = 0,88$) está na parte superior do tubo em U invertido. Mercúrio ($SG = 13,6$) está na parte inferior dos dois tubos em U . Determine a diferença de pressão, $p_A - p_B$, em kPa. [Fox, McDonald e Pritchard, Ex. 3.3, 6a Edição]. *Resposta:* 3,73 psi = 25,7 kPa.



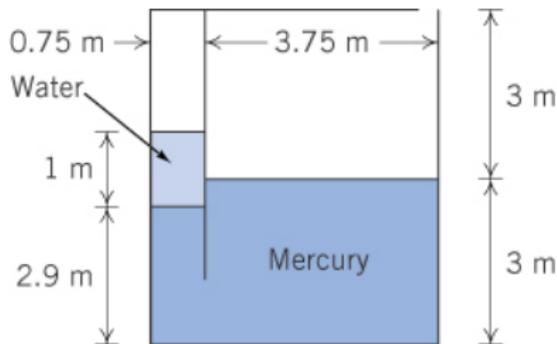
Exercício Proposto 2

Enunciado: Os compartimentos *A* e *B* do reservatório mostrado na figura abaixo contém ar e um líquido que apresenta densidade igual a 0,6. Determine a altura h indicada no manômetro sabendo que a pressão atmosférica vale 101,3 kPa. Observe que o manômetro instalado no compartimento *A* indica que a pressão no ar é igual a 3,5 kPa. [Munson, 2.33, 4a Edição]. *Resposta:* 1,93 m.



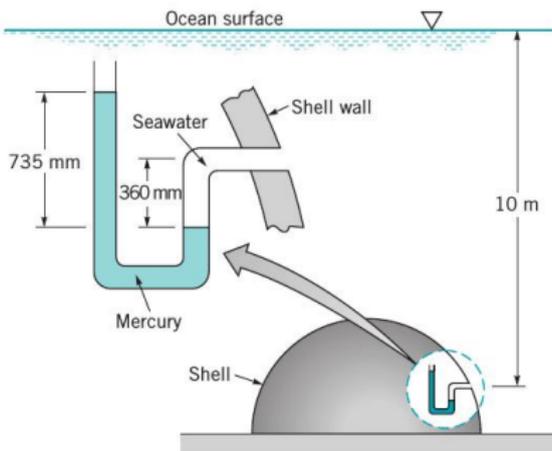
Exercício Proposto 3

Enunciado: Um tanque repartido contém água e mercúrio ($SG = 13,6$) conforme mostrado na figura. Qual é a pressão manométrica do ar preso na câmara esquerda? A que pressão deveria o ar da câmara esquerda ser comprimido de modo a levar a superfície da água para o mesmo nível da superfície livre na câmara direita? [Fox, McDonald e Pritchard, 3.15, 6a Edição]. *Respostas:* 3,48 kPa; 123 kPa.



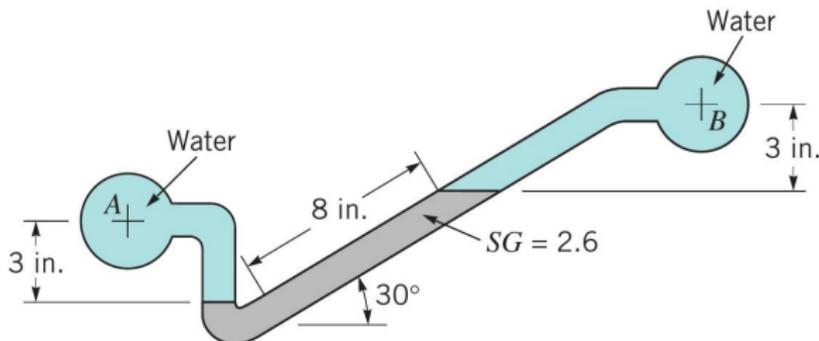
Exercício Proposto 4

Enunciado: A figura abaixo mostra uma casca hemisférica cheia de ar que está presa no fundo do oceano (profundidade igual a 10 m). Um barômetro localizado dentro da casca hemisférica apresenta uma coluna de mercúrio com altura de 765 mm e o manômetro em U mostrado na figura indica uma leitura diferencial de 735 mm de mercúrio. Utilizando estes dados, determine qual o valor da pressão atmosférica na superfície livre do oceano. [Munson, 2.38 , 4a Edição]. *Resposta:* 94,9 kPa.



Exercício Proposto 5

Enunciado: Para o manômetro de tubo inclinado da figura abaixo, sabendo-se que o fluido em A e B é água, que $p_A = 0,6$ psi, e que o fluido do manômetro possui densidade de 2,6, calcule a pressão no pondo B. [Munson, 2.32 , 4a Edição]. *Resposta:* 0,224 psi = 1544,4 Pa.



Exercício Proposto 6

Enunciado: Um tanque cilíndrico fechado preenchido com água tem um domo hemisférico e está conectado a uma tubulação invertida conforme mostra a figura abaixo. O líquido na parte superior da tubulação tem densidade relativa de 0,8. As demais partes do sistema estão preenchidas com água. Se a leitura do manômetro é de 60 kPa, determine: (a) a pressão no tubo B; and (b) a pressão no ponto C em mmHg. [Munson, 2.29 , 6a Edição]. *Respostas:* (a) 103 kPa; (b) 230 mmHg.

