Transformações Geométricas 2D

SCC0250 - Computação Gráfica

Profª. Rosane Minghim
https://edisciplinas.usp.br/
rminghim@icmc.usp.br
P.A.E. Eric Macedo Cabral
cabral.eric@usp.br

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC)
Universidade de São Paulo (USP)

Agosto de 2018

Sumário

1. Introdução
2. Transformações Básicas
3. Coordenadas Homogêneas
4. Transformações Inversas
5. Transformações 2D Compostas
6. Outras Transformações 2D

Sumário

1. Introdução
2. Transformações Básicas
3. Coordenadas Homogêneas
4. Transformações Inversas
5. Transformações 2D Compostas
6. Outras Transformações 2D

Introdução

- **Transformações Geométricas** são operações aplicadas à descrição geométrica de um objeto para mudar sua
  - posição (translação)
  - orientação (rotação)
  - tamanho (escala)

- Além dessas **transformações básicas**, existem outras
  - reflexão
  - cisalhamento

Sumário

1. Introdução
2. Transformações Básicas
3. Coordenadas Homogêneas
4. Transformações Inversas
5. Transformações 2D Compostas
6. Outras Transformações 2D

Translação

Translação

- A translação consiste em adicionar *offsets* às coordenadas que definem um objeto

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

- Usando notação matricial, uma translação 2D pode ser descrita como

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Rotação

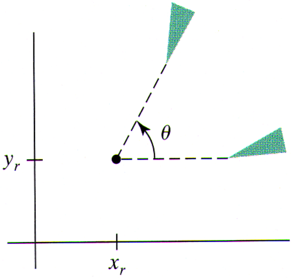
Rotação

- Define-se uma transformação de rotação por meio de um **eixo de rotação** e um **ângulo de rotação**

- Em 2D a rotação se dá em um caminho circular no plano, rotacionando o objeto considerando-se um eixo perpendicular ao plano xy

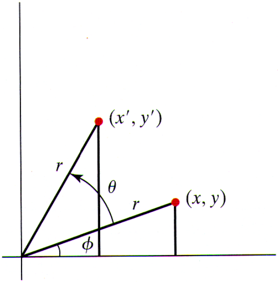
Rotação

- Parâmetros de rotação 2D são o ângulo θ de rotação e o ponto (x_r, y_r) de rotação, que é a intersecção do eixo de rotação com o plano xy
  - Se $\theta > 0$ a rotação é anti-horária
  - Se $\theta < 0$ a rotação é horária



Rotação

- Para simplificar considera-se que o ponto de rotação está na origem do sistema de coordenadas
  - O raio r é constante, ϕ é o ângulo original de $\mathbf{P} = (x, y)$ e θ é o ângulo de rotação



Rotação

- Sabendo que

$$\cos(\phi + \theta) = \frac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cdot \cos(\phi + \theta)$$

$$\operatorname{sen}(\phi + \theta) = \frac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \cdot \operatorname{sen}(\phi + \theta)$$

- como

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta$$

- então

$$x' = r \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta - r \cdot \operatorname{sen}\phi \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$y' = r \cdot \cos\phi \cdot \operatorname{sen}\theta + r \cdot \operatorname{sen}\phi \cdot \cos\theta$$

Rotação

- $\mathbf{P} = (x, y)$ pode ser descrito por meio de coordenadas polares

$$x = r \cdot \cos\phi, \qquad y = r \cdot \operatorname{sen}\phi$$

- Então por substituição

$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$y' = x \cdot \operatorname{sen}\theta + y \cdot \cos\theta$$

- Escrevendo na forma matricial temos

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformação de Corpo Rígido

Transformação de Corpo Rígido

- A **rotação** e a **translação** é uma **Transformação de Corpo Rígido** pois direcionam ou movem um objeto sem deformá-lo
    - Mantém ângulos e distâncias entre as coordenadas do objeto

Escala

Escala

- Para alterar o tamanho de um objeto aplica-se o operador de escala
- Multiplica-se as coordenadas de um objeto por fatores de escala

$$x' = x \cdot s_x, \qquad y' = y \cdot s_y$$

- Na forma matricial

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Escala

- Propriedades de s_x e s_y
  - s_x e s_y devem ser maiores que zero
  - Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ o objeto aumenta
  - Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ o objeto diminui
  - Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme
  - Se $s_x \neq s_y$ a escala é diferencial

Escala

- Pela formulação definida, o objeto é escalado e movido

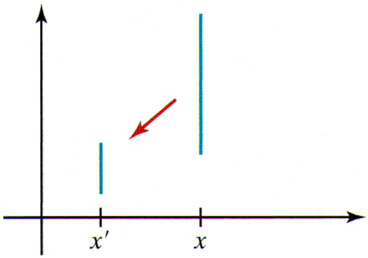


Figura: Escala de uma linha usando $s_x = s_y = 0.5$

Sumário

1 Introdução

2 Transformações Básicas

3 Coordenadas Homogêneas

4 Transformações Inversas

5 Transformações 2D Compostas

6 Outras Transformações 2D

Coordenadas Homogêneas

- As três transformações básicas podem ser expressas por

$$\mathbf{P'} = \mathbf{M_1} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{M_2}$$

- $\mathbf{M_1}$: matriz 2×2 com fatores multiplicativos
- $\mathbf{M_2}$: matriz coluna com termos para translação

- Para se aplicar uma sequencia de transformações, esse formato não ajuda
    - Eliminar a adição de matrizes permite escrever uma sequencia de transformações como uma multiplicação de matrizes

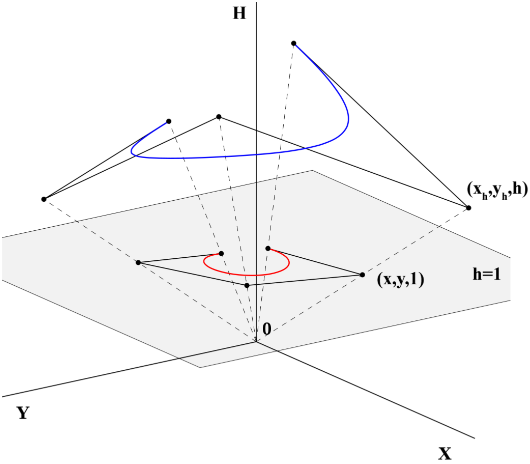
Coordenadas Homogêneas

- Isso pode ser feito expandindo-se o espaço **Cartesiano 2D** para o espaço de **Coordenadas Homogêneas 3D**

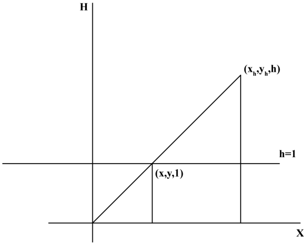
- Nessa expansão um ponto (x, y) é expandido para (x_h, y_h, h), onde h é o parâmetro homogêneo $(h \neq 0)$

- As coordenadas cartesianas são recuperados projetando as coordenadas homogêneas no plano $h = 1$

Coordenadas Homogêneas



Coordenadas Homogêneas



- Por semelhança de triângulos, a projeção do sistema homogêneo para o sistema Cartesiano se dá pela seguinte relação

$$x = \frac{x_h}{h}, \qquad y = \frac{y_h}{h}$$

- Nas coordenadas homogêneas, h pode ser qualquer valor diferente de zero, mas escolhemos $h = 1$ para a transformação ser mais simples

Coordenadas Homogêneas – Translação 2D

- Usando coordenadas homogêneas, as transformações são convertidas em multiplicações de matrizes

- A translação no espaço homogêneo é dada por

$$x'_h = 1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + t_x \cdot h$$

$$y'_h = 0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + t_y \cdot h$$

$$h = 0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h$$

Coordenadas Homogêneas – Translação 2D

- Definindo na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix}$$

- Voltando ao espaço Cartesiano

$$x'_h/h = (1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + t_x \cdot h)/h \Rightarrow x' = x + t_x$$

$$y'_h/h = (0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + t_y \cdot h)/h \Rightarrow y' = y + t_y$$

$$h/h = (0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h)/h \Rightarrow 1 = 1$$

Coordenadas Homogêneas – Translação 2D

- Por conveniência, com $h = 1$, definimos a translação no espaço Cartesiano como

$$\mathbf{P_h}' = \mathbf{T}(t_x, t_y) \cdot \mathbf{P_h}$$

$$\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas – Rotação 2D

- Uma rotação pode ser definida usando coordenadas homogêneas da seguinte forma

$$\mathbf{P_h}' = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{P_h}$$

$$\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas – Escala 2D

- Uma escala pode ser definida usando coordenadas homegêneas da seguinte forma

$$\mathbf{P_h}' = \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{P_h}$$

$$\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformando Vértices

- Exemplo de utilização de uma matriz de transformação

```
#version 150

in vec3 a_position;

void main(void)
{
  //criando uma matriz de escala 2D
  mat3 model = mat3(1.5, 0.0, 0.0, //primeira coluna
                    0.0, 1.5, 0.0, //segunda coluna
                    0.0, 0.0, 1.0); //terceira coluna

  //multiplicando a matriz de transformacao pelo vetor
  //em coordenadas homogeneas
  vec3 pos = model * vec3(a_position[0], a_position[1], 1.0);

  //convertendo as coordenadas homogeneas para euclideanas
  gl_Position = vec4(pos[0]/pos[2], pos[1]/pos[2], 0.0, 1.0);
}
```

Sumário

1. Introdução
2. Transformações Básicas
3. Coordenadas Homogêneas
4. Transformações Inversas
5. Transformações 2D Compostas
6. Outras Transformações 2D

Translação Inversa

- Para a translação, inverte-se o sinal das translações

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação Inversa

- Uma rotação inversa é obtida trocando o ângulo de rotação por seu negativo

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Isso rotaciona no sentido horário
- $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

Escala Inversa

- O inverso da escala é obtido trocando os parâmetros por seus inversos

$$\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sumário

1 Introdução

2 Transformações Básicas

3 Coordenadas Homogêneas

4 Transformações Inversas

5 Transformações 2D Compostas

6 Outras Transformações 2D

Introdução

- Usando representações matriciais homogêneas, uma sequencia de transformações pode ser representada como uma única matriz obtida a partir de multiplicações de matrizes de transformação

$$\begin{aligned}\mathbf{P'_h} &= \mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1} \cdot \mathbf{P_h} \\ &= (\mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1}) \cdot \mathbf{P} \\ &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{P_h}\end{aligned}$$

- A transformação é dada por $\mathbf{M}$ ao invés de $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$

Compondo Translações

- Para se compor duas translações podemos fazer

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} &= \mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \{\mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y}) \cdot \mathbf{P_h}\} \\
&= \{\mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y})\} \cdot \mathbf{P_h} \\
&= \mathbf{T}(t_{2_x} + t_{1_x}, t_{2_y} + t_{1_y}) \cdot \mathbf{P_h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} + t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} + t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Compondo Rotações

- Para se compor duas rotações podemos fazer

$$\begin{aligned} \mathbf{P'_h} = & \quad \mathbf{R}(\theta_2) \cdot \{\mathbf{R}(\theta_1) \cdot \mathbf{P_h}\} \\ = & \quad \{\mathbf{R}(\theta_2) \cdot \mathbf{R}(\theta_1)\} \cdot \mathbf{P_h} \\ = & \quad \mathbf{R}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \mathbf{P_h} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compondo Escalas

- Para se compor duas escalas podemos fazer

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} &= \mathbf{S}(s_{2_x}, s_{2_y}) \cdot \{\mathbf{S}(s_{1_x}, s_{1_y}) \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{h}}\} \\
&= \{\mathbf{S}(s_{2_x}, s_{2_y}) \cdot \mathbf{S}(s_{1_x}, s_{1_y})\} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{h}} \\
&= \mathbf{S}(s_{1_x} \cdot s_{2_x}, s_{1_y} \cdot s_{2_y}) \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{h}}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} s_{2_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1_x} \cdot s_{2_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1_y} \cdot s_{2_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 2D com Ponto de Rotação

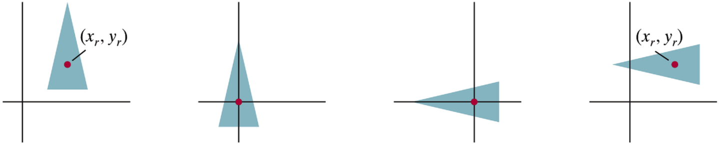
- Rotação com ponto de rotação é feita combinando-se múltiplas transformações
  - Movo o ponto de rotação para a origem
  - Executo a rotação
  - Movo o ponto de rotação para a posição inicial

$$\mathbf{R}(x_r, y_r, \theta) = \mathbf{T}(x_r, y_r) \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{T}(-x_r, -y_r)$$

Rotação 2D com Ponto de Rotação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & x_r - x_r\cos\theta + y_r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & y_r - y_r\cos\theta - x_r\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 2D com Ponto de Rotação



(a) Original Position of Object and Pivot Point

(b) Translation of Object so that Pivot Point (x_r, y_r) is at Origin

(c) Rotation about Origin

(d) Translation of Object so that the Pivot Point is Returned to Position (x_r, y_r)

Escala 2D com Ponto Fixo

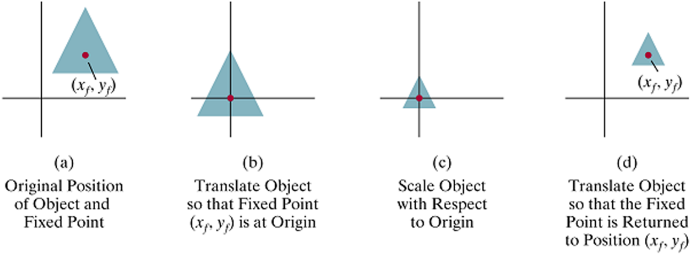
- Escala com ponto fixo é feita combinando-se múltiplas transformações
  - Movo o ponto fixo para a origem
  - Executo a escala
  - Movo o ponto fixo para sua posição original

$$\mathbf{S}(x_f, y_f, s_x, s_y) = \mathbf{T}(x_f, y_f) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{T}(-x_f, -y_f)$$

Escala 2D com Ponto Fixo

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_f(1-s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Escala 2D com Ponto Fixo



Propriedade da Concatenação de Matrizes

- Multiplicação de matriz é associativa

$$\mathbf{M_3} \cdot \mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1} = (\mathbf{M_3} \cdot \mathbf{M_2}) \cdot \mathbf{M_1} = \mathbf{M_3} \cdot (\mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1})$$

- Multiplicação nos dois sentidos é possível, da esquerda para a direita e da direita para a esquerda
  - **Pré-multiplicação**: da esquerda para a direita – as transformação são especificadas na ordem em que são aplicadas ($\mathbf{M_1} \rightarrow \mathbf{M_2} \rightarrow \mathbf{M_3}$)
  - **Pós-multiplicação**: da direita para a esquerda – as transformação são especificadas na ordem inversa em que são aplicadas ($\mathbf{M_3} \rightarrow \mathbf{M_2} \rightarrow \mathbf{M_1}$)
    - OpenGL usa pós-multiplicação

Propriedade da Concatenação de Matrizes

- Multiplicação de matrizes não é comutativa $\mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1} \neq \mathbf{M_1} \cdot \mathbf{M_2}$

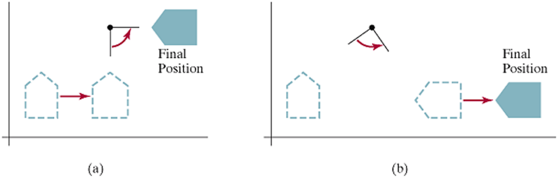


Figura: (a) primeiro o objeto é transladado depois rotacionado em 45^0 (b) primeiro o objeto é rotacionado em 45^0, depois transladado.

Sumário

1 Introdução

2 Transformações Básicas

3 Coordenadas Homogêneas

4 Transformações Inversas

5 Transformações 2D Compostas

6 Outras Transformações 2D

Reflexão

- Espelha-se as coordenadas de um objeto relativo a um eixo de reflexão, rotacionando em um ângulo de 180^0

- Reflexão com relação ao eixo x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão

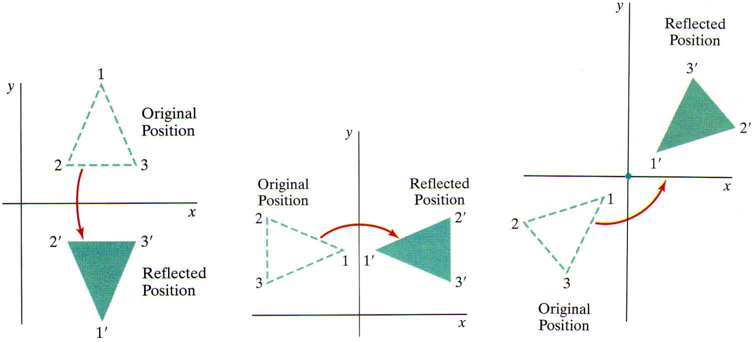
- Reflexão com relação ao eixo y

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reflexão em x e y

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão


y
1
Original
Position
2
3
x
2′
3′
Reflected
Position
1′
y
Original
Position
Reflected
Position
2
1
3
2′
1′
3′
x
y
Reflected
Position
3′
2′
1′
x
1
2
3
Original
Position

Cisalhamento

- Distorce o formato do objeto na direção de x ou y

- Cisalhamento na direção de x

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- O que transforma as coordenadas como

$$x' = x + sh_x \cdot y$$

$$y' = y$$

Cisalhamento

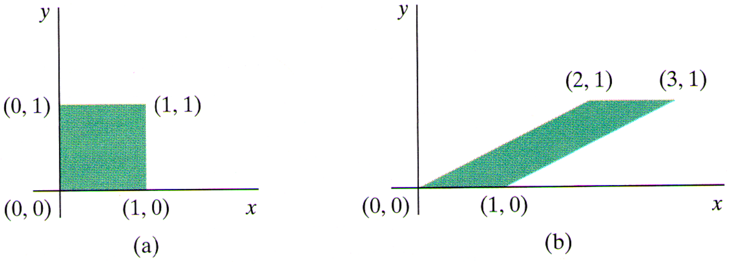


Figura: Convertendo um quadrado em um paralelogramo usando $sh_x = 2$.

Bibliografia

- **Básica:**
  - Hearn, D. Baker, M. P. Computer Graphics with OpenGL, Prentice Hall, 2004. **(livro texto)**
  - Neider, J. Davis, T. Woo, M. OpenGL programming guide, 2007.
  - Angel, E. Interactive computer graphics: a top-down approach with OpenGL, Addison Wesley, 2000.
  - Foley, J. et. al. Introduction to Computer Graphics, Addison-Wesley, 1993.

Bibliografia

- **Complementar:**
  - Computer Graphics Comes of Age: An Interview with Andries van Dam. CACM, vol. 27, no. 7. 1982
  - The RenderMan – And the Oscar Goes to... IEEE Spectrum, vol. 38, no. 4, abril de 2001.
  - Material do ano passado: `https://sites.google.com/site/computacaograficaicmc2017t2/`
  - Apostilas antigas da disciplina Computação Gráfica
    - `http://www.gbdi.icmc.usp.br/material?q=system/files/apostilas.pdf`
  - Curso da ACM SIGGRAPH (on line)