ACH2043
INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 5

Expressões Regulares

Profa. Ariane Machado Lima
ariane.machado@usp.br

1.3 - Expressões regulares

Expressões regulares

- Uma linguagem é um conjunto de cadeias
- Um conjunto de cadeias pode ser descrito por uma expressão
- Ex: como você escreve no campo “Pesquisar” do computador que você quer localizar todos os arquivos que começam com “ACH2043” e terminam com “.pdf”?

Expressões regulares

- Uma linguagem é um conjunto de cadeias
- Um conjunto de cadeias pode ser descrito por uma expressão
- Ex: como você escreve no campo “Pesquisar” do computador que você quer localizar todos os arquivos que começam com “ACH2043” e terminam com “.pdf”?

ACH2043*.pdf

Expressões regulares

- Uma linguagem é um conjunto de cadeias
- Um conjunto de cadeias pode ser descrito por uma expressão
- Ex: como você escreve no campo “Pesquisar” do computador que você quer localizar todos os arquivos que começam com “ACH2043” e terminam com “.pdf”?

  ACH2043*.pdf

- Isso é uma expressão que descreve um conjunto de cadeias

Expressões regulares

- Exemplo: o que essa expressão descreve?

$(\{0\} \cup \{1\}) \circ 0^*$

Expressões regulares

- Exemplo: o que essa expressão descreve?

  ({0} U {1}) ° 0*

  Cadeias que comecem com 0 ou 1e terminem em zero ou mais 0's

Expressões regulares

- Exemplo: o que essa expressão descreve?

  ({0} U {1}) ° 0*

  Cadeias que comecem com 0 ou 1e terminem em zero ou mais 0's

- Simplificação da notação:

  (0 U 1)0*

Expressões regulares

- Regras de precedência (da maior para a menor):

  Estrela

  Concatenação

  União

- Outros exemplos:
  - (0 U 1)*
  - 0Σ*
  - 0Σ* U Σ*1

Expressões regulares

DEFINIÇÃO 1.52

Digamos que R é uma ***expressão regular*** se R for

1. a para algum a no alfabeto Σ,
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares,
5. $(R_1 \circ R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares, ou
6. (R_1^*), onde R_1 é uma expressão regular.

Nos itens 1 e 2, as expressões regulares a e ε representam as linguagens $\{a\}$ e $\{\varepsilon\}$, respectivamente. No item 3, a expressão regular $\emptyset$ representa a linguagem vazia. Nos itens 4, 5 e 6, as expressões representam as linguagens obtidas tomando-se a união ou concatenação das linguagens R_1 e R_2, ou a estrela da linguagem R_1, respectivamente.

Expressões regulares (ER)

- Abreviações:

  R^+ = RR* (concatenação de 1 ou mais R's)

  R^k = R.....R (concatenação de k R's)

- Se R é uma ER, dizemos que L(R) é a linguagem descrita por R

Exemplos de ERs

- $0^*10^* =$
- $\Sigma^*1\Sigma^* =$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^* =$
- $0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1 =$

- $1^*\emptyset =$
- $\emptyset^* =$

Exemplos de ERs

- $0^*10^* = \{w \mid w$ contém um ÚNICO $1\}$
- $\Sigma^*1\Sigma^* =$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^* =$
- $0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1 =$

- $1^*\emptyset =$
- $\emptyset^* =$

Exemplos de ERs

- $0^*10^* = \{w \mid w$ contém um ÚNICO $1\}$
- $\Sigma^*1\Sigma^* = \{w \mid w$ contém PELO MENOS UM $1\}$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^* =$
- $0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1 =$

- $1^*\emptyset =$
- $\emptyset^* =$

Exemplos de ERs

- $0^*10^* = \{w \mid w$ contém um ÚNICO $1\}$
- $\Sigma^*1\Sigma^* = \{w \mid w$ contém PELO MENOS UM $1\}$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^* = \{w \mid$ o comprimento de w é múltiplo de $3\}$
- $0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1 =$

- $1^*\emptyset =$
- $\emptyset^* =$

Exemplos de ERs

- 0^*10^* = {w | w contém um ÚNICO 1}
- $\Sigma^*1\Sigma^*$ = {w | w contém PELO MENOS UM 1}
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^*$ = {w | o comprimento de w é múltiplo de 3}
- $0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1$ = {w | w começa e termina com o mesmo símbolo}
- $1^*\emptyset$ =
- $\emptyset^*$ =

Exemplos de ERs

- $0^*10^* = \{w \mid w$ contém um ÚNICO $1\}$
- $\Sigma^*1\Sigma^* = \{w \mid w$ contém PELO MENOS UM $1\}$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^* = \{w \mid$ o comprimento de w é múltiplo de $3\}$
- $0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1 = \{w \mid w$ começa e termina com o mesmo símbolo$\}$
- $1^*\emptyset = \emptyset$ (concatenação com $\emptyset$ produz $\emptyset$)
- $\emptyset^* =$

Exemplos de ERs

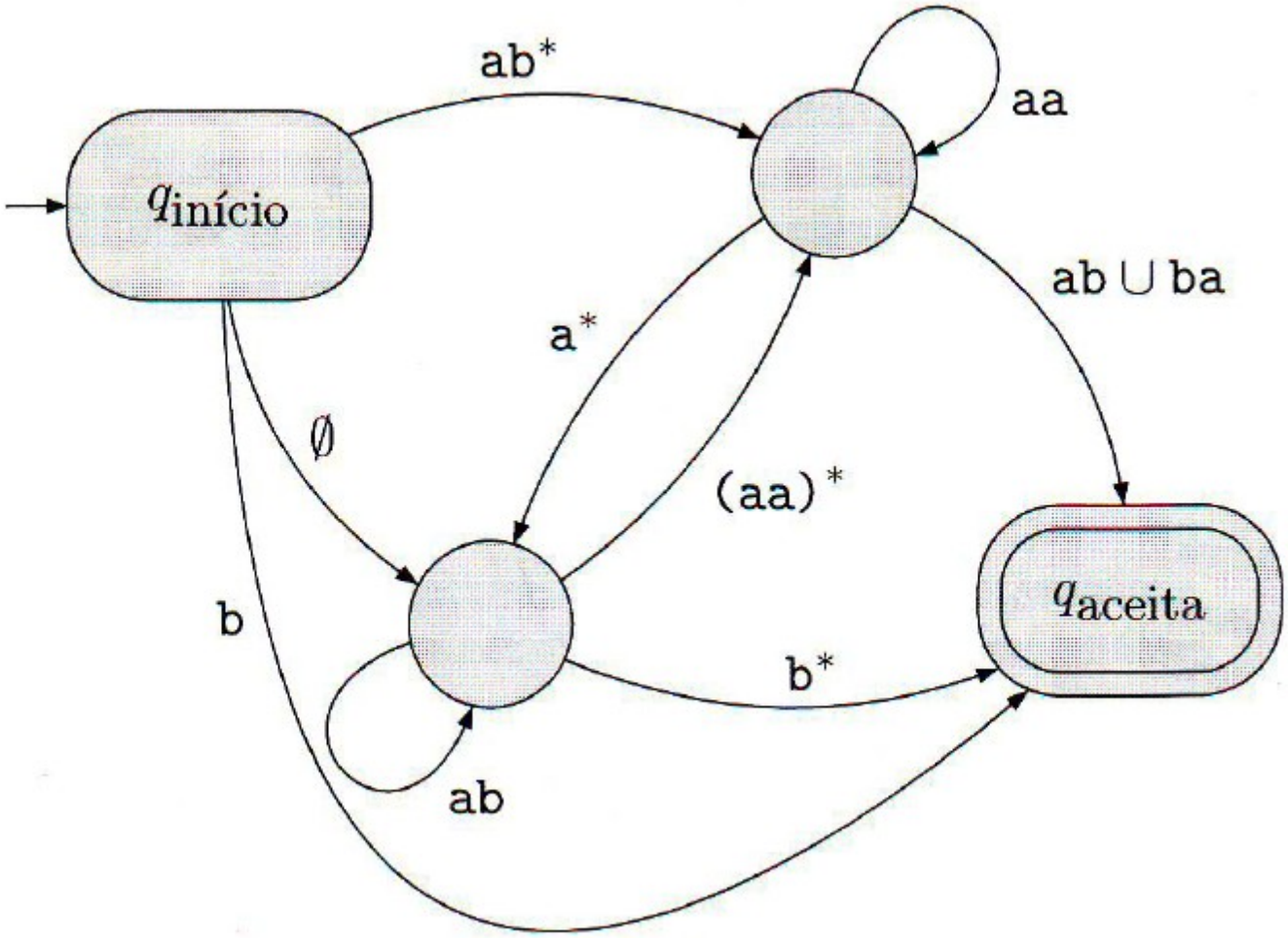
- $0^*10^* = \{w \mid w$ contém um ÚNICO $1\}$
- $\Sigma^*1\Sigma^* = \{w \mid w$ contém PELO MENOS UM $1\}$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^* = \{w \mid$ o comprimento de w é múltiplo de $3\}$
- $0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1 = \{w \mid w$ começa e termina com o mesmo símbolo$\}$
- $1^*\emptyset = \emptyset$ (concatenação com $\emptyset$ produz $\emptyset$)
- $\emptyset^* = \{ \varepsilon \}$ (operador * concatena qualquer número de cadeias para obter uma cadeia no resultado)

ERs: igualdades válidas

- $R \cup \emptyset = R$
- $R \circ \varepsilon = R$

Autômatos Finitos Não-Determinísticos Generalizados (AFNGs)

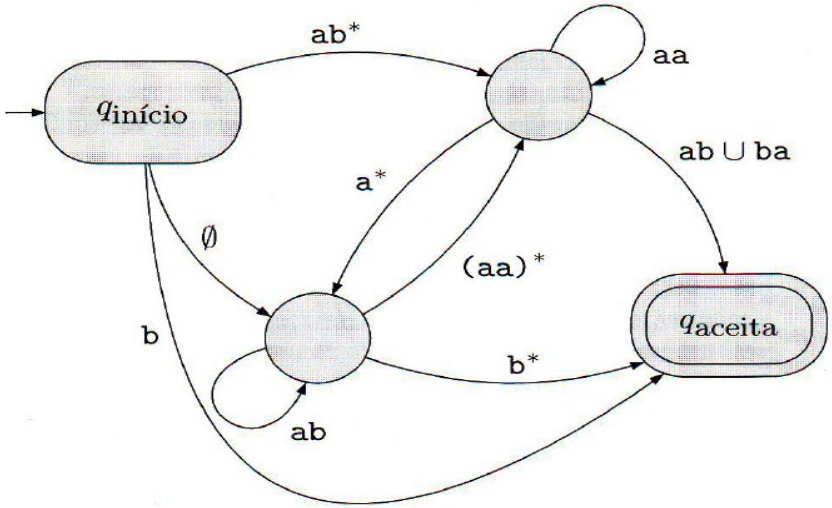
Rótulos das arestas podem ser expressões regulares



Autômatos Finitos Não-Determinísticos Generalizados (AFNGs)

Por conveniência, requeremos que os AFNGs tenham sempre um formato especial que atenda às seguintes condições:

- O estado inicial tem setas de transição saindo para todos os outros estados, mas nenhuma seta chegando de qualquer outro estado.
- Existe apenas um estado de aceitação, e ele tem setas chegando de todos os outros estados, mas nenhuma seta saindo para qualquer outro estado. Além disso, o estado de aceitação não é o mesmo que o estado inicial.
- Com exceção dos estados inicial e de aceitação, uma seta sai de cada estado para todos os outros e também de cada estado para ele mesmo.



Autômatos Finitos Não-Determinísticos Generalizados (AFNGs)

DEFINIÇÃO 1.64

Um ***autômato finito não-determinístico generalizado*** é uma 5-upla,
$(Q, \Sigma, \delta, q_{\text{início}}, q_{\text{aceita}})$, onde

1. Q é o conjunto finito de estados,
2. Σ é o alfabeto de entrada,
3. $\delta\colon (Q - \{q_{\text{aceita}}\}) \times (Q - \{q_{\text{início}}\}) \longrightarrow \mathcal{R}$ é a função de transição,
4. $q_{\text{início}}$ é o estado inicial, e
5. q_{aceita} é o estado de aceitação.

Conjunto de todas as expressões regulares possíveis sobre o alfabeto

Autômatos Finitos Não-Determinísticos Generalizados (AFNGs)

Um AFNG aceita uma cadeia w em Σ^* se $w = w_1 w_2 \cdots w_k$, onde cada w_i está em Σ^*, e existe uma seqüência de estados $q_0, q_1, \ldots, q_k$ tal que

Autômatos Finitos Não-Determinísticos Generalizados (AFNGs)

Um AFNG aceita uma cadeia w em Σ^* se $w = w_1 w_2 \cdots w_k$, onde cada w_i está em Σ^*, e existe uma seqüência de estados $q_0, q_1, \ldots, q_k$ tal que

1. $q_0 = q_{\text{início}}$ é o estado inicial,
2. $q_k = q_{\text{aceita}}$ é o estado de aceitação, e
3. para cada i, temos $w_i \in L(R_i)$, onde $R_i = \delta(q_{i-1}, q_i)$; em outras palavras, R_i é a expressão sobre a seta de q_{i-1} a q_i.

Exp. regulares e autômatos finitos

- Qual a relação entre linguagens descritas por expressões regulares e linguagens reconhecidas por autômatos finitos?

Exp. regulares e autômatos finitos

- Qual a relação entre linguagens descritas por expressões regulares e linguagens reconhecidas por autômatos finitos?
    - Geram a mesma linguagem
    - Expressões regulares são equivalentes a autômatos finitos

Equivalência de ERs e AFs

TEOREMA 1.54

Uma linguagem é regular se e somente se alguma expressão regular a descreve.

Equivalência de ERs e AFs – Parte 1 (a volta do “se e somente se”)

LEMA 1.55

Se uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular.

Prova: vamos construir um AFN que reconheça L(R), e portanto L(R) será regular

Equivalência de ERs e AFs – Parte 1

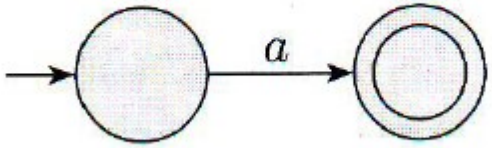
Digamos que R é uma ***expressão regular*** se R for

1. a para algum a no alfabeto Σ,
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares,
5. $(R_1 \circ R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares, ou
6. (R_1^*), onde R_1 é uma expressão regular.

Equivalência de ERs e AFs – Parte 1

Digamos que R é uma ***expressão regular*** se R for

1. a para algum a no alfabeto Σ,
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares,
5. $(R_1 \circ R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares, ou
6. (R_1^*), onde R_1 é uma expressão regular.



Equivalência de ERs e AFs – Parte 1

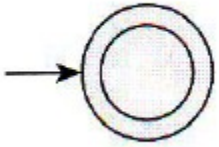
Digamos que R é uma ***expressão regular*** se R for

1. a para algum a no alfabeto Σ,
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares,
5. $(R_1 \circ R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares, ou
6. (R_1^*), onde R_1 é uma expressão regular.

Equivalência de ERs e AFs – Parte 1

Digamos que R é uma ***expressão regular*** se R for

1. a para algum a no alfabeto Σ,
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares,
5. $(R_1 \circ R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares, ou
6. (R_1^*), onde R_1 é uma expressão regular.



Equivalência de ERs e AFs – Parte 1

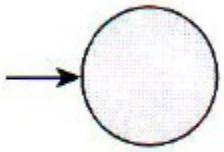
Digamos que R é uma ***expressão regular*** se R for

1. a para algum a no alfabeto Σ,
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares,
5. $(R_1 \circ R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares, ou
6. (R_1^*), onde R_1 é uma expressão regular.

Equivalência de ERs e AFs – Parte 1

Digamos que R é uma ***expressão regular*** se R for

1. a para algum a no alfabeto Σ,
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares,
5. $(R_1 \circ R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares, ou
6. (R_1^*), onde R_1 é uma expressão regular.



Equivalência de ERs e AFs – Parte 1

Digamos que R é uma ***expressão regular*** se R for

1. a para algum a no alfabeto Σ,
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares,
5. $(R_1 \circ R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares, ou
6. (R_1^*), onde R_1 é uma expressão regular.

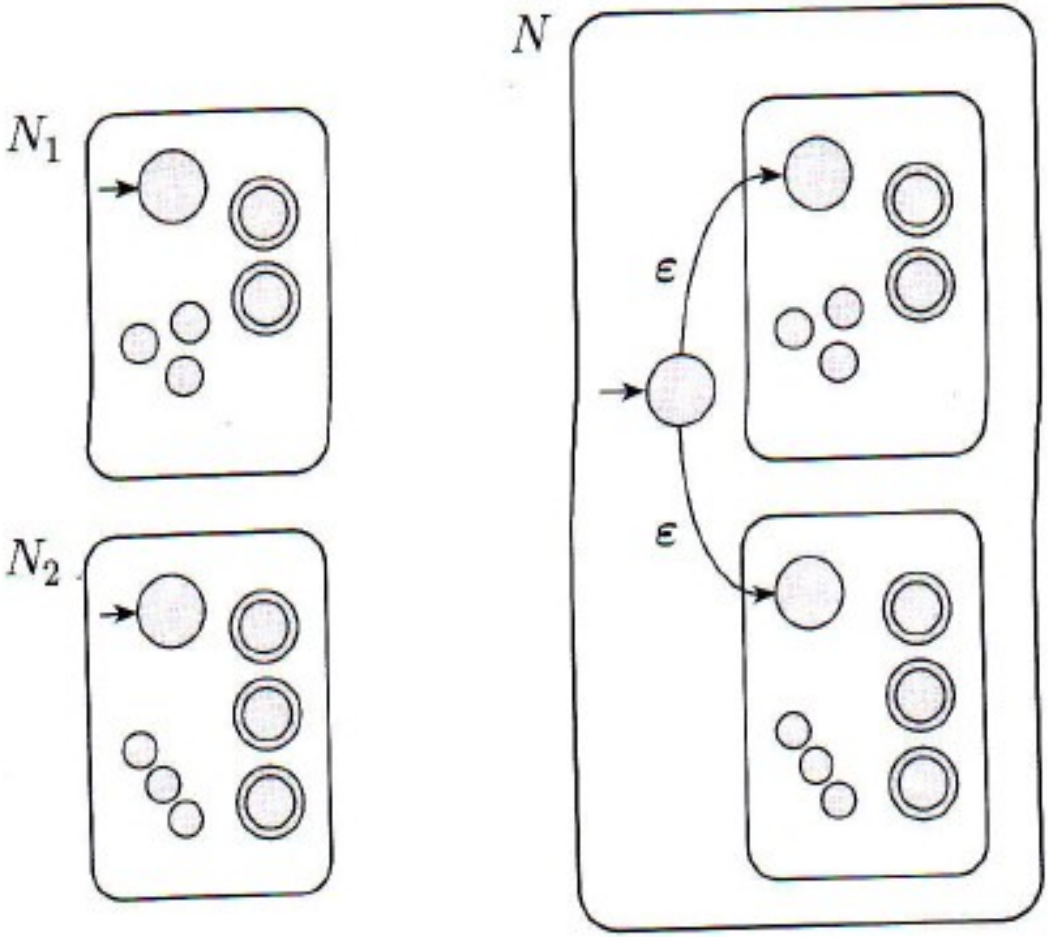
Equivalência de ERs e AFs – Parte 1

Digamos que R é uma ***expressão regular*** se R for

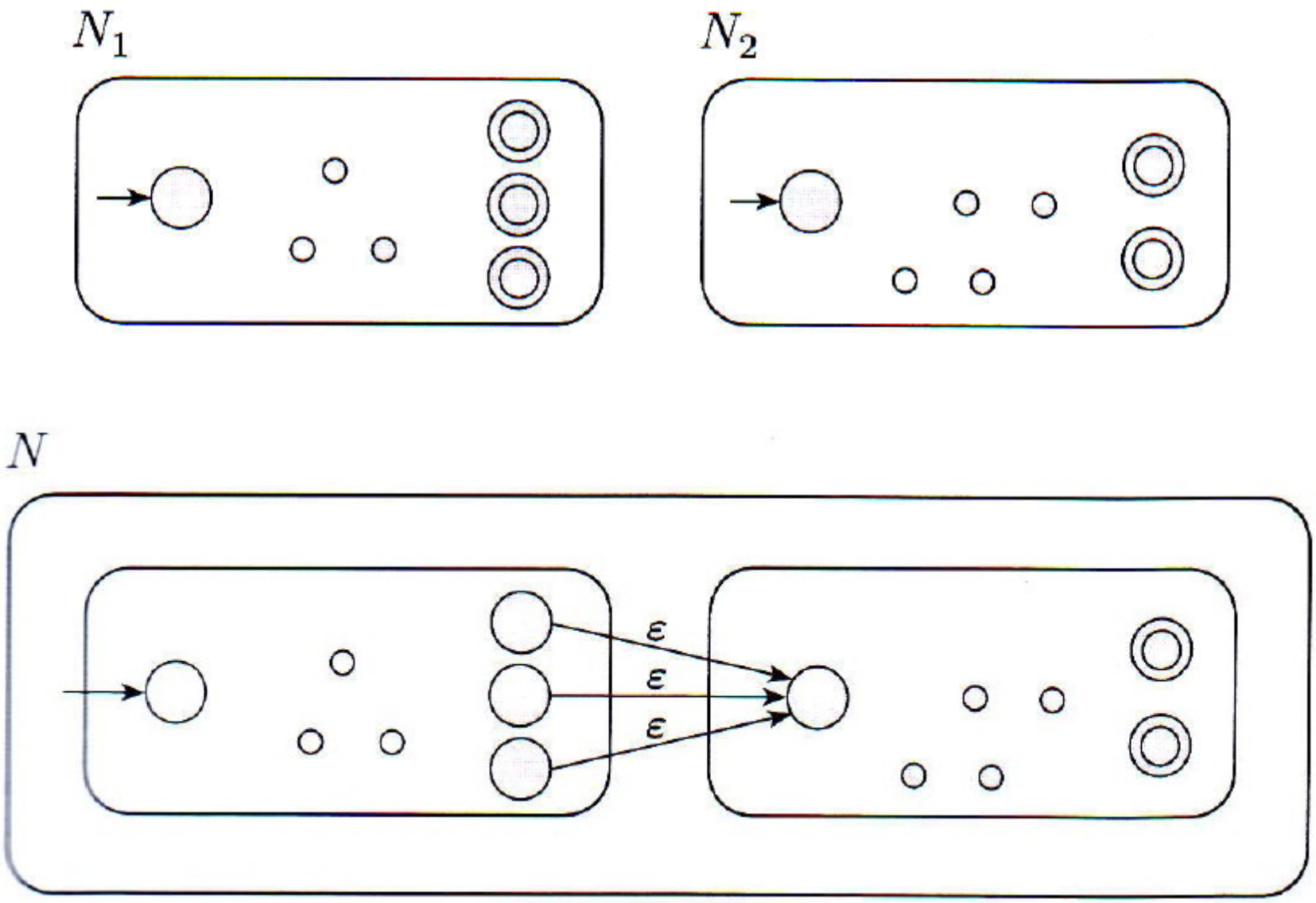
1. a para algum a no alfabeto Σ,
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares,
5. $(R_1 \circ R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares, ou
6. (R_1^*), onde R_1 é uma expressão regular.

Provas de fechamento sob operações de união, concatenação e estrela

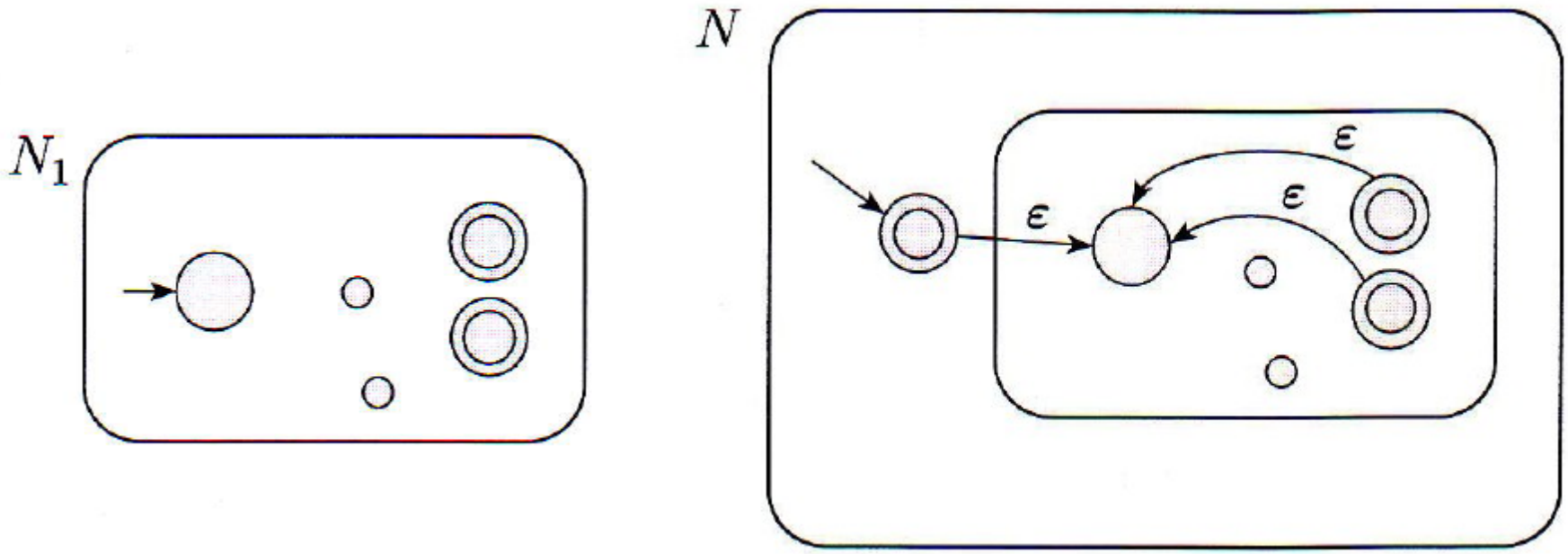
AFN união de dois AFNs



AFN concatenação de 2 AFNs

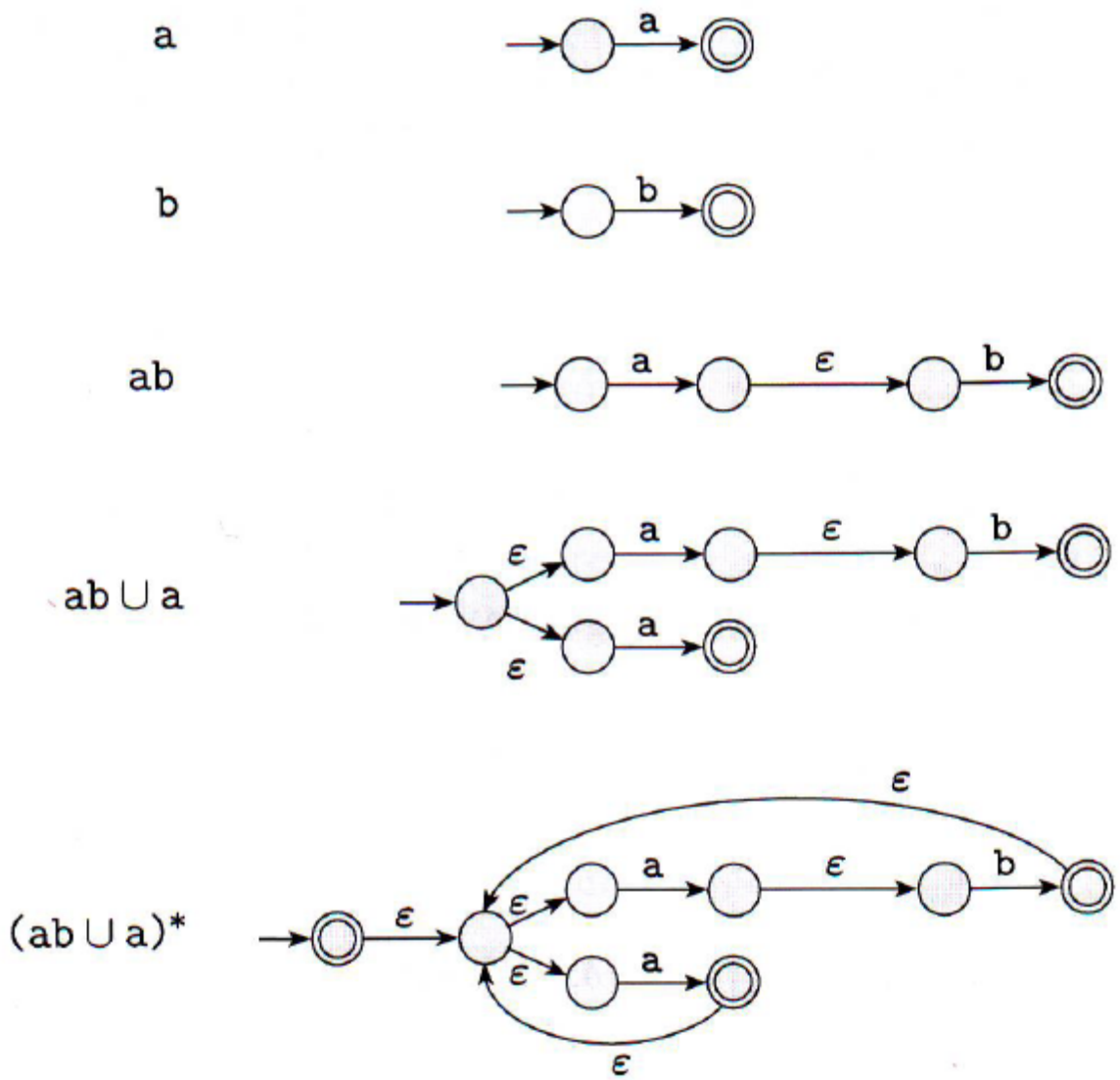


AFN estrela de outro AFN



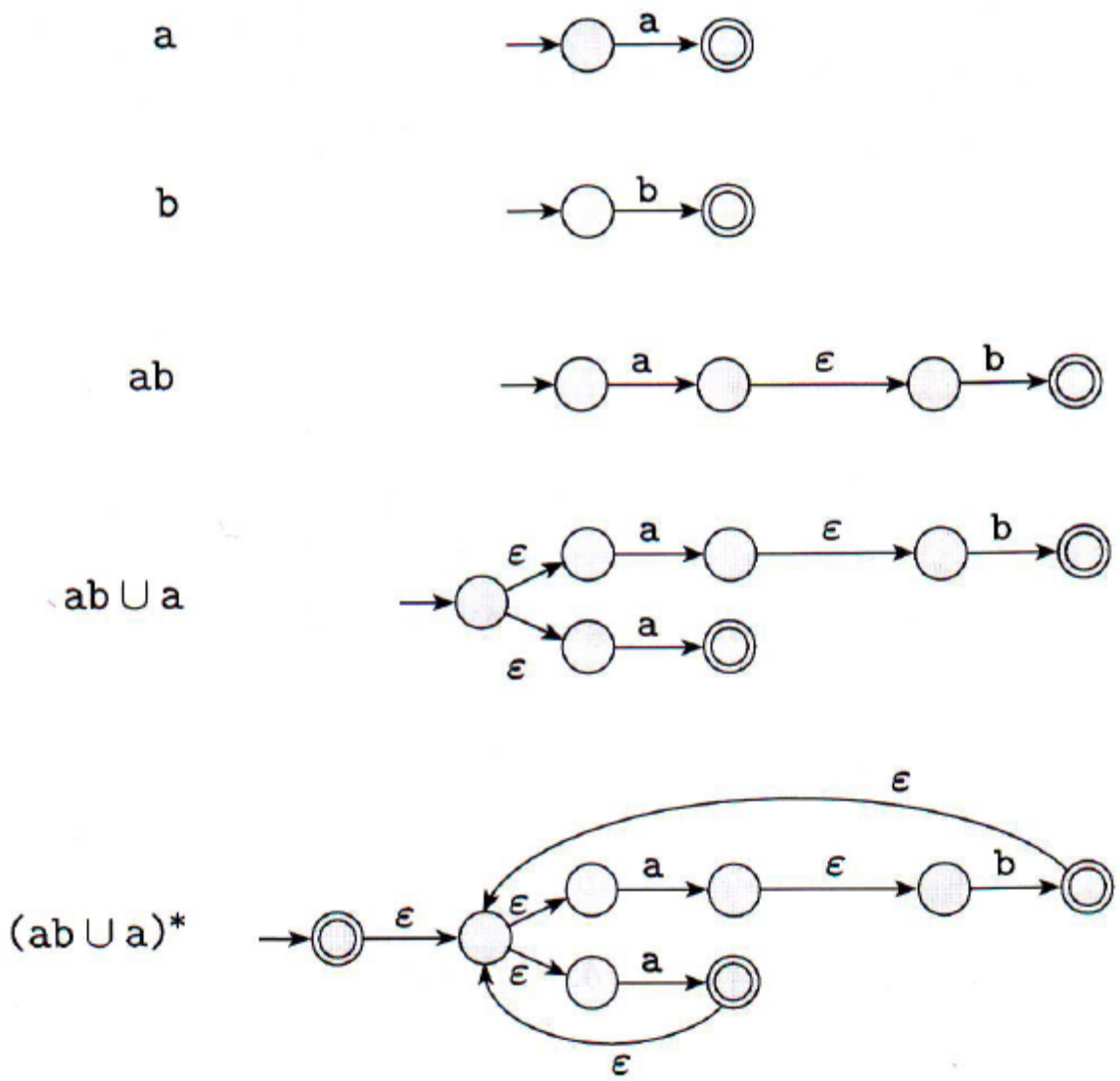
Equivalência de ERs e AFs – Parte 1

- Observação: essa prova fornece um mecanismo para construção de AFNs a partir de ERs.
- Ex: (ab U a)*
-
-



Equivalência de ERs e AFs – Parte 1

- Observação: essa prova fornece um mecanismo para construção de AFNs a partir de ERs.
- Ex: (ab U a)*
- O AFN resultante não necessariamente possui o número mínimo de estados
- Como seria o AFN com apenas 2 estados para essa expressão?



Equivalência de ERs e AFs – Parte 2 (a ida do “se e somente se”

LEMA 1.60

Se uma linguagem é regular, então ela é descrita por uma expressão regular.

Ideia da Prova: se L é regular então um existe um AFD que a descreve. Se dado um AFD eu sempre conseguir escrever uma ER equivalente, então está feito (está provado).

Equivalência de ERs e AFs – Parte 2

- Vamos:

  1) mostrar como converter AFDs em AFNGs

  2) mostrar como converter AFNGs em ERs

Equivalência de ERs e AFs – Parte 2

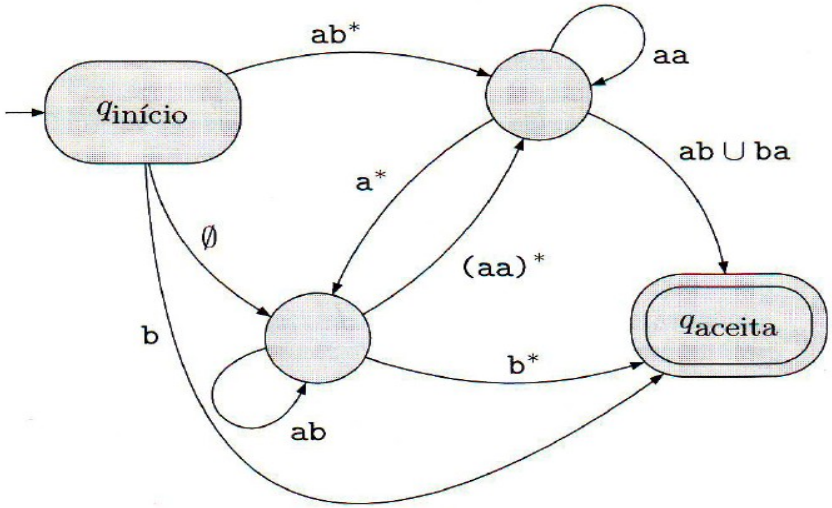
Conversão de AFD em AFNG

- O que eu preciso fazer no AFD para convertê-lo em AFNG?
- Lembrando...

Autômatos Finitos Não-Determinísticos Generalizados (AFNGs)

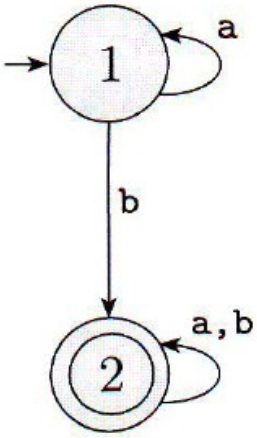
Por conveniência, requeremos que os AFNGs tenham sempre um formato especial que atenda às seguintes condições:

- O estado inicial tem setas de transição saindo para todos os outros estados, mas nenhuma seta chegando de qualquer outro estado.
- Existe apenas um estado de aceitação, e ele tem setas chegando de todos os outros estados, mas nenhuma seta saindo para qualquer outro estado. Além disso, o estado de aceitação não é o mesmo que o estado inicial.
- Com exceção dos estados inicial e de aceitação, uma seta sai de cada estado para todos os outros e também de cada estado para ele mesmo.



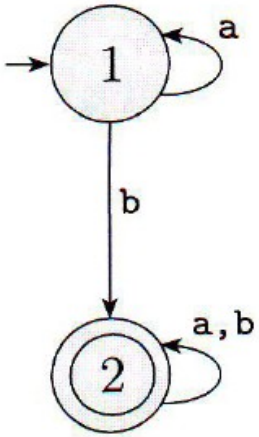
Exemplo

Converta esse AFD em AFNG:

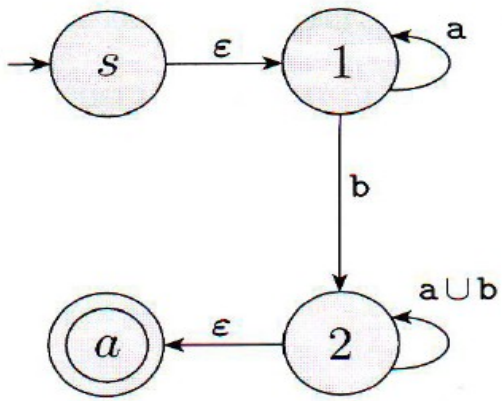


(a)

Exemplo (AFD → AFNG)

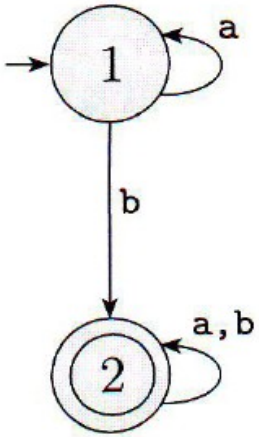


(a)

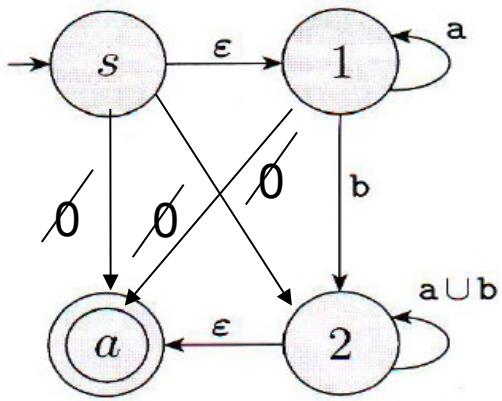


(b)

Exemplo (AFD → AFNG)

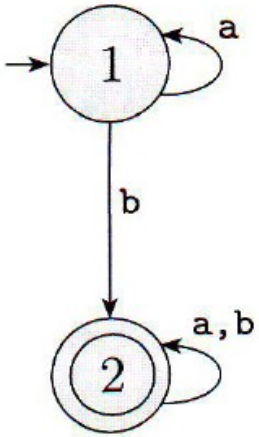


(a)

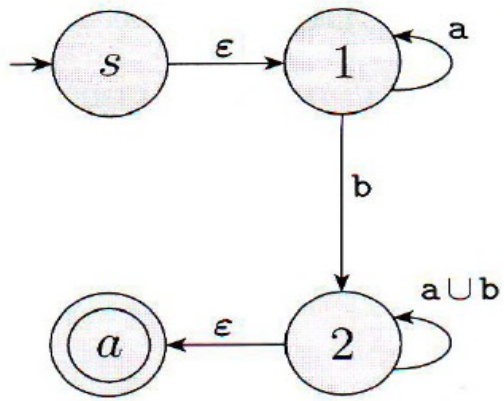


(b)

Exemplo (AFD → AFNG)



(a)



(b)

Equivalência de ERs e AFs – Parte 2

Conversão de AFD em AFNG

- Novo estado inicial apontando para o antigo com uma seta ε
- Novo estado final com setas ε chegando dos estados finais antigos (que deixam de ser finais)
- Setas com múltiplos rótulos (ou múltiplas setas entre 2 estados na mesma direção) viram uma seta com a união dos rótulos
- Setas com rótulo Ø onde não havia setas (e deveria ter no AFNG)