



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PME3201 - Laboratório de Simulações Numéricas

Carrinho em Plano Inclinado com Arrasto Aerodinâmico

Autor: Prof. Dr. Walter Ponge-Ferreira
E-mail: ponge@usp.br

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica - PME
Av. Prof. Mello Moraes, 2231
São Paulo SP 05508-970 BRASIL
Tel.: 55 (0)11 3091-9677
Cel: 55 (0)11 97244-0900

São Paulo
13 de agosto de 2018

2º Exercício - E2

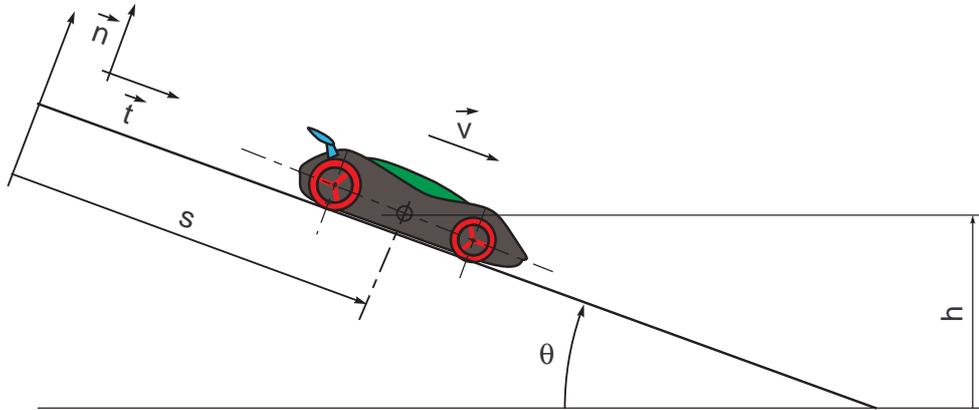


Figura 1: Carrinho em plano inclinado

Deseja-se modelar o movimento de um carrinho *HotWheels*® descendo uma pista inclinada plana com atrito, conforme mostrado na figura 1. O carrinho é lançado com velocidade inicial v_0 de uma altura H_0 . O ângulo de inclinação do plano vale θ e o atrito seco entre as rodas e o piso vale μ_S . A aceleração da gravidade em São Paulo vale $g = 9,78 \text{ m/s}^2$. A coordenada de posição do carrinho na direção tangência medida à partir do ponto de altura H_0 vale $s(t)$.

Podemos considerar três forças de resistência ao movimento:

- Força viscosa
- Resistência ao rolamento
- Força de arrasto aerodinâmico

Os principais parâmetros do carrinho, mostrados na figura 2, são: massa m , momento de inércia J e coeficiente de arrasto C_D do carrinho; distância entre eixos b , posição do centro de massa em relação ao eixo dianteiro a ; raios R_1 e R_2 das rodas de massa m_1 e m_2 e momentos de inércia J_1 e J_2 ; coeficiente de atrito de *rolamento* μ_R do rolamento da roda sobre a pista; raio do cubo da roda r_0 com atrito seco μ_0 no mancal de deslizamento.

1 Questão

Considere agora somente a força de arrasto aerodinâmica.

Para valores elevados do Número de Reynolds a resistência do ar pode ser simulada por uma força aerodinâmica F_D , dada por:

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2} \rho_{ar} C_D A v^2 \hat{v} \quad (1)$$

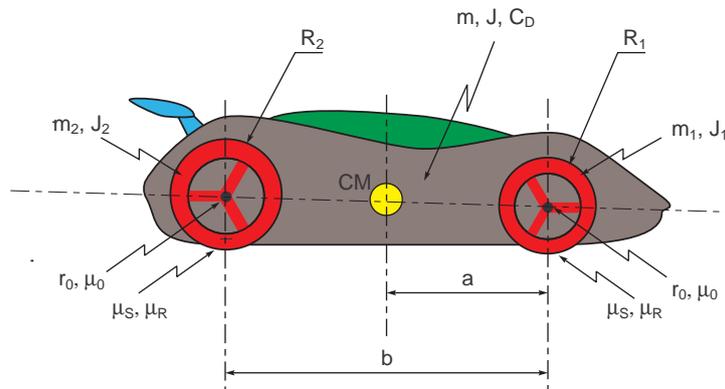


Figura 2: Parâmetros do Carrinho

onde $\rho_{ar} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ é a densidade do ar ao nível do mar, A a área da seção transversal característica do corpo, C_D o coeficiente de arrasto e v a velocidade do carrinho. O versor \hat{v} é dado por:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$$

O coeficiente de arrasto C_D é um coeficiente adimensional empírico específico para cada tipo de veículo. Os valores típicos de coeficiente de arrasto para veículos variam de 0,15 a 0,50.

Pede-se:

- Desenhar o diagrama de corpo livre do corpo do carrinho.
- Determinar a equação diferencial do movimento do carrinho.
- Medir e estimar os parâmetros do problema para um carrinho real; considere que alguns parâmetros não são necessários, conforme o modelo do carrinho e condições reais do movimento.
- Esboçar o gráfico da relação $\frac{dv}{ds}$ no plano de fase.
- Obter analiticamente a solução geral da equação diferencial.
- Desenhar o gráfico da velocidade e da posição do carrinho no tempo, para as seguintes condições iniciais, $s(0) = 0,0 \text{ m}$ e $v(0) = 0,0 \text{ m/s}$.
- Desenhar o gráfico da velocidade e da posição do carrinho no tempo, para as seguintes condições iniciais, $s(0) = 0,0 \text{ m}$ e $v(0) = 1,0 \text{ m/s}$.
- Desenhar o gráfico da velocidade e da posição do carrinho no tempo, para as seguintes condições iniciais, $s(0) = 0,0 \text{ m}$ e $v(0) = -1,0 \text{ m/s}$.
- Interpretar as soluções da equação diferencial para as condições iniciais dadas.

2 Questão

Resolva o problema anterior por integração numérica.

Pede-se:

- a) Escreva um algoritmo para integração numérica pelo Método de Euler explícito.
- b) Escreva um algoritmo para integração numérica pelo Método de Euler implícito.
- c) Escreva um algoritmo para integração numérica pelo Método de Heun.
- d) Escreva um algoritmo para integração numérica pelo Método de Euler melhorado explícito (método do ponto médio).
- e) Escreva um algoritmo para integração numérica pelo Método de Runge-Kutta de segunda ordem.
- f) Realize a integração numérica pelos cinco métodos para condição inicial $v(0) = 1,0$ m/s, utilizando um passo de integração conveniente.
- g) Compare e interprete os resultados.

3 Questão

Repita a questão anterior utilizando os recursos de integração numérica do Scilab, i.e., uso da função *ode()* em linha de comando ou a solução gráfica no *Xcos*.

Pede-se:

- a) Solucione o problema com o Método de Adams.
- b) Solucione o problema com o Método de Runge-Kutta de ordem 4 (RK4).
- c) Solucione o problema com o Método de Runge-Kutta de Fehlberg de ordem 4 e 5 (RKF45).
- d) Realize a integração numérica pelos três métodos para condição inicial $v(0) = 1,0$ m/s, utilizando um passo de integração conveniente para cada método.
- e) Compare a solução numérica obtida anteriormente com a solução obtida com recurso pronto do Scilab.
- f) Para um mesmo número de instantes de tempo $n = 500$, compare a diferença entre as soluções e o tempo de processamento usando as funções *tic()* e *toc()* do Scilab para medir o tempo total de integração.

4 Questão

Um aspecto importante na utilização dos métodos de simulação é a verificação do modelo numérico, i.e., avaliar se os resultados da solução numérica são compatíveis com o modelo matemático (solução analítica), que compreende também avaliar os erros ou incertezas de simulação.

Estude os erros numéricos das soluções do movimento do exercício anterior simuladas pelos diversos métodos de integração numérica

Erros de truncamento ocorrem quando a solução numérica adota uma estratégia que não considera os termos superiores da decomposição da solução em Série de Taylor, i.e., quando as derivadas de ordem superior não são consideradas na solução.

Quando a solução verdadeira da equação diferencial é conhecida, pode-se avaliar o erro de truncamento real da solução por integração numérica pela seguinte equação:

$$\epsilon_t = \frac{\text{valor verdadeiro} - \text{valor aproximado}}{\text{valor verdadeiro}} \quad (2)$$

que permite avaliar a discrepância entre a solução numérica aproximada e a solução analítica verdadeira.

Entretanto, em geral a solução analítica verdadeira não é conhecida, nesse caso pode-se avaliar o erro de truncamento pelo erro de aproximação dado por:

$$\epsilon_a = \frac{\text{aproximação atual} - \text{aproximação prévia}}{\text{aproximação atual}} \quad (3)$$

Além disso, como o computador registra os valores em tamanhos de memória com número finito de bits, ocorrem erros de arredondamento ϵ_r . Esses erros são amplificados pela composição dos erros em múltiplas operações sucessivas, principalmente quando valores de ordem de grandeza muito diferentes são combinados ou pelo cancelamento de valores próximos na subtração ou divisão. O erro total de arredondamento cresce à medida que o número de operações de ponto flutuante aumenta.

O erro numérico total é dado pela sobreposição dos dois efeitos, i.e., erro de truncamento e erro de arredondamento.

Pede-se:

- Avalie a ordem de grandeza do erro de truncamento de cada um dos métodos utilizados, i.e., $O(h^i)$; considere o erro de truncamento local (em um passo de integração) e o erro de truncamento global (em n passos de integração).
- Para os 10 primeiros passos de integração no intervalo de $t_0 = 0,0$ s a $t_{final} = 20,0$ s, determine os erros de truncamento da solução pelos diversos métodos utilizados.
- Para os instantes $t_1 = \tau$, $t_2 = 10 * \tau$ e $t_3 = 20 * \tau$, onde τ é a constante de tempo do sistema de primeira ordem, avalie o erro total (truncamento e arredondamento) para passos de integração cada vez mais refinados; comece por $h_0 = 0,1$ s e continue refinando a solução dividindo pela metade os passos até $h_n = \frac{h_0}{2^n}$, com $n = 32$.
- Desenhe os erros numéricos em função do tamanho dos passos em um gráfico bi-log e estime a ordem de precisão de cada um dos métodos na faixa em que predomina o erro de truncamento.

- e) Apresente suas conclusões sobre os resultados da comparação.

5 Questão

Além dos problemas de erros numéricos, outro problema que pode ocorrer é a instabilidade do processo de solução numérica. Dependendo do tamanho do passo de integração, do método de integração numérica e das características das equações diferenciais pode ocorrer que a solução numérica divirja da solução verdadeira.

Pede-se estudar a convergência dos métodos de solução numérica utilizados na simulação do problema do carrinho em movimento horizontal em meio viscoso.

- a) Avalie analiticamente a convergência dos Métodos de Euler explícito e implícito.
- b) Teste a convergência dos diversos métodos de integração utilizados para os seguintes passos de integração, $h = 5,0$ s, $h = 2,0$ s, $h = 1,0$ s, $h = 0,1$ s e $h = 0,01$ s para um intervalo de integração de $t_0 = 0$ s até $t_{final} = 40$ s.
- c) Apresente suas conclusões sobre os resultados da comparação.

6 Questão

Compare os três mecanismos de resistência ao movimento, i.e., força viscosa, resistência ao rolamento e força aerodinâmica. Ajuste os valores dos coeficientes empíricos para representar a situação real do seu problema. Faça estimativas realistas e experimentos com o seu carrinho para avaliar os valores desses coeficientes.

O adimensional, Número de Reynolds, para avaliar o regime de escoamento de um corpo com dimensão característica D em meio fluido é dado por:

$$Re = \frac{\rho_{ar} D v}{\nu} \quad (4)$$

onde ρ_{ar} é a densidade do ar, D um dimensão linear característica do sólido, v o magnitude da velocidade da esfera e ν a viscosidade dinâmica do fluido.

Para o ar em condições padrão de pressão e temperatura vale:

$$\rho_{ar} = 1,2 \text{ kg/m}^3 \quad (5)$$

e

$$\nu_{ar} = 18 \mu\text{Pa} \cdot \text{s} \quad (6)$$

Pede-se, adotando um método de integração numérica conveniente:

- a) Compare os resultados do movimento horizontal sem ação da gravidade.
- b) Compare os resultados do movimento no plano inclinado com ação da gravidade.
- c) Avalie a relação $\frac{F_D}{F_d}$ e $\frac{F_d}{F_t}$.
- d) Avalie o valor do Número de Reynolds no movimento do carrinho.
- e) Interprete e conclua qual a forma adequada para representar os mecanismos de resistência ao movimento nesse problema.
- f) Valide sua simulação com resultados experimentais.