O comprimento do período de dízimas $\dfrac{a}{b}$ não depende do numerador

Prof. Edson Ribeiro Alvares
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná.

Na Revista do Professor de Matemática número 52, tivemos a oportunidade de apreciar um artigo do Professor Hygino H. Domingues sobre dízimas periódicas. Nesse, o Prof. Hygino apresenta uma relação entre o comprimento do período da dízima de uma fração $\frac{a}{p}$ (onde $mdc(a,p) = 1$ e p primo) e o menor inteiro positivo x tal que $10^x - 1$ é múltiplo de p.

No presente artigo, pretendemos chamar a atenção do leitor para alguns fatos curiosos sobre as dízimas periódicas. Mostraremos que, fixado o inteiro b, o comprimento do período da dízima $\frac{a}{b}$ (em que o $mdc(10a, b) = 1$) independe do inteiro a. Apresentaremos também uma prova de que as dízimas $\frac{a}{b}$ têm período de comprimento máximo $b-1$ e que, se a dízima atingir esse período de comprimento máximo, então b é primo. Além disso, mostraremos que o comprimento do período de frações $\frac{1}{3^n}$ é 3^{n-2} se $n \geq 2$.

Devido à dificuldade natural de calcularmos todos os dígitos de uma dízima, dificuldade esta inerente ao processo repetitivo e trabalhoso de utilizar o algoritmo da divisão, ou ainda pelo fato de que o visor de uma calculadora apresenta um número limitado de dígitos apresentaremos, como aplicação um método que, esperamos, poder contribuir na árdua tarefa de encontrar os dígitos de uma dízima e também na sua compreensão.

Antes de começarmos nosso passeio pelas dízimas, precisamos dizer o que entendemos por comprimento do período de uma dízima. Como exemplo, considere a dízima $\frac{7}{30} = 0,23333...$,. Esta é formada apenas pelo número três. Portanto, tem período de comprimento um. Já a dízima $\frac{1}{7} = 0,142857142857...$, apresenta seis dígitos em sua formação logo, tem período de comprimento seis.

I) O comprimento do período de uma dízima $\frac{a}{b}$ com $mdc(10a, b) = 1$ não depende do numerador.

Estamos considerando a hipótese $mdc(10a, b) = 1$ para a prova deste primeiro resultado. Com ela, excluímos o caso $b = 2^n 5^m$ $(n, m \geq 0)$, pois caso contrário, a fração não é uma dízima. Porém, observe que com essa hipótese, excluímos também o caso em que b é múltiplo de dois ou de cinco.

Antes de apresentarmos a prova, vejamos um exemplo ilustrando este fato. Analisaremos o que ocorre com o tamanho das dízimas da fração $\frac{a}{7}$. Ao dividir o número 1 por 7, obtemos a dízima periódica $\frac{1}{7} = 0,142857142857...$, cujo período tem seis dígitos, 142857. Ao variarmos o numerador, obtemos: $\frac{2}{7} = 0,285714285714....$, $\frac{3}{7} = 0,428571428571....$,

$\frac{4}{7} = 0,571428571428....$, $\frac{5}{7} = 0,714285714285....$ e $\frac{6}{7} = 0,857142857142......$

Em todas elas, o período tem 6 dígitos, isto é, têm comprimento 6. Neste exemplo, em particular, os dígitos também são os mesmos. Porém, esse fato, nem sempre ocorre. Veja, por exemplo, as frações com denomidador 3: $\frac{1}{3} = 0,333....$ e $\frac{2}{3} = 0,6666.....$Ambas têm períodos de comprimento um, porém distintos, 3 e 6 respectivamente.

Na demonstração desses resultados, faremos menção à função ϕ de Euler e ao teorema de Euler. A função ϕ associa a cada inteiro positivo b o número dos inteiros x tais que $1 \leq x \leq b$ e $mdc(x, b) = 1$. Por exemplo, $\phi(3) = 2$, pois os números entre um e três que são relativamente primos com três são um e dois, enquanto que $\phi(6) = 2$, pois os números que são relativamente primos com 6, que estão entre um e seis, são um e cinco. O Teorema de Euler que aplicaremos é o seguinte:

Se b e m são inteiros satisfazendo $mdc(b, m) = 1$, então b divide $m^{\phi(b)} - 1$.

Estaremos trabalhando com frações que têm denominador b satisfazendo $mdc(b, 10) = 1$. Então, o teorema de Euler nos diz que existe algum inteiro positivo k tal que b divide $10^k - 1$. Se tal inteiro existe, podemos tomar o menor inteiro positivo k tal que b divide $10^k - 1$.

O comprimento do período de uma dízima $\frac{a}{b}$ com $mdc(10a, b) = 1$ não depende do numerador.

Demonstração:

Seja $\frac{a}{b}$ uma fração com $mdc(10a, b) = 1$. Seja t o menor inteiro positivo tal que b divide $10^t - 1$, isto é, $bl = 10^t - 1$ para algum inteiro l. Então

$$10^t \, \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = al.$$

Veja que com essa igualdade temos que para o inteiro fixado b, existe um menor inteiro t tal que $10^t \dfrac{a}{b} - \dfrac{a}{b}$ é inteiro.

Como multiplicar por 10^t significa deslocar a vírgula "t casas" para direita, representando agora

$$\frac{a}{b} = a_1 a_2 ....a_k, a_{k+1} a_{k+2}....$$

temos

$$10^t \frac{a}{b} = 10^t a_1 a_2....a_k, a_{k+1} a_{k+2}.... = a_1 a_2....a_k a_{k+1} a_{k+2}....a_{k+t}, a_{k+t+1} a_{k+t+2}.....$$

Assim, do fato de a diferença $10^t \dfrac{a}{b} - \dfrac{a}{b}$ ser um número inteiro, temos que

$$a_1 a_2 ...a_k a_{k+1}....a_{k+t}, a_{k+t+1} a_{k+t+2}.... - a_1 a_2.....a_k, a_{k+1} a_{k+2}.....$$

é inteiro e assim, após a vírgula, os valores são iguais. Podemos afirmar então que , $a_{k+1} = a_{k+t+1}$, $a_{k+2} = a_{k+t+2}, ..., a_{k+t+1} = a_{k+2t+1}$. De forma geral, podemos escrever, $a_{k+n} = a_{k+it+n}$ com $n \geq 1, i \geq 1$.

Dado b, existe o menor inteiro t que satisfaça $10^t - 1 = bl$, independente do valor a, então podemos dizer que $\frac{a}{b}$ é da forma $a_1.....a_k, a_{k+1}.....a_{k+t} a_{k+1} a_{k+2}....a_{k+t}...$ completando assim a demonstração. ∎

II) Qual o maior comprimento do período que assume uma dízima $\frac{a}{b}$?

Mostraremos que, sob determinadas condições, o comprimento do período de uma dízima tem um limitante que depende do denominador, isto é, o comprimento do período da dízima é no máximo $b-1$.

Para provar o resultado a seguir, vamos utilizar novamente o Teorema de Euler e para isso, vamos fazer uma restrição como havíamos feito anteriormente, isto é, tomar $mdc(10a, b) = 1$. Incentivamos fortemente o leitor a tentar uma prova geral deste resultado.

O comprimento do período da dízima $\frac{a}{b}$ é, no máximo, $b-1$ **se** $mdc(10a, b) = 1$.
Demonstração:
O comprimento do período da dízima é o menor inteiro positivo h tal que $by = 10^h - 1$ para algum inteiro y. Vamos mostrar que h divide $\phi(b)$. Pelo algoritmo da divisão, existem q e r tais que, $\phi(b) = hq + r$ com $0 \leq r < h$ e assim, $10^{\phi(b)} = 10^{hq}10^r$ e $(by+1)^q = 10^{hq}$. Pelo binômio de Newton, podemos escrever $(by)^q + bg(y) + 1 = 10^{hq}$ onde $bg(y)$ é a parte que omitimos do desenvolvimento do binômio de Newton, e que sabemos ser um múltiplo de b. Lembre-se que os coeficientes binomiais são inteiros. Simplificando temos $bz = 10^{hq} - 1$ para algum inteiro z. Provamos assim que b divide $10^{hq} - 1$.

Dessa forma, b divide $10^r(10^{hq} - 1)$, uma vez que b divide $10^{hq} - 1$. Então, $bk = 10^{\phi(b)} - 10^r$ para algum inteiro k. Por outro lado, pelo teorema de Euler, $bu = 10^{\phi(b)} - 1$, para algum inteiro u. Então $bk = bu + 1 - 10^r$. Assim, $b(u-k) = 10^r - 1$. Provamos assim que o inteiro b divide $10^r - 1$ e sabemos que $0 \leq r < h$ e h era o menor inteiro positivo satisfazendo esta propriedade. Então, $r = 0$ e assim $\phi(b) = hq$. Então $h \leq \phi(b)$. Portanto $h \leq b-1$ pois $\phi(b) \leq b-1$.

Como o comprimento do período da dízima divide $\phi(b)$ e o maior valor que $\phi(b)$ pode assumir é $b-1$, então concluímos que o comprimento é no máximo $b-1$. ∎

Observe que, se a dízima tiver período de comprimento no máximo $b-1$, podemos dizer neste caso que b é primo. De fato, como o comprimento do período da dízima divide $\phi(b)$, então $b-1$ divide $\phi(b)$. Desta forma, temos as desigualdades $b-1 \leq \phi(b) \leq b-1$. A primeira desigualdade vem da divisibilidade e a segunda da definição da função ϕ. Assim, $b-1 = \phi(b)$. A igualdade $\phi(b) = b-1$, ocorre, se e somente se, b for primo.

Veja que isto não significa que o comprimento do período da dízima de uma fração com denominador primo b seja $b-1$. Por exemplo, se $b = 11$, $\phi(b) = 10$, porém o comprimento do período da dízima neste caso é dois pois 11 divide $10^2 - 1$. Como exemplo, veja a fração $\frac{1}{11} = 0,090909....$

III) Comprimento do período de dízimas da forma $\frac{1}{3^n}$ com $n \geq 1$.

Quando $n = 1$, temos $\frac{1}{3} = 0,33333...$ e para $n = 2$ temos $\frac{1}{3^2} = 0,1111....$ Veja que estas frações têm período de comprimento um. O período de $\frac{1}{3^2}$ é um, pois um é o menor inteiro positivo tal que 3^2 divide $10^1 - 1$. Provaremos a seguir o resultado:

O comprimento do período de frações $\frac{1}{3^n}$ é 3^{n-2} se $n \geq 2$.
Demonstração:

Primeiro considere o inteiro $111 \cdots 1$ com l dígitos iguais a um. Podemos dizer, em geral, que 3^k, com $k \geq 1$, divide $111...11$, se e somente se, 3^k divide a soma $1 + 1 + \cdots 1$ (tendo essa soma l dígitos). Isto é equivalente a dizer que $l = 3^k$.

Agora suponha que o comprimento do período da dízima de $\frac{1}{3^n}$ seja o inteiro positivo m. Isto equivale a dizer que 3^n divide $10^m - 1$, isto é, existe um inteiro x tal que

$$3^n x = 10^m - 1 = 9999...9 = 9(1111...1).$$

Portanto, 3^{n-2} divide $1111...1$. Assim, pela observação anterior, $m = 3^{n-2}$. ∎

IV) Utilizando uma calculadora simples, como encontrar a dízima de frações cujo comprimento do período excede os dígitos da calculadora ?

Vejamos o seguinte exemplo. Ao dividir 1 por sete, os restos sucessivos desta divisão são, 3, 2, 6, 4, 5 e 1, nesta ordem.

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 7 \\ \cline{2-2}
\;3 & 0,142857 \\
\;\;2 & \\
\;\;\;6 & \\
\;\;\;\;4 & \\
\;\;\;\;\;5 & \\
\;\;\;\;\;\;1 &
\end{array}
$$

Figura 1:

Veja também que $\frac{3}{7} = 0,428571428571....$ e que este período difere do anterior apenas pela ordem dos dígitos. Neste caso específico da divisão por 7, além do tamanho do período ser sempre 6, os dígitos são os mesmos. Por exemplo, ao fazer $\frac{3}{7}$ é como recomeçar a divisão anterior de $\frac{1}{7}$ no passo em que o resto foi 3. Como todos os restos possíveis aparecem na divisão de 1 por 7, então teremos apenas uma mudança na ordem dos dígitos da dízima.

Além disso, o exemplo anterior é bem simples, pois todos os dígitos aparecem no visor de uma calculadora. Vamos supor uma calculadora em que aparecem apenas treze dígitos e considerar a divisão de 1 por 17.

Os dígitos da dízima que aparecerão são

$$0,058823529412$$

sendo que o último dígito 2 é uma aproximação. Então, não podemos contar com este último dígito. Estamos interessados agora em saber os próximos dígitos.

Já sabemos que o comprimento do período não muda, e que os dígitos do período de $\frac{1}{17}$ aparecerão também na representação das frações do tipo $\frac{a}{17}$ em que a é algum resto da divisão de 1 por 17. É claro que não necessariamente aparecerão na dízima de qualquer fração do tipo $\frac{a}{17}$. O que devemos fazer é analisar as próximas divisões.

Por exemplo, na calculadora aparecerá:

$$\frac{2}{17} = 0,117647058824.$$

O último dígito nos remete à suspeita de ser uma aproximação, pois na divisão de 1 por 17, após os dígitos 5882 temos o dígito 3. Então, concluímos que

$$1176470$$

pode fazer parte do período de $\dfrac{1}{17}$, pois o restante dos dígitos, 5882, fazia parte do período desta fração. Vejamos juntas as seguintes dízimas sem o último dígito:

$$\frac{1}{17} = 0,05882352941$$

$$\frac{2}{17} = 0,11764705882$$

$$\frac{3}{17} = 0,176470588235$$

$$\frac{4}{17} = 0,352941176471.$$

Portanto, $\frac{1}{17} = 0,0588235294117647...$ Conseguimos, assim, todas as casas decimais, pois já temos dezesseis dígitos e o comprimento do período de uma dízima com denominador 17 terá no máximo 16 dígitos.

Sugestão: tente construir a dízima $\frac{1}{49}$. Esta dízima tem 42 dígitos. Para finalizar, sugerimos fortemente ao leitor tentar generalizar alguns dos resultados que apresentamos aqui, como que o comprimento do período das dízimas $\frac{a}{b}$ com $mdc(a,b) = 1$ e $b \neq 2^n 5^m$ não depende do numerador.

Referências

1. José Paulo Q. Carneiro, *As dízimas periódicas e a calculadora*, Revista do Professor de Matemática 52.

2. Hygino H. Domingues, *O pequeno teorema de Fermat e as dízimas periódicas*, Revista do Professor de Matemática 52.

3. Jean-Marie de Koninck, Armel Mercier, *Introduction à la théorie des nombres*, Collection universitaire de mathématiques, 1994.