**MAT1514 – Matemática na Educação Básica – 2013**

Profas. Ana Paula Jahn e Iode de Freitas Druck

**DAS FRAÇÕES AOS NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS**

Frações, como resultado de uma divisão entre números naturais, são também números, capazes de expressar medida de comprimento, área, capacidade ou de outras grandezas, em situações em que a grandeza a ser medida não pode ser expressa por um múltiplo inteiro da unidade de medida considerada. Assim, o estudo de frações, desde o Fundamental I, é um passo importante para a ampliação do conceito de número, inicialmente como um objeto matemático útil para medir grandezas positivas. A introdução dos números racionais estende tal universo numérico pelo acréscimo dos números fracionários negativos.

Mas, desde a Antiguidade, ficou claro para os matemáticos que as frações não são suficientes para medir todas as grandezas, mesmo que positivas. Assim, já na Antiguidade grega ficou comprovado que, por exemplo, o lado de um quadrado é incomensurável com sua diagonal, ou seja, que não existe um segmento, por menor que seja, que possa servir de unidade de medida comum ao lado e à diagonal de um mesmo quadrado de maneira a que ambos sejam múltiplos inteiros dessa unidade. Tal constatação, ao longo da História, acabou por provocar a introdução dos números irracionais e a ampliação do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais.

Voltando então à ideia inicial de querer, por exemplo, ter números para expressar a medida de qualquer segmento, foi estabelecida a possibilidade de associar, a cada ponto de uma reta, um número real – criando-se a noção de coordenadas de pontos em um eixo ordenado, utilizado amplamente no estudo dos gráficos de funções no Cálculo e nas curvas da Geometria Analítica. Assim, sendo x1 e x2 as coordenadas respectivas das extremidades A e B do segmento sobre um eixo ordenado, dizemos que a medida do segmento sempre existe e é expressa pelo número real positivo │x1 – x2│.

Passaremos a discutir em detalhes as noções de números racionais e de números irracionais, a partir do que estudamos sobre frações e sobre o sistema decimal de numeração.

**Problematização**

**1)** Usando o algoritmo da divisão, pode-se determinar a representação decimal de qualquer fração. Como exemplo, sabemos que = 0,75 e que = 0,333... , que se convenciona escrever 0, , colocando-se uma barra sobre o período da dízima, para eliminar possíveis ambiguidades. Pergunta-se:

**a)** Em que casos essa representação pode ser finita e em que casos ela será infinita? Sendo infinita, será sempre periódica, ou não?

**b)** É única a representação decimal de todas as frações?

**2) Entre** 0, e 0,334 quantas frações podemos interpolar (ou seja, maiores do que 0, e menores do que 0, 334)? Dê exemplo de pelo menos dois números escritos em representação decimal não periódica, mas com infinitas casas decimais depois da vírgula, também entre 0, e 0,334. Quantos números decimais existem nessa última condição?

**4)** Onde está o erro?

S = 1 + + + + ...

S – 1 = (1 + + + + ...)

S – 1 = S

S – S = 1

– S = 1 **Portanto S =** – 3

**4)** Por quê está certo?

S’ = 1 + + + + ...

S’ – 1 = (2 + 1 + + + + ...)

S’ – 1 = + S’

S’ – S’ =

S’ = **Portanto S’ =**

**5)** O que vale: 0, < 1 ou 0, = 1? Por quê?

**Definições e propriedades:**

**Def.1:** Um número a é chamado de racional se (e só se) existem p e q inteiros, com q ≠ 0, tais que a = . Em símbolos escreve-se: **Q** = .

**Prop.1:**  Um número a é racional se e só se sua representação decimal for finita ou infinita periódica.

Observe-se que, como discutido anteriormente, dado um eixo ordenado, entre os pontos de coordenadas 0, e 0,334 existem números cuja representação decimal é infinita não periódica. Portanto tais números são não racionais, pela proposição 1.

**Def.2:** Vamos chamar as coordenadas dos pontos de um eixo ordenado de números reais. O conjunto de todos os números reais é denotado por**⎥R.**