DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA NAVAL E OCEÂNICA
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PNV3324 FUNDAMENTOS DE CONTROLE EM ENGENHARIA

NOTAS DE AULA*

Prof. Helio Mitio Morishita

* Este texto é um mero roteiro de estudo e não substitui as referências bibliográficas indicadas para a disciplina.

4 TRANSFORMADA DE LAPLACE E A SUA INVERSA

4.1TRANSFORMADA DE LAPLACE

A Transformada de Laplace é uma ferramenta matemática extremamente útil em controle, pois permite analisar o desempenho do sistema eliminando o tempo e permite obter a resposta do sistema a partir de produtos de polinômios ao invés de calcular integrais ou resolver equações diferenciais. A Transformada de Laplace é definida como:

$$£[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad 4.1$$

A seguir são mostrados exemplos de cálculo da Transformada de Laplace.

Exemplo 1- Função exponencial

Seja

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \;\; para \;\; t < 0 \\ &= Ae^{-\alpha t} \;\; para \;\; t \geq 0 \end{aligned}$$

onde A e α s são constantes.

A Transformada de Laplace desta função é dada por:

$$£[f(t)] = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t}e^{-st}dt = \left[\frac{Ae^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)}\right]_0^{\infty} = \left[\frac{Ae^{-(\sigma+\alpha)t}\, e^{-j\omega t}}{-(s+\alpha)}\right]_0^{\infty} = \frac{A}{s+\alpha} \text{ para } \sigma > -\alpha \,.$$

Exemplo2 - Função harmônica

Seja

$$f(t) = \begin{cases} 0 \;\; para \;\; t < 0 \\ \cos\omega t \;\; para \;\; t \geq 0 \end{cases}$$

A transformada de Laplace neste caso é dada por:

$$£[f(t)] = \int_0^{\infty} \cos(\omega t)e^{-st}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})e^{-st}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right]$$

$$= \frac{s}{s^2+\omega^2} \;\; para \;\; \sigma > 0$$

Na Tab. 4.1 são mostradas a transformada de Laplace de algumas funções que comparecem com uma certa freqüência em problemas de controle.

Tabela 4.1 Exemplos da Transformada de Laplace

		f(t)	F(s)
1	Impulso	$\delta(t)$	1
2	Degrau unitário	$\mu_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$
3	Rampa	t	$\frac{1}{s^2}$
4	Exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	"seno"	$\text{sen}\,\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
6	"cosseno"	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Obs. a) $f(t) = 0 \quad para\ t < 0$

b) $\mu_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & para \quad t < 0 \\ 1 & para\ t \geq 0 \end{cases}$

4.1.2 TEOREMAS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

A seguir será admitida que $F(s) = \pounds[f(t)]$

a) Homogeneidade

$\pounds[af(t)] = a\pounds[f(t)] = aF(s)$

onde *a* é uma constante

b) Aditividade

$\pounds[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$

c) Translação no tempo

$\pounds[f(t-a)\mu_{-1}(t-a)] = e^{-as}F(s)$ (ver Fig. 3.1)

onde *a* é um número real positivo.

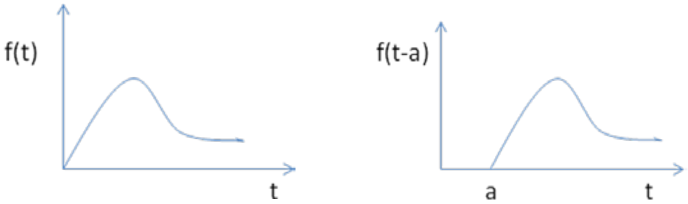
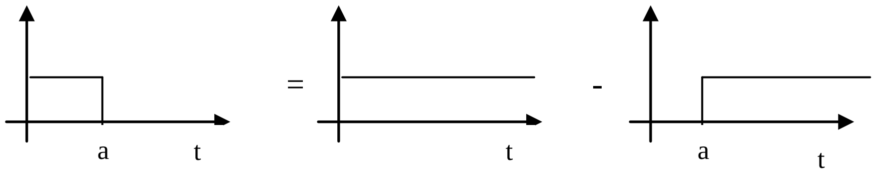


Fig. 4.1 Funções $f(t)\mu_{-1}(t)$ e $f(t-a)\mu_{-1}(t-a)$

Esta função é utilizada quando há um atraso puro no sinal. Por exemplo, o sinal de comando enviado da Terra para um robô em Marte só chega após alguns minutos.Um exemplo interessante é a obtenção da transformada de Laplace da função pulso unitário que pode ser encarada como uma função degrau unitário menos uma outra defasada de *a*



Esta função pode ser definida como:

$$f(t) = \mu_{-1}(t) - \mu_{-1}(t-a)$$

A Transformada de Laplace desta função, usando o teorema de translação no tempo, é:

$$F(s) = \frac{1}{s} - e^{-as}\frac{1}{s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-as})$$

d) Derivada Complexa

$$£[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

e)* Translação no domínio de *s

$$£[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

onde a é real ou complexa.
Exemplo:

$$£[e^{-\alpha t}\cos(\omega t)] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

f) Derivada real

$$£[\frac{df(t)}{dt}] = sF(s) - f(0^+)$$

onde $f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$

Neste teorema é admitido que existe a transformada de Laplace de $\frac{df(t)}{dt}$;

$T\dot{y} + y = x(t), y(0) = y_0$

Aplicando a Transformada de Laplace tem-se:

$T(sY(s) - y_0) + Y(s) = X(s)$

Portanto:

$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1}X(s) + \frac{Ty_0}{Ts+1}$$

A Transformada de Laplace da segunda derivada é dada por:

$$£[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Exemplo:

Seja um sistema um sistema de segundo grau caracterizado pela seguinte equação diferencial:

$$M\ddot{y} + B\,\dot{y} + Ky = x(t); \quad y(0) = y_0; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

Aplicando a Transformada de Laplace para a equação acima obtém-se:

$$M(s^2Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0) + B(sY(s) - y_0) + KY(s) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} X(s) + \frac{(Ms + B)y_0 + M\dot{y}_0}{Ms^2 + Bs + K}$$

Se as condições iniciais forem nulas, isto é, $\dot{y}_0 = y_0 = 0$ tem-se:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

O segundo membro da equação acima é denominado de *função de transferência* do sistema:

$$H(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

g) Integração Real

$$£[\int f(t)dt] = \frac{F(s)}{s} + \left.\frac{\int f(t0dt}{s}\right|_{t=0^+}$$

h) Teorema do valor final

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

se existir $\lim_{t\to\infty} f(t)$

Lembrar que para funções como $f(t) = seno(\omega t)$ ou $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$ não existe limite para $t \to \infty$.

i) Teorema do valor inicial

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to 0} f(t)$$

j) Integral de convolução

$$£[\int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau) d\tau] = F_1(s)F_2(s)$$

Foi visto que a resposta de um sistema linear, causal e invariante no tempo para uma entrada $x(t)$ é dada por:

$$y(t) = \int_0^t x(t)h(t-\lambda)d\lambda]$$

onde $h(t)$ é a resposta do sistema a um impulso. Aplicando a Transforma de Laplace para esta equação tem-se:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

e $H(s)$ é a função de transferência do sistema. Ou seja, ela é a Transformada de Laplace da resposta do sistema a um impulso.

4.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

4.2.1 Introdução

Até o presente momento foi visto que a resposta de um sistema caracterizado por uma função de transferência $H(s)$ a um sinal de entrada $x(t)$,no domínio de Laplace, é dada por:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Se desejar obter a resposta do sistema no domínio do tempo basta calcular a transformada de Laplace inversa de $Y(s)$. Formalmente a transformada de Laplace inversa de uma função $F(s)$ é obtida como:

$$f(t) = £^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \qquad para\ t > 0$$

Onde *c*, a abscissa de convergência, é um número real constante e é escolhido com valor superior à parte real de todos os pontos singulares de *F(s)*.

No entanto, esta expressão não é aplicada para obter a resposta no domínio do tempo porque, invariavelmente, ela é muito complicada. O método alternativo empregado é verificar se a expressão de $F(s)$ coincide com uma tabela de pares de transformada de Laplace. Se isto não for o caso procura-se expandir $F(s)$ em serie de frações parciais de modo que cada fração coincida com algum par de Transformada de Laplace tabelado.

4.2.2 Expansão em série de frações parciais

Seja a função $F(s)$ dada por:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2).....(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)....(s+p_n)} \text{ com } m \le n \qquad 4.2$$

Se todas raízes de $A(s)=0$ forem distintos $F(s)$ pode ser expandido em séries de frações parciais como:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{\alpha_1}{s+p_1}+\frac{\alpha_2}{s+p_2}+\frac{\alpha_3}{s+p_3}+..\frac{\alpha_i}{s+p_i}...\frac{\alpha_n}{s+p_n} \qquad 4.3$$

A equação (4.3) pode ser reescrita como:

$$\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{\alpha_1(s+p_2)(s+p_2)..(s+p_i)..(s+p_n)+\alpha_2(s+p_1)(s+p_3)..(s+p_i)..(s+p_n)+.}{(s+p_1)(s+p_2)....(s+p_n)}$$
$$+\frac{\alpha_i(s+p_1)..(s+p_{i-1})(s+p_{i+1})(s+p_n)+.\alpha_n(s+p_1)..(s+p_i)..(s+p_{n-1})}{(s+p_1)(s+p_2)....(s+p_n)} \qquad 4.4$$

Portanto os coeficientes α_i podem ser obtidos através da identidade

$$B(s)=\alpha_1(s+p_2)(s+p_2)..(s+p_i)..(s+p_n)+\alpha_2(s+p_1)(s+p_3)..(s+p_i)..(s+p_n)+$$
$$+\alpha_i(s+p_1)..(s+p_{i-1})(s+p_{i+1})..(s+p_n)..+..\alpha_n(s+p_1)..(s+p_i)..(s+p_{n-1}) \qquad 4.5$$

Pode-se obter os coeficientes α_i igualando os termos de mesma potência dos dois membros da equação (4.5), e resolvendo um sistema de *n* equações a n incógnitas. No entanto, existe um procedimento mais fácil para obter os valores dos coeficientes α_i Para isto basta substituir o valor da raiz $s_i=-p_i$ na equação (4.5) que resulta em:

$$B(s)\big|_{s=-p_i}=\alpha_i(-p_i+p_1)(-p_i+p_2)..(-p_i+p_{i-1})(-p_i+p_{i+1})..(-p_i+p_n)$$

O coeficiente α_i, correspondente à raiz $s=-p_i$, pode então ser obtido facilmente como:

$$\alpha_i=\left.\frac{B(s)}{(s+p_1)...(s+p_{i-1})(s+p_{i+1})...(s+p_n)}\right|_{s=-p_i} \qquad 4.6$$

Ou seja, no cálculo de α_i através da equação (4.6), considera-se todos os denominadores que comparecem na equação (4.2), exceto $(s+p_i)$

Exemplos

Exemplo 1 Obter a transformada de Laplace inversa de:

$$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)s}$$

As raízes do denominador desta função são:

$s_1=-1$, $s_2=-2$ e $s_3=0$

Portanto tem-se:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)s} = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+2} + \frac{\alpha_3}{s}$$

$$\alpha_1 = \left.\frac{s+3}{(s+2)s}\right|_{s=-1} = -2$$

$$\alpha_2 = \left.\frac{s+3}{(s+1)s}\right|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_3 = \left.\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{3}{2}$$

Assim

$$F(s) = \frac{-2}{(s+1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)} + \frac{3}{2}\frac{1}{s}$$

Comparando com uma tabela de pares de transformada de Laplace obtém-se:

$$f(t) = -2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}$$

Exemplo 2

Obter a transformada de Laplace inversa de:

$$F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$$

Os pólos desta função são:

$$s_1 = -1+2j \quad \text{e} \quad s_2 = -1-2j$$

Portanto tem-se:

$$F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5} = \frac{\alpha_1}{s+1-2j} + \frac{\alpha_2}{s+1+2j}$$

$$\alpha_1 = \left.\frac{2s+12}{s+1+2j}\right|_{s=-1+2j} = \frac{10+4j}{4j}$$

$$\alpha_2 = \left.\frac{2s+12}{s+1-2j}\right|_{s=-1-2j} = \frac{10-4j}{-4j}$$

$$F(s) = \frac{10+4j}{4j}\frac{1}{s+1-2j} - \frac{10-4j}{4j}\frac{1}{s+1+2j}$$

$$f(t) = \frac{10+4j}{4j}e^{-(1-2j)t} - \frac{10-4j}{4j}e^{-(1+2j)t}$$

$$f(t) = e^{-t}\left(5\frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{2j} + 2\frac{e^{2jt} + e^{-2jt}}{2}\right)$$

mas

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

Portanto tem-se:

$$f(t) = e^{-t}[5sin(2t) + 2\cos(2t)]$$