Mecânica Quântica I - 4302403

3ª lista

1) Considere o potencial função delta dobrado:

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)],$$

onde a e α são constantes positivas.
a) Esboce esse potencial.
b) Quantos estados ligados existem?

2) a) Construa $\psi_2(x)$ para o segundo estado excitado do oscilador harmônico.
b) Faça um esboço de ψ_0, ψ_1 e ψ_2.
c) Verifique diretamente, por meio de integração explícita, a ortogonalidade desses estados. Dica: não se esqueça de considerar a paridade dos estados.

3) a) Calcule $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ para os estados

$$\psi_0(x) = \alpha e^{-\xi^2/2}$$

$$\psi_1(x) = \sqrt{2}\alpha\xi e^{-\xi^2/2}$$

onde $\alpha = (m\omega/\pi\hbar)^4$ e $\xi = x\sqrt{m\omega/\hbar}$, por meio de integração explícita.
b) Mostre que para esses estados vale o princípio da incerteza: $\sigma_x\sigma_p \geq \hbar/2$.
c) Calcule $\langle T \rangle$ e $\langle V \rangle$ para esses estados (nenhuma nova integração é necessária). A soma deles é o esperado?

4) Mostre que $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ no n-ésimo estado do oscilador harmônico são dados por:

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0, \;\; \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right), \;\; \langle p^2 \rangle = m\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Confira que o princípio da incerteza é obedecido.

5) Uma partícula no potencial do oscilador harmônico está no estado

$$\Psi(x,0) = A[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)].$$

a) Calcule A.
b) Calcule $\Psi(x,t)$ e $|\Psi(x,t)|^2$
c) Mostre que no estado $\Psi(x,t)$

$$\langle x \rangle = \frac{24}{25}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t), \quad \langle p \rangle = -\frac{24}{25}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\sin(\omega t)$$

d) Mostre que o Teorema de Ehrenfest, $d\langle p \rangle/dt = -\langle \partial V/\partial x \rangle$, é válido para essa função de onda.
e) Ao medir a energia da partícula que valores voce poderá obter, e com quais probabilidades?

6) Uma partícula está no estado fundamental do oscilador harmônico de frequência ω quando, repentinamente, a frequência do oscilador duplica sem, inicialmente, mudar a função de onda. Quais são as probabilidades de, numa medida de energia, se encontrar os valores: $\hbar\omega/2$ e $\hbar\omega$?

7) Mostre que, para uma partícula no estado fundamental do oscilador harmônico de frequência ω, a probabilidade de encontrar a partícula fora da região clássicamente permitida é:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty d\xi \; e^{-\xi^2} = 0.157$$

8) Calcule as energias permitidas do meio oscilador harmônico:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & para \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, & para \quad x > 0 \end{cases} ,$$

9) Mostre que:
a) $H_0(x) = 1, \; H_1(x) = 2x, \; H_2(x) = 4x^2 - 2.$
b) $H_{2n+1}(0) = 0, \; H_{2n}(0) = (2n)!(-1)^n/n!, \; H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$

10) Calcule $\psi_0, \; \psi_1$ e ψ_2 diretamente da expressão:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$