4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E APLICAÇÕES

•4.1 Introdução:

•Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas. Exemplos de tais equações são:

$$\frac{dy}{dt} = 6t + 3$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3y + t = 0$$

$$e^y \frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

Equação diferencial ordinária (E.D.O):

a função incógnita depende de apenas uma variável independente.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4t = 0 \quad \text{é uma E.D.O. ,}$$

Equação diferencial parcial (E.D.P):

a função incógnita depende de mais de uma variável independente.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{é uma E.D.P.}$$

- Forma de apresentação:

- Normal: y’ = f(x,y)
- Diferencial: M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0

- Exemplo:
- $y' = \frac{3x-2y}{5}$ → Normal

- $(3x - 2y)dx - 5dy = 0$ → Diferencial

Classificação: Ordem e grau

- Ordem: derivada de mais alta ordem

$$\text{primeira ordem} \rightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$\text{segunda ordem} \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

.....

- Grau: expoente da derivada de mais alta ordem

$$\text{primeiro grau} \rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\text{segundo grau} \rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

....

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \rightarrow \text{E.D.O. de primeira ordem e do primeiro grau ,}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \rightarrow \text{E.D.O. de primeira ordem e do primeiro grau ,}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0 \rightarrow \text{ E.D.O. de segunda ordem e do primeiro grau ,}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4 - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \rightarrow \text{E.D.O. de primeira ordem e do primeiro grau ,}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0 \rightarrow \text{E.D.O. de segunda ordem e do primeiro grau ,}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4 - y^2 \rightarrow \text{E.D.O. de primeira ordem e do segundo grau ,}$$

$$\frac{d^3 z}{dz^3} + x\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)^2 - xz\frac{dz}{dx} + 10 = 0 \quad .$$

Solução de uma equação diferencial

- A solução de uma EDO é uma outra equação que satisfaz a EDO.

- Exemplo: $y = C.senx$ é a solução geral de y” + y = 0

•Toda equação que envolve pelo menos uma derivada é um equação diferencial.

• Se uma equação diferencial pode ser escrita na forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

sua solução é obtida de maneira direta por integrações.

- A maioria das equações diferenciais não tem solução por integração direta !!!

- Veremos métodos para obter as soluções diferenciais ordinárias de maior aplicação em engenharia.

- SOLUÇÃO GERAL: conjunto de todas as suas soluções. Apresenta a constante de integração.

- SOLUÇÃO PARTICULAR: Solução resolvendo PVI (problema de valor inicial)

Exemplo

Seja, EDO $y'^2 - xy' + y = 0$

$y = Cx - C^2$ *é a solução geral*

Achar soluções particulares se PVI $x = 0 \rightarrow y = -4$

Uso de Equações Diferenciais em Modelagem

Exemplos:

Desintegração radioativa → taxa com que a massa se desintegra é proporcional a massa ainda existente

$$\frac{dM}{dt} = -K.M$$

•Modelagem

Exemplos:

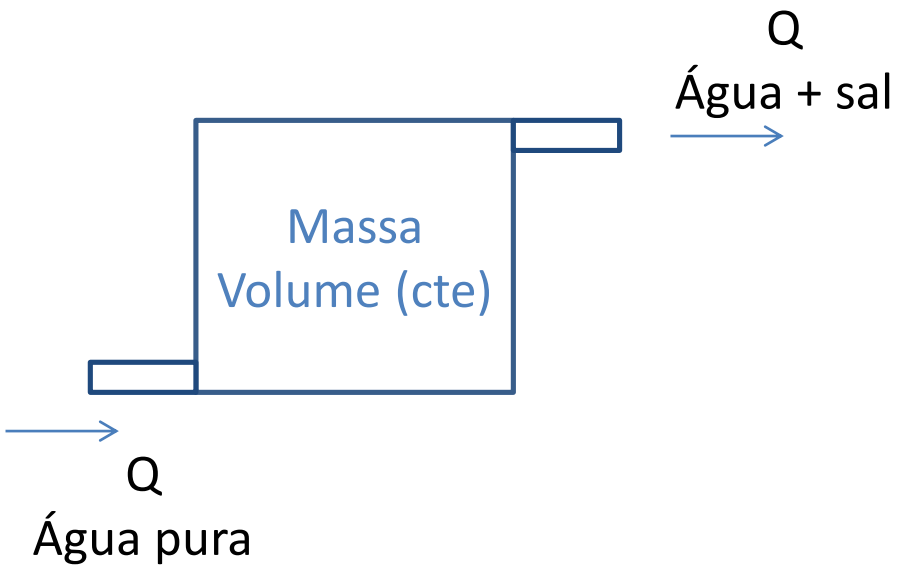
Lei de resfriamento de Newton → taxa de resfriamento do corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio

$$\frac{dT}{dt} = -K.[T - Tmeio]$$

•Modelagem

Exemplos:

Diluição de sal



$$\frac{dM}{dt} = -K \cdot \frac{M}{V}$$

Modelagem:

Exemplos

Crescimento populacional sem restrição → Lei de Malthus

$$\frac{dP}{dt} = K \,.\, P$$

Crescimento populacional com restrição → Proporcional à população que falta pra a população máxima

$$\frac{dP}{dt} = K\,(Pmáx\, - P)$$

•4.2 EDO de 1° ordem

- 5 tipos
  - Separadas e separáveis (x,y) ★
  - Homogêneas(todos os termos do mesmo grau)
  - Exatas
  - Exatas por fator integrante
  - Lineares (y e y'' são do primeiro grau) ★

EDO de primeira ordem de variáveis separáveis

EDO de 1° ordem genérica: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

EDO separada: $M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$

EDO separável: EDO genérica que se torna separada por meio de artifícios

→ Solução Geral por integração.

- Exemplos:

- $2\ y\ dy + \text{sen}\ x\ dx = 0$

- $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$

- $(1 + x)\ y\ dx + (1 - y)\ x\ dy = 0$

- Resolver o PVI: $2y\ dy + \text{sen}\ x\ dx = 0$ para $x = \frac{\pi}{2}$ $y = 0$

EDO lineares

Uma EDO de ordem qualquer pode ser dita linear se ela puder ser escrita da seguinte forma:

$$u(x)\, y + v(x)\, y' + w(x) y'' + r(x)\, y''' + ... = g(x)$$

O que significa que a variável **y** e suas derivadas só podem estar multiplicadas por funções e **x**

- Exemplos:

$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = sen\, x$ → 2° ordem linear

$(1 + y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ → 2° ordem não linear

$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + y = 1$ → 4° ordem linear

$\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$ → 1° ordem não linear

EDO de primeira ordem linear

Uma EDO de 1° ordem é dita linear se ela puder ser escrita da seguinte forma:

$$y' + p(x)y = g(x)$$

No caso particular de g(x) = 0 → EDO linear homogênea
(EDO linear incompleta)

$$y' + p(x)y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

Solução de uma EDO de primeira ordem linear

Dada EDO de 1° ordem : $y' + p(x)y = g(x)$

A solução é dada por:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} . \left[\int \mu(x) . g(x)\, dx \; + \; C \right]$$

Sendo $\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}$

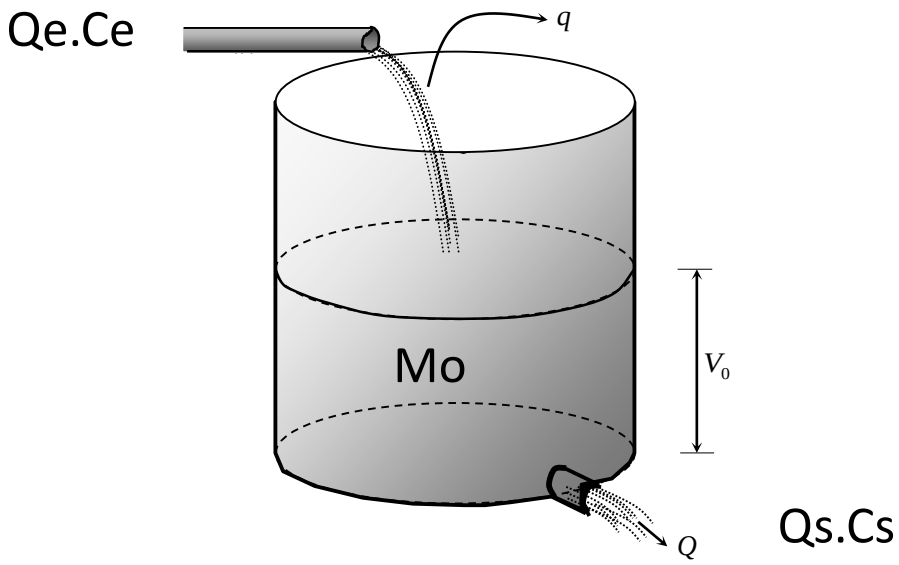
- Exemplos:

$$y' + 2y = e^{-x}$$

$$y' + y = x\, e^{-x} + 1$$

4.3 Algumas aplicações da EDO de primeira ordem linear

Problema de mistura de soluções: O objetivo é obter uma equação que expresse como a massa de um sal no tanque varia ao longo do tempo, assumindo que a solução se homogeiniza instantaneamente dentro do tanque.



- Exemplo:
- Sendo dados: V0 = 100L
  - Qe = 2 L/minuto
  - Qs = 1 L/minuto
  - Ce = 0,2 kg/L
  - M0 = 10 kg

Pede-se: a) a massa no tanque em t = 50 minutos

b) A concentração em t = 50 minutos

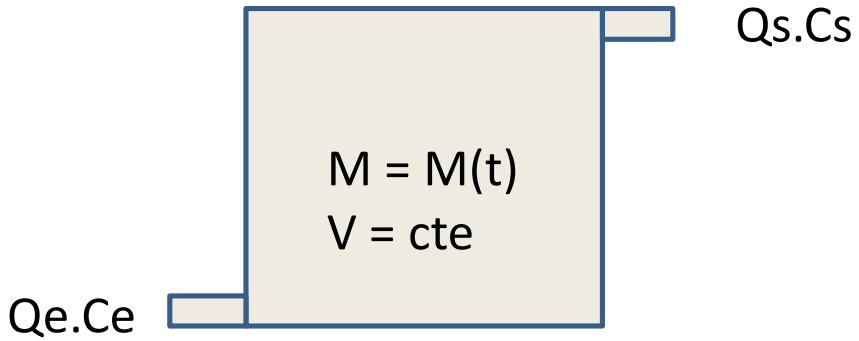
- Entregar:
- Sendo dados: V0 = 200 galões
  - Qe = Qs = 5 galões/minuto
  - Ce = 2 libras/galão
  - M0 = 40 libras

Pede-se:

a) Qual a equação que expressa a massa de sal no tanque para qualquer tempo t
b) Qual a concentração no tanque após se passarem 2 volumes de tanque

Algumas aplicações da EDO de primeira ordem linear

Problema de mistura de soluções em injetores de fertilizante: Volume é constante, entra água limpa sem sais.



4.4 EDO de primeira ordem especiais

- **Equação de Ricatti → 1° ordem não linear aplicada a hidrodinâmica, determinar coeficiente angular da reta tangente a cada ponto da trajetória**

$$y' = a2(x)y^2 + a1(x)y + a0(x)$$

- **Equação de Clairant → teorema relativo a linha geodésica e transporte de coordenadas (1726)**

$$y(x) = \frac{x\,dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

4.4 EDO de primeira ordem especiais

- **Equação de Bernoulli → para equações de crescimento**

$$y' + p(x)y = g(x)\, y^n$$

- **EDO de 1° ordem não linear**
- **Para n ≠ 0 e n ≠ 1 → linearizada**
- **Para n = 0 ou n = 1 → EDO linear**

- **Para n ≠ 0 e n ≠ 1 → linearizada**

Procedimento:

$$y' + p(x)y = g(x)\, y^n \quad (\div y^n)$$

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)y}{y^n} = g(x)$$

Simplificando:

$$z' + P(x)z = G(x)$$

- **Exemplo:**

- $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 4y^2$

- **Exemplo de equação de logística de VERHULST para crescimento populacional**

$$\frac{dP}{dt} = K\,P\,(Pmáx - P)$$

$$\frac{dP}{dt} = K\,Pmáx\,P - K\,P^2$$

4.5 EDO de segunda ordem incompletas

- **Estudaremos apenas o caso em que os coeficientes são constantes, de uso mais frequente na engenharia.**

$$A\,y'' + B\,y' + C\,y = 0 \text{ ou } f(x) \text{ ou } D$$

- **EDO de 2° ordem incompletas → 4 casos:**

$1° \; caso) \quad y'' = f(x) \;\; ou \;\; uma \; constante$

- **Solução por duas integrações sucessivas.**
- $\frac{d^2y}{dx^2} = sen\ x$

$1° \; caso) \quad y'' = f(x) \;\; ou \;\; uma \; constante$

- **Solução por duas integrações sucessivas.**
- $\frac{d^2y}{dx^2} = sen\ x \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{sen x}$

1° *caso*) $\quad y'' = f(x)$ *ou uma constante*

- **Solução por duas integrações sucessivas.**
- $\frac{d^2y}{dx^2} = sen\ x \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{sen x} \rightarrow \text{d}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{sen x dx}$

1° *caso*) $\quad y'' = f(x)$ *ou uma constante*

- **Solução por duas integrações sucessivas.**
- $\frac{d^2y}{dx^2} = sen\ x \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{sen x} \rightarrow \text{d}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{sen x dx}$
- $\int \text{d}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int \text{sen x dx}$

1° *caso*) $\quad y'' = f(x)$ *ou uma constante*

- **Solução por duas integrações sucessivas.**
- $\frac{d^2y}{dx^2} = sen\ x \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{sen x} \rightarrow \text{d}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{sen x dx}$
- $\int \text{d}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int \text{sen x dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -cos\ x + C$

$\mathbf{1° \; caso)} \quad y'' = f(x) \;\; ou \;\; uma \; constante$

- **Solução por duas integrações sucessivas.**
- $\frac{d^2y}{dx^2} = sen\, x \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathrm{sen\ x} \;\rightarrow\; \mathrm{d}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathrm{sen\ x\ dx}$
- $\int \mathrm{d}\left(\frac{dy}{dx}\right) \; = \int \mathrm{sen\ x\ dx} \;\; \rightarrow \frac{dy}{dx} = -cos\; x + \; C$
- $dy \; = (-cos\; x + C)dx$

$1° \; caso)$ $\quad y'' = f(x) \;\; ou \;\; uma \; constante$

- **Solução por duas integrações sucessivas.**
- $\frac{d^2y}{dx^2} = sen\ x \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathrm{sen\ x} \rightarrow \mathrm{d}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathrm{sen\ x\ dx}$
- $\int \mathrm{d}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int \mathrm{sen\ x\ dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -cos\ x + C$
- $dy = (-cos\ x + C)dx \rightarrow \int \mathrm{dy} = \int(-cos\ x + C)\mathrm{dx}$

$\mathbf{1° \; caso)} \quad y'' = f(x) \;\; ou \;\; uma\; constante$

- **Solução por duas integrações sucessivas.**
- $\frac{d^2y}{dx^2} = sen\, x \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathrm{sen\ x} \rightarrow \mathrm{d}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathrm{sen\ x\, dx}$
- $\int \mathrm{d}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int \mathrm{sen\ x\, dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -cos\, x + C$
- $dy = (-cos\, x + C)dx \rightarrow \int \mathrm{dy} = \int(-cos\, x + C)\mathrm{dx}$
- y = -sen x + C1 x + C2

$2° \, caso)$ $\quad y'' = f(y)$

- **Solução: artifício**

- Multiplica os dois membros por $\quad .2\frac{dy}{dx}dx$

- $e\ considera$: $\quad \frac{d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{dx} = 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}$

- $Exemplo: y'' = \frac{a}{y^3}$

$3° \; caso)$ $\quad y = f(x, y') \;$ ou $\; y = f(y')$

- **Faz u = y’ e u’ = y”**

- **Integrar em relação a x.**

- Exemplo: $x^2 \, y'' + 2x \, y' - 1 = 0$

$4° \; caso)$ $\quad y = f(y, y')$

- **Faz u = y’ e u’ = y”**
- $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$
- **Integrar em relação a y.**
- Exemplo: $y" \; y + (y')^2 = 0$