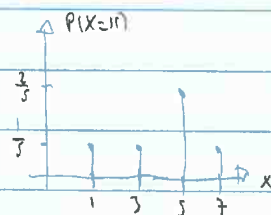


1.)

2) X := tempo de serviço

X	1	3	5	7
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$



6)

$$E[X] = \sum x \cdot P(X=x) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{10}{5} + \frac{7}{5} = \frac{21}{5} = 4,2$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

X^2	1	9	25	49
$P(X^2=x^2)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E[X^2] = \frac{1}{5} + \frac{9}{5} + \frac{50}{5} + \frac{49}{5} = \frac{109}{5}$$

$$V[X] = \frac{109}{5} - \frac{441}{25} = \frac{545}{25} - \frac{441}{25} = \frac{104}{25} = 4,16$$

$$MD(X) = X_{(\frac{n+1}{2})} = X_{(3)} = 5$$

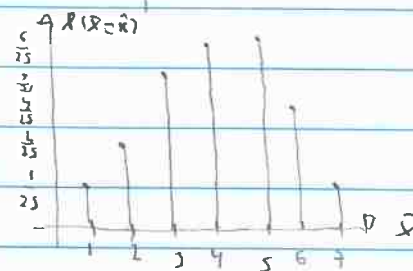
7)

$v_{2A} \backslash v_{2B}$	A	B	C	D	E
A	(1,1)	(1,3)	(1,5)	(1,5)	(1,7)
B	(3,1)	(3,3)	(3,5)	(3,5)	(3,7)
C	(5,1)	(5,3)	(5,5)	(5,5)	(5,7)
D	(5,1)	(5,3)	(5,5)	(5,5)	(5,7)
E	(7,1)	(7,3)	(7,5)	(7,5)	(7,7)

8)

$v_{2A} \backslash v_{2B}$	A	B	C	D	E
A	1	2	3	3	4
B	2	3	4	4	5
C	3	4	5	5	6
D	3	4	5	5	6
E	4	5	6	6	7

$\bar{x}$	1	2	3	4	5	6	7
$P(\bar{x}=\bar{x})$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$



8)

$$E(\bar{x}) = 1+2+\dots+6+7 = 105 = 4,2$$

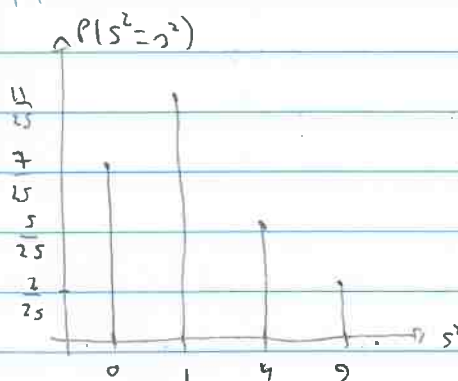
$$V(\bar{x}) = \sum_{i=1}^5 \frac{(x_i - \bar{x})^2}{25} = \frac{(1-4,2)^2}{25} + \frac{(2-4,2)^2}{25} + \dots + \frac{(7-4,2)^2}{25} = \frac{52}{25} = 2,08$$

$$MD(\bar{x}) = X_{(\frac{n+1}{2})} = X_{(3)} = 4$$

Obs.: $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(25)}$

A média amostral coincide com a média populacional e a variância s^2 é igual a variância de X , dividida por 2. $P(S^2 = s^2)$

S^2	A	B	C	D	E
A	0	1	4	4	9
B	1	0	1	1	4
C	1	1	0	0	1
D	4	1	0	0	1
E	9	4	1	1	0



S^2	0	1	4	9
$P(S^2 = s^2)$	$\frac{7}{25}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{2}{25}$

d)

$$E[S^2] = 0 \cdot \frac{7}{25} + 1 \cdot \frac{11}{25} + 4 \cdot \frac{5}{25} + 9 \cdot \frac{2}{25} = \frac{11 + 20 + 18}{25} = \frac{49}{25} = 1,96$$

$$\text{Var}[S^2] = E[S^4] - (E[S^2])^2, \text{ em que}$$

S^4	0	1	16	81
$P(S^4 = s^4)$	$\frac{7}{25}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{2}{25}$

$$E[S^4] = 0 \cdot \frac{7}{25} + 1 \cdot \frac{11}{25} + 16 \cdot \frac{5}{25} + 81 \cdot \frac{2}{25} = \frac{253}{25} = 10,12$$

$$\text{Var}[S^2] = 10,12 - 1,96^2 = 6,2784.$$

h)

$x_1 \backslash x_2$	1	3	5	7	$P(X_1 = x_1)$
1	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{5}$
7	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$
$P(X_2 = x_2)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	

i) Sim, pois $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2)$, para qual quer valores de x_1 e x_2 .

ii) São independentes.

k) $S^2 = 125$ triplos

l) comportamento análogo ao de duas firmas

m) comportamento semelhante com a letra f).

n) As marginais são independentes, mas a duas.

2.1

a) $X \sim N(100, 10^2)$, e $z = \frac{X-100}{10}$, com $z \sim N(0,1)$

$$P(90 < X < 110) = P\left(\frac{90-100}{10} < \frac{X-100}{10} < \frac{110-100}{10}\right) = P(-1 < z < 1)$$

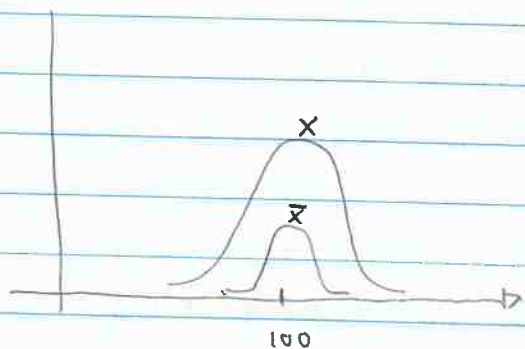
$$\text{então } P(-1 < z < 1) = P(z < 1) - P(z < -1) = 0,84134 - 0,15866 \approx 0,68268$$

b) $\bar{X} \sim N(100, (\frac{10}{4})^2)$, e $z = \frac{\bar{X}-100}{\frac{10}{4}}$, com $z \sim N(0,1)$

$$P(90 < \bar{X} < 110) = P\left(\frac{90-100}{\frac{10}{4}} < \frac{\bar{X}-100}{\frac{10}{4}} < \frac{110-100}{\frac{10}{4}}\right)$$

$$= P(-4 < z < 4) = P(z < 4) - P(z < -4) = 0,9999 - 0 = 0,9999$$

c)



d)

$$P(90 < \bar{X} < 110) = 95\%, \text{ em que } \bar{X} \sim N(100, \frac{10^2}{n}) \text{ logo}$$
$$P\left(\frac{90-100}{\frac{10}{\sqrt{n}}} < z < \frac{110-100}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right) = P(-\sqrt{n} < z < \sqrt{n}) = 0,95$$

consultando a tabela da distribuição normal

$$P(-\sqrt{n} < z < \sqrt{n}) = 0,95 \approx P(-1,96 < z < 1,96) \text{ logo}$$

$$\sqrt{n} = 1,96 \Rightarrow n = 1,96^2 \Rightarrow n \approx 3,8416, \text{ logo } \boxed{n=4}$$

3:)

a) Sejam $Y_n \sim \text{bin}(8; 0,2)$ então

$$P(Y_n = x) = \binom{8}{x} 0,2^x 0,8^{8-x}, \quad x=0,1,\dots,8, \text{ sendo a distribuição exata}$$

para $\hat{p} = \frac{k}{8}$, com $k=0,1,\dots,8$ é dada por

$k/8$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75
$P(\hat{p} = k/8)$	0,1678	0,3355	0,2936	0,1468	0,0459	0,0092	0,0011
$k/8$	0,875	1					
$P(\hat{p} = k/8)$	0,0001	0,0000					

b)

A aproximação da normal à binomial é dada por

$$P(\hat{p} = \frac{k}{8}) = P(S = k) \approx P(k - 0,5 < X < k + 0,5), \text{ em que } S \sim \text{bin}(8; 0,2)$$

e $X \sim N(\mu, \text{var}(X)) = N(1,6; 1,28)$, $n=8$ e $p=0,2$ então consultando a tabela

$k/8$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1
$P(\hat{p} = k/8)$	0,133	0,299	0,322	0,167	0,041	0,005	0,0003	≈ 0	≈ 0

$$Z = \frac{X - 1,6}{\sqrt{1,28}} \Rightarrow P\left(\frac{k - 0,5 - 1,6}{\sqrt{1,28}} < Z < \frac{k + 0,5 - 1,6}{\sqrt{1,28}}\right)$$

Por exemplo $k=0 \Rightarrow P(-1,86 < Z < -0,97) \approx 0,133$, e assim sucessivamente.

c) razoável, devido ao n pequeno.

d) tem que ser no caso simétrico, ou seja para $p \rightarrow 1/2$.

4:)

$$a) E[X] = 6 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,2 + \dots + 18 \cdot 0,1 = 12$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = 36 \cdot 0,1 + 81 \cdot 0,2 + \dots + 324 \cdot 0,1 = 154,8$$

$$\text{logo } V[X] = 154,8 - 12^2 = 10,8$$

$$Md(X) = L.I. + h \cdot \frac{(0,5 - f.a.)}{(f.a. - f.a.)} = 10,5 + 3 \cdot \frac{(0,5 - 0,3)}{(0,7 - 0,3)} = 10,5 + 1,5 = 12$$

L.I. = Limite inferior h = amplitude da classe

tilibra

f.a. = frequência acumulada da classe anterior à mediana

f.a. = frequência acumulada da classe da mediana.

b) Possíveis pares são:

$(6,6), (6,9), \dots, (18,18)$, ou seja 25, então $\bar{x} = \frac{6+6}{2} = 6, \dots, \bar{x} = \frac{6+9}{2} = 7,5$.

$\bar{x}$	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15	16,5	18
$P(\bar{X}=\bar{x})$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01
$m\bar{x}$	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15	16,5	18
$P(M\bar{x}=m\bar{x})$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01

c)

$$E[\bar{X}] = 6 \cdot 0,01 + 7,5 \cdot 0,04 + \dots + 18 \cdot 0,01 = 12 = E[M\bar{x}] = M\bar{x}(\bar{x}).$$

d) Analisar um par são as mesmas distribuições.

e)

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\sigma \cdot \sqrt{n}}, \text{ para } n=2 \text{ então por exemplo para } \bar{x}=6$$

$$Z = \frac{6 - 12}{\sqrt{10,8}} \approx -2,58 \text{ logo os dois cálculos são análogos}$$

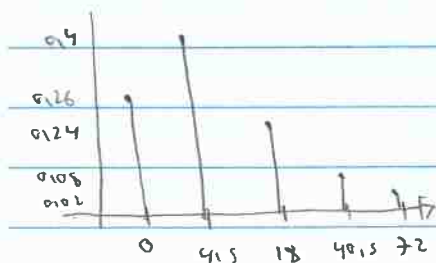
Z	-2,58	-1,94	-1,29	-0,65	0,00	0,65	1,29	1,94	2,58
$P(Z=z)$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01

f)

$$E[Z] = -2,58 \cdot 0,01 + \dots + 2,58 \cdot 0,01 = 0 \text{ e } \text{Var}[Z] = 1, \text{ pois } Z \text{ é uma normal padrão.}$$

g)

S^2	0,0	4,5	18	40,5	72
$P(S^2=S^2)$	0,26	0,4	0,24	0,08	0,02



$$\frac{\sigma^2}{n} \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

h)

$$E(S^2) = 0 \cdot 0,26 + 4 \cdot 0,4 + 16 \cdot 0,24 + 36 \cdot 0,08 = 10,8$$

$$V[S^2] = E[S^4] - (E[S^2])^2$$

$$E[S^4] = 0^4 \cdot 0,26 + 4^4 \cdot 0,4 + 16^4 \cdot 0,24 + 36^4 \cdot 0,08 = 320,76$$

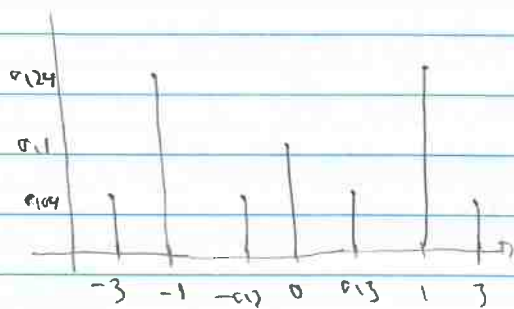
$$V[S^2] = 320,76 - 10,8^2 = 204,12$$

i)

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}, \text{ por exemplo para } \bar{X} = 6$$

$$t = \frac{6 - 12}{\frac{\sqrt{8,64}}{\sqrt{16}}} = -3 \text{ então } S = \sigma \cdot \frac{n-1}{n} = 10,8 \cdot 0,8 = 8,64$$

t	-3	-1	-0,3	0	0,3	1	3
P(t=t)	0,04	0,24	0,04	0,1	0,04	0,24	0,04



5.)

$$a) \bar{X}_{16} \sim N\left(10, \frac{4}{16}\right) = N(10, 1) \text{ logo}$$

$$P(\bar{X}_{16} > 12) = P\left(\frac{\bar{X}_{16} - 10}{1} > \frac{12 - 10}{1}\right) = P(Z > 2) \approx 0,022$$

b) Escolhendo tamanho de amostra entre 1 e 5 temos

$$\bar{X}_1 \sim N(10, 4) \quad \bar{X}_2 \sim N\left(10, \frac{4}{2}\right) \quad \bar{X}_3 \sim N\left(10, \frac{4}{3}\right) \quad \bar{X}_4 \sim N(10, 2)$$

então

n	1	2	3	4
P($\bar{X}_n > 12$)	30,9%	24%	19,3%	15,9%

$$P(\bar{X}_1 > 12) = P(Z > 0,5) = 30,9\% \text{ (os demais casos são análogos).}$$

c) n=1.

tilibra

65)

$$a) E[e] = E[\bar{x}] - \mu = 0 \quad \text{e} \quad \text{var}[e] = \text{var}[\bar{x}] = \frac{400}{n}$$

b) temos $n=25$ então

$$e_{25} \sim N(0, 16) \Rightarrow P(|e_{25}| > 2) = P(e_{25} < -2) + P(e_{25} > 2) \approx 0,1171$$

$$c) e_{100} \sim N(0, 4) \Rightarrow P(|e_{100}| > 2) = P(e_{100} < -2) + P(e_{100} > 2) \approx 0,3173$$

$$d) P(|e| > d) = 1\%$$

$$P(e_n < -d) + P(e_n > d) = 1\% \quad \text{para } n=100$$

$$P\left(\frac{e_n}{\sqrt{4}} < \frac{-d}{\sqrt{4}}\right) + P\left(\frac{e_n}{\sqrt{4}} > \frac{d}{\sqrt{4}}\right) = 1\% \Rightarrow P\left(z < \frac{-d}{\sqrt{4}}\right) + P\left(z > \frac{d}{\sqrt{4}}\right)$$

$$= 2 \cdot P\left(z < \frac{-d}{2}\right) = 0,01 = 2 \cdot P(z < -2,58) \quad \text{logo } d \approx 2,58 \cdot 2 = 5,16.$$

2)

Usando a fórmula do tamanho da amostra temos

$$n = \frac{z^2 \sigma^2}{E^2} = \frac{1,96^2 \cdot 400}{1^2} = 1536,64 \approx 1537$$

7.)

$$N \quad \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(\mu, \frac{2,5^2}{4}\right) \quad \text{então}$$

$$P(\bar{x} < 46,3 \text{ ou } \bar{x} > 53,7 | n=50) = P\left(\frac{\bar{x} - 50}{\frac{2,5}{2}} < \frac{46,3 - 50}{\frac{2,5}{2}}\right) + P\left(\frac{\bar{x} - 50}{\frac{2,5}{2}} > \frac{53,7 - 50}{\frac{2,5}{2}}\right)$$

$$= P(z < -2,96) + P(z > 2,96) = 2 \cdot P(z < -2,96) \approx 0,00307$$

b)

$$P(46,3 \leq \bar{x} \leq 53,7 | n=50) = P\left(\frac{46,3 - 50}{\frac{2,5}{2}} \leq z \leq \frac{53,7 - 50}{\frac{2,5}{2}}\right)$$

$$= P(-5,92 \leq z \leq 0) = P(z \leq 0) - P(z < -5,92) \approx 0,5.$$