

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS - *NOTAS DE AULAS*

Capítulo I

Sergio Persival Baroncini Proença

Prof. Titular

São Carlos, julho de 2018.

1. Problemas não-lineares e estratégias de resolução

No problema da barra submetida a esforço normal ilustrada na Figura 1, as molas distribuídas de vinculação externa oferecem resistência proporcional à sua rigidez e aos deslocamentos dos seus pontos de aplicação. Considera-se, ainda, que na hipótese da força aplicada \bar{P} ser variável no tempo, movimentam-se o efeito de inércia, sendo levado em conta na forma de força distribuída dada pelo produto da densidade ρ pela aceleração $\frac{d^2u}{dt^2}$.

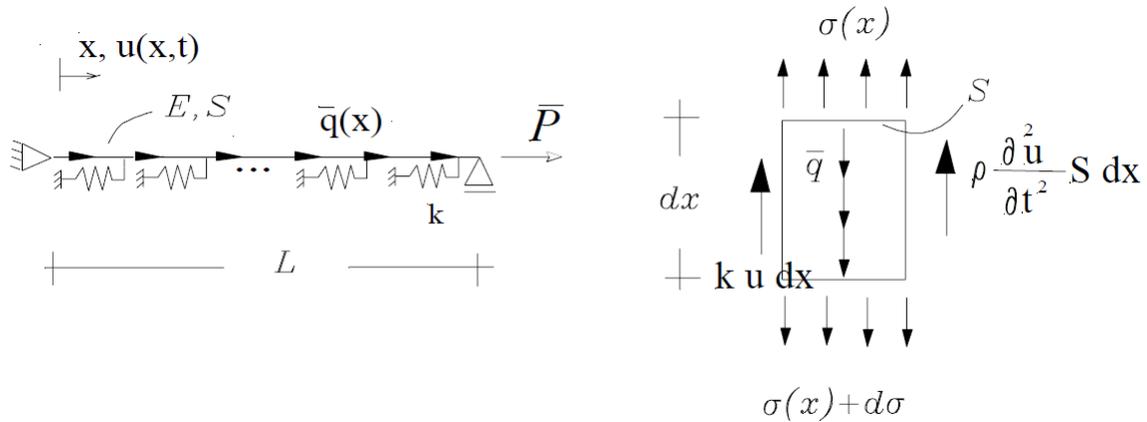


Figura 1 - Barra solicitada por força normal e um elemento infinitesimal arbitrário

Portanto, a condição de equilíbrio de forças, explicitada num certo instante \bar{t} , tem a seguinte forma:

$$-\sigma S + (\sigma + d\sigma)S + \bar{q} dx - k u dx - \rho S dx \frac{d^2u}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

$$\therefore \frac{d\sigma}{dx} - \rho \frac{d^2u}{dt^2} = -\left(\frac{\bar{q} - k u}{S}\right) \quad (2)$$

onde ρ representa a densidade do material.

Considerando-se que em qualquer instante de tempo vale a condição de compatibilidade típica de um regime de pequenas deformações:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \text{ e que o material apresenta resposta 'visco-elástica'}$$

governada localmente pela lei ideal (*): $\sigma = E \left(\varepsilon + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} \right)$, sendo α o coeficiente de viscosidade (> 0), a equação de equilíbrio assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{(\bar{q} - k u)}{E S} \quad (3)$$

sendo $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ definida como a velocidade de propagação de uma onda no meio elástico.

O problema se configura como não-linear quando o módulo de elasticidade E ou, pelo menos, um dos coeficientes entre ρ, α e k varia com a própria solução. Mas estas não são as únicas possibilidades. Mesmo que aqueles coeficientes sejam invariáveis, a não-linearidade pode ocorrer por mudança de geometria^(**) que implique em necessidade de atualização da descrição do equilíbrio ('*não-linearidade geométrica*') ou por mudança da condição de contorno durante o processo de deformação ('*não-linearidade de contato*').

Uma abordagem introdutória da análise não-linear física pode ser conduzida sobre uma versão simplificada da equação (3). Por exemplo, adotando-se $k, \alpha = 0$ e considerando-se que as forças de inércia sejam desprezadas, ($\rho = 0$), o problema se configura como uma análise estática. Nessa condição, a equação (2) se reduz à forma:

$$\frac{d\sigma}{dx} + \left(\frac{\bar{q}}{S} \right) = 0 \quad (4)$$

Nessa situação, em que a força externa \bar{P} não é variável no tempo, as condições de contorno em deslocamento e em força são:

$$u(0) = 0$$

* No exemplo da Fig.1 o corpo está suficientemente vinculado para eliminar movimentos de corpo rígido.

(**) Mudanças importantes de geometria podem ser induzidas por deformações grandes e/ou giros grandes (no caso de flexão), das seções ou cordas dos eixos deformados.

$$\sigma(L)S = \bar{P} \quad (5)$$

Independente da caracterização linear ou não-linear que se venha a dar ao problema, neste texto a forma matemática adotada não será a chamada *forte*, explicitada por uma equação diferencial e condições de contorno, como as (4) e (5). Em seu lugar será empregada a chamada forma *fraca*, ou variacional, explicitada pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais e que pode ser escrita diretamente ou obtida com a ajuda do método dos Resíduos Ponderados. Entre outras vantagens, a forma fraca permite uma passagem natural para o emprego do Método dos Elementos Finitos ou de outros métodos numéricos de resolução para fins de obtenção de soluções aproximadas.

Considere-se, então, que a forma fraca seja gerada integrando-se a chamada forma *variacional* ou em *Resíduos Ponderados*. Tal forma é resultante da ponderação da equação diferencial de equilíbrio por uma função peso $\delta u(x)$, diferenciável e também homogênea na condição de contorno essencial do problema ($\delta u(0) = 0$, no caso). Assim sendo, escreve-se:

$$\int_0^L \left[\frac{d\sigma}{dx} + \left(\frac{\bar{q}}{S} \right) \right] \delta u dx = 0 \quad \forall \delta u \quad (6)$$

Efetuando-se a integração por partes da primeira parcela, obtém-se:

$$\int_0^L \frac{d}{dx} (\sigma \delta u) dx - \int_0^L \left[\sigma \frac{d\delta u}{dx} \right] dx + \int_0^L \frac{\bar{q}}{S} \delta u dx = 0 \quad (7)$$

A primeira integral envolve somente termos no contorno, de modo que a relação anterior passa a:

$$\underbrace{\sigma(L) \delta u(L)}_{\bar{P}/S} - \underbrace{\sigma(0) \delta u(0)}_{=0} - \int_0^L \left[\sigma \frac{d\delta u}{dx} \right] dx + \int_0^L \frac{\bar{q}}{S} \delta u dx = 0 \quad (8)$$

Na relação anterior nos seus dois primeiros termos, podem ser levadas em conta as condições de contorno em forças e de homogeneidade da função peso na condição de contorno essencial. A partir daí, rearranjando-se as parcelas e trocando-se convenientemente os sinais, tem-se finalmente:

$$\int_0^L \left[\sigma S \frac{d \delta u}{d x} \right] dx = \bar{P} \delta u(L) + \int_0^L \bar{q} \delta u dx \quad \forall \delta u \quad (9)$$

A relação anterior exprime a condição de equilíbrio do problema em *forma fraca*. A razão para essa denominação é que nela exige-se um grau de continuidade menor para σ comparativamente ao que se exige na condição de equilíbrio em forma forte dada pela (4).

Por outro lado, admitindo-se que a função peso $\delta u(x)$ seja representativa de um campo de deslocamentos virtuais, a forma fraca passa a ser interpretada como o Princípio dos Trabalhos Virtuais escrito para o problema em estudo. Em coerência com essa interpretação, na (9), à esquerda da igualdade aparece o trabalho virtual interno das tensões, ou das forças normais $(\sigma S)^{(*)}$, e à direita o trabalho virtual das forças externas. Segue daí que sendo conhecido à partida como construir a expressão do P.T.V., pode-se empregá-lo para gerar diretamente a forma fraca do problema sem necessidade de recorrer ao método dos resíduos ponderados.

Ocorre que é possível inserir na forma fraca do equilíbrio, também as condições de compatibilidade entre deslocamento e deformação, bem como a relação constitutiva, entre tensão e deformação. Nesse sentido, se as condições relativas à resposta constitutiva do material e de compatibilidade das deformações se restringirem à resposta elástico-linear do meio (ou seja: módulo de elasticidade constante) e à relação linear de compatibilidade $\left(\varepsilon = \frac{du}{dx} = u' \right)$ (neste caso implicando num regime assumido de pequenas deformações) o problema expresso matematicamente pela forma fraca se caracteriza como um problema linear (física e geometricamente). Entretanto, caso ao menos uma dessas condições não se verifique, o problema resulta não-linear.

Seja, então, a não-linearidade introduzida, por exemplo, por uma resposta constitutiva elástico não-linear caracterizada por uma dependência contínua do módulo de elasticidade em relação à deformação:

(*) Nota-se que $\delta u' dx = d \delta u$, representando o deslocamento virtual relativo entre seções imediatamente vizinhas e que determina a contribuição elementar da força normal para o trabalho virtual interno.

$$E = E(\varepsilon(u)) \quad (10 \text{ a})$$

Admitindo-se, ainda, que o regime seja de pequenas deformações, a relação constitutiva se escreve:

$$\sigma = E(u)\varepsilon = E(u)\frac{du}{dx} \quad (10 \text{ b})$$

Inserindo-se as condições (10 a,b) no P.T.V., o chamado *problema de valor de contorno* se resume em encontrar $u(x)$ tal que:

$$\int_0^L \left[E(u)S \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} \right] dx = \bar{P}\delta u(L) + \int_0^L \bar{q} \delta u dx \quad \forall \delta u \quad (11)$$

A determinação de uma solução analítica para o problema anterior depende da possibilidade de integração das relações indicadas na (11)^(*).

Respeitando as restrições sobre as funções envolvidas na (11), o Método de Galerkin propõe uma forma geral e eficiente de determinar uma solução aproximada. Essencialmente, trata-se de sua representação, bem como do campo de deslocamentos virtuais, na forma de combinação linear de uma base de funções de aproximação para um espaço de dimensão finita. Ocorre que, independente do método de Galerkin, a Técnica dos Elementos Finitos propõe uma maneira eficiente de construção da base de aproximação, podendo, então, ser empregada para a obtenção de aproximações de Galerkin^(**).

De acordo com a Técnica dos Elementos Finitos, o domínio da solução é discretizado pela união de um conjunto disjunto de subdomínios, ou elementos finitos. Uma aproximação global da solução (para todo o domínio do problema) pode ser construída pelas contribuições de aproximações locais definidas nos domínios de cada elemento finito.

(*) Matematicamente isto implica que as funções envolvidas, e suas primeiras derivadas, além das forças externas, tenham valores finitos no intervalo de interesse.

(**) São assim denominadas neste texto as aproximações definidas por combinações lineares de funções e que empregam as mesmas bases para os campos reais e virtuais.

Assim sendo, no domínio de um elemento, as aproximações de Galerkin para os campos de deslocamento e deslocamento virtual são construídas por uma base de funções (*'de forma'*) polinomiais, sendo representadas por:

$$u^e(x) = u_i^e N_i^e(x); \quad \delta u^e(x) = \delta u_j^e N_j^e(x) \quad c/i, j = 1, \dots, n \quad (12)$$

onde o índice superior e está para o elemento, o índice inferior repetido indica somatória e n é o número de nós do elemento. Sendo x_j a posição de um nó, as funções de forma do elemento são tais que:

$$N_i^e(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (13)$$

Como consequência, os parâmetros que aparecem nas combinações lineares da (12) coincidem com os valores nodais das funções aproximativas e recebem o nome de graus de liberdade. Após cumprir etapas que envolvem primeiro a substituição do campo de aproximação virtual e depois do campo real, a (11) assume a seguinte forma, dita discretizada, quando particularizada para o elemento finito genérico:

$$K_{ij}^e(u) u_j^e = f_j^e \quad (14 a)$$

onde K_{ij}^e é denominada matriz de rigidez do elemento e f_j^e é denominado vetor de forças nodais equivalentes. Na (13) valem, ainda, as definições:

$$K_{ij}^e = \int_0^{L_e} \left[E(u) S \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} \right] dx$$

$$f_j^e = (\bar{P}_j^*) N_j^e(x = x_j^e) + \int_0^{L_e} \bar{q} N_j^e(x) dx \quad (14 b,c)$$

Nota-se que \bar{P}_j^* representa força externa concentrada no nó do elemento, a qual coincidirá, no exemplo em questão, ou com a força externa de reação, ou com a força \bar{P} , quando nó do elemento coincidir também com o ponto de atuação de uma ou outra força na estrutura.

Como exemplo de geração tanto da matriz de rigidez quanto do vetor de forças nodais, considere-se que no âmbito do elemento o campo de deslocamentos seja expresso mediante uma interpolação linear dos valores nodais. Neste sentido, definem-se graus de liberdade em deslocamento atrelados aos nós nas extremidades do elemento e, conseqüentemente, os índices i e j variam de 1 a 2. Assim sendo, a aproximação para o deslocamento, bem como as funções de forma lineares do elemento escrevem-se:

$$u^e(x) = N_1^e(x)u_1^e + N_2^e(x)u_2^e$$

$$N_1^e(x) = 1 - \frac{x}{L^e}; \quad N_2^e(x) = \frac{x}{L^e} \quad c/ \quad 0 \leq x \leq L^e \quad (15)$$

Segue daí que:

$$\underline{\underline{K}}^e = \begin{bmatrix} \int_0^{L^e} \left[E(u)S \frac{dN_1^e}{dx} \frac{dN_1^e}{dx} \right] dx & \int_0^{L^e} \left[E(u)S \frac{dN_1^e}{dx} \frac{dN_2^e}{dx} \right] dx \\ \int_0^{L^e} \left[E(u)S \frac{dN_2^e}{dx} \frac{dN_1^e}{dx} \right] dx & \int_0^{L^e} \left[E(u)S \frac{dN_2^e}{dx} \frac{dN_2^e}{dx} \right] dx \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\underline{\underline{f}}^e = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^* + \int_0^{L^e} \bar{q} N_1^e(x) dx \\ \bar{P}_2^* + \int_0^{L^e} \bar{q} N_2^e(x) dx \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^* + \frac{\bar{q} L^e}{2} \\ \bar{P}_2^* + \frac{\bar{q} L^e}{2} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Resta, evidentemente, a definição da lei constitutiva prescrevendo a variação do módulo de elasticidade com o deslocamento. Nesse sentido, para fins de ilustração de uma dependência dessa natureza, admita-se a seguinte lei de variação:

$$E(u(x)) = E_0 \left[1 - \frac{\varepsilon(u(x))}{\varepsilon_{máx}} \right] \quad (c/ \quad 0 < \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{máx}} < 1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{máx}) \quad (18)$$

A lei adotada pode ser representativa de um caso de elasticidade não-linear, sendo $\varepsilon_{m\acute{a}x}$ uma limitação identificada experimentalmente, de modo a garantir, por exemplo, a restrição do modelo ao regime de pequenas deformações ou, então, um valor adotado tal que não resultem valores negativos para o módulo de elasticidade.

Tendo-se em vista que a aproximação linear adotada para o campo de deslocamentos dentro dos limites do elemento é definida pela (15), num regime de pequenas deformações, onde $\varepsilon = u'$, a (18) resulta:

$$E = E_0 [1 - \eta u'^e] = E_0 \left\{ 1 - \eta \left[\frac{(u_2^e - u_1^e)}{L^e} \right] \right\} \quad \text{c/} \quad \eta = \frac{l}{\varepsilon_{m\acute{a}x}} \quad (19)$$

Com esta aproximação a matriz de rigidez do elemento assume a forma:

$$\underline{\underline{K^e}} = \frac{E_0 S}{L^e} \left[1 - \eta \left(\frac{u_2^e - u_1^e}{L^e} \right) \right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Claramente nota-se a dependência da matriz de rigidez em relação aos deslocamentos nodais.

A aproximação global resulta então das contribuições das aproximações em cada elemento compatibilizadas igualando-se os graus de liberdade dos nós comuns nas fronteiras entre elementos. Conseqüentemente, ao considerar todos os elementos que compõem certa discretização, a busca de solução aproximada para o problema se resume à resolução de um sistema de equações não-lineares.

Para explicitar um sistema não-linear global, seja uma discretização para o domínio L da barra composta por três nós, limitando dois elementos de comprimentos iguais. Em cada um dos nós, definem-se graus de liberdade globais U_1 , U_2 e U_3 .

Uma vez realizadas as contribuições de cada elemento, e já compatibilizando-se os graus de liberdade nodais, o sistema resolvente, ainda sem impor as condições de contorno, apresenta-se com a seguinte forma:

$$\frac{2E_0S}{L} \begin{bmatrix} 1 - 2\eta \left(\frac{U_2 - U_1}{L} \right) & -1 + 2\eta \left(\frac{U_2 - U_1}{L} \right) & 0 \\ -1 + 2\eta \left(\frac{U_2 - U_1}{L} \right) & 2 - 2\eta \left(\frac{U_3 - U_1}{L} \right) & -1 + 2\eta \left(\frac{U_3 - U_2}{L} \right) \\ 0 & -1 + 2\eta \left(\frac{U_3 - U_2}{L} \right) & 1 - 2\eta \left(\frac{U_3 - U_2}{L} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\bar{q}L}{4} + R_1 \\ \frac{\bar{q}L}{2} \\ \frac{\bar{q}L}{4} + \bar{P} \end{Bmatrix}$$

onde R_1 é a força de reação no nó fixo. O sistema pode, então, ser alterado substituindo-se a relação de equilíbrio no nó 1 pela condição de deslocamento nulo neste nó. Impondo-se essa condição de contorno essencial, obtém-se:

$$\frac{2E_0S}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 2\eta \left(\frac{U_3 - U_1}{L} \right) & -1 + 2\eta \left(\frac{U_3 - U_2}{L} \right) \\ 0 & -1 + 2\eta \left(\frac{U_3 - U_2}{L} \right) & 1 - 2\eta \left(\frac{U_3 - U_2}{L} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{q}L}{2} \\ \frac{\bar{q}L}{4} + \bar{P} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Por conveniência para as análises que seguem o sistema pode ser representado em forma implícita por:

$$\underline{\underline{K}}(\underline{U})\underline{U} = \underline{F} \quad (22)$$

onde $\underline{\underline{K}}(\underline{U})$ recebe a denominação de matriz de rigidez *secante*.

Uma possibilidade de resolução do sistema não-linear anterior explora um procedimento iterativo, fundamentalmente baseado em estimativa de uma solução assumida preliminarmente e correção do erro a ela associado.

Há essencialmente duas diferentes estratégias de resolução iterativa: uma dita direta, ou *secante*, e outra, baseada no Método de Newton, dita *tangente*.

A *estratégia secante* busca a solução, em correspondência a certo nível de força aplicada, mediante iterações que decorrem de correções sucessivas sobre aproximações obtidas a partir de uma estimativa inicial para a rigidez ‘secante’ coincidente com a rigidez elástica ($\underline{\underline{K}}(\underline{U}) = \underline{\underline{K}}(0)$). Basicamente,

simbolizando por k uma iteração arbitrária, admitindo-se que se tenha determinado a solução na iteração anterior, $(k-1)$, usa-se esta solução para a atualização da matriz de rigidez secante e determinação de nova estimativa correspondente à iteração k . Nessa estratégia, a (22) fica representada como:

$$\underline{\underline{K}}(\underline{U}^{k-1})\underline{U}^k = \underline{F}^a \quad (23)$$

sendo que \underline{F}^a representa o nível de força aplicada no início do processo iterativo. Claramente, a (23) evidencia um descompasso entre o deslocamento empregado no cálculo da rigidez secante $\underline{\underline{K}}$ e o novo deslocamento estimado. Em razão disso, gera-se um resíduo, ou erro, que pode ser determinado com a atualização da rigidez ao final de cada iteração, e que deve ser corrigido:

$$\underline{R} = \underline{\underline{K}}(\underline{U}^k)\underline{U}^k - \underline{F}^a \neq \underline{0} \quad (24)$$

Havendo resíduo, de medida em módulo superior a certa tolerância adotada, atualiza-se o número da iteração e retoma-se a solução do sistema indicado na (23). O que se espera na seqüência do processo iterativo é que o resíduo diminua progressivamente, imaginando-se que o mesmo possa ser suspenso quando sua medida, ou norma, for inferior a uma tolerância ('*tol*') adotada. Por exemplo, como normas e critério de convergência, podem ser adotadas:

$$\|\underline{R}\|_{\infty} = \max_i (|R_i|) \leq tol$$

$$\|\underline{R}\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N^*} R_i^2} \leq tol \quad (25 \text{ a,b})$$

onde N^* é o número de componentes do vetor resíduo representado pela (24).

Trata-se, em qualquer caso indicado pelas (25), de um critério de convergência governado pela tolerância ao erro na condição de equilíbrio. Alternativamente, o critério pode ser baseado no controle sobre a convergência dos deslocamentos entre iterações consecutivas, o que pode ser feito com uma medida dos deslocamentos relativos definida por:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N^*} (U_i^k - U_i^{k-1})^2}{\sum_{i=1}^{N^*} (U_i^k)^2}} \leq tol \quad (26)$$

Já a *estratégia incremental-iterativa tangente* é também denominada estratégia de Newton-Raphson, e tem por base a idéia que o resíduo seja uma função contínua nas vizinhanças da solução. Assim, na hipótese que na iteração k a solução tenha sido alcançada, a ela deve corresponder um valor teoricamente nulo para o resíduo.

Explorando essa hipótese e admitindo-se continuidade para a função resíduo é possível exprimi-la a partir de um desenvolvimento em série de Taylor sobre a interação anterior, na forma:

$$\underline{R}(\underline{U}^k) = \underline{R}(\underline{U}^{k-1}) + \nabla \underline{R}(\underline{U})|_{\underline{U}^{k-1}} \underline{\delta U} + \dots = 0 \quad (27)$$

Supondo que a ‘função resíduo’ tenha variação suave na vizinhança da solução, pode-se representá-la nessa vizinhança tomando-se somente o desenvolvimento em série até a primeira ordem. Desse modo, a (27) passa a fornecer uma relação linear para atualização do campo de deslocamentos:

$$\nabla \underline{R}(\underline{U})|_{\underline{U}^{k-1}} \underline{\delta U} = -\underline{R}(\underline{U}^{k-1}) \quad (28)$$

Nota-se que a relação anterior exprime uma igualdade entre vetores, de modo que o termo que envolve o ‘gradiente’ do resíduo ($\nabla \underline{R}$) é uma grandeza tensorial de segunda ordem^(*).

Ocorre que uma grandeza toensorial de segunda ordem pode ser representada por uma matriz. No caso, $\nabla \underline{R} = \underline{\underline{K}}_T$, é dita *matriz de rigidez tangente* e suas componentes podem ser calculadas pela seguinte regra para o cálculo do gradiente indicado:

^(*) Essencialmente uma transformação linear que associa vetor a vetor.

$$\begin{aligned}
[\nabla \underline{R}(\underline{U})]_{ij} &= \frac{\partial R_i}{\partial U_j} \\
&= \frac{\partial (K_{im} U_m - F_i)}{\partial U_j} \\
&= \frac{\partial (K_{im})}{\partial U_j} U_m + K_{im} \frac{\partial (U_m)}{\partial U_j} = \frac{\partial (K_{im})}{\partial U_j} U_m + K_{im} \delta_{mj} \\
&= \frac{\partial (K_{im})}{\partial U_j} U_m + K_{ij}
\end{aligned} \tag{29}$$

Observa-se que na derivação anterior se admitiu que a força aplicada fosse invariável com o campo de deslocamentos, o que é válido na condição de força conservativa. Nota-se, também, o emprego da notação indicial, segundo a qual a repetição de índices (m) numa mesma parcela indica somatória. No caso do exemplo, os índices i, j e m variam de 1 a 3.

Por outro lado, analisando-se a última igualdade na (29), pode-se concluir que a depender do modelo constitutivo adotado a matriz de rigidez tangente pode resultar não-simétrica.

Uma vez determinado $\underline{\delta U}$ mediante a resolução da (28), a nova estimativa para o campo de deslocamentos se escreve:

$$\underline{U}^k = \underline{U}^{k-1} + \underline{\delta U} \tag{30}$$

Comparando-se as duas estratégias iterativas de solução comentadas, mediante análise das relações (23) e (28), nota-se, em primeiro lugar, que em cada iteração os sistemas resolutivos correspondentes são lineares, uma vez conhecido o vetor \underline{U}^{k-1} . Todavia, enquanto que o algoritmo de solução associado à estratégia secante fornece um valor total para o vetor deslocamento, aquele associado ao método de Newton determina um incremento de deslocamento; por esses motivos a matriz $\underline{\underline{K}}(\underline{U}^{k-1})$ é denominada rigidez algorítmica secante, enquanto que a matriz dada por $\underline{\underline{K}}_T(\underline{U}^{k-1}) = \nabla \underline{R}(\underline{U})|_{\underline{U}^{k-1}}$ é denominada matriz algorítmica de rigidez tangente.

A Figura 2 ilustra uma interpretação gráfica dos algoritmos de resolução para cada uma das estratégias descritas.

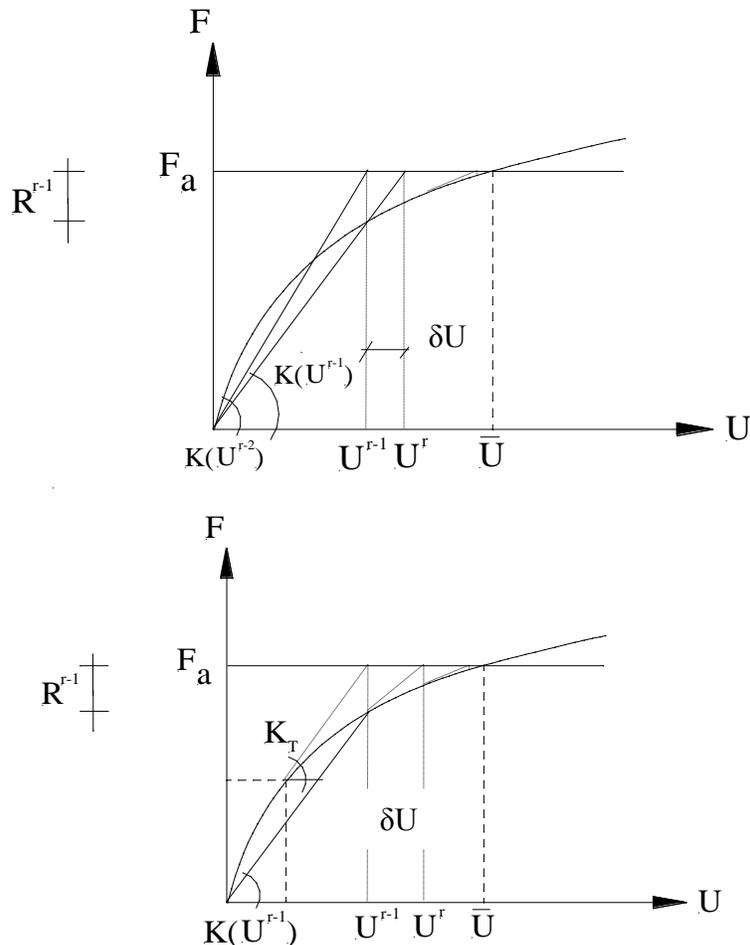


Figura 2 - Estratégias iterativas: secante e de Newton-Raphson

Quando o problema a ser analisado apresentar forte grau de não-linearidade é conveniente dividir o carregamento aplicado em incrementos ou passos, realizando-se para cada passo uma análise iterativa. Somente depois de atendido o critério de convergência interrompe-se o processo iterativo dentro de um passo e passa-se ao incremento seguinte de carregamento, incorporando-se o resíduo remanescente ao próximo resíduo; gera-se, neste sentido, um *procedimento incremental-iterativo*.

Um algoritmo guia para a implementação computacional do método de Newton-Raphson pode ser composto pelas seguintes etapas:

- 1) Início do processo: prescrevem-se valores nulos para o vetor de força externa total acumulada ($\underline{F} = \underline{0}$) e vetor resíduo inicial ($\underline{R} = \underline{0}$). Além disso, adota-se para rigidez inicial a matriz de rigidez secante elástica da estrutura;
- 2) Procedem-se a passos sucessivos de análise buscando atingir o número total adotado de incrementos de força aplicada ($\underline{\Delta F}$)
 - a. Com $\underline{\Delta F}$ atualizam-se os vetores de força total acumulada e resíduo: $\underline{F} = \underline{F} + \underline{\Delta F}$ $\underline{R} = \underline{R} - \underline{\Delta F}$; ^(*)
 - b. Etapa iterativa:
 - i. Resolve-se $\underline{K}_T \delta \underline{U} = -\underline{R}$;
 - ii. Atualiza-se o vetor de deslocamentos: $\underline{U} = \underline{U} + \delta \underline{U}$;
 - iii. Atualizam-se as rigidezes secante e tangente: $\underline{K} = \underline{K}(\underline{U})$ e $\underline{K}_T = \underline{K}_T(\underline{U})$;
 - iv. Determina-se o novo erro: $\underline{R} = \underline{K} \delta \underline{U} - \underline{F}$;
 - c. Caso o número de iterações tenha excedido o número máximo prescrito, interrompe-se a análise;
 - d. Enquanto $\|\underline{R}\|/\|\underline{F}\| > tol$, volta-se a b. Caso contrário:
 - e. Passa-se ao novo incremento de força aplicada e retoma-se o processo no passo a.

É importante notar que a estratégia de Newton-Raphson exige o cálculo da rigidez tangente a cada iteração, o que pode ser procedimento oneroso computacionalmente em problemas que exigem discretização mais refinada. Uma alternativa que se mostra eficiente na redução do custo computacional consiste em realizar a atualização da rigidez tangente somente na primeira iteração de cada passo de carregamento, mantendo-se fixa a rigidez na seqüência das iterações. Esta alternativa, denominada de método de Newton-Raphson *modificado*, apresenta menor taxa de convergência em relação ao método de Newton-Raphson. Sua eficiência pode ser bastante reduzida na

^(*) De passo para passo de carregamento, o resíduo remanescente no passo anterior é acrescentado ao novo resíduo.

medida em que passe a demandar um número maior de iterações; além disso, o processo pode divergir em situações de não-linearidade mais pronunciada.

Por outro lado, ainda no caso da estratégia de Newton-Raphson, havendo dependência da rigidez tangente em relação ao modelo constitutivo adotado, o seu cálculo nem sempre é simples de ser realizado. Quando for este o caso, pode-se optar por uma técnica que forneça uma aproximação para ela. Os algoritmos de otimização denominados *quase-Newton* permitem determinar uma estimativa matematicamente consistente para a matriz tangente. Entretanto, tais algoritmos não serão abordados nestas notas.

Para exemplificar a obtenção de soluções mediante cada uma das estratégias descritas, considere-se que no problema definido pelo sistema (21) adotaram-se os seguintes valores, por conveniência indicados sem dimensão:

$$\bar{P} = 1; \bar{q} = 0; S = 1; \varepsilon_{m\acute{a}x} = 0,005; L = 100; E_0 = 1000.$$

Ao valor adotado para $\varepsilon_{m\acute{a}x}$ corresponde $\eta = 200$. Admita-se, ainda, que a tolerância adotada para o resíduo em forças seja: $tol = 2 \cdot 10^{-2}$, enquanto que $tol = 0,2$ seja a tolerância adotada para a norma dos deslocamentos relativos; a justificativa para esses diferentes valores será apresentada na própria resolução.

Na tabela I apresentam-se alguns pares de tensão e deformação determinados pela relação constitutiva do material idealizado: $\sigma = E_0(1 - \eta\varepsilon)\varepsilon$.

Tabela I

ε	σ
0,0001	0,098
0,0005	0,45
0,00075	0,6375
0,001	0,8
0,00125	0,9375
0,0015	1,05
0,002	1,2
0,0025	1,25
0,003	1,2
0,002	0,8
0,005	0,0

A Figura 3 ilustra o gráfico dessa resposta. Entretanto é importante observar que a solução procurada corresponde ao nível de força $\bar{P} = 1$, atingido ainda no trecho ascendente da curva de resposta.

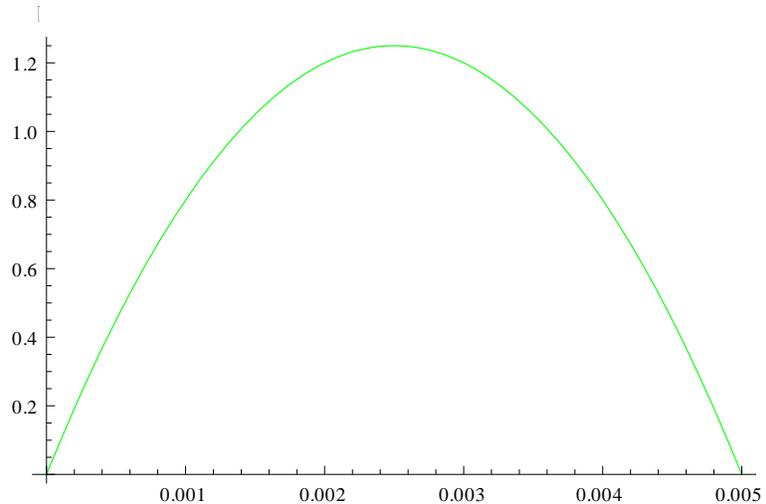


Figura 3 - Material elástico não-linear idealizado

Dentro do procedimento iterativo, considere-se que seja adotada para solução inicial (na iteração $k = 0$) a resposta elástico-linear. Tal solução é

construída com a rigidez inicial, determinada impondo-se $\underline{U}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ na

(23).

A resposta elástica resulta: $\underline{U}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,05 \\ 0,1 \end{Bmatrix}$.

Seja, então, a estratégia direta. A matriz de rigidez corrigida pela solução inicial, e calculada com o auxílio da (21), passa a ser dada por:

$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -16 \\ 0 & -16 & 16 \end{bmatrix}$$

Com a (24) determina-se o primeiro resíduo:

$$\underline{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -16 \\ 0 & -16 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,05 \\ 0,1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,2 \end{Bmatrix}$$

A medida do resíduo pode ser estimada pela (25), de modo imediato:

$$\|\underline{R}\| = \sqrt{(0,2)^2} = 0,2$$

Na iteração seguinte, estima-se a nova aproximação para o vetor deslocamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -16 \\ 0 & -16 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0625 \\ 0,125 \end{Bmatrix}$$

A matriz de rigidez secante corrigida pela nova solução resulta:

$$\underline{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -15 \\ 0 & -15 & 15 \end{bmatrix}$$

E para o novo resíduo:

$$\underline{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -15 \\ 0 & -15 & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0625 \\ 0,125 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0625 \end{Bmatrix}$$

Para a medida do resíduo obtém-se:

$$\|\underline{R}\| = 0,0625$$

Numa nova iteração, determina-se uma aproximação ainda melhor para o vetor deslocamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -15 \\ 0 & -15 & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^3 \\ U_2^3 \\ U_3^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} U_1^3 \\ U_2^3 \\ U_3^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0667 \\ 0,133 \end{Bmatrix}$$

A matriz de rigidez secante corrigida pela nova solução resulta:

$$\underline{\underline{K}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 29,333 & -14,667 \\ 0 & -14,667 & 14,667 \end{bmatrix}$$

O novo resíduo segue de:

$$\underline{\underline{R}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 29,333 & -14,667 \\ 0 & -14,667 & 14,667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0667 \\ 0,133 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,022 \end{Bmatrix}$$

Para a medida do resíduo obtém-se:

$$\|\underline{\underline{R}}\| = 0,022$$

O valor do resíduo já é bastante próximo da tolerância admitida. Então, opta-se por determinar uma última vez a estimativa de solução, interrompendo-se o procedimento. Para esta última estimativa obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} U_1^4 \\ U_2^4 \\ U_3^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0682 \\ 0,136 \end{Bmatrix}$$

Por outro lado, se o critério de parada do processo iterativo fosse baseado na norma dos deslocamentos relativos, dada pela (26), no passo atual o seu valor seria o seguinte:

$$\sqrt{\frac{(0,0682 - 0,0667)^2 + (0,136 - 0,133)^2}{(0,0682)^2 + (0,136)^2}} \approx 0,145$$

o que indica que para obter o mesmo nível de precisão, o valor da tolerância a ser adotada para o controle pela norma dos deslocamentos relativos pode ser uma ordem de grandeza superior ao valor adotado para a norma do resíduo em forças.

Para a aplicação do procedimento de Newton-Raphson é necessário calcular as componentes da matriz de rigidez tangente global, conforme indicado pela (29). Porém, a mesma relação vale para o elemento finito, de modo que a matriz tangente também pode ser obtida pelas contribuições das matrizes de rigidez tangente de cada elemento.

No caso do exemplo, considerando-se a composição da matriz de rigidez do elemento explicitada na (20), pode-se deduzir a seguinte matriz de rigidez tangente:

$$\underline{\underline{K_T^e}} = \frac{E_0}{L^e} \left[1 - 2\eta \left(\frac{u_2^e - u_1^e}{L^e} \right) \right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Das contribuições dos dois elementos da discretização adotada, obtém-se a seguinte matriz de rigidez tangente global:

$$K_T = \frac{2E_0}{L} \begin{bmatrix} 1 - 4\eta \left(\frac{U_2 - U_1}{L} \right) & -1 + 4\eta \left(\frac{U_2 - U_1}{L} \right) & 0 \\ -1 + 4\eta \left(\frac{U_2 - U_1}{L} \right) & 2 - 4\eta \left(\frac{U_3 - U_1}{L} \right) & -1 + 4\eta \left(\frac{U_3 - U_2}{L} \right) \\ 0 & -1 + 4\eta \left(\frac{U_3 - U_2}{L} \right) & 1 - 4\eta \left(\frac{U_3 - U_2}{L} \right) \end{bmatrix}$$

No caso de se optar por deduzir diretamente a matriz tangente global a partir da composição da matriz de rigidez secante explicitada na (21), determinam-se, com a (29), as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
[\nabla \underline{R}(\underline{U})]_{11} &= \frac{\partial(K_{11})}{\partial U_1} U_1 + \frac{\partial(K_{12})}{\partial U_1} U_2 + \frac{\partial(K_{13})}{\partial U_1} U_3 + K_{11} \\
&= \frac{2E_0}{L} \frac{2\eta}{L} U_1 - \frac{2E_0}{L} \frac{2\eta}{L} U_2 + \frac{2E_0}{L} \left[1 - \frac{2\eta}{L} (U_2 - U_1) \right] \\
&= \frac{2E_0}{L} \left[1 - \frac{4\eta}{L} (U_2 - U_1) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\nabla \underline{R}(\underline{U})]_{12} &= \frac{\partial(K_{11})}{\partial U_2} U_1 + \frac{\partial(K_{12})}{\partial U_2} U_2 + \frac{\partial(K_{13})}{\partial U_2} U_3 + K_{12} \\
&= -\frac{2E_0}{L} \left[1 - \frac{4\eta}{L} (U_2 - U_1) \right]
\end{aligned}$$

$$[\nabla \underline{R}(\underline{U})]_{13} = \frac{\partial(K_{11})}{\partial U_3} U_1 + \frac{\partial(K_{12})}{\partial U_3} U_2 + \frac{\partial(K_{13})}{\partial U_3} U_3 + K_{13} = 0$$

$$[\nabla \underline{R}(\underline{U})]_{21} = [\nabla \underline{R}(\underline{U})]_{12}$$

$$\begin{aligned}
[\nabla \underline{R}(\underline{U})]_{22} &= \frac{\partial(K_{21})}{\partial U_2} U_1 + \frac{\partial(K_{22})}{\partial U_2} U_2 + \frac{\partial(K_{23})}{\partial U_2} U_3 + K_{22} \\
&= \frac{2E_0}{L} \left[2 - \frac{4\eta}{L} (U_3 - U_1) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\nabla \underline{R}(\underline{U})]_{23} &= \frac{\partial(K_{21})}{\partial U_3} U_1 + \frac{\partial(K_{22})}{\partial U_3} U_2 + \frac{\partial(K_{23})}{\partial U_3} U_3 + K_{23} \\
&= -\frac{2E_0}{L} \left[1 - \frac{4\eta}{L} (U_3 - U_2) \right]
\end{aligned}$$

$$[\nabla \underline{R}(\underline{U})]_{31} = \frac{\partial(K_{31})}{\partial U_1} U_1 + \frac{\partial(K_{32})}{\partial U_1} U_2 + \frac{\partial(K_{33})}{\partial U_1} U_3 + K_{31} = 0$$

$$[\nabla \underline{R}(\underline{U})]_{32} = \frac{\partial(K_{31})}{\partial U_2} U_1 + \frac{\partial(K_{32})}{\partial U_2} U_2 + \frac{\partial(K_{33})}{\partial U_2} U_3 + K_{32} = [\nabla \underline{R}(\underline{U})]_{23}$$

$$\begin{aligned}
[\nabla \underline{R}(\underline{U})]_{33} &= \frac{\partial(K_{31})}{\partial U_3} U_1 + \frac{\partial(K_{32})}{\partial U_3} U_2 + \frac{\partial(K_{33})}{\partial U_3} U_3 + K_{33} \\
&= \frac{2E_0}{L} \left[1 - \frac{4\eta}{L} (U_3 - U_2) \right]
\end{aligned}$$

Admitindo-se que a solução inicial conhecida seja a mesma adotada para a resolução pela estratégia direta, o incremento de deslocamento deve ser determinado pela (28). O resíduo que comparece nesta relação é também o primeiro resíduo determinado por aquela estratégia.

Assim sendo, o sistema correspondente para o cálculo do acréscimo de deslocamento pela matriz tangente (já impondo as c.c.) assume a forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & -12 \\ 0 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,2 \end{Bmatrix}$$

De onde se obtém:

$$\begin{Bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,01667 \\ 0,0333 \end{Bmatrix}$$

A atualização da solução inicial fornece:

$$\begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0667 \\ 0,133 \end{Bmatrix}$$

O resíduo calculado com a rigidez secante atualizada pela nova resposta resulta:

$$\underline{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 29,333 & -14,667 \\ 0 & -14,667 & 14,667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0667 \\ 0,133 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,022 \end{Bmatrix}$$

De imediato, para a medida do resíduo obtém-se:

$$\|\underline{R}^{(1)}\| = 0,022$$

Considerando-se o critério de parada baseado na norma dos deslocamentos relativos, dada pela (26), no passo atual o seu valor seria o seguinte:

$$\sqrt{\frac{(0,0667 - 0,05)^2 + (0,133 - 0,1)^2}{(0,0667)^2 + (0,133)^2}} \approx 0,248 > 0,2$$

Como os valores das medidas de erro são superiores às tolerâncias admitidas, o procedimento iterativo prossegue.

Assim sendo, o sistema correspondente para o cálculo do novo incremento de deslocamento (já se impondo a condição de contorno) assume a forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 18,667 & -9,333 \\ 0 & -9,333 & 9,333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,022 \end{Bmatrix}$$

De onde se obtém:

$$\begin{Bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,00238 \\ 0,00476 \end{Bmatrix}$$

A atualização da solução fornece:

$$\begin{Bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,069 \\ 0,138 \end{Bmatrix}$$

Verificando-se as medidas das normas do resíduo e dos deslocamentos relativos, obtém-se:

$$\underline{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 28,96 & -14,48 \\ 0 & -14,48 & 14,48 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,069 \\ 0,138 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,00088 \end{Bmatrix}$$

Claramente a tolerância ao resíduo em forças é atendida. Quanto ao resíduo em deslocamentos relativos, determina-se:

$$\sqrt{\frac{(0,069 - 0,0667)^2 + (0,138 - 0,133)^2}{(0,069)^2 + (0,138)^2}} \approx 0,035 \ll 0,2$$

Portanto, o procedimento iterativo pode ser interrompido e a busca de solução poderia prosseguir para um novo nível de força aplicada.

2. Breve comentário sobre a relação entre P.T.V. e Energia Potencial Total.

A forma fraca do problema de valor de contorno dada pelo P.T.V., explicitada pela relação (11) representa a igualdade entre trabalhos virtuais, interno e externo. Considerando-se neste ponto o P.T.V. particularizado para o caso linear, obtido fazendo $E(u) = E$, em termos conceituais o mesmo envolve uma forma bilinear e uma forma linear, conforme se indica na relação seguinte:

$$\underbrace{\int_0^L [ES u' \delta u'] dx}_{B(u, \delta u)} - \underbrace{\left[\bar{P} \delta u(L) + \int_0^L \bar{q} \delta u dx \right]}_{F(\delta u)} = 0 \quad \forall \delta u \text{ admissível} \quad (31)$$

$$\therefore B(u, \delta u) = F(\delta u)$$

As aproximações de Galerkin para os campos de deslocamento real e virtual, bem como suas derivadas de primeira ordem podem ser representadas em notação matricial como:

$$\begin{aligned} u(x) &= \underline{\phi} \underline{u}; & \delta u(x) &= \underline{\phi} \underline{\delta u} \\ u'(x) &= \underline{\phi}' \underline{u}; & \delta u'(x) &= \underline{\phi}' \underline{\delta u} \end{aligned} \quad (32 \text{ a,b,c,d})$$

Substituindo-se as aproximações na (31), obtém-se uma forma fraca discretizada:

$$\begin{aligned}
 B(u, \delta u) &= \underline{\delta u}^T \left(\underbrace{\int_0^L \left[\underline{\phi}'^T ES \underline{\phi}' \right] dx}_{\underline{K}} \right) \underline{u} \\
 F(\delta u) &= \underline{\delta u}^T \left[\underbrace{\underline{\phi}^T (L) \bar{P} + \int_0^L \underline{\phi}^T \bar{q} dx}_{\underline{F}} \right]
 \end{aligned} \tag{33 a,b}$$

Segue ainda da (31) discretizada que:

$$B(u, \delta u) - F(\delta u) = \underline{\delta u}^T (\underline{K} \underline{u} - \underline{F}) = 0 \quad \forall \delta u \tag{34 a}$$

Ou, em notação intrínseca:

$$B(u, \delta u) - F(\delta u) = K u \cdot \delta u - F \cdot \delta u = 0 \quad \forall \delta u \tag{34 b}$$

Por outro lado, a Energia Potencial Total do sistema, composta pela energia de deformação e pela energia potencial das forças externas, é definida como:

$$\begin{aligned}
 \Pi[u] &= \frac{1}{2} B(u, u) - F(u) \\
 \Pi[u] &= \frac{1}{2} K u \cdot u - F \cdot u
 \end{aligned} \tag{35}$$

Nota-se que conceitualmente, nos sistemas elásticos, ou conservativos, a parcela de energia de deformação ($B(u, u)/2$) fica armazenada internamente, podendo ser movimentada pelo próprio sistema para a recuperação de sua forma inicial quando do descarregamento total. Já a parcela de energia potencial das forças externas vem acompanhada do sinal negativo para evidenciar o fato que com o deslocamento as forças externas perdem capacidade de realizar trabalho.

O Princípio da Mínima Energia Potencial estabelece que na condição de equilíbrio $\Pi[u]$ apresenta um valor estacionário, ou, sua primeira variação se anula:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi[u]}{\partial u} \cdot \delta u = 0 \quad \forall \delta u \tag{36 a}$$

Nota-se, ainda, que a (36 a) na forma discretizada se escreve como:

$$\underline{\delta u}^T \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{u}} = 0 \quad \forall \quad \underline{\delta u} \quad (36 \text{ b})$$

Além disso, no caso dos problemas lineares ao valor estacionário corresponde um mínimo na Energia Potencial Total e, nessa condição, diz-se que o equilíbrio é estável.

Observa-se, também, que a primeira variação da energia potencial total pode ser determinada por um desenvolvimento em série, conforme indicado abaixo:

$$\begin{aligned} \Pi(u + \delta u) &= \Pi(u) + \frac{\partial \Pi[u]}{\partial u} \cdot \delta u + o(\delta u) \\ &= \Pi(u) + \delta \Pi(u) + o(\delta u) \end{aligned} \quad (37 \text{ a})$$

onde $o(\delta u)$ representa termos de ordem superior no acréscimo. Considerando-se a definição da energia potencial total dada pela (35), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \Pi[u + \delta u] &= \frac{1}{2} K (u + \delta u) \cdot (u + \delta u) - F \cdot (u + \delta u) \\ \Pi[u + \delta u] &= \underbrace{\frac{1}{2} K u \cdot u - F \cdot u}_{\Pi[u]} + \underbrace{K u \cdot \delta u - F \cdot \delta u}_{\delta \Pi[u]} + \underbrace{\frac{1}{2} K \delta u \cdot \delta u}_{o(\delta u)} \end{aligned} \quad (37 \text{ b})$$

A relação anterior leva a uma conclusão importante. Sendo K uma matriz positivo-definida, a parcela de ordem superior $o(\delta u)$ é estritamente positiva. Assim sendo, nos problemas lineares, ou nos problemas onde K preserva aquela característica, ao campo de deslocamentos que verifica a condição de equilíbrio corresponde um mínimo para a energia potencial total.

Voltando ao produto interno indicado na (36 a), como o mesmo deve ser nulo para qualquer δu , considerando-se também as (37), segue que a condição de estacionariedade fornece a seguinte relação de equilíbrio:

$$\frac{\partial \Pi[u]}{\partial u} = K u - F = 0 \quad (38 \text{ a})$$

Considerando-se a forma discretizada, a relação anterior passa a ser dada por:

$$\frac{\partial \Pi[\underline{u}]}{\partial \underline{u}} = \underline{K} \underline{u} - \underline{F} \quad (38 \text{ b})$$

Finalmente, a (36 b) se escreve como:

$$\underline{\delta u}^T (\underline{K} \underline{u} - \underline{F}) = 0 \quad \forall \underline{\delta u} \quad (39)$$

Conclui-se que a (39) recupera exatamente a (34a). Portanto a condição de estacionariedade da Energia Potencial Total pode ser representada pelo P.T.V.

Assim sendo, a forma fraca, equivalente a uma condição de equilíbrio, pode ser obtida por três diferentes caminhos: ponderando-se a forma forte do equilíbrio por um campo de deslocamentos, realizando-se em seguida uma integração por partes, impondo-se a estacionariedade da Energia Potencial Total, ou diretamente pelo P.T.V.

3. O Método de Newton-Raphson e a busca unidimensional ('Line Search')

Inicialmente é importante reunir as relações envolvidas no método de Newton-Raphson, nas quais se destacam o vetor resíduo, ou erro no equilíbrio $\underline{R}(\underline{U})$, e as rizezas secante (\underline{K}) e tangente (\underline{K}_T):

$$\underline{R}(\underline{U}^k) = \underline{K}(\underline{U}^k) \underline{U}^k - \underline{F}^a \neq 0$$

$$\underline{R}(\underline{U}^{k+1}) = \underline{R}(\underline{U}^k) + \underbrace{\frac{\partial \underline{R}(\underline{U})}{\partial \underline{U}} \Big|_{\underline{U}^k}}_{\underline{K}_T(\underline{U}^k)} \underline{\Delta U}^k = \underline{0} \quad (40 \text{ a,b,c,d})$$

$$\underline{K}_T(\underline{U}^k) \underline{\Delta U}^k = -\underline{R}(\underline{U}^k)$$

$$\underline{U}^{k+1} = \underline{U}^k + \underline{\Delta U}^k$$

Como exemplificam as relações (40) para o método de Newton-Raphson, nos problemas não-lineares a estratégia de busca da condição de equilíbrio é iterativa, esperando-se que a cada novo valor do vetor de deslocamentos nodais deva corresponder um erro menor na condição de equilíbrio.

Mesmo nos problemas não-lineares a estrutura sempre procura uma condição de equilíbrio estável, isto é, correspondente a um estado de mínima energia potencial. Todavia, no processo de busca dessa condição, pode-se passar por situações de equilíbrio que anulam a primeira variação da energia potencial, porém correspondem a equilíbrio instável.

Tomando-se, agora, partido da conceituação da Energia Potencial Total é possível interpretar que o incremento de deslocamentos obtido no método de Newton na iteração k , $\underline{\Delta U}^k$, defina uma ‘direção’ segundo a qual aquela energia diminua de valor. Além disso, a norma do vetor $\underline{\Delta U}^k$ dá uma medida do passo dado na sua direção. É, portanto, natural se perguntar o quanto se poderia andar nessa direção para encontrar o menor valor possível para a energia. Essa dimensão seria determinada por um fator escalar η de correção sobre o tamanho do passo $\underline{\Delta U}^k$. Assim sendo, em lugar da (40 d) pode-se escrever:

$$\underline{U}^{k+1} = \underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k \quad (41)$$

e o problema que se coloca consiste em determinar η de tal modo a maximizar a diferença: $\Pi[\underline{U}^k] - \Pi[\underline{U}^{k+1}]$ na direção de $\underline{\Delta U}^k$.

A técnica para determinar esse escalar se denomina busca unidimensional. A Figura 4 ilustra uma interpretação geométrica para esta busca.

A justificativa para o termo busca unidimensional decorre da relação para $\Pi[\underline{U}^{k+1}]$ entendida como uma função da variável η , uma vez que \underline{U}^k e $\underline{\Delta U}^k$ são conhecidos:

$$\Pi[\underline{U}^{k+1}] = \Pi[\underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k] \quad (42)$$

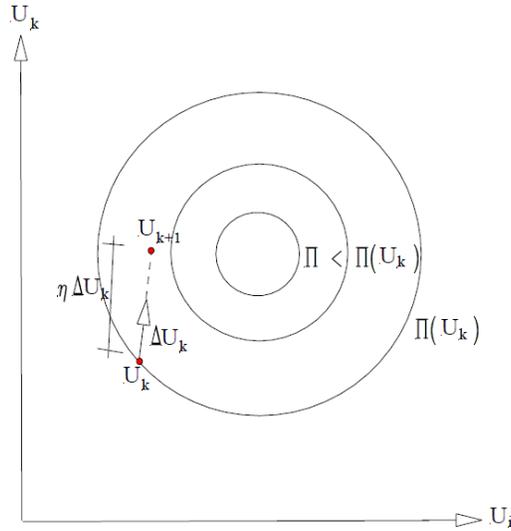


Figura 4 – Interpretação geométrica para a busca unidimensional

Então, a condição necessária para encontrar o mínimo da função na direção de $\underline{\Delta U}^k$ fica dada por:

$$\frac{d\Pi[\eta]}{d\eta} = 0 \quad (43)$$

Com a (42), a (43) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi[\eta]}{d\eta} &= \frac{\partial \Pi}{\partial (\underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k)} \cdot \frac{\partial (\underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k)}{\partial \eta} \\ &= \frac{\partial \Pi}{\partial (\underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k)} \cdot \underline{\Delta U}^k = 0 \end{aligned} \quad (44 \text{ a})$$

Por outro lado, a relação (38b) permite concluir que:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial (\underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k)} = \underline{R}(\underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k) = \underline{R}(\underline{U}^{k+1}) \quad (44 \text{ b})$$

A (44 a) exprime, portanto, uma condição de ortogonalidade entre os vetores $\underline{R}(\underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k)$ e $\underline{\Delta U}^k$, e é também uma função de η :

$$\underline{R}(\underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k) \cdot \underline{\Delta U}^k = \mathfrak{R}(\eta) = 0 \quad (45)$$

Em face de sua não-linearidade implícita, satisfazer a nulidade da (45) pode envolver um custo adicional indesejável. Pode-se relaxar essa condição, de um ponto de vista conceitual, imaginando que caminhando na direção de $\underline{\Delta U}^k$ seja possível encontrar η , ($0 < \eta < 1$), tal que proporcione um resultado melhor para $\mathfrak{R}(\eta)$, isto é:

$$|\mathfrak{R}(\eta)| \begin{cases} < |\mathfrak{R}(0)| \\ < |\mathfrak{R}(1)| \end{cases} \quad (46)$$

Nesse sentido, admita-se à partida, que $\mathfrak{R}(\eta)$ seja quadrática no intervalo $(0 \leq \eta \leq 1)^{(*)}$ valendo, portanto, a relação:

$$\mathfrak{R}(\eta) = a\eta^2 + b\eta + c \quad (47)$$

Para impor a nulidade indicada na (45), deve-se inicialmente encontrar os parâmetros a , b e c da função quadrática. Normalmente, identificam-se os parâmetros com condições nos contornos do intervalo definido para η . Tais condições podem envolver valores da função e de sua primeira derivada, expressa por:

$$2a\eta + b = 0 \quad (48)$$

^(*) A validade dessa hipótese fornece uma alternativa para o cálculo de η de maior praticidade em relação à (45).

Considerando-se, inicialmente, $\eta = 0$ e tendo-se em vista as (45), (47) e (48), resultam:

$$\mathfrak{R}(0) = c = \underline{R}(\underline{U}^k) \cdot \underline{\Delta U}^k \quad (49)$$

$$\mathfrak{R}'(0) = \left. \frac{d\mathfrak{R}}{d\eta} \right|_{\eta=0} = b \quad (50)$$

No sentido de exprimir a derivada que aparece na (50), com a relação (45) e a definição da rigidez tangente na forma definida pela (40b), segue que:

$$\begin{aligned} \frac{d[\mathfrak{R}(\eta)]}{d\eta} &= \frac{\partial \underline{R}}{\partial (\underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k)} \frac{\partial (\underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k)}{\partial \eta} \cdot \underline{\Delta U}^k \\ &= K_T(\underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k) \underline{\Delta U}^k \cdot \underline{\Delta U}^k \end{aligned} \quad (51)$$

Para então contemplar a (50), impõe-se na relação anterior $\eta = 0$. Além disso, levando-se em conta a (40 c), segue que:

$$b = -\mathfrak{R}(0) \quad (52)$$

Conclui-se, portanto, que $b = -c$. Tendo-se em vista este resultado, o último parâmetro a determinar resulta da imposição que a forma quadrática seja satisfeita em $\eta = 1$. Como $b = -c$, da (47) se conclui que: $\mathfrak{R}(1) = a$. Finalmente, com a (45), essa condição fica expressa na forma:

$$\mathfrak{R}(1) = \underline{R}(\underline{U}^k + \underline{\Delta U}^k) \cdot \underline{\Delta U}^k = a \quad (53)$$

Com os parâmetros determinados, a (47) passa a ser dada por:

$$\mathfrak{R}(\eta) = \mathfrak{R}(1)\eta^2 + (1-\eta)\mathfrak{R}(0) = 0 \quad (54)$$

Os valores de η que anulam a condição anterior seguem de:

$$\eta = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \alpha} \quad c / \alpha = \frac{\mathfrak{R}(0)}{\mathfrak{R}(1)} \quad (55)$$

Em termos gerais α pode ter sinal positivo ou negativo. Se $\alpha < 0$ o radicando é real, obtendo-se, a partir da escolha do sinal positivo da raiz, que garante η positivo, a relação:

$$\eta_1 = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \alpha} \quad (56)$$

Se $\alpha > 0$ não é possível anular a função $\mathfrak{R}(\eta)$ no intervalo de interesse. Nesse caso, o valor de interesse para η é aquele que proporciona um mínimo para a função quadrática determinado com a ajuda da (48), isto é:

$$\eta_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Na busca de melhor precisão, pode-se, por exemplo, exigir que:

$$|\mathfrak{R}(\eta_1)| < |\mathfrak{R}(0)|/2 \quad (57)$$

Então, caso essa condição não seja verificada, pode-se repetir a análise da aproximação com a função quadrática, considerando-se, agora, os valores: $\mathfrak{R}(0)$, $\mathfrak{R}'(0)$ e $\mathfrak{R}(\eta_1)$. Tal repetição pode prosseguir iterativamente até que a condição (57) seja atendida. Observa-se que frequentemente a solução encontrada pelo método de Newton ($\eta = 1$) já satisfaz a (57).

A interpretação gráfica para as duas possibilidades para α estão indicadas na Figura 5.

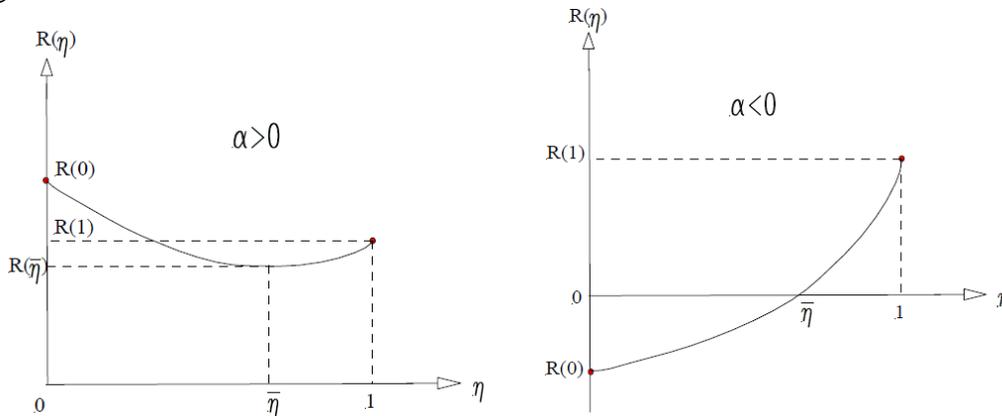


Figura 5 – Interpretação geométrica para a determinação de η

Finalmente, o algoritmo de solução iterativa do problema não-linear considerando a inserção da busca unidimensional no método de Newton-Raphson, contempla as seguintes etapas principais:

1) Considere-se que tenha sido feito o cálculo do erro no equilíbrio na iteração anterior k , por exemplo empregando-se a rigidez secante, como indicado abaixo:

$$\underline{R}(\underline{U}^k) = \underline{K}(\underline{U}^k) \underline{U}^k - \underline{F}^a \neq 0$$

2) Com a rigidez tangente atualizada pelo valor do vetor de deslocamentos nodais da iteração anterior e o vetor resíduo determinado em 1), passa-se ao cálculo do incremento de deslocamento:

$$\underline{K}_T(\underline{U}^k) \underline{\Delta U}^k = -\underline{R}(\underline{U}^k)$$

3) Calcula-se: $\mathfrak{R}(0) = \underline{R}(\underline{U}^k) \cdot \underline{\Delta U}^k$

4) Calcula-se nova estimativa do erro no equilíbrio:

$$\underline{U}^{k+1} = \underline{U}^k + \underline{\Delta U}^k$$

$$\underline{R}(\underline{U}^{k+1}) = \underline{K}(\underline{U}^{k+1}) \underline{U}^{k+1} - \underline{F}^a \neq 0$$

5) Calcula-se: $\mathfrak{R}(1) = \underline{R}(\underline{U}^{k+1}) \cdot \underline{\Delta U}^k$

6) Calcula-se $\alpha = \frac{\mathfrak{R}(0)}{\mathfrak{R}(1)}$ e, em função do seu sinal, determina-se η .

$$6.1) \text{ Se } \alpha < 0, \eta = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \alpha}$$

$$6.2) \text{ Se } \alpha > 0, \eta = \frac{\alpha}{2}$$

7) Com η atualizam-se:

$$\underline{U}^{k+1} = \underline{U}^k + \eta \underline{\Delta U}^k$$

$$\underline{R}(\underline{U}^{k+1}) = \underline{K}(\underline{U}^{k+1}) \underline{U}^{k+1} - \underline{F}^a$$

$$\mathfrak{R}(\eta) = \underline{R}(\underline{U}^{k+1}) \cdot \underline{\Delta U}^k$$

8) Verifica-se o critério: $|\mathfrak{R}(\eta)| < \mu |\mathfrak{R}(0)|$, para certo valor de μ adotado ($0 < \mu < 1$). Se o critério for atendido passa-se ao passo 9), caso contrário, faz-se $\mathfrak{R}(1) = \mathfrak{R}(\eta)$ e volta-se à etapa 5)

9) Se $\frac{\|\underline{R}(\underline{U}^{k+1})\|}{\|\underline{F}^a\|} > tol$ faz-se $k+1 = k$ e retoma-se o passo 1); caso contrário o processo finaliza.