2. Perceptron

Prof. Renato Tinós

Depto. de Computação e Matemática (FFCLRP/USP)

2. Perceptron

2.1. Introdução

2.2. Funcionamento do perceptron

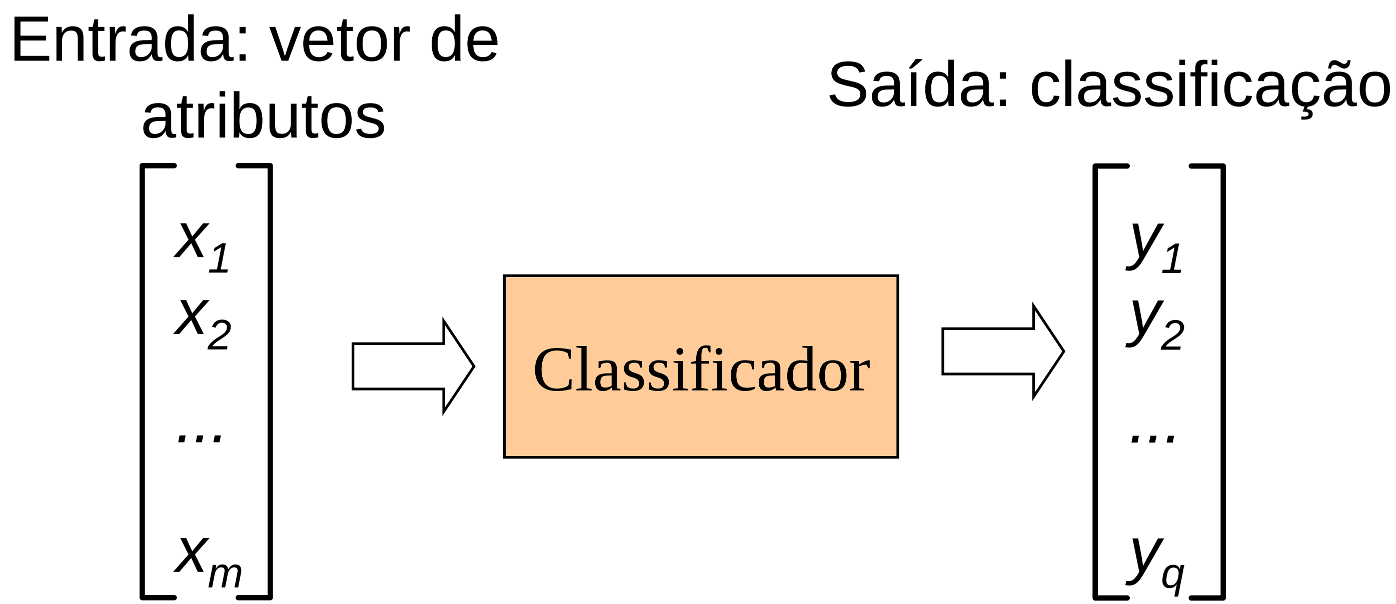
2.3. Aprendizado

2.4. Teorema da convergência

2.5. Aspectos do problema de reconhecimento de padrões

2.1. Introdução

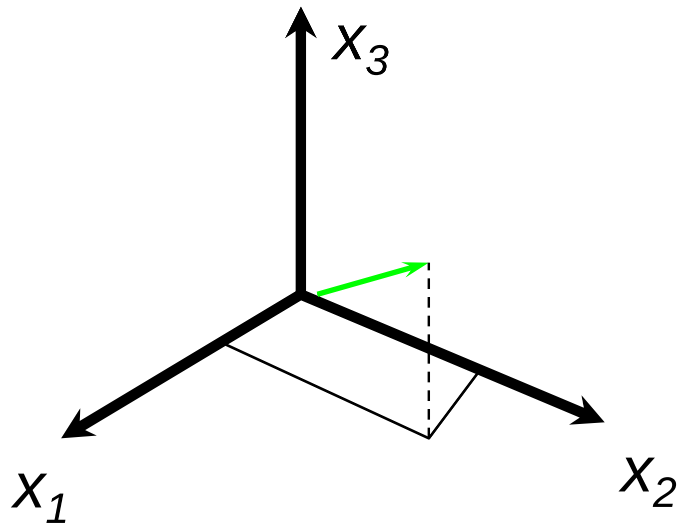
- **Classificador**
  - Recebe vetores de atributos como entrada (exemplos)
  - Atribui cada vetor a uma das classes $C_1, C_2, \ldots, C_q$



2.1. Introdução

- **Exemplo: vetor entrada com três atributos**

Espaço de entradas ou de atributos



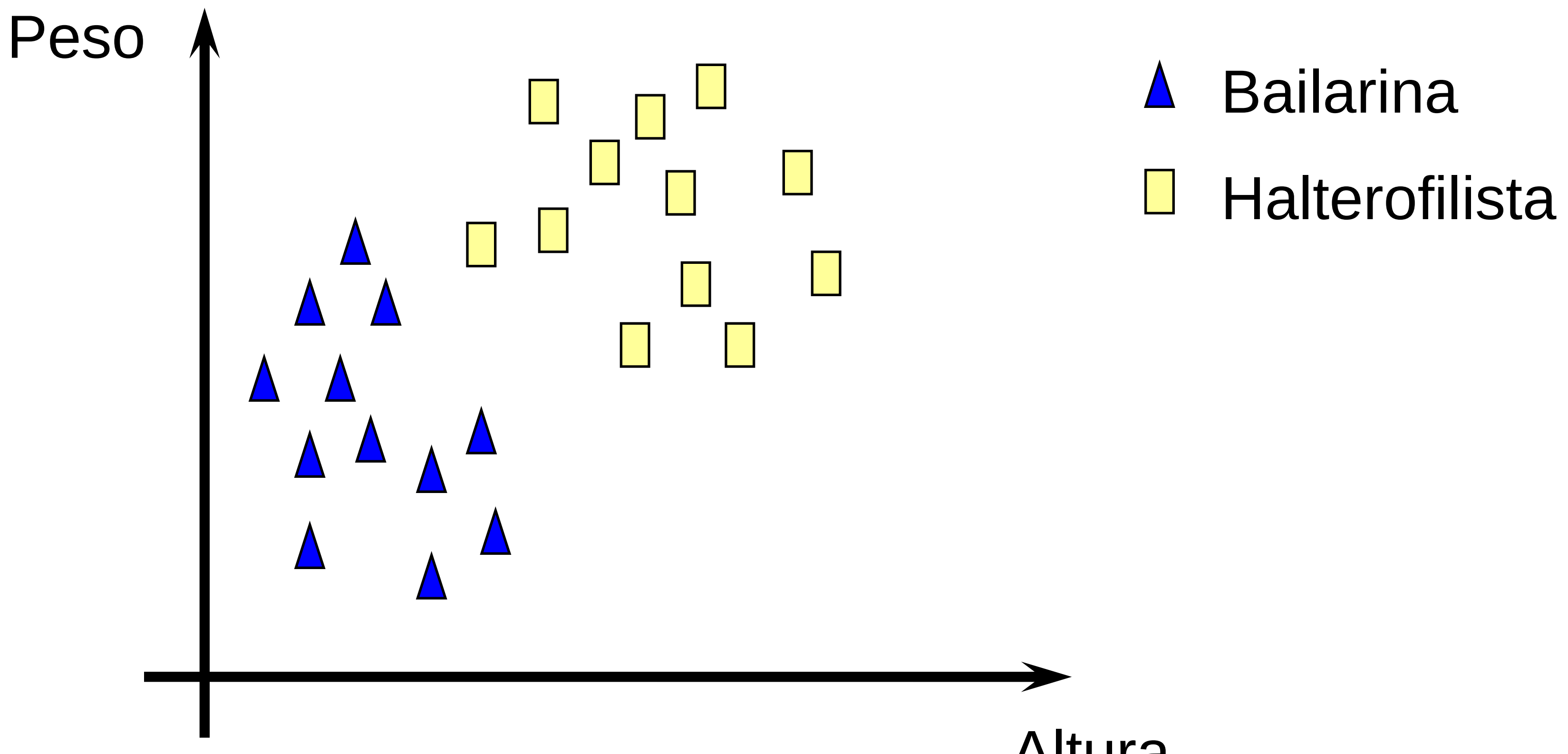
Exemplo ou padrão pode ser representado, abstratamente, como um ponto no espaço de atributos

2.1. Introdução

- **Vetor de atributos (exemplos)**
  - Composto por vários atributos
    - » Discretos
    - » Contínuos
  - Dimensão do vetor = número de atributos

- **Exemplo: classificar entre bailarinas e halterofilistas**
  - Atributos:
    - » peso
    - » altura
  - Padrões (ou exemplos):
    - » pontos no espaço (peso, altura)

2.1. Introdução

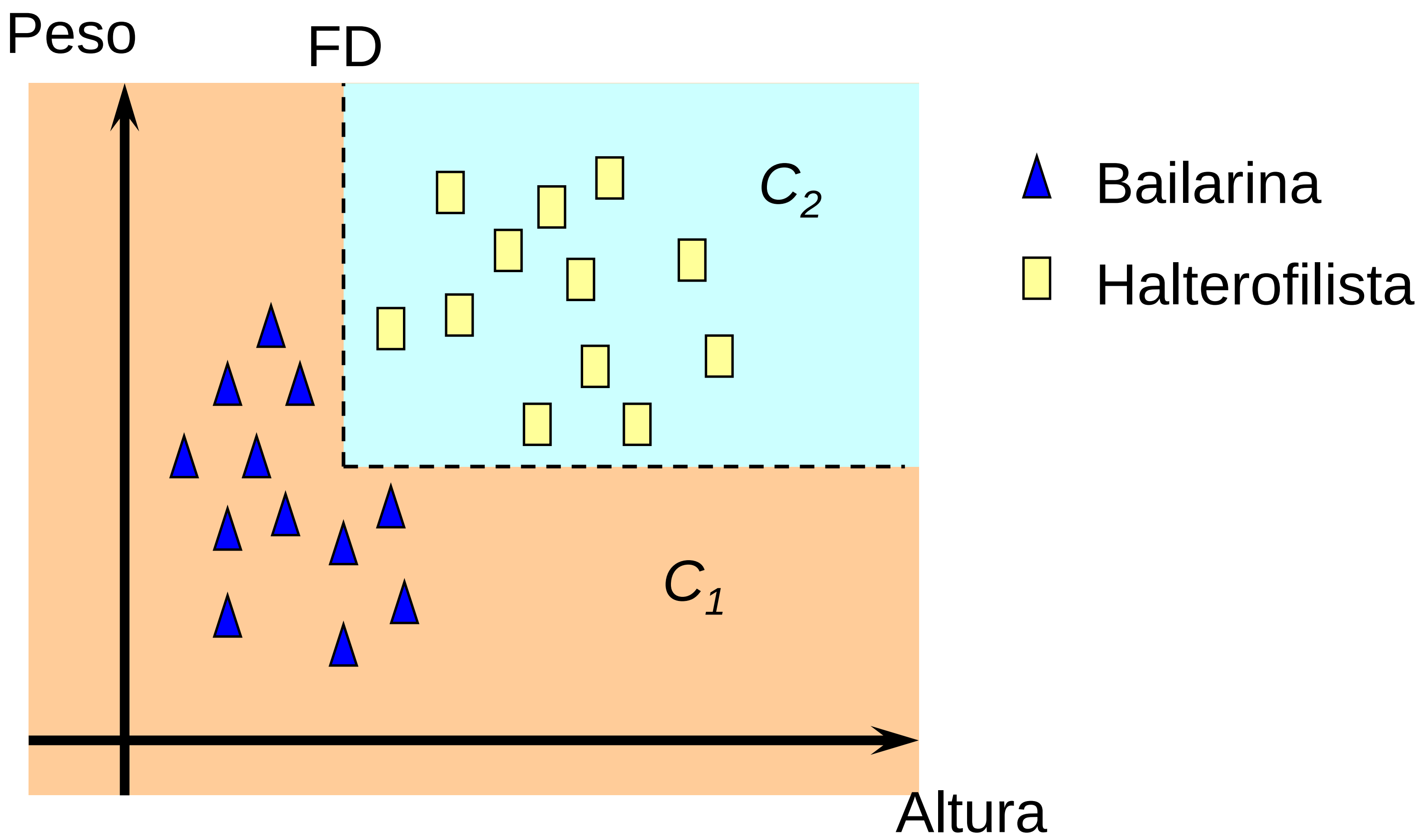


2.1. Introdução

- **Em geral os classificadores de padrões particionam o espaço de entradas em volumes, chamados regiões de decisão**
  - Todos os vetores de atributos dentro de uma mesma região são atribuídos a uma mesma categoria (classe)
  - Regiões são separadas por superfícies chamadas fronteiras de decisão (FD)
    - » Representam pontos onde não é possível definir a classe de um padrão

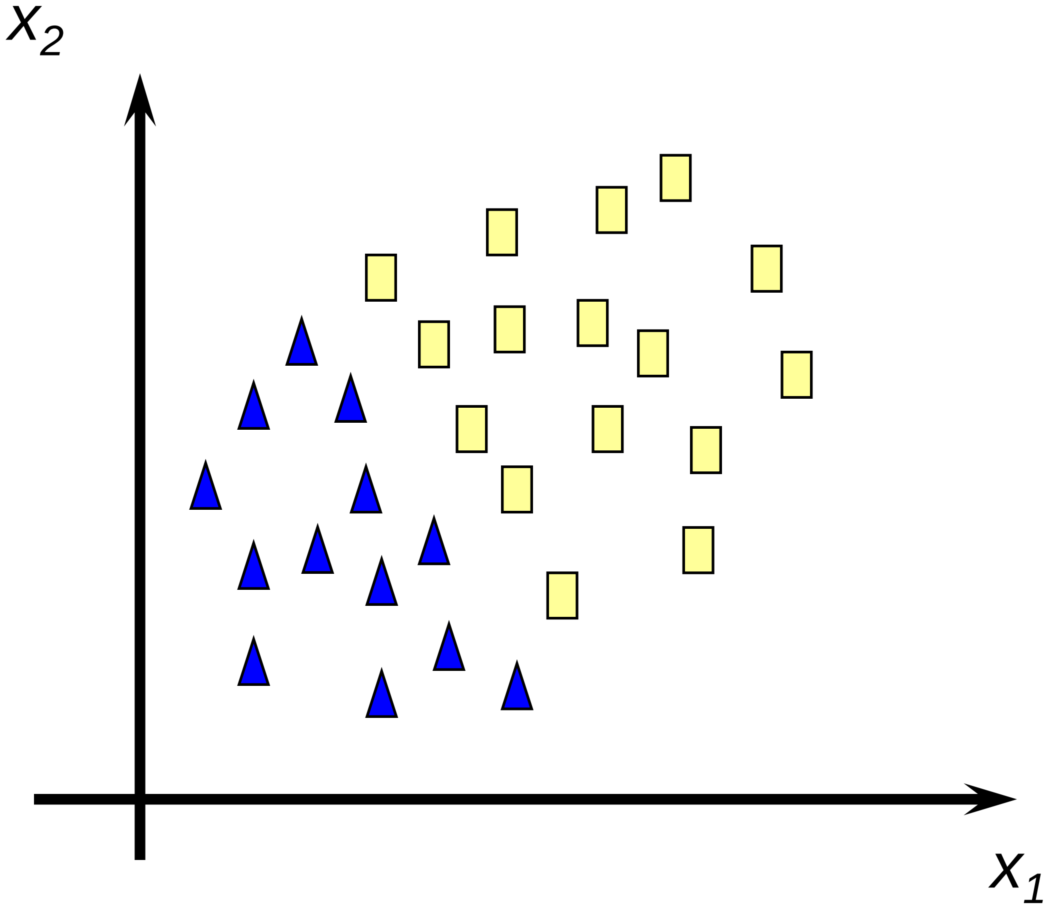
2.1. Introdução

- **Exemplo da FD produzida por um classificador**



2.1. Introdução

- **Agora, imagine o seguinte problema de classificação**

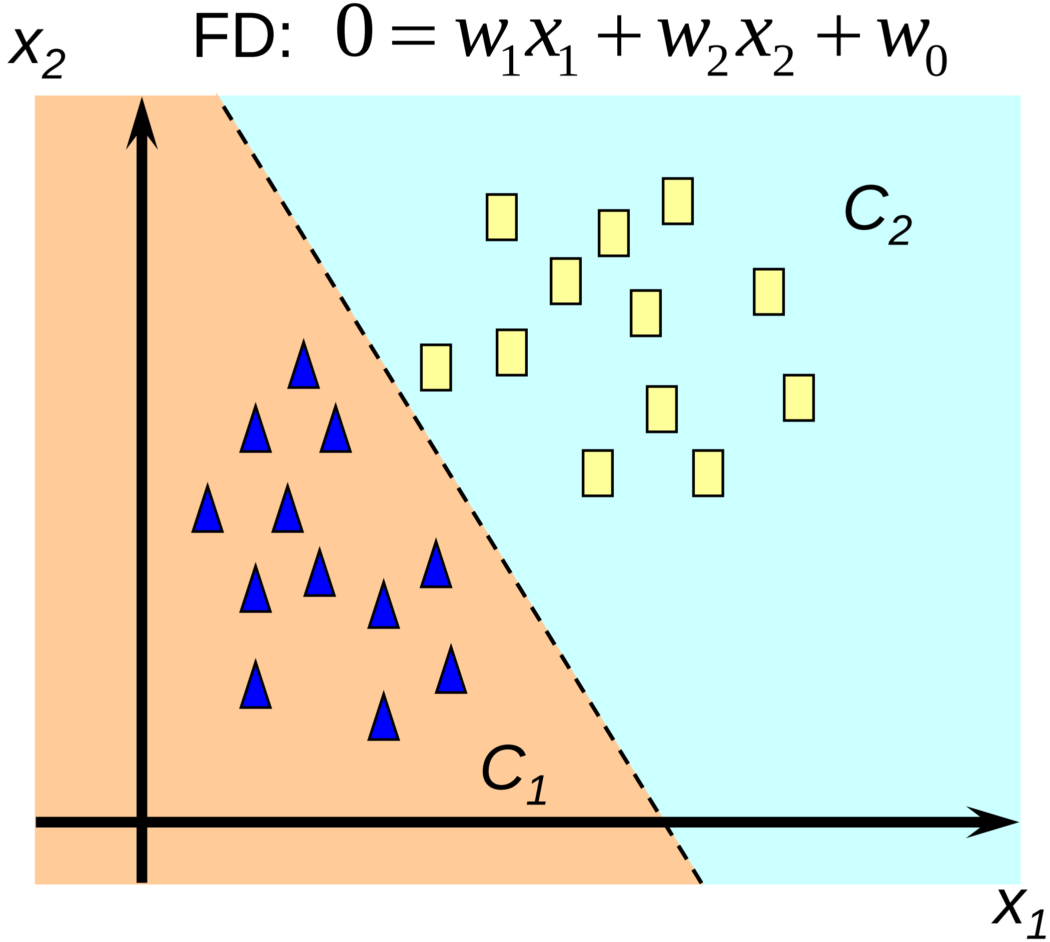


2.1. Introdução

- **Seria mais intuitivo e simples a utilização de um discriminante linear**
  - Utiliza uma combinação linear das entradas para produzir a FD
  - Transformação linear de um problema multidimensional em um problema unidimensional

2.1. Introdução

FD: $0 = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_0$



- **Discriminante linear**

$$u = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_m x_m + w_0 = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i + w_0$$

Na qual w_i é o peso (ponderação) da *i*-esima entrada x_i e w_0 é o bias

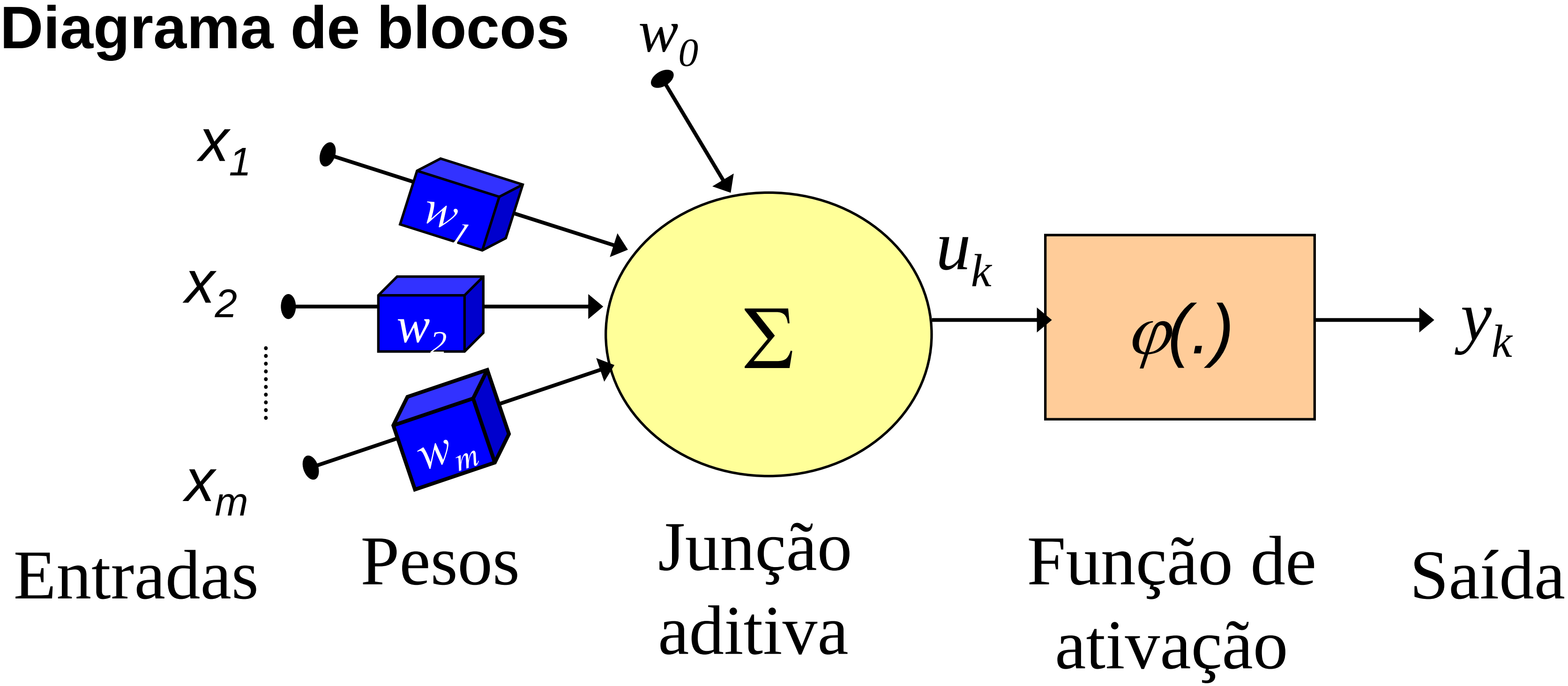
$$\begin{cases} u > 0 & , \text{vetor de entradas é relacionad o à classe } C_1 \\ u \leq 0 & , \text{vetor de entradas é relacionad o à classe } C_2 \end{cases}$$

2.1. Introdução

- **Perceptron**
  - Discriminante linear
  - Mantém uma certa relação com o classificador Bayesiano
    - » Quando o ambiente é gaussiano, o classificador Bayesiano se reduz a um classificador linear
  - Desenvolvido por Rosemblat, 1958
    - » Problema de reconhecimento de padrões visuais
  - Utiliza modelo de McCulloch-Pitts como modelo de neurônio
  - Similar ao ADALINE (*ADAptive LINear Element*)

2.2. Funcionamento do Perceptron

- **Diagrama de blocos**



$$y_k = \varphi(u_k) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i w_i + w_0\right) \qquad (2.1)$$

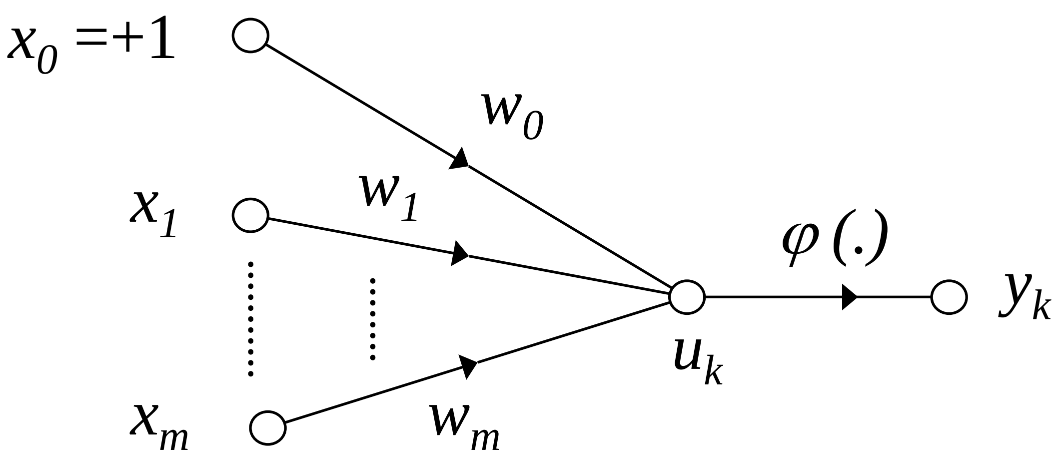
y_k : ativação (saída do neurônio k)

u_k : ativação interna do neurônio k

w_0: bias

2.2. Funcionamento do Perceptron

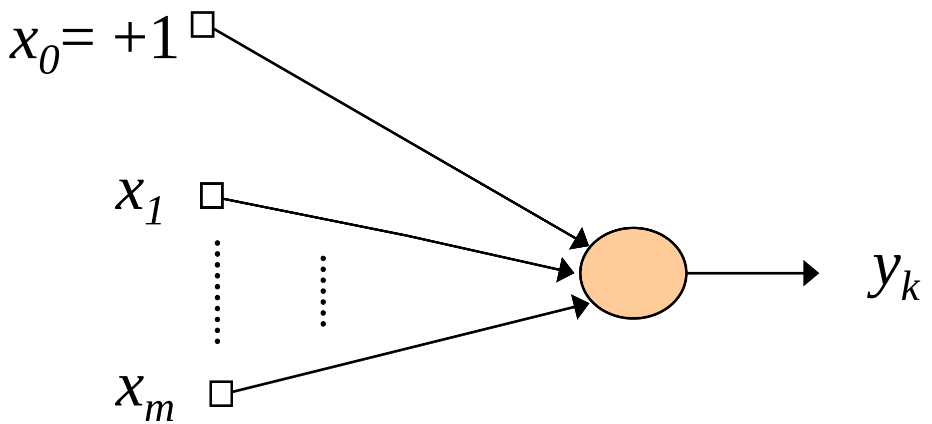
- ***Perceptron*** **visto com um grafo orientado completo**



  - ***Regra 1:*** *um sinal flui ao longo de um elo somente no sentido definido pela seta do elo*
  - ***Regra 2:*** *um sinal nodal é igual à soma algébrica de todos os sinais que entram no nó via os elos incidentes*
  - ***Regra 3:*** *O sinal em um nó é transmitido para cada elo de saída deste nó, sendo a transmissão inteiramente independente das funções de transferência dos elos de saída*

2.2. Funcionamento do Perceptron

- ***Perceptron*** **visto com um grafo orientado parcialmente completo (ou arquitetural)**



  - ***Nós de fonte*** *fornecem sinais de entrada para o grafo*
  - *Cada* ***neurônio*** *é representado por um único nó chamado de* ***nó computacional***
  - *Os elos de comunicação que conectam os nós de fonte aos nós computacionais não carregam pesos; eles meramente fornecem direções de fluxo de sinal no grafo*

2.2. Funcionamento do Perceptron

- **Como foi visto, a saída do *k*-ésimo *Perceptron* é dada por**

$$y_k = \varphi(u_k) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i w_i + w_0\right) \qquad (2.1)$$

Se fizermos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

2.2. Funcionamento do Perceptron

Podemos escrever a ativação interna do neurônio *k* como

$$u_k = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + w_0 \qquad (2.2)$$

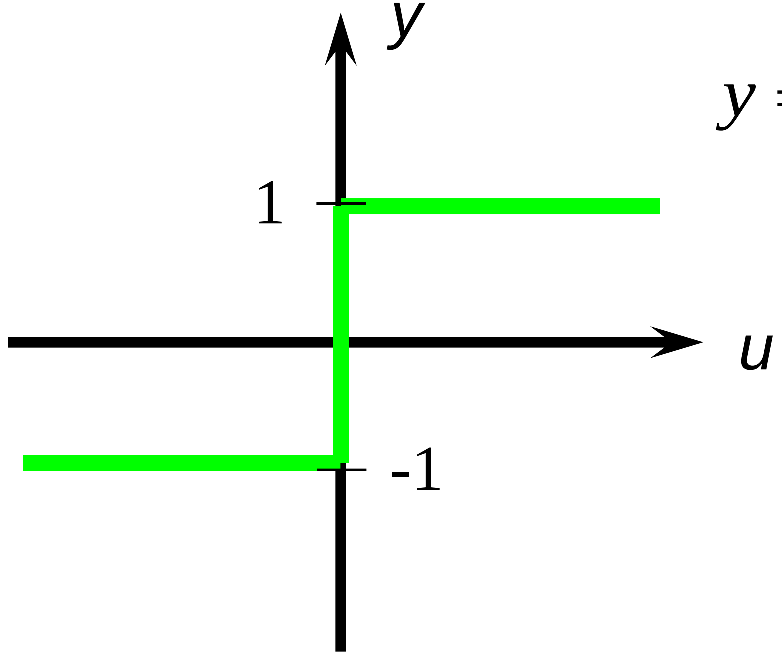
e a sua saída como

$$y_k = \varphi(u_k) = \varphi\left(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + w_0\right) \qquad (2.3)$$

na qual **x** é o vetor de entradas, **w** é o vetor de pesos (indica as forças da conexão das sinapses), w_0 é o bias e φ(.) é a função de ativação do neurônio.

2.2. Funcionamento do Perceptron

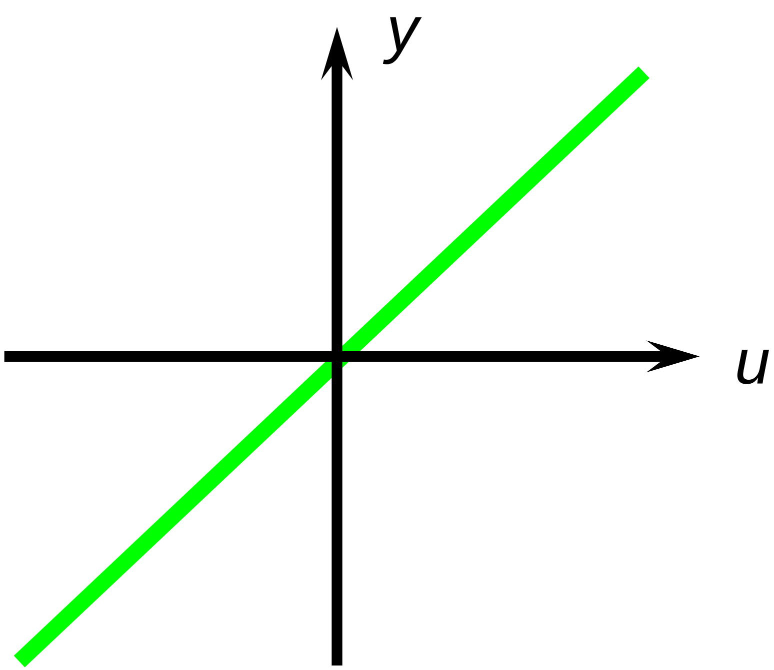
- **Costuma-se usar a função sinal como função de ativação no *perceptron***
  - Função sinal:



$$y = \varphi(u) = \begin{cases} +1 & \text{se } u > 0 \\ -1 & \text{se } u \leq 0 \end{cases} \qquad (2.4)$$

2.2. Funcionamento do Perceptron

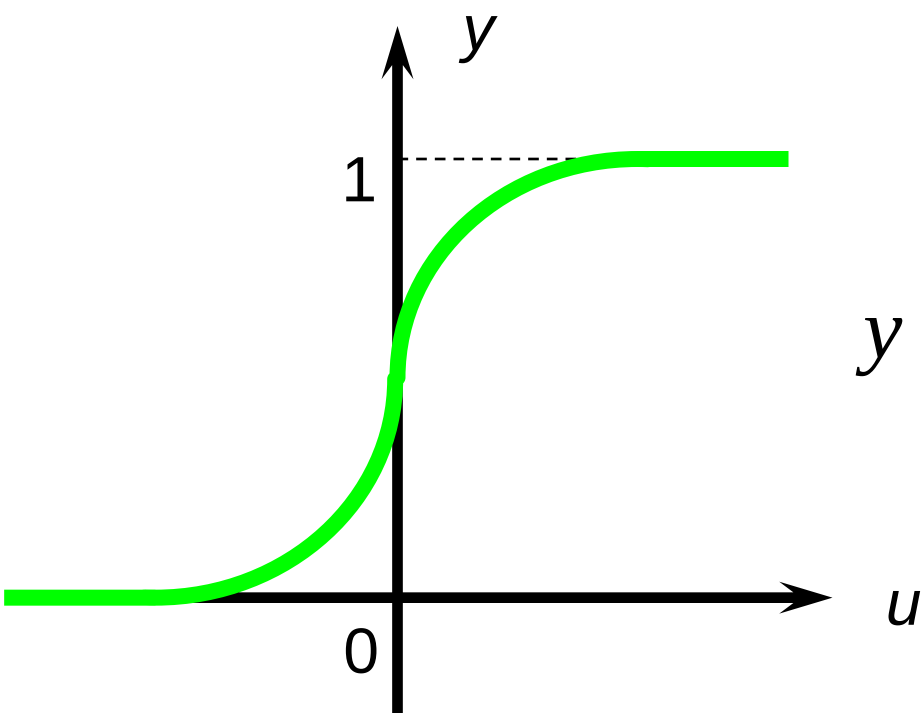
- **No entanto, existem outras funções de ativação em RNAs**
  - Função linear



$$y = \varphi(u) = a\,u \qquad (2.5)$$

2.2. Funcionamento do Perceptron

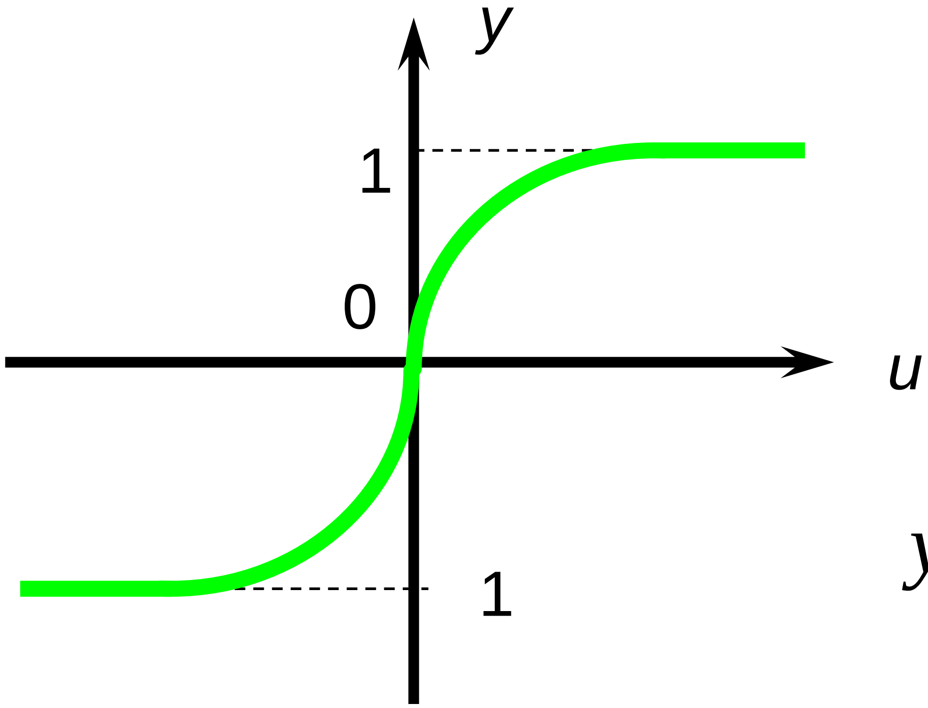
- Função logística (sigmoidal)



$$y = \varphi(u) = \frac{1}{1 + e^{-au}} \qquad (2.6)$$

2.2. Funcionamento do Perceptron

- Função tangente hiperbólica



$$y = \varphi(u) = \frac{1 - e^{-au}}{1 + e^{-au}} \qquad (2.7)$$

2.2. Funcionamento do Perceptron

- **Utilizando-se a função sinal como função de ativação, a regra de decisão para a classificação de um ponto x é dada por**

$$y = \varphi(u) = \begin{cases} +1 & \text{se } u = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + w_0 > 0 \\ -1 & \text{se } u = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + w_0 \leq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} y = 1 & , \mathbf{x} \text{ é relacionado à classe } C_1 \\ y = -1 & , \mathbf{x} \text{ é relacionado à classe } C_2 \end{cases} \tag{2.9}$$

2.2. Funcionamento do Perceptron

- **<u>Exemplo 2.1.</u> função AND**

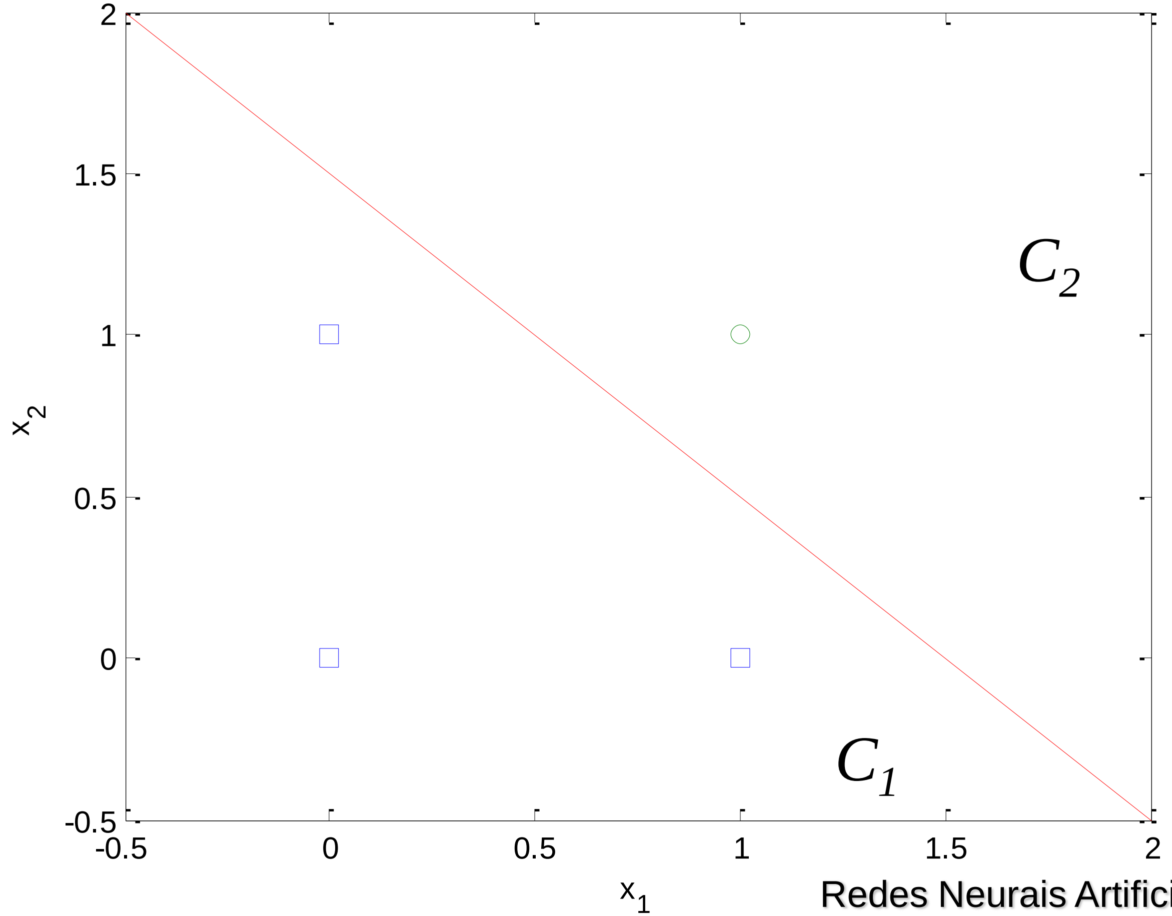
x_1	x_2	Classe
0	0	C_1
0	1	C_1
1	0	C_1
1	1	C_2

  - Deve-se classificar os padrões de entrada em duas classes (C_1 e C_2)
  - Cada padrão de entrada tem dois componentes (x_1 e x_2)
  - Considere os pesos
    » w_1=1 , w_2=1 , w_0 = -1,5

2.2. Funcionamento do Perceptron

- **<u>Exemplo 2.1.</u> função AND**

FD: $u = 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_0 = 1x_1 + 1x_2 - 1{,}5$



2.2. Funcionamento do Perceptron

- **Em um perceptron, a FD é dada por um hiperplano definido por**

$$\mathbf{w}^{T}\mathbf{x} + w_0 = 0 \qquad (2.10)$$

  - O hiperplano é
    - » uma reta no caso bidimensional (duas variáveis de entrada)
    - » um plano no caso tridimensional
  - Os pesos e o bias do *perceptron* definem a localização do hiperplano no espaço das entradas

2.2. Funcionamento do Perceptron

- **Localização do hiperplano**
  - Se $\mathbf{x}(1)$ e $\mathbf{x}(2)$ são dois pontos no hiperplano, então

    $$u = 0 = \mathbf{w}^{T}\,\mathbf{x}(1) + w_0 = \mathbf{w}^{T}\,\mathbf{x}(2) + w_0$$

    $$\mathbf{w}^{T}(\,\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(2)\,) = 0$$

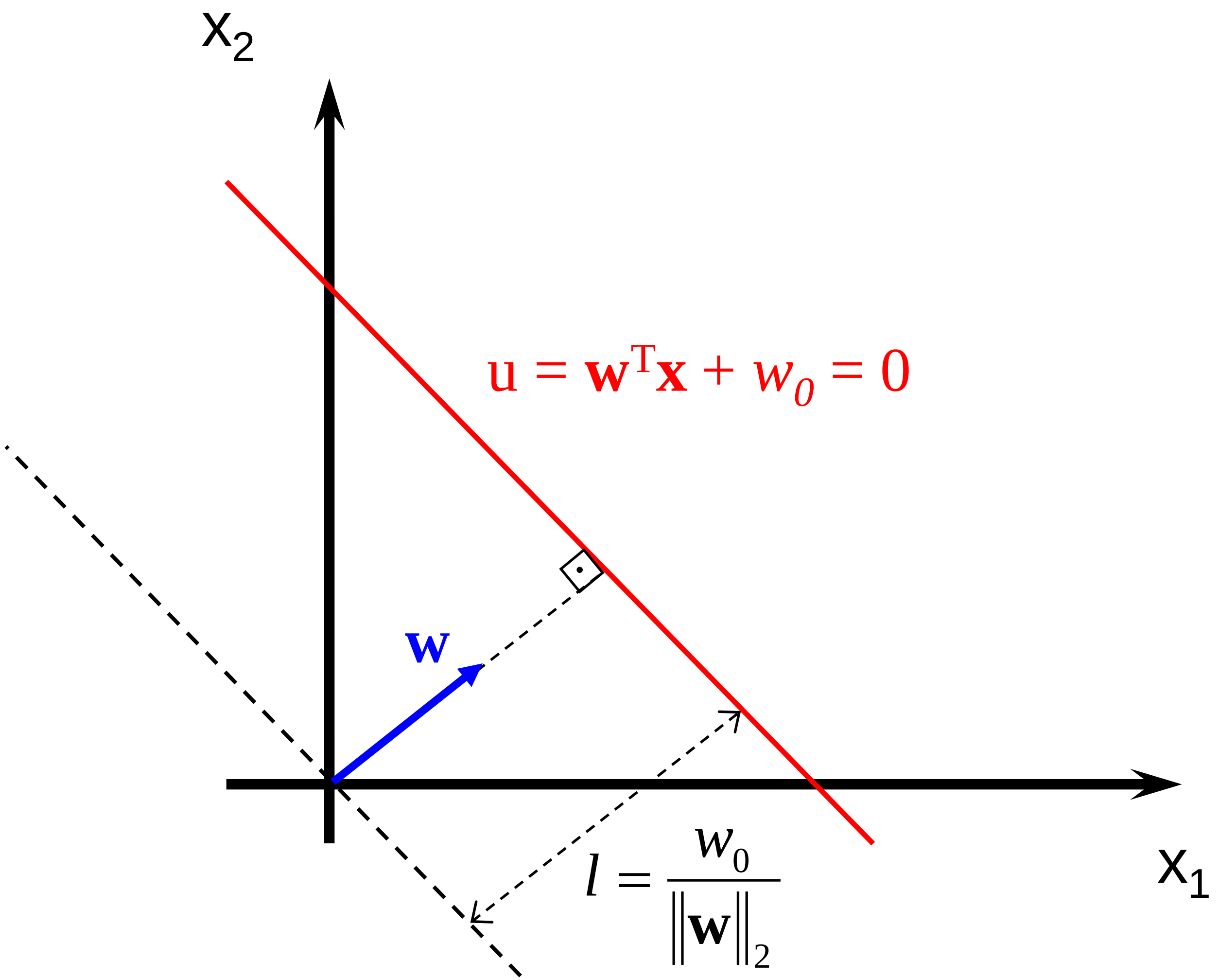
    Assim, podemos concluir que **w** é <u>normal a qualquer vetor contido no hiperplano</u>

  - Além disso, a distância normal da origem até o hiperplano é dada por

    $$l = \frac{\mathbf{w}^{T}\mathbf{x}}{\left\|\mathbf{w}\right\|_2} = \frac{w_0}{\left\|\mathbf{w}\right\|_2} \qquad (2.11)$$

2.2. Funcionamento do Perceptron

- **Exemplo:**



Comentários

- **Referências**
  - **Haykin, S. S.. *Redes neurais: princípios e prática.* 2ª ed., Bookman, 2001.**
    - » Capítulo 3
  - **Braga, A.P.; Carvalho, C.P.L.F. & Ludermir, T.B.. *Redes neurais artificiais: Teoria e Aplicações.* LTC, 2000.**
    - Capítulo 3