



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ALGUNS TÓPICOS DA ESCOLA PITAGÓRICA

EUCLIDES ARAUJO DOS SANTOS FILHO

Salvador - Bahia

2016

ALGUNS TÓPICOS DA ESCOLA PITAGÓRICA

EUCLIDES ARAUJO DOS SANTOS FILHO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Salgado.

Salvador - Bahia

2016

ALGUNS TÓPICOS DA ESCOLA PITAGÓRICA

EUCLIDES ARAUJO DOS SANTOS FILHO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dra. Luciana Salgado(Orientadora)
UFBA

Prof. Dra. Hale Aytaç Molitor
UFBA

Prof. Dr. Evandro Carlos F. dos Santos
UFBA

À minha família

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao Grande Arquiteto do Universo que me deu todas as condições para realizar este sonho. Aos meus pais, Euclides e Neildes, deixo um obrigado especial pelo empenho incansável em abrir junto comigo os caminhos por onde trilho minha vida com muita retidão.

Agradeço a Sheila por não ser apenas minha irmã, mas sim um porto seguro onde me sinto forte. Aos familiares por rezarem sempre pelo meu sucesso, em especial a D. Helena (minha voinha).

Entre os caminhos que percorri na vida, consegui cruzar com Fabiane que completou minha família, me dando as duas jóias mais raras que já recebi, Clarinha e Heleninha, vocês formam o motivo da minha luta diária em busca da vitória.

Não posso esquecer de pessoas tão importantes na minha vida que me ajudaram a crescer intelectualmente, portanto fica meus agradecimentos aos meus irmãos da Luz da Aliança Universal e do colégio São José.

Cheguei neste curso uma pessoa e saio mais fortalecido com meus companheiros (colegas e professores) do PROFMAT-Ufba que foram de extrema importância nesta jornada, inclusive aos Doutores Hale Aytaç e Evandro Carlos, que dispensaram de seus preciosos tempos para acompanhar meu trabalho nesta reta final.

E não posso deixar de agradecer a minha amiga, irmã e orientadora Luciana Salgado que, não somente como orientadora, mas sempre que precisei nunca recebi um não como resposta.

*"A Entre os homens não há sábios.
Há apenas amantes da Sabedoria".*

Pitágoras

Resumo

Este trabalho propõe uma discussão sobre alguns tópicos da Escola Pitagórica, como Números Racionais e sua aplicação na música, a razão Áurea e o número de ouro, o teorema de Pitágoras com demonstrações e aplicações em diversas áreas da Matemática e outras Ciências finalizando com um estudo de teoremas análogos ao de Pitágoras em geometrias Não Euclidianas. Veremos sugestões de como abordar de forma lúdica e interessante conteúdos dessa escola.

Durante a pesquisa, foi possível inserir os recursos tecnológicos para estreitar mais a ligação entre a teoria e a prática da matemática, tornando assim a relação Homem X Mídia mais forte e prazerosa.

Palavras chave: Escola Pitagórica, Teorema de Pitágoras, Geometria Hiperbólica.

Abstract

This paper proposes a discussion of some topics of the Pythagorean School as Rational Numbers and its application in music, the Golden ratio and the number of gold, the Pythagorean theorem with demonstrations and applications in various areas of mathematics and other sciences ending with a study analogues to theorems of Pythagoras in Euclidean geometries not . We will see suggestions of how to approach a playful and interesting content of this school .

During the research , it was possible to enter the technological resources to strengthen further the link between theory and practice of mathematics, thus making the relationship Man X Media stronger and enjoyable.

Key words: Pythagorean School, Pythagora's Theorem, Hyperbolic Geometry.

Sumário

Introdução	1
1 Música na escola pitagórica	2
1.1 Alguns conceitos	2
1.2 Música na Escola Pitagórica	3
1.3 Escalas Temperada	6
1.4 Caso particular: os trastes do violão	9
2 Teorema de Pitágoras	11
2.1 Demonstrações do Teorema de Pitágoras	11
2.2 Aplicações do Teorema de Pitágoras	14
2.2.1 Na Geometria Analítica	14
2.2.2 Em Números Complexos	15
2.2.3 Na Trigonometria	16
2.2.4 Na Geometria Plana	17
2.2.5 Na Geometria Espacial	17
2.2.6 O túnel de Eupalinos	19
2.3 Número de ouro e a natureza	21
2.4 Raiz quadrada de um número inteiro na reta real	25
2.5 Ternos Pitagóricos	28
2.6 Teorema em geometrias não-euclidianas	29
2.6.1 Axiomas da Geometria Euclideana Plana	29
2.6.1.1 Noções Comuns	29
2.6.1.2 Postulados	29
2.6.2 Geodésicas	31
2.6.3 Geometria no espaço complexo \mathbb{C}	32
2.6.3.1 Forma Algébrica	32
2.6.3.2 Forma Polar	32
2.6.4 Analogias em geometrias não euclidianas	33

2.6.4.1	Transformações de Möbius	33
2.6.4.2	O disco de Poincaré	34
2.6.4.3	Teorema de Pitágoras na Geometria Hiperbólica	35
3	Atividades para sala de aula	37
3.1	Verificando o teorema de Pitágoras no GeoGebra	37
3.2	Empilhamento e transporte de tubos cilíndricos	41
3.3	Os pássaros e as torres	43
3.4	Corda esticada	44
4	Considerações finais	46

Introdução

Pitágoras nasceu no ano de 570 a .C na ilha de Samos, na região da Grécia. Provavelmente viveu por volta de 70 anos e dedicou sua vida a filosofia. Apesar de não existirem registros escritos de suas obras, com certeza tornou-se um dos matemáticos mais importantes e citados em toda humanidade. Fundou uma escola filosófica conhecida como Escola Pitagórica. Uma instituição iniciática em que seus membros buscavam o aperfeiçoamento das obras matemáticas sem preocupações em ganhar a notoriedade das descobertas. Hoje, se questiona muito sobre a autoria das obras, porém era uma prática dos iniciados da escola pitagórica não assiná-las em detrimento do engrandecimento da instituição.

Este trabalho busca apresentar de forma lúdica algumas das obras dos pitagóricos.

No primeiro capítulo mostraremos seu ponto de vista sobre a relação entre números racionais e a música.

O segundo capítulo será dedicado ao bem conhecido Teorema de Pitágoras, através do qual podemos calcular o lado de um triângulo retângulo a partir dos seus outros dois lados. São feitas duas demonstrações, inclusive com o uso do aplicativo GEOGEBRA, para trazer um caráter mais lúdico e concreto para os alunos. Mostramos várias aplicações deste teorema na matemática, como na Geometria Plana e Espacial, na Trigonometria, na Geometria Analítica, nos Números Complexos e em outras ciências tais como na Mecânica e na Dinâmica.

Apresentamos também a noção de proporção dos pitagóricos culminando na proporção áurea e no número de ouro, buscando sempre a ilustração com elementos da natureza.

Neste capítulo ainda direcionamos o estudo do teorema de pitágoras na geometria hiperbólica.

O último capítulo é destinado a atividades a serem desenvolvidas em sala de aula para pôr em prática os conteúdos aqui abordados.

Capítulo 1

Música na escola pitagórica

Este capítulo é dedicado à associação entre a matemática e a música desde a percepção pitagórica até a adequação para a escala temperada usada atualmente nas composições ocidentais.

1.1 Alguns conceitos

Aqui são apresentados alguns conceitos usados no texto.

A bem conhecida definição de **Números Racionais**: aqueles números que podem ser obtidos pela divisão de dois números inteiros,

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

sendo o número racional $\frac{m}{n}$ também chamado de razão de m para n .

Desta definição tem-se que o número racional é a representação de uma parte de um total, ou seja a fração de um total. Isso para um aluno do ensino fundamental é um pouco complicado e leva os educadores fixarem seus exemplos nos mais tradicionais possíveis.

Onda é um movimento causado por uma perturbação, e esta se propaga através de um meio. Existem alguns tipos de ondas que conhecemos bem, mas que não identificamos em geral a olho nu, como o som.

Frequência é uma grandeza física que indica o número de ocorrências de um evento (ciclos, voltas, oscilações etc) em um determinado intervalo de tempo, normalmente é medida em Hertz (Hz), número de oscilações por segundo.

As **ondas sonoras**¹ são originadas através de vibrações ou perturbações no meio que vai se propagar, por exemplo, o ar. Suponha que toquemos uma das cordas de uma

¹As ondas sonoras são perceptíveis ao ouvido humano quando estão dentro do intervalo de 20 Hz e 20.000 Hz, sendo consideradas infrassons se menor que 20 Hz ou ultrassons se maior que 20.000 Hz.

harpa. Esta, por sua vez vibra e empurra as moléculas de as ao seu redor que segue provocando esta perturbação nas moléculas adjacentes e assim sucessivamente.

Outra diferença importante de se compreender é entre a frêquencia sonora(altura) e a sua intensidade (volume). Enquanto a freqência sonora está ligada a quantidade de oscilações que a onda faz em determinado intervalo de tempo, o volume fica relacionado com a amplitude que estas ondas atingem, portanto podemos ter ondas de mesma frequência com amplitudes diferentes e vice versa.

No que segue, apresentamos o desenvolvimento musical desde a escala pitagórica à escala temperada, numa proposta de trabalhar conceitos matemáticos como inteiros, racionais, irracionais, progressões e logarítmos.

1.2 Música na Escola Pitagórica

Pode-se dizer que a confluência entre a Música e a Matemática se deu a partir da necessidade de buscar embasamentos científicos para a harmonia entre sons e resolver problemas entre consonância e dissonância musical.

A Pitágoras é atribuído o primeiro estudo científico da música e seus intervalos de frequências. A história conta que ele, ao passar pela frente de uma oficina, ouviu os sons das batidas de martelo em diferentes materiais de diferentes tamanhos. Isto o fez despertar para uma possível harmonia entre os sons produzidos. Ele então teria iniciado uma pesquisa científica para assim fazer uma associação entre os diferentes sons e os números, pois para a escola Pitagórica tudo na natureza estava ligado aos números inteiros.

O primeiro projeto feito por Pitágoras para entender melhor esta consonância entre as batidas, foi o Metalofone, instrumento feito de metal com duas baquetas que simula as batidas dos martelos nas chapas.



Figura 1.1: Metalofone

Fonte:

Depois de alguns estudos e análise entre as consonâncias e dissonâncias dos diferentes sons, ele pode verificar que essa harmonia acontecia quando as chapas tinham uma relação de 1 para 2, ou seja, se uma nota Dó fosse entonada de uma chapa do metalofone, encontrava-se uma nova nota Dó quando a batida fosse feita numa chapa que tivesse a metade do tamanho da anterior, contudo com um tom mais agudo. Isto ocorre pois o número de vibrações obtida na nova chapa é o dobro em relação à original, fazendo soar assim a mesma nota com uma frequência maior, gerando este som mais agudo.

Para entender melhor o que acontece levamos em consideração a nota Lá que por convenção possui uma frequência de 440 Hz, se reduzirmos a chapa que produz essa nota a metade, ela passa a vibrar o dobro de vezes no mesmo intervalo de tempo 880 Hz, gerando uma nova nota Lá, só que mais aguda.

Pitágoras continuou sua investigação sobre as relações dos sons agradáveis aos ouvidos e os números inteiros. O instrumento usado que ajudou essa pesquisa foi o chamado **Monocórdio** (Mono = uma e Córdio = corda). Uma única corda esticada e presa por dois cavaletes fixos nas extremidades e com um cavalete móvel que o possibilitava alterar os comprimentos desta corda, fazendo vibrá-la em frequências distintas.

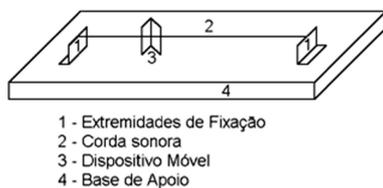


Figura 1.2: Modelo de monocórdio.

Fonte: [12]

Figura 1.3: Pitágoras e seu monocórdio.

Fonte: [13]

Como resultado desta investigação, Pitágoras percebeu que a corda reduzida a $\frac{2}{3}$ do seu tamanho original, produzia também um som harmonioso que hoje chamamos de **Quinta Justa**, e que reduzida a $\frac{3}{4}$ produz outra chamada atualmente de **Quarta Justa**.

Podemos listar alguns princípios criados por Pitágoras após as suas investigações.

1º - Equivalência: divisão da corda na razão de $\frac{1}{2}$ (Oitava).

2º - Limite: deve estar sempre entre a corda toda e sua metade.

3º - Unidade de divisão: progressiva na razão de $\frac{2}{3}$ do seu tamanho.

Assim foi criada a escala **Diatônica** com sete notas (cinco com intervalos de tons e duas com intervalos de semitons) Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó, ficando a repetição como sendo a primeira só que mais aguda, chamada de *Oitava*, por ser a oitava nota da sequência.

Uma curiosidade é que os nomes dados às notas desta escala tem origem nas primeiras sílabas de cada estrofe do texto do hino a São João Baptista. Sendo que a primeira sílaba **Ut**, por ser mais difícil de ser cantada, foi substituída por **Dó**.

Ut queant laxis,
Resonare fibris,
Mira gestorum,
Famuli tuorum,
Solve polluti,
Labii reatum.
Sancte **I**oannes

Para que possam, livres,
 Ressoar nas fibras,
 Os admiráveis feitos,
 Os servos teus,
 Remove, do impuro,
 Lábios, o pecado.
 Ó São João²

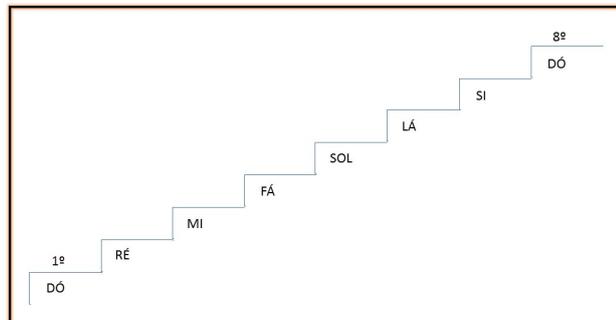


Figura 1.4: Oitava da escala Diatônica

Fonte: Própria

A escala Pitagórica deixa uma lacuna, pois usando as quintas justas não encontra uma nota correspondente ao ciclo de oitavas. Observe que analisando as frequências das oitavas chegamos a função $f(n) = 2^n$, enquanto as frequências nas quintas justas determinam uma função do tipo $g(m) = (\frac{3}{2})^m$, tornando impossível encontrar algum

²Na ordem direta, a tradução é, “Para que os teus servos possam cantar livremente os feitos admiráveis, remove o pecado do lábio impuro, oh São João”.

valor inteiro para m e n tal que $f(n) = g(m)$. Após várias tentativas, verificou-se que o valor mais próximo para esta igualdade acontecia quando $n = 7$ e $m = 12$, gerando $f(7) = 128$ e $g(12) = 129,74$. Apesar dos valores encontrados serem muito próximos, pouco mais de 1% de diferença, isto comprometia a execução musical. Esta diferença ficou conhecida como **Coma Pitagórica**.

Outro problema na escala Pitagórica é a relação entre as frequências de seus tons e semitons. A tabela a seguir ajuda-nos a entender melhor essa relação.

Nota	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
Razão das frequências em relação ao Dó	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
Razão das frequências entre as notas	$\frac{9}{8}$ (1 tom)	$\frac{9}{8}$ (1 tom)	$\frac{256}{243}$ ($\frac{1}{2}$ tom)	$\frac{9}{8}$ (1 tom)	$\frac{9}{8}$ (1 tom)	$\frac{9}{8}$ (1 tom)	$\frac{9}{8}$ (1 tom)	$\frac{256}{243}$ ($\frac{1}{2}$ tom)

Figura 1.5: Razão entre as frequências dos tons

Fonte: Própria

Assim é possível verificar que a soma entre dois semitons não coincide com a frequência de um tom.

Uma maneira de atenuar esse problema foi, ao invés de dividir a escala em sete notas como na escala diatônica, criou-se a escala **Cromática**, que consiste em dividi-la em doze semitons,

Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si, Dó.

Ainda que não conhecessem a “equação de ondas” do cálculo diferencial, os pitagóricos observavam os sons consonantes nas relações entre as frequências na razão de $\frac{3}{2}$, quando se tomava a corda em dois terços da inicial, chamando de **Ciclo das Quintas**.

Desta maneira, podemos garantir que a quinta do Dó é o Sol e por sua vez a quinta do Sol é o Ré, e assim por diante, encontrando a sequência,

Dó, Sol, Ré, Lá, Mi, Si, Fá#, Dó#, Sol#, Ré#, Lá#, Fá, Dó.

1.3 Escalas Temperada

O modelo criado por Pitágoras era o mais aceito pela comunidade musical, contudo existiam erros. Muitos músicos e matemáticos tentaram corrigir as “falhas” do modelo

grego. A escala cromática trazia um problema quando se precisava executar uma música em diferentes oitavas, tendo que reafinar o instrumento em cada mudança de oitava, pois não havia o encaixe perfeito como citado anteriormente.

Com o intuito de encontrar uma solução, o matemático e físico Simon Stevin(1548-1620) criou o **Temperamento**.

O temperamento é um ajuste feito na escala cromática para que as notas tenham a mesma distância e encaixem perfeitamente no ciclo de oitavas. Para tanto ele saiu do universo dos números racionais e passou a trabalhar no universo irracional. Fazendo-se os 12 semitons equidistantes foi possível fechar o ciclo de oitavas com esses 12 intervalos. O processo consiste em uma leve “desafinação” das notas sem que houvesse prejuízo na execução das músicas. A ideia baseia-se em criar um semitom cuja frequência, quando elevado a 12 fosse igual a uma oitava, ou seja,

$$f^{12} = 2$$

$$f = \sqrt[12]{2} \text{ (Irracional)}$$

$$f \cong 1,059463.$$

Comparando a escala Temperada com a Pitagórica encontramos,

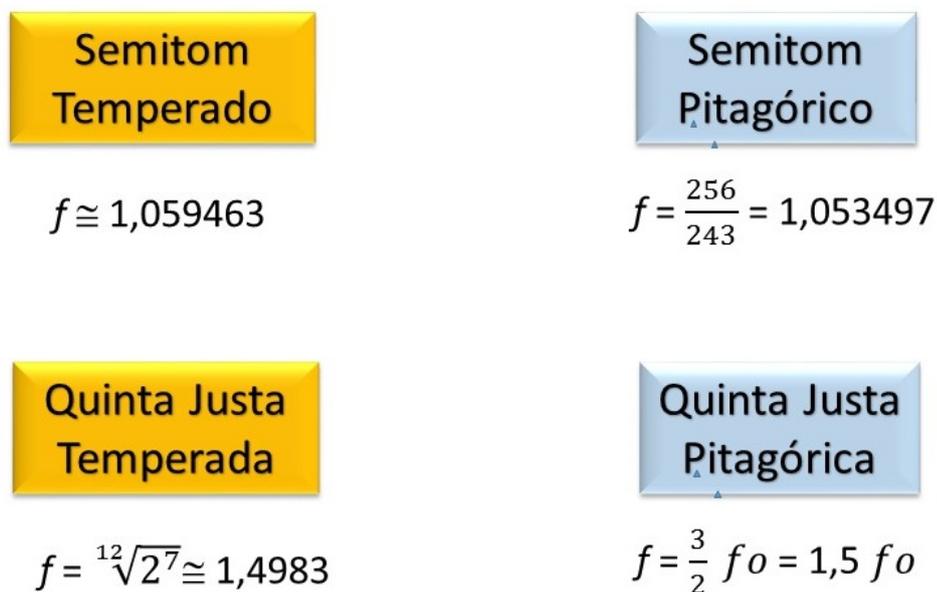


Figura 1.6: Comparativo entre as escalas

Fonte: Própria

A tabela abaixo faz um comparativo das diferenças entre as escalas, podendo assim perceber uma leve diferença entre as frequências das notas na escala Pitagórica e na escala Temperada.

Notas	Pitagórica	Temperada
DÓ ₁	1	1
DÓ ₁ #	1,068	1,0594
RÉ ₁	1,125	1,1224
RÉ ₁ #	1,185	1,1892
MI ₁	1,265	1,2599
FÁ ₁	1,333	1,3348
FÁ ₁ #	1,424	1,4142
SOL ₁	1,5	1,4982
SOL ₁ #	1,601	1,5873
LÁ ₁	1,687	1,6817
LÁ ₁ #	1,777	1,7817
SI ₁	1,898	1,8877
DÓ ₂	2	2

Figura 1.7: Frequências das notas.

Fonte: Própria

Foi o alemão Johann Sebastian Bach quem de forma brilhante compôs a obra que mudaria na época a cara da música européia. Com grande influência barroca, em 1722, Bach compilou algumas de suas obras e lançou “O cravo bem temperado”, que utiliza exatamente a escala temperada na sua composição. Anos após sua morte outros brilhantes músicos como Mozart e Beethoven fizeram grandes tributos à importância da sua obra.



Figura 1.8: J. S. Bach

Fonte:

1.4 Caso particular: os trastes do violão

Como já sabemos, as frequências crescem exponencialmente, enquanto o comprimento das cordas que as produzem são inversamente proporcionais. Para determinar a melhor posição entre os trastes de um violão com respeito à pestana e ao cavalete e (lembrando que a razão entre as notas na escala temperada valem $\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$) podemos utilizar o modelo matemático,

$$d_n = d_0 \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{12}}} \right)^n$$

onde,

n : ordem do traste.

d_n : distância entre o traste de ordem n e o cavalete.

d_0 : comprimento da corda solta (distância entre a pestana e o cavalete).

Com isso, podemos garantir, por exemplo, que o traste de ordem 12 ficará localizado exatamente na metade da corda solta e assim sucessivamente. A figura e a tabela a seguir nos ajudam a visualizar melhor estas posições num violão de seis cordas.



Figura 1.9: Violão

Fonte: adaptada

Estes conceitos podem ser aplicados em outros instrumentos de trastes como viola, bandolim, guitarra, cavaquinho bastando apenas conhecer o comprimento das cordas.

n	d_n (mm)
0	864
1	815,507
2	769,736
3	726,535
4	685,757
5	647,269
6	610,940
7	576,651
8	544,286
9	513,737
10	484,904
11	457,688
12	432,000
13	407,754
14	384,868
15	363,267
16	342,879
17	323,634
18	305,470
19	288,325
20	272,143

Figura 1.10: Posição dos trastes.

Fonte: Própria

Capítulo 2

Teorema de Pitágoras

Teorema:

“Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”.

2.1 Demonstrações do Teorema de Pitágoras

1º modo:

Não se sabe ao certo qual o método usado por Pitágoras para demonstrar este teorema, contudo um dos métodos mais clássico é através das áreas dos quadrados gerados com os lados do triângulo retângulo.

1º passo - num quadrado qualquer traça-se duas retas paralelas aos lados, de forma que elas se cruzem num ponto interno deste quadrado, gerando assim dois quadrados menores de lados a e b , respectivamente, e dois retângulos de lados a e b como na figura 2.1.

2º passo: dividem-se os retângulos traçando-se as diagonais c como é mostrado na figura 2.2, encontrando-se assim um quadrado de lado a , outro quadrado de lado b e quatro triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c .

3º passo: rearrumar as áreas de modo a conservar a área do quadrado maior de lado $(a+b)$.

Com isso, por comparação das áreas, podemos demonstrar que a soma da área do quadrados de lados a com a área do quadrado de lados b resulta na área do quadrado de lado c .

$$a^2 + b^2 = c^2$$

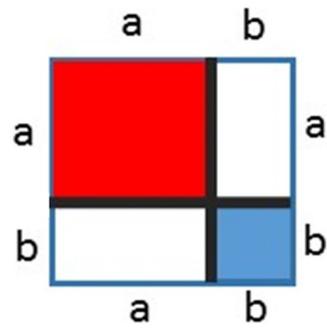


Figura 2.1:
Fonte: Própria

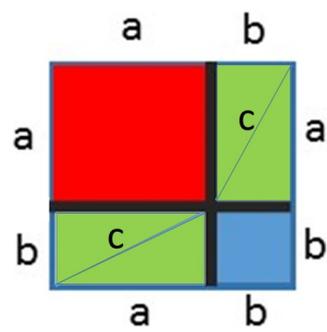


Figura 2.2:
Fonte: Própria

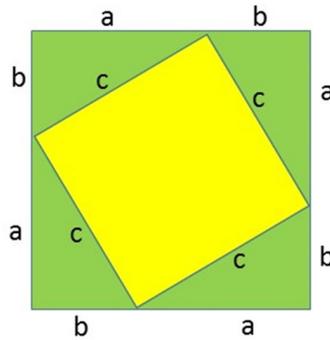


Figura 2.3: Fonte: Própria



Figura 2.4: Rearrumando as áreas.

Fonte: Própria

2º modo: Podemos demonstrar o teorema de Pitágoras usando a Álgebra Linear através da soma de vetores.

Seja V um espaço vetorial real com produto interno e u e v elementos de V ortogonais temos

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle \Rightarrow$$

$$\|u + v\|^2 = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

lembrando que se u e v são ortogonais $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = 0$, então

$$\|u + v\|^2 = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle \Rightarrow$$

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

2.2 Aplicações do Teorema de Pitágoras

Em várias áreas da matemática e em outras ciências, o teorema de Pitágoras é muito aplicado, dando uma certa imortalidade à sua obra. Aqui veremos algumas de suas aplicações, como:

2.2.1 Na Geometria Analítica

Calculando a distância entre dois pontos de um plano Cartesiano:

Sendo dois pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$, marca-se ambos num mesmo plano Cartesiano, como mostra a figura 2.5.

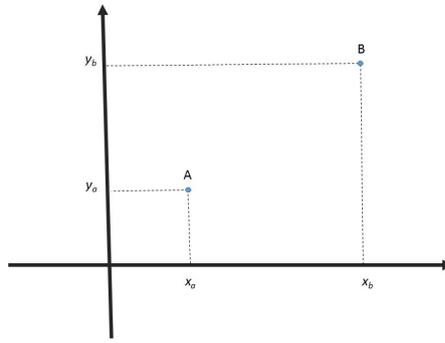


Figura 2.5:
Fonte: Própria

Traça-se um segmento de reta ligando os pontos A e B, e em seguida fecha um triângulo retângulo cujos catetos medem $x_b - x_a$ e $y_b - y_a$, e a hipotenusa $d_{A,B}$ como mostrado na figura 2.6.

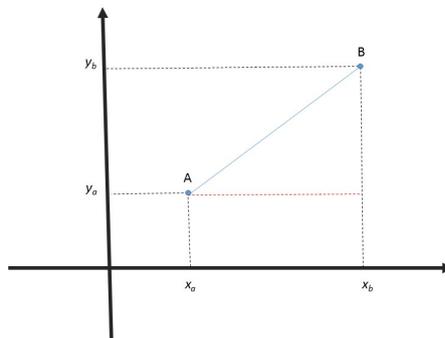


Figura 2.6:
Fonte: Própria

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo obtemos

$$d_{A,B}^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2$$

daí,

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

2.2.2 Em Números Complexos

A norma de um complexo no plano de Gauss é a distância entre o afixo e a origem deste plano. Para calcularmos esta norma, fazemos de forma similar a citada na subseção anterior.

Tomos P, o afixo de $Z = a + bi$ no plano de Gauss como na figura 2.7,

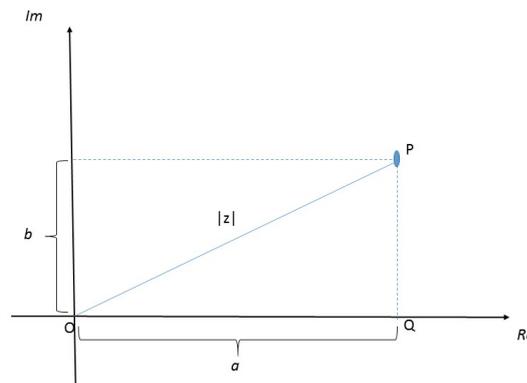


Figura 2.7:

Fonte: Própria

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo OPQ (ver figura 2.8)

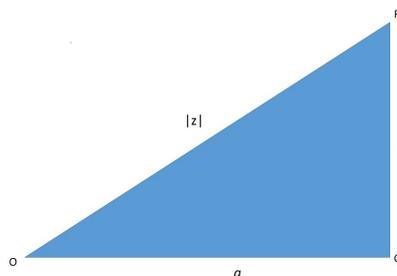


Figura 2.8:

Fonte: Própria

obtemos,

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2.2.3 Na Trigonometria

Considere um triângulo retângulo de catetos b e c , hipotenusa a e um ângulo agudo α (ver figura 2.9). Podemos calcular o seno e o cosseno deste ângulo.

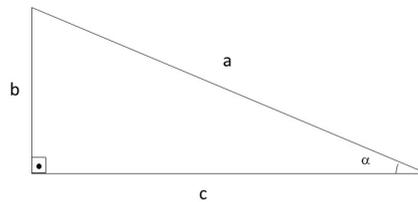


Figura 2.9:

Fonte: Própria

$$\sin \alpha = \frac{b}{a}$$

e

$$\cos \alpha = \frac{c}{a},$$

daí,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

2.2.4 Na Geometria Plana

Dado um quadrado ABCD de lado medindo l . É possível calcular a medida de sua diagonal através do teorema de Pitágoras, traçando um triângulo retângulo, como mostra a seguir a figura 2.10.

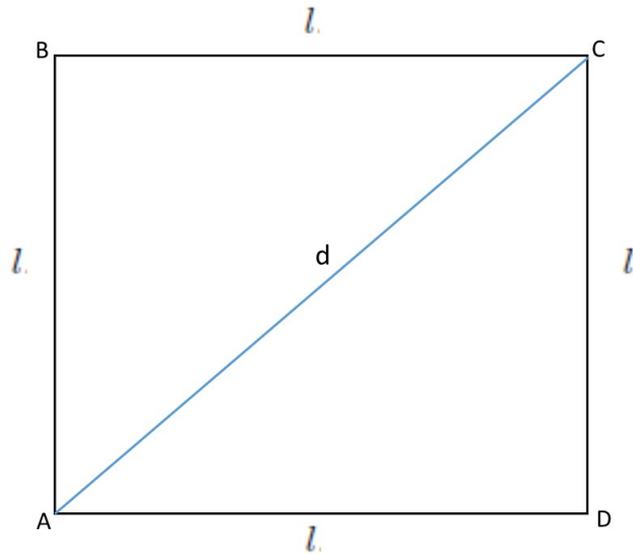


Figura 2.10: Diagonal do quadrado

Fonte: Própria

Pelo teorema de Pitágoras, sabemos que

$$d^2 = l^2 + l^2,$$

Então,

$$d^2 = 2l^2 \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{2l^2} \Rightarrow$$

$$d = l\sqrt{2}.$$

determinando assim, a diagonal do quadrado a partir do seu lado.

2.2.5 Na Geometria Espacial

A diagonal de um paralelepípedo pode ser obtida pela aplicação do teorema de Pitágoras duas vezes. Dado um paralelepípedo reto de arestas a , b e c , como na figura 2.11, podemos calcular a diagonal da base d , aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de lados a , b e d .

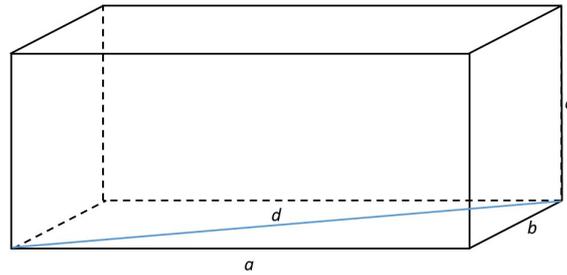


Figura 2.11: Paralelepípedo

Fonte: Própria.

podemos determinar,

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Em seguida, torna-se a aplicar o teorema no triângulo de lados d, c e D , como na figura 2.12, onde D é a diagonal do paralelepípedo.

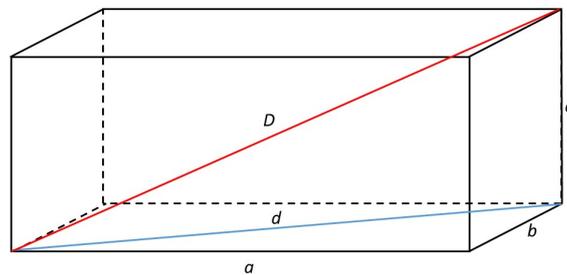


Figura 2.12: Diagonal do paralelepípedo

Fonte: Própria

Temos então,

$$D^2 = d^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

2.2.6 O túnel de Eupalinos

A ilha de Samos, há 2500 anos atrás, era habitada por gregos e entrou para história por ser a terra natal de Pitágoras. Por volta do ano de 530 a.C., Polícrates dominava aquelas terras e preocupado com o abastecimento de água resolveu abastecer a cidade com fontes que ficavam do outro lado do Monte Castro. Como sugestão ele poderia circular o monte e trazer água pela superfície, contudo ficariam vulneráveis a ataques bárbaros que certamente cortariam este abastecimento. A solução encontrada foi cavar um túnel para transpor a água por dentro do monte. Neste momento entra a figura do matemático Eupalinos que usando os conhecimentos pitagóricos conseguiu fazer tal obra.

Primeiro ele definiu os dois pontos ao redor do monte que seriam os pontos de entrada e saída do túnel (aqui chamaremos de pontos A e B). Em seguida, traçou um poligonal formado por segmentos perpendiculares ao redor do monte (figura 2.13) determinando assim as medidas dos lados AK e BK do triângulo ABK e, aplicando o teorema de Pitágoras, pode determinar a distância entre os pontos A e B.

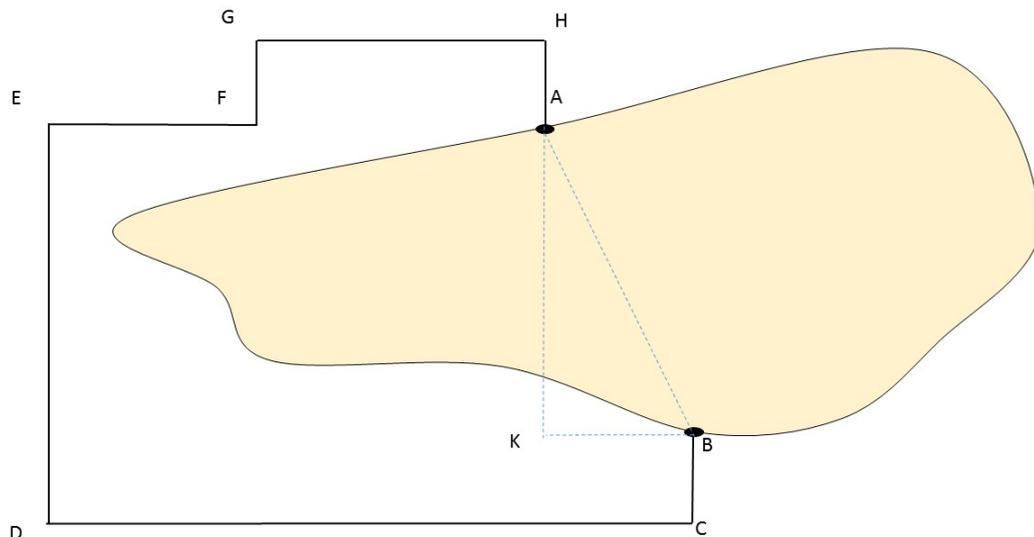


Figura 2.13: Secção transversal de um monte

Fonte: Própria

Após a descoberta da distância a ser cavada, um outro problema estava na certeza da direção que deveria ser cavado tal túnel e para surpresa na comunidade, Eupalinos anunciou que, para reduzir o tempo da construção, iniciaria a obra nos dois sentidos fazendo estes buracos se encontrarem no meio do caminho. Para isso ele usou triângulos retângulos semelhantes, pois ele sabia que se construísse dois pequenos triângulos com lados proporcionais aos lados de ABK e os colocassem nos vértices A e B, os seus ângulos

agudos seriam iguais.

Considere o teorema: *Se dois triângulos retângulos têm catetos proporcionais, então seus ângulos agudos são iguais.*

Na figura 2.14, se $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$, então $\angle ab = \angle a'b'$ e $\angle ac = \angle a'c'$.

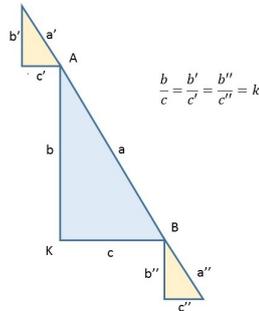


Figura 2.14: Semelhança de triângulo.

Fonte: Própria

Entretanto, Eupalinos não usou exatamente o teorema acima e sim uma consequência dele que diz: Sejam abc , $a'b'c'$ triângulos com um vértice em comum. Se os catetos b e c' são perpendiculares e além disso, tem-se $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$, então as hipotenusas a e a' estão em linha reta.

Certamente o túnel já tinha tamanho e direção, contudo faltava apenas resolver a questão de inclinação para que a água não encontrasse obstáculo para descer. Para isso calculou-se o desnível entre os pontos A e B , fazendo-o através do poligonal. Ver ilustração da visão lateral do monte.

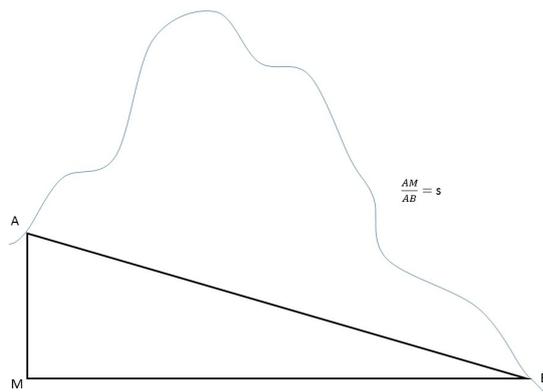


Figura 2.15: Secção meridional de um monte

Fonte: Própria.

Fazendo a razão $\frac{AM}{AB} = s$, foi descoberta que a cada unidade de comprimento que fosse perfurado o túnel, o nível deveria abaixar unidades.

O fato é que o túnel sobre o Monte Castro existe e está lá para constatação de sua grandiosidade, contudo houve um erro de aproximadamente 9 metros na horizontal e 3 metros na vertical que é considerado insignificante para a dimensão da construção e para a tecnologia da época. Este desvio relata dois pontos interessantes. O primeiro é que a ponta que começou no lado mais alto A ficou acima da ponta que começou do lado mais baixo B. Isto mostra a preocupação em não ter obstáculos caso ficasse um desvio contrário. O segundo ponto é que gerou uma cachoeira sem interromper o fluxo de água.

2.3 Número de ouro e a natureza

Os pitagóricos foram os precursores no desenvolvimento de uma técnica para obtenção de demonstrações que misturavam a álgebra tradicional com a geometria em que hoje é chamada de álgebra geométrica que é muito encontrada no Livro II de Euclides, como por exemplo a proposição 4 deste livro que diz,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Assim decompondo o quadrado de lado $a + b$ em dois quadrados e dois retângulos de áreas a^2 , b^2 , ab e ba , podemos comprovar esta identidade algébrica usando a geometria (ver figura 2.16).

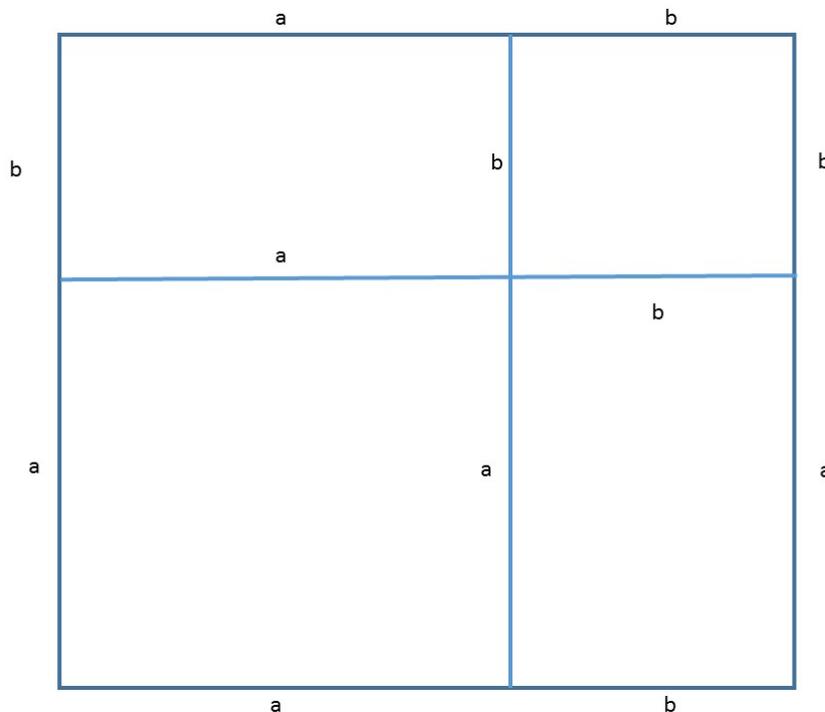


Figura 2.16:

Fonte: Própria

Os pitagóricos mostravam muito interesse pela proporção áurea e pela razão áurea (conhecida também como razão dourada) determinando o número de ouro (φ). Este interesse era tão notável que os membros da escola pitagórica carregavam uma insígnia de um pentágono estrelado, pois existia neste emblema uma razão áurea entre as diagonais e os lados do pentágono.

Diz-se que um ponto divide um segmento de reta em média e extrema razão ou em secção áurea, se o mais longo dos segmentos é a média geométrica entre o menor e o segmento todo. A razão entre o segmento menor e o segmento maior é chamado de razão áurea.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

$$BC = \sqrt{AB \cdot AC}$$

Figura 2.17:

Fonte: Própria

Para encontrarmos o número de ouro basta considerar $AB = x$ e $BC = y$.



Figura 2.18:

Fonte: Própria

Daí podemos dizer que

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{y}{x+y} \Leftrightarrow \\ y^2 &= xy + x^2 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{y}{x}\right)^2 &= \frac{y}{x} + 1. \end{aligned}$$

Agora, considerando $\frac{y}{x} = m$, temos a equação quadrática $m^2 = m + 1$, onde $m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Como $m = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ não convém, temos $m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ o número de ouro.

Vale salientar que algumas escolas utilizam o número de ouro como sendo $\varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618$, contudo vamos acompanhar [3] que considera os dois bastando ver a relação montada.

Uma forma de encontrar este número de ouro é através do quadrado oblongo ¹. A partir de um quadrado ABCD de lado unitário, marca-se o ponto médio E do lado AB e determina o segmento EC.

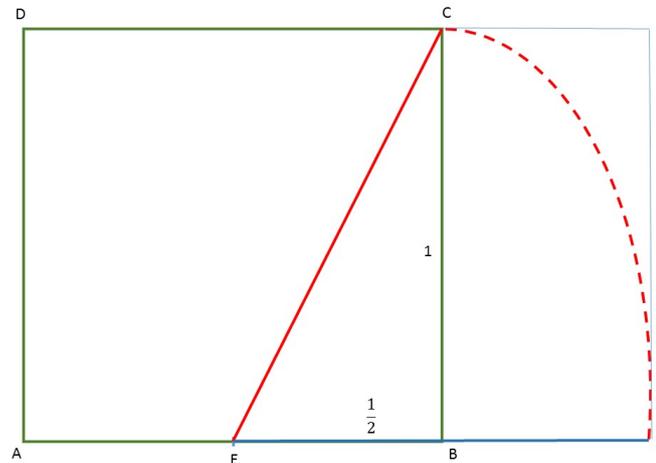


Figura 2.19:

Fonte: Própria

Usando o teorema de Pitágoras podemos determinar

$$\begin{aligned} \overline{EC}^2 &= \overline{EB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \\ \overline{EC}^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 \Leftrightarrow \\ \overline{EC}^2 &= \frac{1}{4} + 1 \Leftrightarrow \\ \overline{EC}^2 &= \frac{5}{4} \Leftrightarrow \\ \overline{EC} &= \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Com um compasso traçamos o segmento \overline{EF} como na figura 2.19, e encontramos o segmento $\overline{AF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$

Retomando o pentágono estrelado verificamos que ao traçar suas diagonais, estas se cruzam em pontos que dividem as demais em razão áurea.

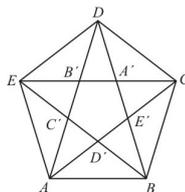


Figura 2.20: Pentágono estrelado

¹Este tipo de construção era muito usado nos templos em geral. Uma curiosidade é que na igreja católica a região limitada pelo quadrado era reservada para os fiéis, enquanto a prolongação referente ao retângulo encontrado era reservada para o altar.

Tratando-se de número de ouro, podemos falar de Leonardo de Pisa (1175 - 1250), também conhecido como Leonardo Fibonacci. Um dos problemas mais estudados por ele é relacionado a reprodução de coelhos e está citado abaixo:

“Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês.”

Tal sequência é formada por 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... sendo chamado também de números de Fibonacci, pode ser sintetizada por $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 1$ e $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$, sabendo que tal sequência não é limitada superiormente. Entretanto se tomarmos a razão entre qualquer termo desta sequência e seu sucessor encontramos uma nova sequência do tipo $F(n) = \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$, sendo $F(1) = \frac{1}{1} = 1$, $F(2) = \frac{2}{1} = 2$, $F(3) = \frac{3}{2} = 1,5$, $F(4) = \frac{5}{3} = 1,666...$ e assim sucessivamente.

Representando num gráfico da figura 2.21, onde o eixo horizontal é a sequência de Fibonacci, obtém-se uma sequência que vai se aproximando do número de ouro.

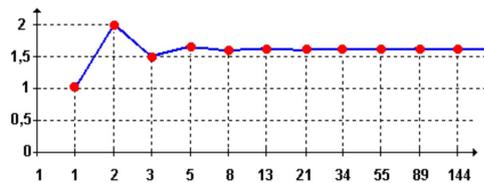


Figura 2.21:

Fonte: Própria

Com isso podemos mostrar que a partir de um quadrado podemos construir o retângulo áureo, obedecendo a sequência de Fibonacci (ver figura 2.22).

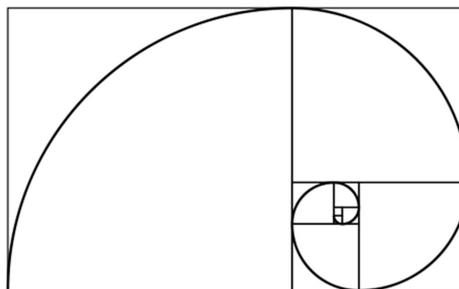


Figura 2.22: Retângulo áureo

Fonte: <http://4.bp.blogspot.com/->

8AmW0P14ZSI/T2YvoDPnZBI/AAAAAAAAAV4/9yaAumVKOuM/s1600/fibonacci20spiral.png

Leonardo Da Vinci, com a obra “O homem de Vitrúvio”, figura 2.23, estabeleceu uma das mais belas obras que relata a existência do número de ouro nas proporções do corpo humano, como por exemplo:

1-Medindo a sua altura dividindo pela altura do seu umbigo até o chão.

- 2-Medindo o seu braço inteiro, dividindo pelo tamanho do seu cotovelo até ao dedo.
- 3-Meça a sua perna inteira e divida pelo comprimento do seu joelho até o chão.

Entre estas e várias outras razões o resultado sempre é o número de ouro (aproximadamente 1,618).

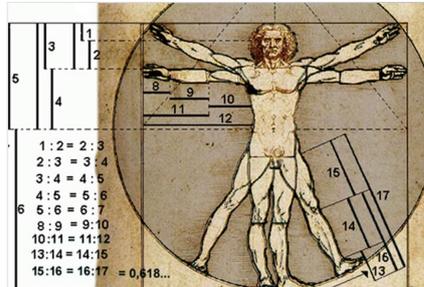


Figura 2.23: O homem de Vitruvius

Fonte: <http://www.designculture.com.br/wp-content/uploads/2015/06/Dc-11.jpg>

Ainda no campo da arte, o próprio Da Vinci, pintou o quadro Gioconda, também conhecido por Mona Lisa. Esta é considerado a imagem mais perfeita da mulher, pois nele encontra-se o número de ouro entre suas razões (ver figura 2.24)

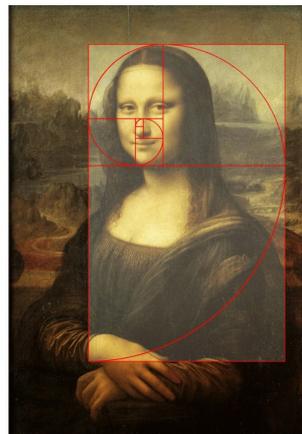


Figura 2.24: Mona Lisa

Fonte:

O Nautilus marinho é um tipo de molusco que possui uma concha que pode ser inscrita num retângulo de ouro como podemos ver na figura 2.25

Na arquitetura, os gregos trabalhavam usando o numero de ouro nas suas construções, como por exemplo o Partenon, ver figura 2.26

2.4 Raiz quadrada de um número inteiro na reta real

Nesta seção aplicaremos o teorema de Pitágoras na verificação geométrica de raízes quadradas não exatas auxiliando na compreensão dos números irracionais, pois garante

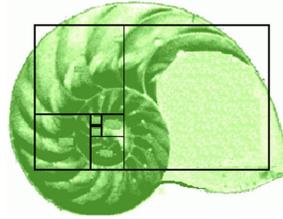


Figura 2.25: Nautilus marinho

Fonte: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/fig06.png>

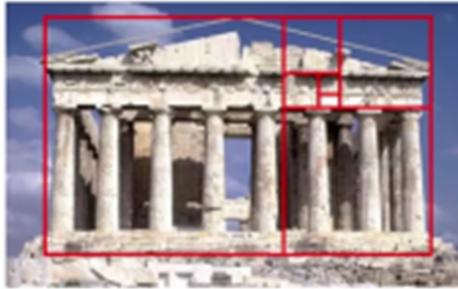


Figura 2.26: Partenon

Fonte: <https://vibraraapi.files.wordpress.com/2014/03/0451.png>

sua existência e localização na reta real.

Em primeiro lugar, traça-se um semicírculo de diâmetro $AB = R$ num plano cartesiano, sendo $A(0, 0)$, $B(R, 0)$ e centro no ponto $C(\frac{R}{2}, 0)$, como mostra a figura 2.27.

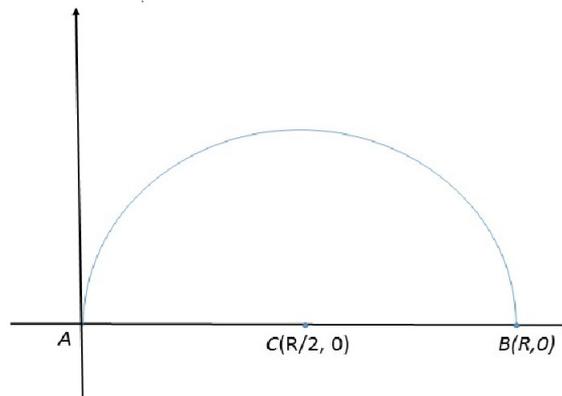


Figura 2.27:

Fonte: Própria

Em seguida traça-se uma reta perpendicular ao eixo x passando pelo ponto $D(1, 0)$, até determinar sobre a semicircunferência o ponto E , ver figura 2.28, sendo o triângulo CDE retângulo, com lados $CE = \frac{R}{2}$ e $CD = \frac{R}{2} - 1$, Podendo assim, aplicar o teorema de Pitágoras e encontrar,

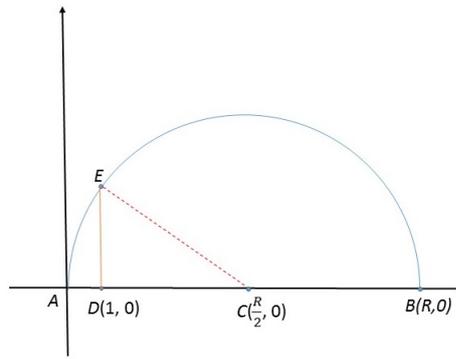


Figura 2.28:

Fonte: Própria

$$DE^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2} - 1\right)^2 \Rightarrow$$

$$DE^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 + R - 1 \Rightarrow$$

$$DE^2 = R - 1.$$

Em seguida, aplica-se novamente o teorema de Pitágoras, só que agora no triângulo ADE , sendo $AD = 1$ e $DE^2 = R - 1$. ver figura 2.29.

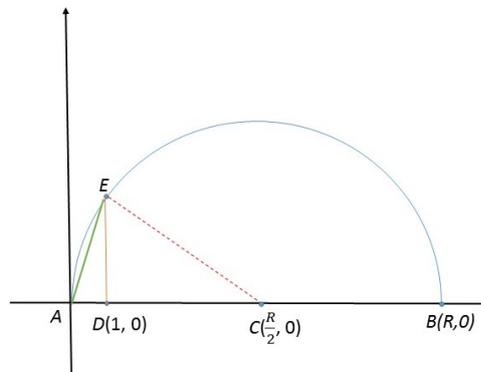


Figura 2.29:

Fonte: Própria

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 \Rightarrow$$

$$AE^2 = 1 + R - 1 \Rightarrow$$

$$AE^2 = R \Rightarrow$$

$$AE = \sqrt{R}.$$

Finalmente basta pegar o compasso com centro em A e abertura AE e marcar um ponto E' sobre o eixo x , determinando assim $AE = \sqrt{R}$, como na figura 2.30.

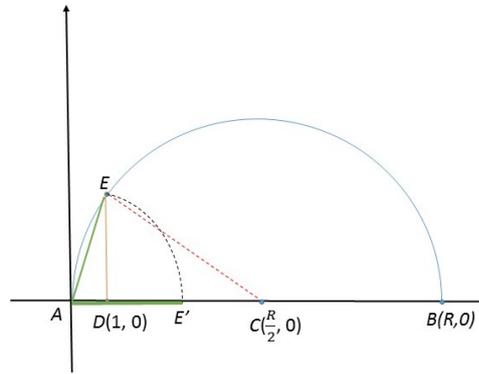


Figura 2.30:

Fonte: Própria

2.5 Ternos Pitagóricos

Quando os três números que satisfazem ao Teorema de Pitágoras são naturais, são chamados de Ternos Pitagóricos. O Terno Pitagórico mais conhecido é o (5, 4, 3). Contudo existe uma infinidade de ternos que satisfazem esta relação, dentre os quais podemos citar os proporcionais a este, como (10, 8, 6); (15, 12, 9); (20, 16, 12). Um terno pitagórico é chamado de primitivo quando estes números naturais são primos entre si.

Definição:

Se $(a, b, c) \in \mathbb{N}^*$ tal que $a^2 = b^2 + c^2$, denominamos de (a, b, c) de Terno Pitagórico.

Os Ternos Pitagóricos podem ser encontrados de uma forma geral pela relação:

$$a = x^2 + y^2$$

$$b = x^2 - y^2$$

$$c = 2xy$$

Demonstração:

Sendo

$$b^2 + c^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$$

$$b^2 + c^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2$$

$$b^2 + c^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$b^2 + c^2 = (x^2 + y^2)^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Para melhor ilustrar esta relação do Terno Pitagórico, podemos lembrar aos alunos que ao atribuir valores para x, y devemos ter o cuidado para $x > y$ e se o objetivo for

encontrar Ternos primitivos sempre devemos ter o cuidado de escolher valores para x e y , sempre um par e outro ímpar, caso contrário o terno encontrado será formado por números pares, podendo assim ser simplificado.

2.6 Teorema em geometrias não-euclidianas

Neste capítulo, comentamos algumas geometrias, distintas da geometria euclidiana, como a esférica e a hiperbólica. Para esta última, apresentamos uma versão do teorema de Pitágoras, com a mesma apresentação da geometria plana. Durante algum tempo acreditou-se que era impossível provar este resultado, com o formato $a^2 = b^2 + c^2$ em outra geometria (Ver [16]).

A geometria euclidiana e a geometria hiperbólica diferem não somente em seus conteúdos mas também pela forma que foram construídas. Enquanto a euclidiana parte de uma percepção tátil e visual para em seguida ser axiomatizada, a hiperbólica foi axiomatizada para posteriormente desenvolver modelos matemáticos para a percepção visual desta geometria.

2.6.1 Axiomas da Geometria Euclidiana Plana

Sabemos que a geometria plana tem base axiomática, ou seja, parte de afirmações que se acredita ser verdade sem uma necessidade de demonstração. Os dez axiomas de Euclides foram divididos em duas partes: Noções Comuns e Postulados.

A diferença entre estas partes é que as Noções Comuns são aplicadas em qualquer ciência e aceitas pelo senso comum, enquanto os Postulados são aplicados peculiarmente na Geometria. A geometria plana foi sintetizada pelo matemático grego Euclides - 300 a.c., e seus axiomas são:

2.6.1.1 Noções Comuns

- 1 - Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
- 2 - Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
- 3 - Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- 4 - Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
- 5 - O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

2.6.1.2 Postulados

- 1 - Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

2 - Pode-se continuar, de maneira única, qualquer reta finita continuamente em uma reta.

3 - Pode-se traçar círculos com qualquer centro e qualquer raio.

4 - Todos os ângulos retos são iguais.

5 - Se uma reta ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então as duas retas se continuadas, encontra-se-ão no lado onde estão estes ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos.

Vale salientar que durante séculos o quinto postulado de Euclides foi submetido a várias tentativas de demonstrações usando os quatro postulados anteriores, por vários matemáticos de diversas regiões do mundo e em momentos diferentes do de Euclides, como por exemplo: Ptolomeu (85-165), Proclus Diadochus (410-485 D.C.), John Playfair (1748-1819), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860), Nikolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856), entre muitos outros, tendo todos algum erro ou simplesmente usando a hipótese do próprio Euclides.

Estas tentativas de demonstração foram o alicerce para a percepção e a formalização de novas geometrias. Os axiomas de Euclides não se aplicam nestas geometrias e foi motivo de muita pesquisa e discussão entre matemáticos de várias gerações, principalmente da comunidade científica que assumia naquela época a geometria euclideana como a mais completa obra geométrica da humanidade.

Temos, como exemplos de geometrias não-euclidianas, a esférica e a hiperbólica.

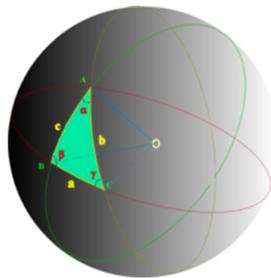


Figura 2.31: Plano esférico.

Fonte:

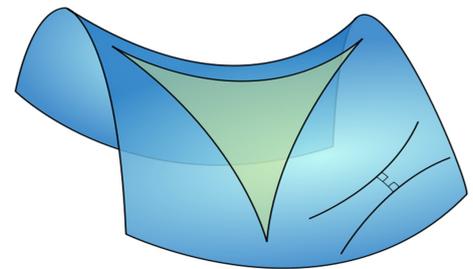


Figura 2.32: Plano hiperbólico.

Fonte:

Um dos matemáticos que mais contribuiu para essas “novas” geometrias foi Gauss. Depois de muito tentar demonstrar o quinto postulado de Euclides por absurdo, ele chegou a conclusão de que não seria possível. Ele, junto com Bolyai, chegaram a conclusão que nem sempre retas paralelas não se cruzam e principalmente que por um ponto fora de uma reta é possível passar infinitas retas paralelas a ela.

Gauss está entre os primeiros matemáticos que sinalizaram para a existência de uma nova geometria que intitulou de geometria não Euclideana.

2.6.2 Geodésicas

Para chegarmos ao objetivo desta seção, é necessário saber que geodésicas são as curvas que determinam a menor distância entre dois pontos de uma superfície. Quando trabalhamos numa superfície plana, a curva que minimiza a distância entre dois pontos é sempre uma reta. Contudo na superfície esférica, por exemplo, a curva que liga dois pontos quaisquer será um arco de circunferência de extremidades nesses pontos. Uma forma de comentar isso com nossos alunos e ilustrar mais a situação, tornando a ideia de geodésica mais concreta, é imaginar um navio navegando longas distâncias em mar aberto. Isso nos dá a impressão de que este navio afundou no mar pois ele não percorre um segmento “retilíneo” e sim um segmento “curvado”, (ver figura 2.33).

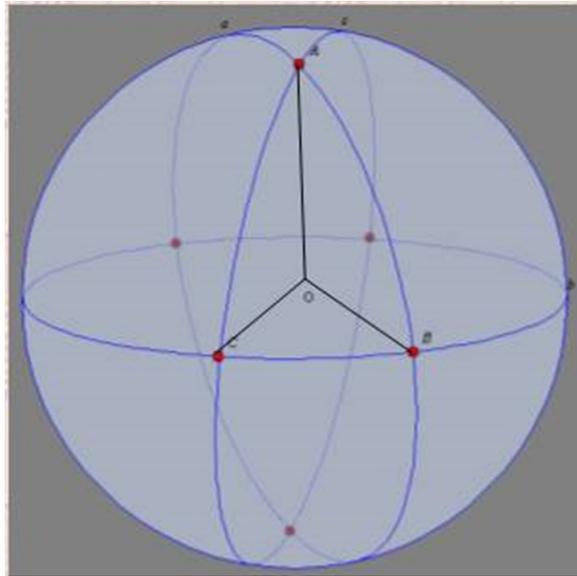


Figura 2.33: retas na esfera

Fonte: Própria

Na geometria plana, as retas são as curvas que fazem o papel de geodésicas, uma vez que são elas que minimizam as distâncias entre dois pontos. Nas geometrias não-euclidianas, as geodésicas são, em geral, curvas mais complexas. Defini-las formalmente exigiria um aparato grande de informações da geometria diferencial que não fazem parte do escopo deste trabalho. Mas, em palavras simples, uma geodésica é uma curva diferenciável $\alpha(t)$ sobre uma superfície orientada M tal que o vetor aceleração α'' é ortogonal a todos os pontos de $\alpha(t)$.

2.6.3 Geometria no espaço complexo \mathbb{C}

2.6.3.1 Forma Algébrica

Em \mathbb{C} podemos colocar uma estrutura métrica, que nos possibilita trabalhar com distâncias e ângulos. Para isso, definimos $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, com $\text{Re}(z) = a$ e $\text{Im}(z) = b$ as Partes Real e Imaginária, respectivamente, e $\bar{z} = a - bi \in \mathbb{C}$, o conjugado de z . Lembrando ainda que a norma de z é dada pela expressão $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Com esta definição, podemos representar o eixo horizontal (abscissa) como o eixo real de z e o eixo vertical (ordenada) como o eixo imaginário de z , resultando no Plano de Gauss

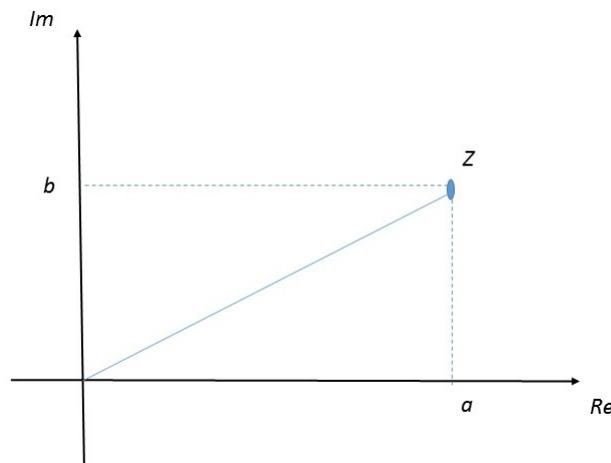


Figura 2.34:

Fonte: Própria

Assim, o número complexo z pode ser visto como uma coordenada (a, b) , ou como vetor (a, b) (ver figura 2.34. Isto facilita o entendimento da distância entre dois complexos z_1 e z_2 , como sendo $|z_1 - z_2|$.

2.6.3.2 Forma Polar

Da mesma forma que é possível escrever o número complexo na forma algébrica $z = a + bi$, existe uma forma mais confortável de representar este número, a Forma Polar (ou Trigonométrica). Sabemos que se $z = a + bi$, então existem números reais $r \geq 0$, sendo r a norma de z , e $\theta \in \mathbb{R} \geq 0$ tais que

$$a = r \cos \theta \text{ e } b = r \sin \theta.$$

Assim sendo podemos garantir que $z = a + bi$, pode ser escrito que na forma

$$z = r \cos \theta + r \sin \theta$$

$$z = r(\cos \theta + \sin \theta)$$

Definindo $\rho^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, podemos concluir que

$$z = r\rho^{i\theta}$$

com $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ do complexo z .

2.6.4 Analogias em geometrias não euclidianas

Nesta seção, vamos apresentar, de forma bastante resumida, uma versão do teorema de Pitágoras na geometria hiperbólica sobre o disco de Poincaré dada por [15].

Durante muito tempo acreditou-se que não haveria uma forma equivalente ao teorema em geometrias não-euclidianas. Assim achamos interessante apresentá-lo aqui, por questões de curiosidade e cunho científico.

2.6.4.1 Transformações de Möbius

Sejam a, b, c e d números complexos com $ad - bc \neq 0$, então a função complexa definida por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

é chamada um **Transformação de Möbius**. A condição $ad - bc \neq 0$ é uma garantia para que a função $T(z)$ não seja constante, pois se $ad - bc = 0$ ($ad = bc$) teremos as seguintes possibilidades para $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$:

1. se $b = \frac{ad}{c}$, com $c \neq 0$ temos $T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} \frac{cz + d}{cz + d} = \frac{a}{c}$
2. para a existência da função complexa $T(z)$, as constantes c e d não podem ser simultaneamente nulas. Com $c = 0$ e $ad = bc$, temos $d \neq 0$ e $T(z) = \frac{b}{d}$.

Observamos que em ambos os casos a função $T(z)$ é constante, o que descaracteriza como uma função transformação, daí a necessidade da condição acima.

Vamos trabalhar as transformações de Möbius no disco complexo unitário $D = \{z : |z| < 1\}$ no plano complexo por

$$z \rightarrow \rho^{i\theta} \frac{z_0 + z}{1 + \bar{z}_0 z} = \rho^{i\theta} (z_0 \oplus z)$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$, $z_0 \in D$, \bar{z}_0 é o conjugado de z_0 e \oplus define a adição de Möbius no disco.

2.6.4.2 O disco de Poincaré

No modelo do disco de Poincaré, o plano hiperbólico é definido a partir de uma região limitada por uma circunferência que denotamos de D . Sendo λ uma circunferência de centro O e raio OR , D é o conjunto de todos os pontos P , tais que $OP < OR$. Os pontos sobre a circunferência λ não fazem parte do plano hiperbólico, são chamados de pontos ideais e delimitam o horizonte hiperbólico. Os arcos de circunferências contidas em D e ortogonais ao horizonte são as retas hiperbólicas. Assim, neste modelo podemos verificar a existência de infinitas retas paralelas que passam por um mesmo ponto P (ver figura 2.35).

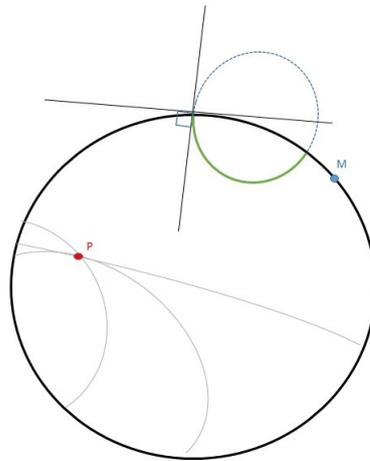


Figura 2.35: Fonte: Própria

Entender a noção de distância no Disco é fundamental para nos desprendermos da visão euclideana e podermos aceitar uma nova geometria, a hiperbólica no caso. O Disco é um espaço infinito, ou seja, um indivíduo pode caminhar no sentido do horizonte e nunca chegar ao fim de sua caminhada ainda que os passos sejam do mesmo tamanho. Um observador externo vê os passos tornarem-se cada vez menores se sua visão for inteiramente euclideana no plano hiperbólico.

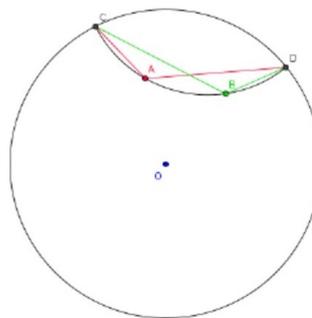


Figura 2.36: distância entre pontos
Fonte: Própria

Definição:

A função distância hiperbólica de Poincaré em D é:

$$d(a, b) = \left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right| = |a \ominus b|,$$

de modo que $a \ominus b = a \oplus (-b), \forall a, b \in D$.

Para garantir que $d(x, y)$ é uma métrica é indispensável obedecer a desigualdade triangular

$$d(a, c) \leq d(a, b) \oplus d(b, c).$$

Observe que o lado direito da desigualdade pode ser escrito como

$$\tanh(\tanh^{-1}d(a, b) \oplus \tanh^{-1}d(b, c)),$$

logo a desigualdade pode ser reescrita na forma

$$\tanh^{-1}d(a, c) \leq \tanh^{-1}d(a, b) \oplus \tanh^{-1}d(b, c),$$

a qual envolve a adição ordinária de números reais ao invés de Möbius.

Também é usual definir-se a função distância da adição hiperbólica em D como

$$h(a, b) = \tanh^{-1}d(a, b) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+d(a,b)}{1-d(a,b)} \right),$$

daí,

$$h(a, c) \leq h(a, b) + h(b, c),$$

para todo $a, b, c \in D$, provando que é válida a desigualdade triangular.

2.6.4.3 Teorema de Pitágoras na Geometria Hiperbólica

Agora, vamos enunciar e provar o Teorema de Pitágoras hiperbólico.

Sabe-se que a medida do ângulo hiperbólico entre dois de um triângulo hiperbólico é a medida Euclideana dos raios tangentes. Um *triângulo reto hiperbólico* é aquele triângulo com um dos ângulos igual a $\frac{\pi}{2}$.

Teorema: Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico de vértices a, b, c no disco de Poincaré, cujos lados (no sentido horário) são

$$A = -b \oplus c, B = -c \oplus a, C = -a \oplus b.$$

Se os lados A e B são ortogonais, então $|A|^2 \oplus |B|^2 = |C|^2$.

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo reto hiperbólico de vértices nos pontos a, b, c do disco e cujos lados A, B, C são segmentos geodésicos, com os lados A e B ortogonais, como na figura 2.37.

Aplicando-se uma transformação de Möbius apropriada podemos mover o ângulo reto para o centro de D de modo que os lados ortogonais estejam sobre os eixos real e imaginário de D , como na figura 2.37.

Transformações de Möbius são isometrias conformes, i.e., preservam os comprimentos hiperbólicos de segmentos geodésicos e a medida dos ângulos hiperbólicos. Logo, o triângulo resultante $\triangle A'B'C'$ pela transformação, é congruente ao $\triangle ABC$, fig. 2.37, no sentido de que ambos possuem os mesmos comprimentos hiperbólicos para lados correspondentes e medidas iguais para ângulos correspondentes.

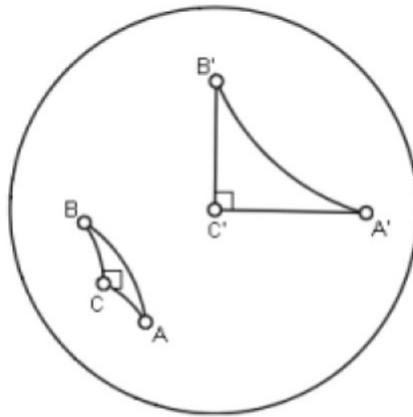


Figura 2.37:

Fonte:

Os vértices do triângulo reto hiperbólico $\triangle A'B'C'$ são $A' = x, B' = iy, C' = 0$, para alguns $x, y \in (-1, 1)$.

O comprimento do segmento geodésico unindo dois pontos a, b do disco é $|b \ominus a|$. Assim, os comprimentos hiperbólicos $|A|, |B|, |C|$ dos lados A, B, C do triângulo $\triangle A'B'C'$ são dados por

$$\begin{aligned} |A|^2 &= |b' \ominus c'|^2 = y^2, \\ |B|^2 &= |a' \ominus c'|^2 = x^2, \text{ e} \\ |C|^2 &= |a' \ominus b'|^2 = |x \ominus iy|^2 = \left| \frac{x - iy}{1 - ixy} \right|^2 = x^2 \oplus y^2. \end{aligned}$$

portanto,

$$|A|^2 \oplus |B|^2 = |C|^2,$$

donde verifica-se o Teorema de Pitágoras para triângulos retos hiperbólicos no disco de Poincaré.

Capítulo 3

Atividades para sala de aula

3.1 Verificando o teorema de Pitágoras no GeoGebra

Uma das formas de trazer o aluno para o mundo da matemática é envolvendo cada vez mais nas tecnologias e nas ferramentas computacionais que tanto eles gostam e interagem. Tendo em vista isso, promovemos como atividade a verificação do teorema de pitágoras pela soma das áreas, usando o GeoGebra como ferramenta. Após a abordagem do conteúdo em sala de aula, os alunos devem ser reunidos em laboratório de informática (se possível individualmente em cada computador) e seguir os passos descritos a seguir:

1º passo: traça-se uma reta a partir de dois pontos.

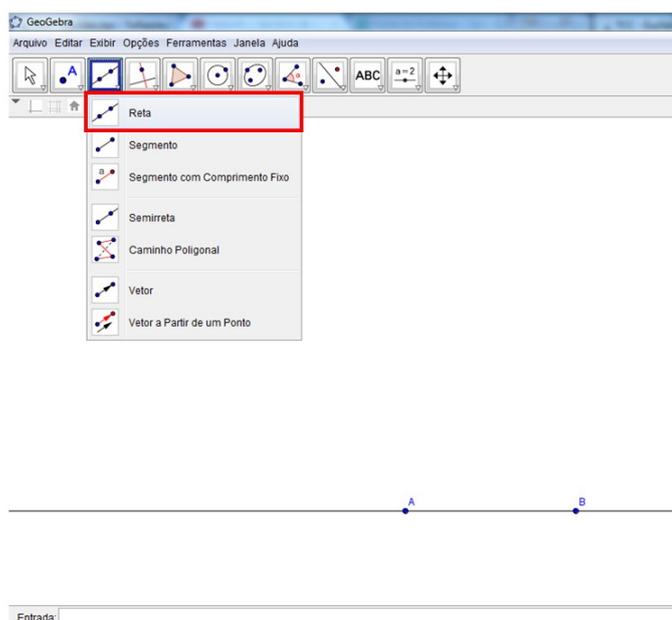


Figura 3.1:
Fonte: Própria

2º passo: traça-se uma reta perpendicular à reta dada passando pelo ponto A.

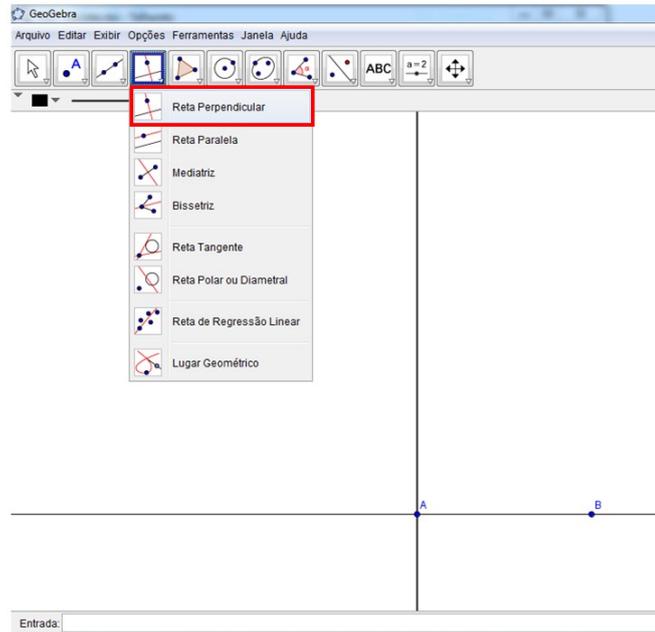


Figura 3.2:
Fonte: Própria

3º passo: marca-se um ponto C sobre a reta perpendicular.

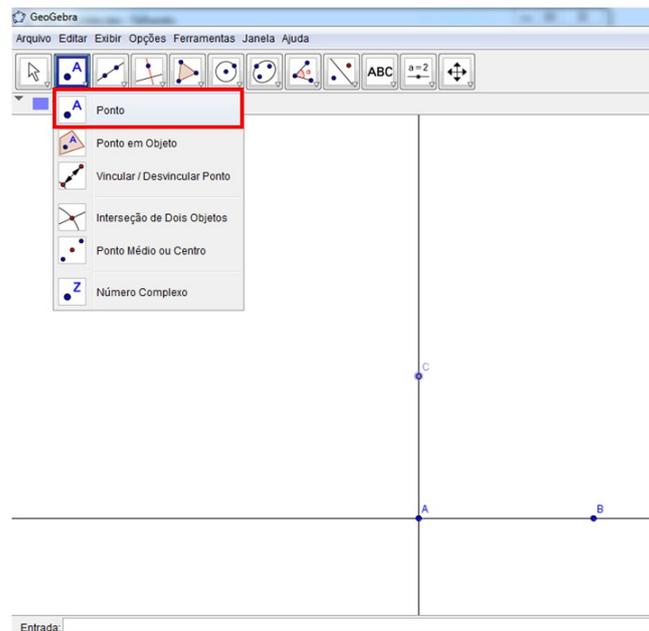


Figura 3.3:
Fonte: Própria

4º passo: Esconde-se as retas deixando somente os pontos visíveis.

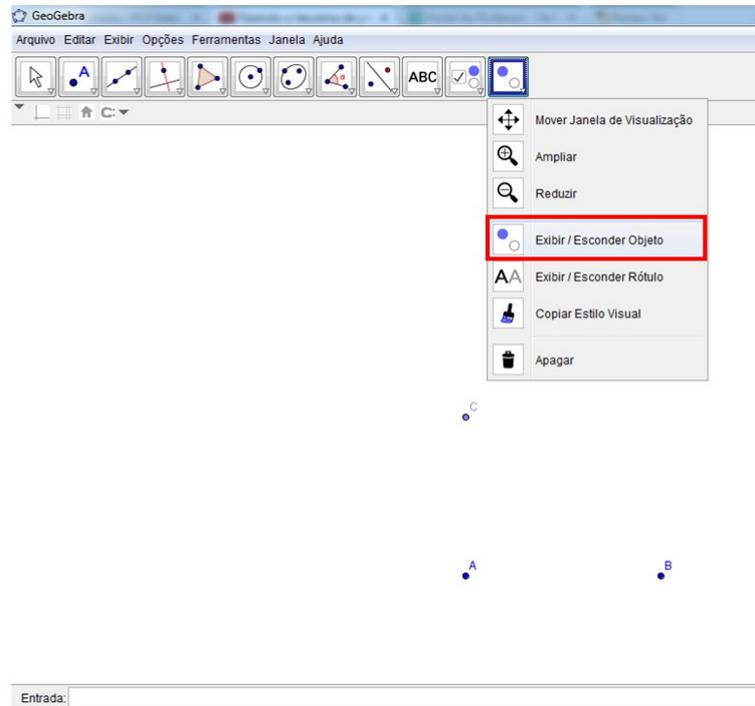


Figura 3.4:

Fonte: Própria

Obs.: Deve-se pressionar a tecla “Esc” para fazer as retas desaparecerem.

5º passo: Traça-se o triângulo ABC.

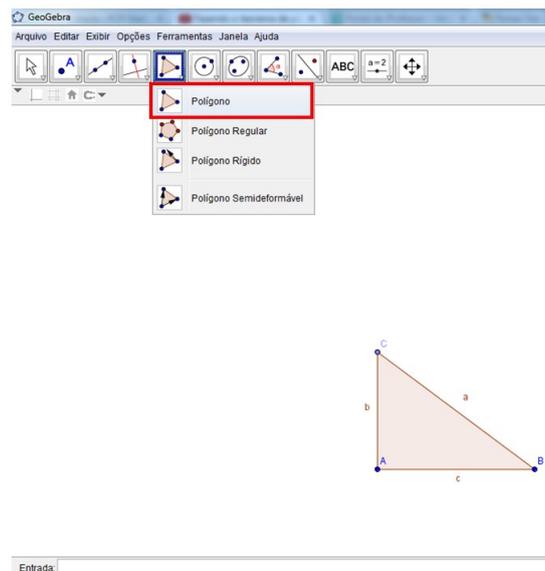


Figura 3.5:

Fonte: Própria

6º passo: Constrói-se um quadrado sobre cada um dos lados deste triângulo

retângulo

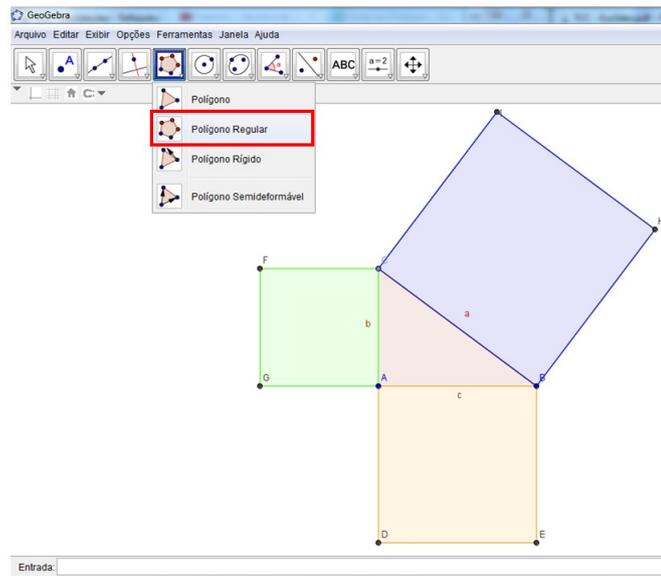


Figura 3.6:
Fonte: Própria

7º passo: Com o botão direito do mouse e clicando sobre a figura desejada pode-se exibir o rótulo e em propriedades selecionar o modo “valor”.

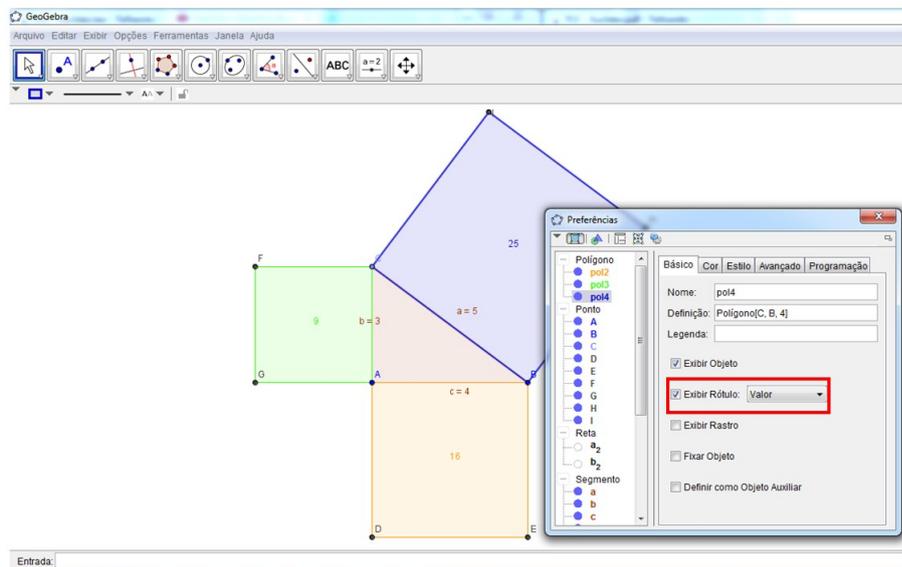


Figura 3.7:
Fonte: Própria

8º passo: movimentando qualquer um destes vértices, é possível verificar que a soma das áreas dos quadrados menores é igual a área do maior quadrado, podendo assim comprovar o Teorema de Pitágoras.

3.2 Empilhamento e transporte de tubos cilíndricos

Dois lingotes cilíndricos são colocados lado a lado de modo a se encostarem ao longo de sua extensão. Um terceiro lingote é colocado sobre os dois.

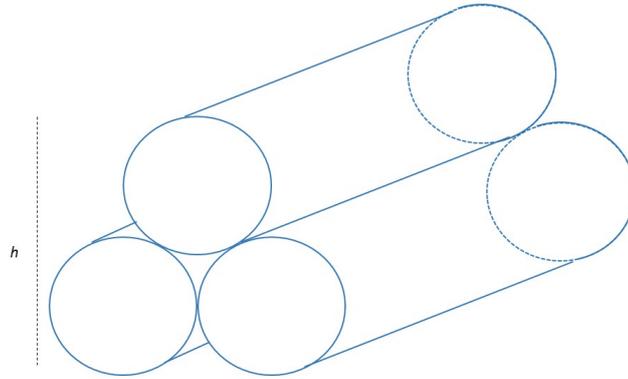


Figura 3.8:
Fonte: Própria

Problema

- Qual a altura h da pilha, se o diâmetro de cada lingote é de 40 milímetros?
- Empilhando-se tubos longos de 20 cm de diâmetro em n camadas e mantendo-os bem ajustados uns nos outros, que altura teria a pilha?

Solução:

- Ligam-se os centros dos três círculos que representam as bases dos lingotes cilíndricos formando um triângulo equilátero de lado 40 mm.

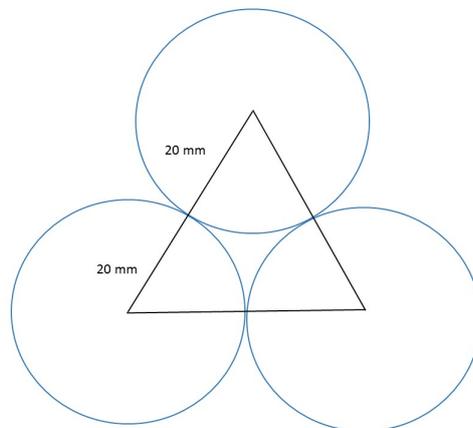


Figura 3.9:
Fonte: Própria

Em seguida traça-se uma das altura h' deste triângulo dividindo-o em dois triângulos retângulos(ver figura 3.10).

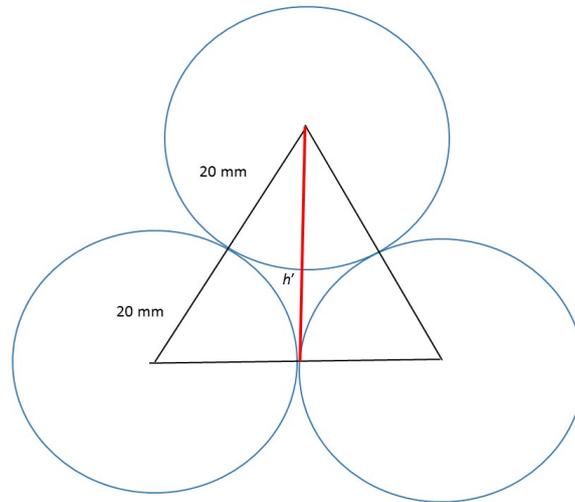


Figura 3.10:

Fonte: Própria

$$h' = \frac{40\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}\text{mm}$$

Finalmente adiciona-se dois raios e teremos a altura h da pilha, resultando

$$h = h' + 40 = (20\sqrt{3} + 40)\text{mm}$$

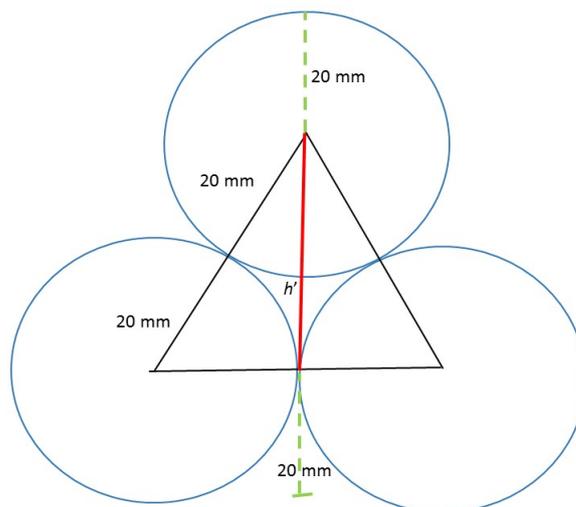


Figura 3.11:

Fonte: Própria

b) seguindo o mesmo raciocínio ao empilhar n fileiras de tobos teremos a situação da figura abaixo.

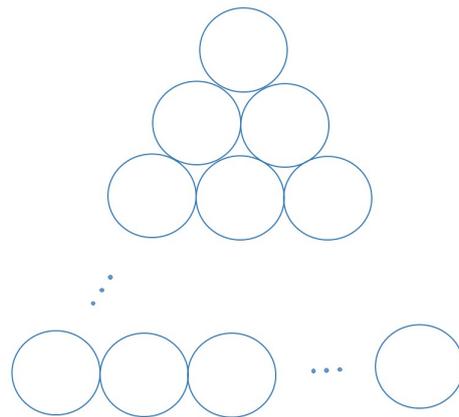


Figura 3.12:

Fonte: Própria

daí, temos o triângulo de lado igual a $(2n-2)$ raios, ou seja $10(2n-2)$.

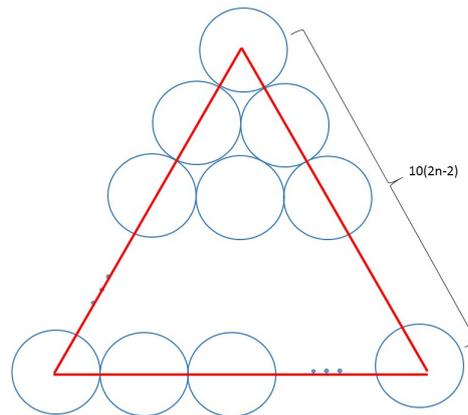


Figura 3.13:

Fonte: Própria

Calculamos a altura deste triângulo e somamos com dois raios encontrando como resposta $h' = [10\sqrt{3}(n - 1) + 20]$ cm.

3.3 Os pássaros e as torres

Duas torres, uma com 40 m de altura e a outra com 30 m de altura, estão situadas a 50m uma da outra. Entre ambas torres há uma fonte (de tamanho desprezível), para a qual dois passarinhos partem, em um mesmo instante e com velocidades iguais, do alto de cada torre. Sabendo que os passarinhos chegam à fonte simultaneamente, calcule a distância da fonte à base da torre mais baixa.

Solução: Se os pássaros saem no mesmo instante com velocidades iguais e chegam simultaneamente à fonte, podemos concluir que os espaços percorridos por eles são iguais,

daí temos a figura 3.14.

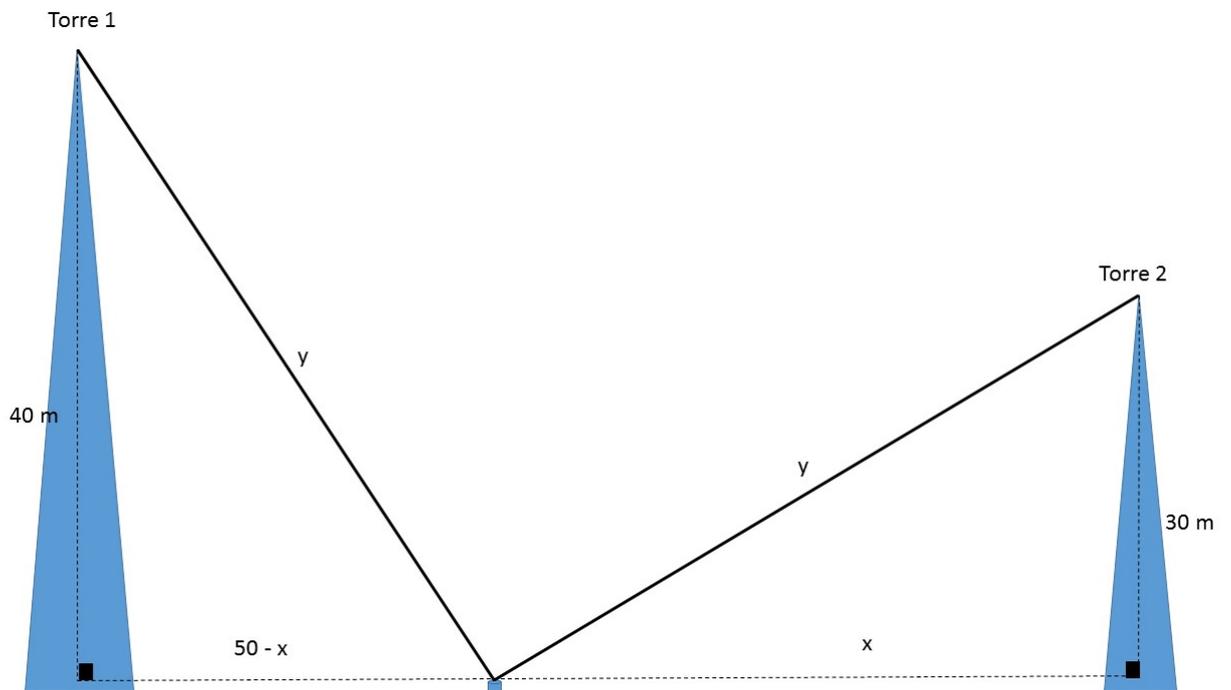


Figura 3.14:
Fonte: Própria

Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos chegar ao um sistema,

$$\begin{cases} y^2 = 40^2 + (50 - x)^2 \\ y^2 = 30^2 + x^2 \end{cases}$$

Fazendo as devidas igualdades, obtemos:

$$\begin{aligned} 30^2 + x^2 &= 40^2 + (50 - x)^2 \Rightarrow \\ 900 + x^2 &= 1600 + 2500 - 100x + x^2 \Rightarrow \\ 100x &= 3200 \Rightarrow \\ x &= 32m \end{aligned}$$

3.4 Corda esticada

(Enem 2014) Um antigo problema chinês: No alto de um bambu vertical está presa uma corda. A parte da corda em contato com o solo mede 3 chih (uma antiga unidade de medida usada na China). Quando a corda é esticada, sua extremidade toca o solo a uma distância de 8 chih do pé do bambu.

O comprimento do bambu é, aproximadamente:

- a) 8,6 chih.

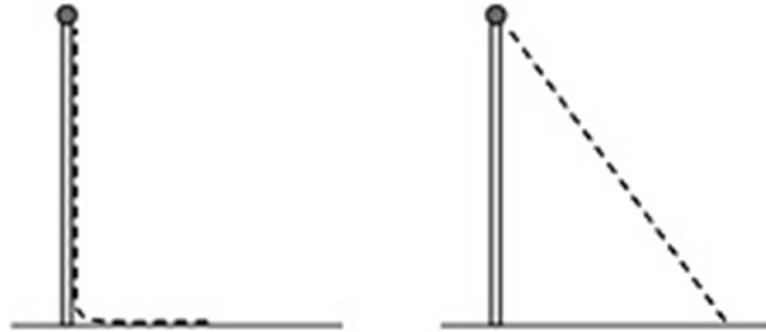


Figura 3.15: Corda esticada

Fonte: Enem 2014

- b) 9,2 chih.
- c) 9,8 chih.
- d) 10,5 chih.
- e) 11,3 chih.

Solução:

Chamamos o comprimento do bambu de x chih e conseqüentemente a corda mede $x + 3$ chih, uma vez que a parte da corda que toca o chão mede 3 chih.

Ao esticar esta corda, verificamos que o triângulo retângulo gerado possui catetos x chih e 8 chih e hipotenusa $x + 3$ chih.



Figura 3.16: Corda esticada (adaptada)

Fonte: Enem 2014

Aplicando o teorema de Pitágoras obtemos,

$$\begin{aligned}
 (x + 3)^2 &= x^2 + 8^2 \Rightarrow \\
 x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 64 \Rightarrow \\
 6x &= 55 \Rightarrow \\
 x &\approx 9,2 \text{ chih}
 \end{aligned}$$

Capítulo 4

Considerações finais

Não existe publicação nem registro das obras e ensinamentos da escola pitagórica da antiga Grécia, contudo seus ensinamentos foram passados entre as gerações e podemos citar alguns de suas sentenças avulsas, aforismo e pensamentos para que seja possível construir uma concepção filosófica desta escola. Segundo [6], foram palavras de Pitágoras:

- 1- Deus geometriza.
- 2- Tudo são números.
- 3- Educai as crianças e não será preciso punir os adultos.
- 4- Nunca devemos querer exceder os outros, a não ser em justiça.
- 5- A Terra é esférica e gira em torno do Sol.
- 6- Os números são anteriores e superiores a todas as coisas.
- 7- Uma boa velhice é a recompensa de uma vida virtuosa.
- 8- Quando dois homens são iguais em força, vence aquele que está com a razão.
- 9- A melhor maneira de atingir a perfeição é aproximar-se de Deus.
- 10- As honrarias, fáceis de receber, são também fáceis de se perder.
- 11- Entre os homens não há sábios...há apenas amantes da Sabedoria.
- 12- Os políticos recebem o Poder como uma dádiva do povo e devem administrar as coisas públicas como algo a ser, um dia, devolvido.
- 13- A soma de todas as virtudes sem a sabedoria é apenas a sombra da Virtude.

O estudo nos proporcionou um conhecimento mais aprofundado das aplicações da matemática no cotidiano. Este trabalho foi direcionado a ajudar professores a aplicar conceitos da matemática relacionada a escola pitagórica, fugindo dos tradicionais e tentando aplicações mais enriquecedoras. Ainda que não tenhamos uma bibliografia exclusiva dos feitos dos pitagóricos, seus conhecimentos e suas descobertas ultrapassaram os tempos e, nos dias de hoje, são muito aplicados e serve de alicerce para muitas ciências

e muitos ramos tecnológicos. Por fim, gostaríamos de relatar que é possível despertar nele uma visão matemática e lógica do universo que vivemos, claro que levando em consideração a sua idade e condições cognitivas correspondentes, mostrando que Pitágoras tinha “razão” quando dizia que tudo na natureza podia ser representado por números e assim concluímos que “Em tudo na natureza tem matemática”!

Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa, João Lucas Marques, Geometria euclidiana plana. 11.ed. - Rio de Janeiro:SBM (2012)
- [2] Barbosa, João Lucas Marques, Geometria hiperbólica. Rio de Janeiro:IMPA (2012)
- [3] Boyer, Carl B., História da matemática. tradução Elza F. Gomide; 2.ed. - São Paulo:Edgard Blücher, (1996)
- [4] Bushaw, Donald; Beel, Max; Pollak, Henry O., tradução Domingues, Hygino H., Aplicações da matemática escolar - São Paulo *Editora ATUAL*, (1997).
- [5] Calçada, Caio S.; Sampaio, José L.; Física Clássica - Ondas. *Editora ATUAL*, (1998).
- [6] Conte, Carlos B., Pitágoras ciência e magia na antiga grécia, 4nd. ed. *Mandras*, SP, pp. 126–127.2010.
- [7] Eves, Howard; tradução Domingues, Hygino H., Introdução a história da matemática. *Editora UNICAMP*, Vol. 1 (2004).
- [8] Junior, Francisco Nairon Monteiro; Medeiros, Alexandre; Medeiros, Cleide; Matemática e Música: As progressões geométricas e o padrão de intervalos da escala cromática. *BOLEMA*, (2003).
- [9] Leon, Steven J.; tradução Taboada, Sérgio Gilberto, Álgebra linear com Aplicações.
- [10] Lima, Elon Lages, Meu professor de matemática e outras histórias. 5.ed. - Rio de Janeiro:SBM (2006)
- [11] Lovis, Karla Aparecida; Franco, Valdeni S.- GeoGebra na construção de planos hiperbólicos - disponível em <http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/10.pdf>.
- [12] Monocórdio - disponível em <http://www.scielo.br/img/fbpe/rbef/v24n2/a08fig01.gif>.
- [13] Monocórdio - disponível em <http://i1.sndcdn.com/artworks-000086698100-ugxya0-t300x300.jpg>.

- [14] Muniz Neto, Antônio Caminha, Geometria euclidiana plana. 2.ed. - Rio de Janeiro:SBM, Vol 02 (2013)
- [15] Ungar, A. A., The Hyperbolic Pythagorean Theorem in the Poincare Disc Model of Hyperbolic Geometry. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 106, No. 8 (Oct., 1999), pp. 759–763.
- [16] Wallace, E. C., West, S. F., Roads to Geometry, 2nd. ed. *Prentice Hall*, NJ, pp. 362–363.1998.