PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

- Como alocar recursos limitados entre atividades (ou decisões) competidoras de maneira "ótima"

- Planejamento de atividades para a obtenção do resultado "ótimo", ou seja, para se alcançar a melhor alternativa dentre todas as soluções viáveis

- Modelo matemático que descreve um determinado problema, em que <u>todas</u> as funções envolvidas são <u>lineares</u>

PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

PROBLEMAS DO TIPO

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

função objetivo linear a <u>*n*</u> variáveis

sujeita a restrições lineares :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$-----------------$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$$

m **equações ou inequações lineares**

$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$$

vetor de *n* variáveis reais e positivas

PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

Notação Matricial:

$$\max\ z_o = \mathbf{cx}$$

$$s.t.\ \mathbf{Ax} \leq (=)\ \mathbf{b}$$

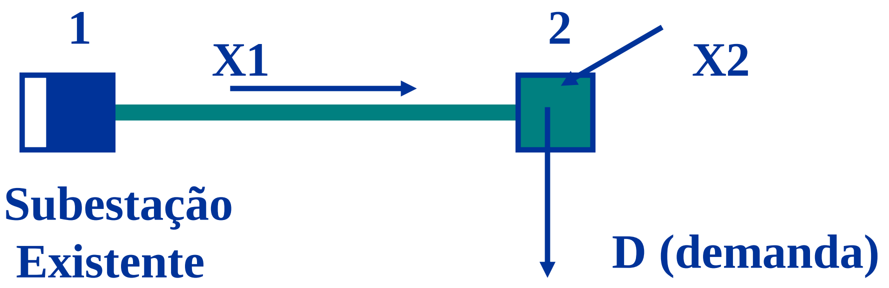
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

função objetivo linear a *n* variáveis

***m* restrições (equações ou inequações lineares)**

vetor de *n* variáveis reais e positivas

Exemplo



Deseja-se alimentar a carga em (2) com demanda D, através da instalação de um alimentador (1-2) e ampliação da Subestação 1 ou através da construção de uma nova Subestação em 2. Qual é a alternativa mais econômica? Sabe-se que os valores máximos de X1 e X2 são respectivamente XM1 e XM2 e que seus custos unitários ($/MVA) são C1 e C2, respectivamente.

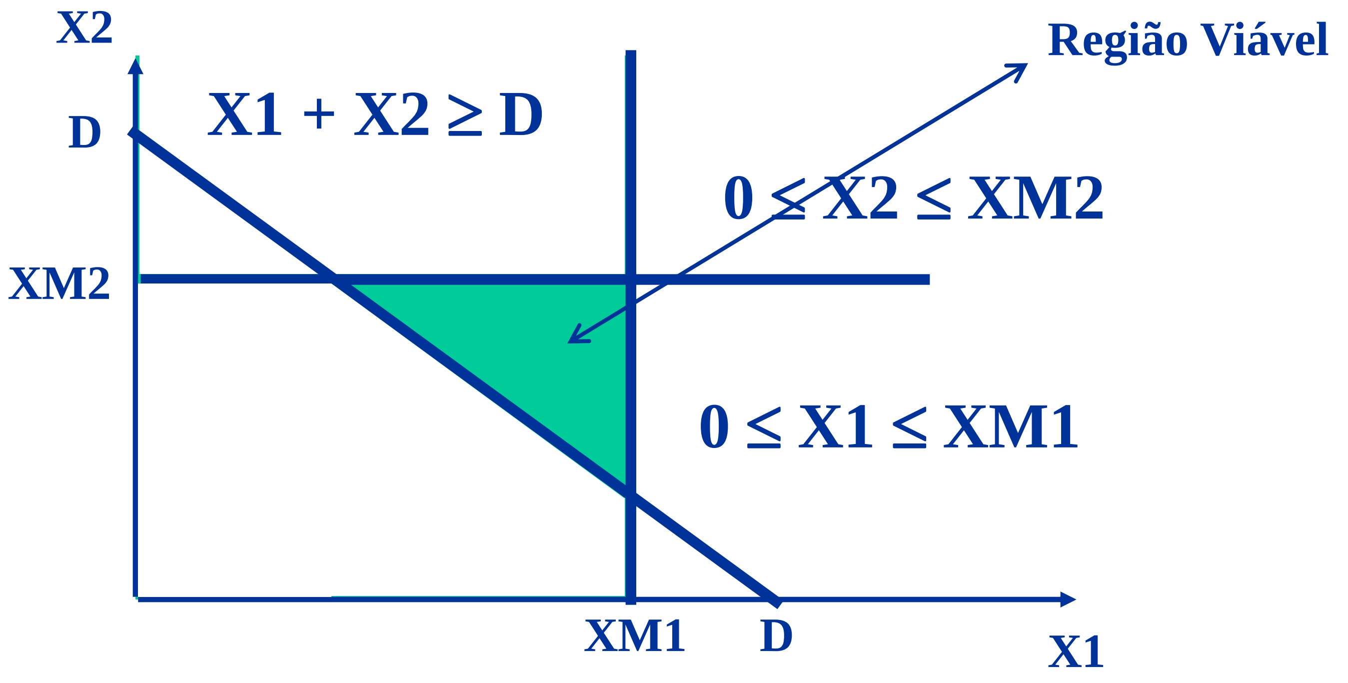
Formulação Matemática por PL

$$\min Zo = C1\,X1 + C2\,X2$$

s.a. $0 \leq X1 \leq XM1$

$0 \leq X2 \leq XM2$

$X1 + X2 \geq D$



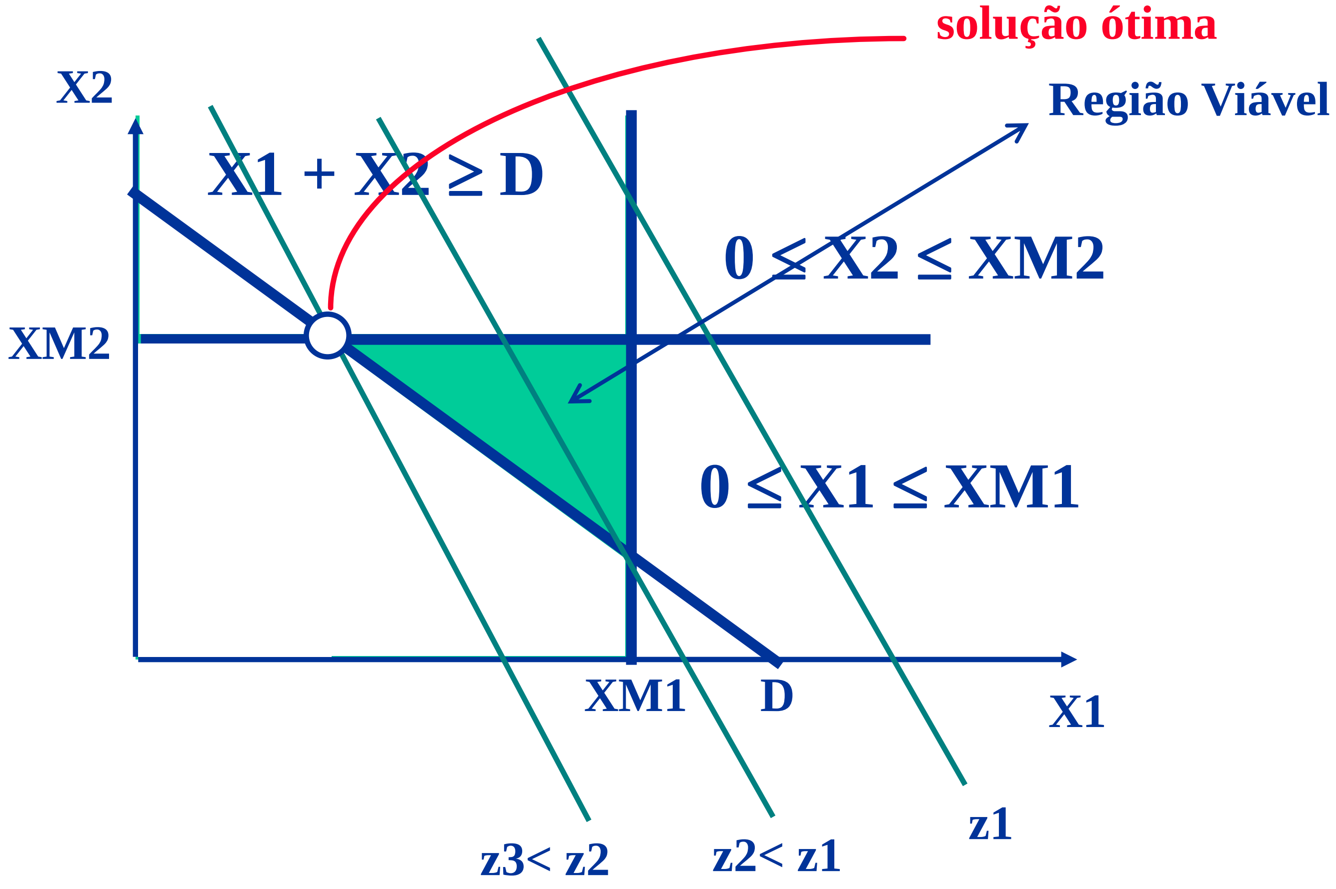
Formulação Matemática por PL

$$\min Zo = C1\,X1 + C2\,X2$$

s.a. $0 \leq X1 \leq XM1$

$0 \leq X2 \leq XM2$

$X1 + X2 \geq D$



Aplicações de Programação Linear

- Configuração ótima de alimentadores em sistemas de distribuição / transmissão
- Locação de Suporte Reativo
- Áreas de Influência de Subestações
- etc.

Métodos de Solução de Problemas de Programação Linear

- Método Simplex (Dantzig 1963)

- Métodos de Ponto Interior (Kharmarkar 1984)

- Algoritmos Genéticos

Método Simplex

- **Forma Canônica do Problema de PL:**

$$
\begin{aligned}
&MaxZ = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\
&s.a. \qquad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1 \\
&\qquad\qquad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \le b_2 \\
&\qquad\qquad - - - - - - - - - - - - - - - - - \\
&\qquad\qquad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \le b_m \\
&\qquad\qquad x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

- **Forma Matricial:**

$$
\begin{aligned}
&MaxZ = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
&s.a. \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\
&\qquad\qquad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

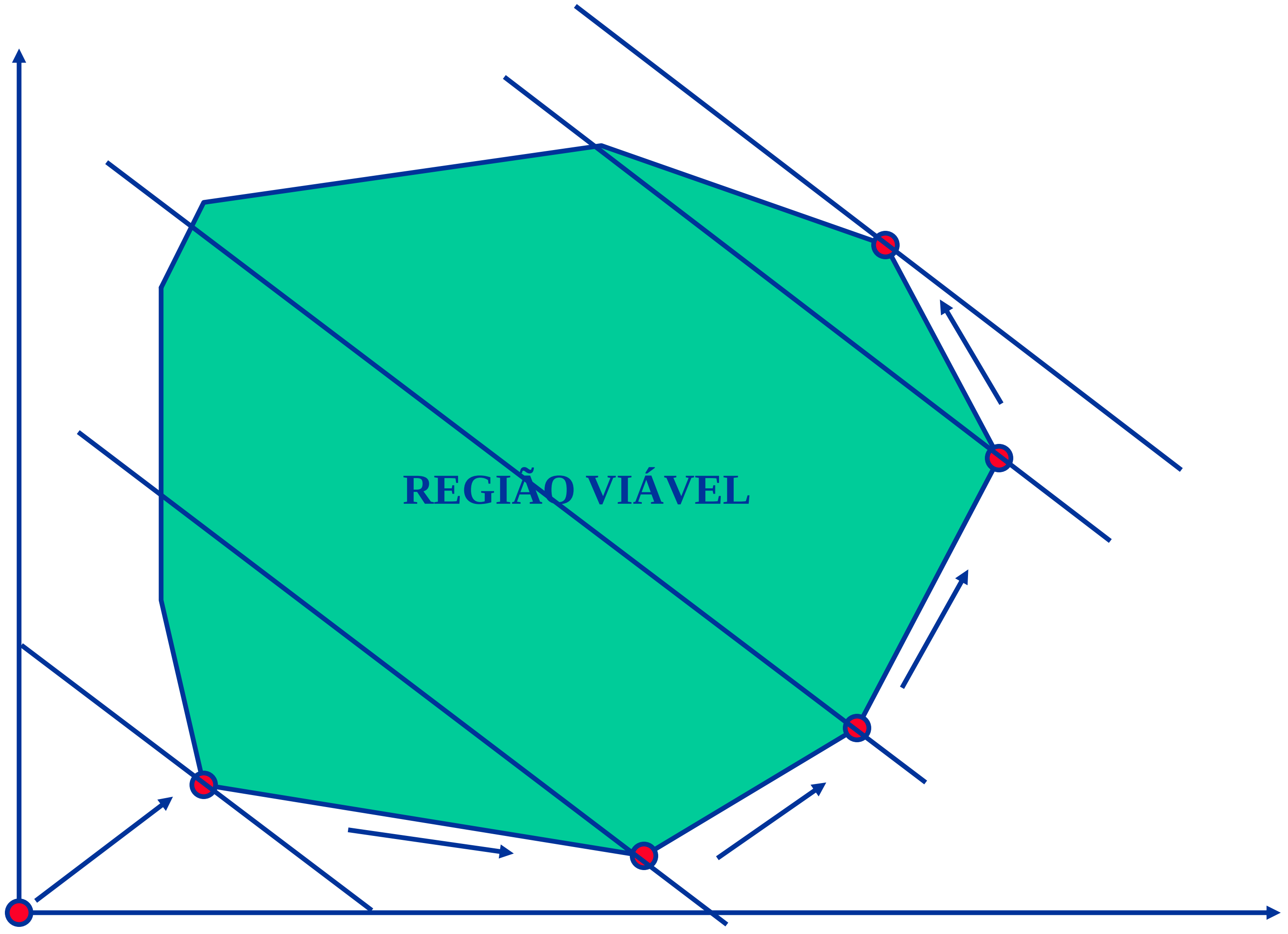
Definições para o Método Simplex

- Solução Viável: qualquer conjunto de valores $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaçam todas as restrições, e $x_i \geq 0$
- Solução Ótima: é uma solução viável que maximiza a função objetivo
- Solução Básica: solução viável que corresponde a um vértice da região viável

- SIMPLEX:

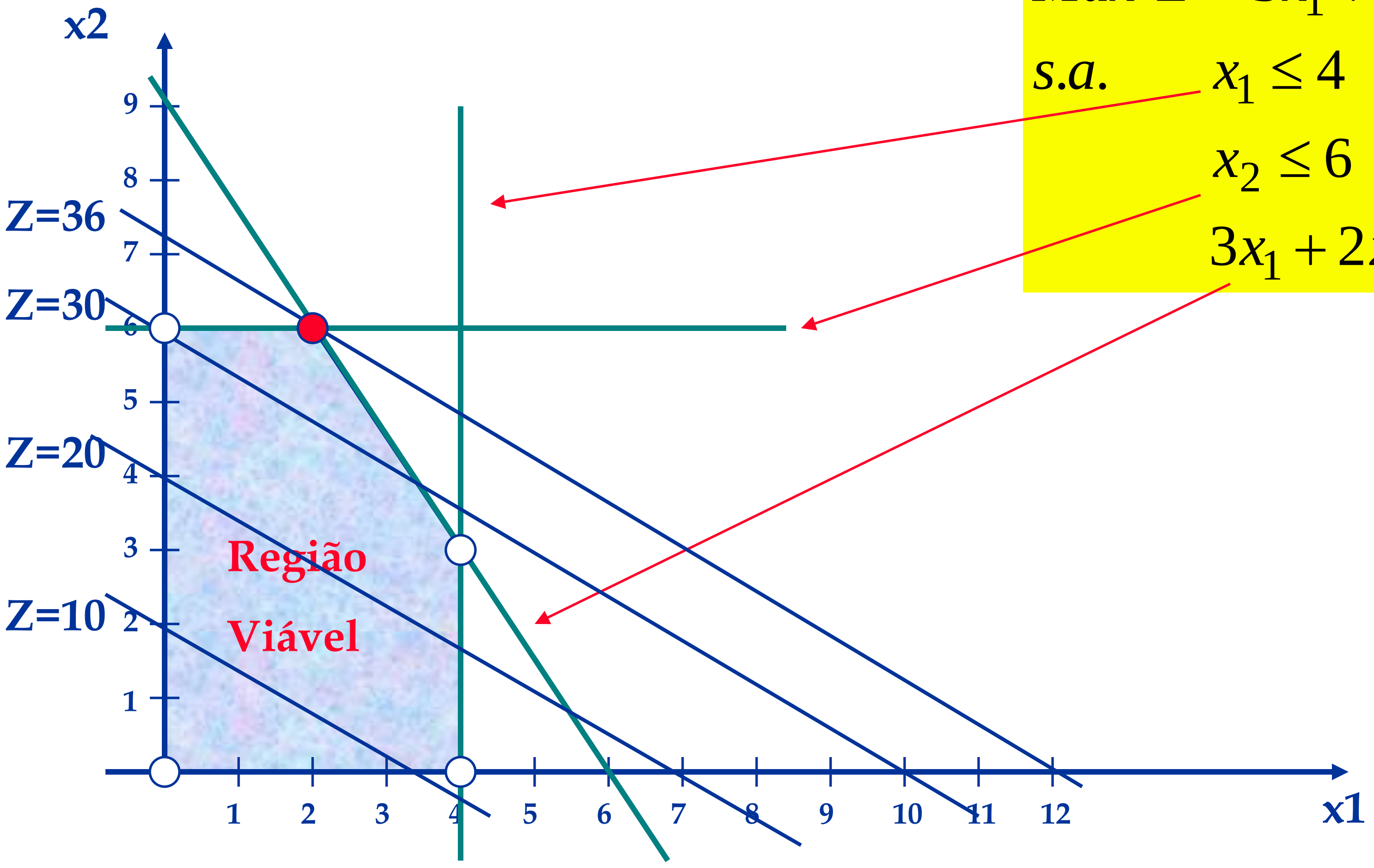
solução básica inicial $\rightarrow$ soluções básicas melhores $\rightarrow$ solução ótima

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÉTODO SIMPLEX



Exemplo

$$\begin{aligned} &Max\ \ Z = 3x_1 + 5x_2 \\ &s.a. \qquad x_1 \le 4 \\ &\qquad\qquad x_2 \le 6 \\ &\qquad\qquad 3x_1 + 2x_2 \le 18 \end{aligned}$$



Método Simplex:

- **Passo 1: definir modelo equivalente, eliminando desigualdades.**

  Para isto, são utilizadas variáveis residuais (ou de folga). Ex: $x_1 \leq 4 \rightarrow x_1 + x_3 = 4$

$$
\begin{array}{llllll}
Max\ Z = 3x_1 + 5x_2 & & & & & \\
s.a. & x_1 & + x_3 & & & = 4 \\
 & x_2 & & + x_4 & & = 6 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & & & + x_5 & = 18 \\
\text{com} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

x_3, x_4, x_5 : variáveis residuais (ou de folga)

Método Simplex:

- **<u>Passo 2</u>: determinar uma <u>solução</u> <u>básica</u> (fazendo-se *n-m* variáveis iguais a zero ou não básicas e as demais *m* variáveis positivas ou básicas)**
  - **Selecionam-se as variáveis residuais como sendo as variáveis básicas iniciais, ou seja, inicia-se com solução básica na origem ($x_1=x_2=....=x_{n-m}=0$).**
  - **Para o exemplo anterior:**

Variáveis não básicas (n-m)

$x_1=0$

$x_2=0$

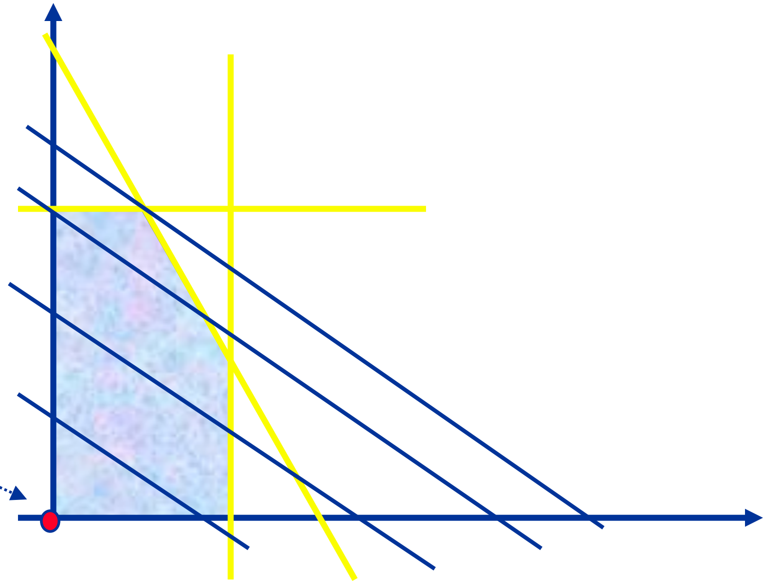
Variáveis Básicas (m)

$x_3=4$

$x_4=6$

$x_5=18$

(n=5, m=3)



Método *Simplex*:

- <u>Passo 3</u>: obter outra solução básica (ou concluir que a solução atual é a ótima). Deve ser solução básica correspondente a vértice adjacente que aumente o valor de Z. É obtido trocando-se uma variável básica com uma não básica:
  - Variável para entrar na base: análise na função objetivo daquela que aumenta 'mais rapidamente' Z. No exemplo, se $Z= 3x_1+5x_2$; então x_2é escolhida para entrar na base (5>3)
  - Variável para sair da base: valor vai para zero; escolha compatível com a variável que vai entrar na base. No exemplo, x_2 deve entrar (maior aumento possível):

    $x_1+x_3=4$ (sem limite para x_2)

    $x_2+x_4=6$ $\rightarrow x_2 \leq 6$ $\rightarrow x_4$ deve sair da base e $x_2=6$

    $3x_1+2x_2+x_5=18$ $\rightarrow x_2 \leq 9$

Método *Simplex*:

- <u>Passo 4</u>: determinar os novos valores das outras variáveis básicas (no ex. x_3 e x_5) , utilizando manipulação algébrica (método de Gauss-Jordan) das equações (cada variável básica deve aparecer em uma única equação, e cada equação deve conter somente uma variável básica):

$$\begin{aligned}
Z - 3x_1 - 5x_2 \qquad\qquad &= 0 \\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\
x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 6 \\
3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 18
\end{aligned}$$

$$(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 18, Z = 0)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
Z - 3x_1 \qquad + 5x_4 \qquad &= 30 \\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\
x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 6 \\
3x_1 \qquad\qquad - 2x_4 + x_5 &= 6
\end{aligned}$$

$$(x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 6, Z = 30)$$

Esta solução é ótima
?

Método *Simplex*:

- Análise da função $Z=30+3x_1-5x_4$

  se x_1 entra na base e x_4 permanece fora da base, então Z pode aumentar

- x_1 entra e x_5 sai da base

$$
\begin{aligned}
Z - 3x_1 \quad\quad\quad + 5x_4 \quad\quad &= 30 \\
x_1 \quad + x_3 \quad\quad\quad\quad &= 4 \\
x_2 \quad + x_4 \quad\quad &= 6 \\
3x_1 \quad\quad\quad - 2x_4 + x_5 &= 6
\end{aligned}
$$

$$(x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 6, Z = 30)$$

$$
\begin{aligned}
Z \quad\quad\quad\quad + 3x_4 + x_5 &= 36 \\
+ x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 &= 2 \\
x_2 \quad + x_4 \quad\quad\quad &= 6 \\
x_1 \quad\quad - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 &= 2
\end{aligned}
$$

$$(x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 0, Z = 36)$$

Esta solução é ótima ?

Método *Simplex*:

- **Análise da função $Z=36 - 3x_4 - x_5$**
  qualquer acréscimo de x_4 ou x_5 irá reduzir Z

- **Portanto a solução é a ótima, com $Z=36$, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$**

Método *Simplex* - "SIMPLEX TABLEAU"

entra

	Variáveis Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L.D.
(0)	Z	1	-3	-5	0	0	0	0
(1)	x_3	0	1	0	1	0	0	4
sai (2)	x_4	0	0	1	0	1	0	6
(3)	x_5	0	3	2	0	0	1	18

entra

	Variáveis Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L.D.	
(0)	Z	1	-3	0	0	5	0	30	Eq(0) = Eq(0) + 5 Eq(2)
(1)	x_3	0	1	0	1	0	0	4	
(2)	x_2	0	0	1	0	1	0	6	
sai (3)	x_5	0	3	0	0	-2	1	6	Eq(3) = Eq(3) - 2 Eq(2)

Método *Simplex* - "SIMPLEX TABLEAU"

	Variáveis Básicas	Coeficientes						L.D.
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(0)	Z	1	0	0	0	3	1	36
(1)	x_3	0	0	0	1	2/3	-1/3	2
(2)	x_2	0	0	1	0	1	0	6
(3)	x_1	0	1	0	0	-2/3	1/3	2

Eq(0) = Eq(0) + 1 Eq(3)

Eq(1) = Eq(1) - (1/3) Eq(3)

Solução Ótima

$Z = 36$

$x_1 = 2$

$x_2 = 6$

Exemplo ilustrativo

- " Um produtor independente dispõe de 2 unidades de geração, que podem ser conectadas ao sistema elétrico em pontos distintos, para a venda do excedente de energia elétrica que são capazes de produzir. Tanto os custos de produção quanto as tarifas negociadas para a venda de energia são distintos para os 2 geradores. O produtor deseja vender o máximo possível de energia, seguindo entretanto seu plano de negócios, que não permite gastar acima de um valor pré-estabelecido para a produção de energia elétrica ".

Dados do problema

	Gerador 1	Gerador 2
Capacidade de produção (MWh)	5000	7000
Custo de produção (R$/MWh)	50	100
Tarifa de venda (R$/MWh)	90	120
Máximo custo de produção total (R$)	800.000	

A formulação PL

$$\text{Max } Z = 90x_1 + 120x_2$$

$$\text{sujeita a:}$$

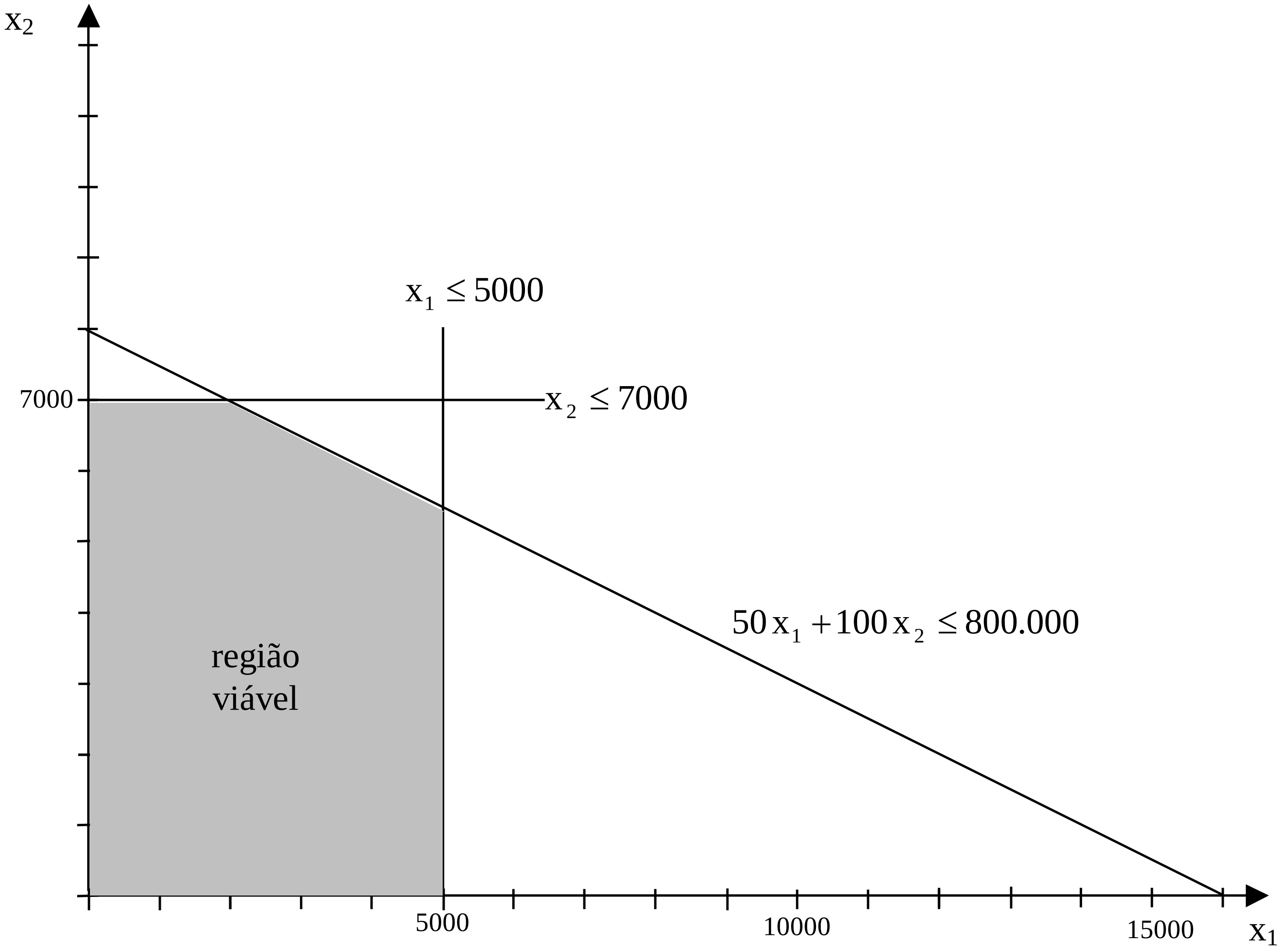
$$x_1 \leq 5000$$

$$x_2 \leq 7000$$

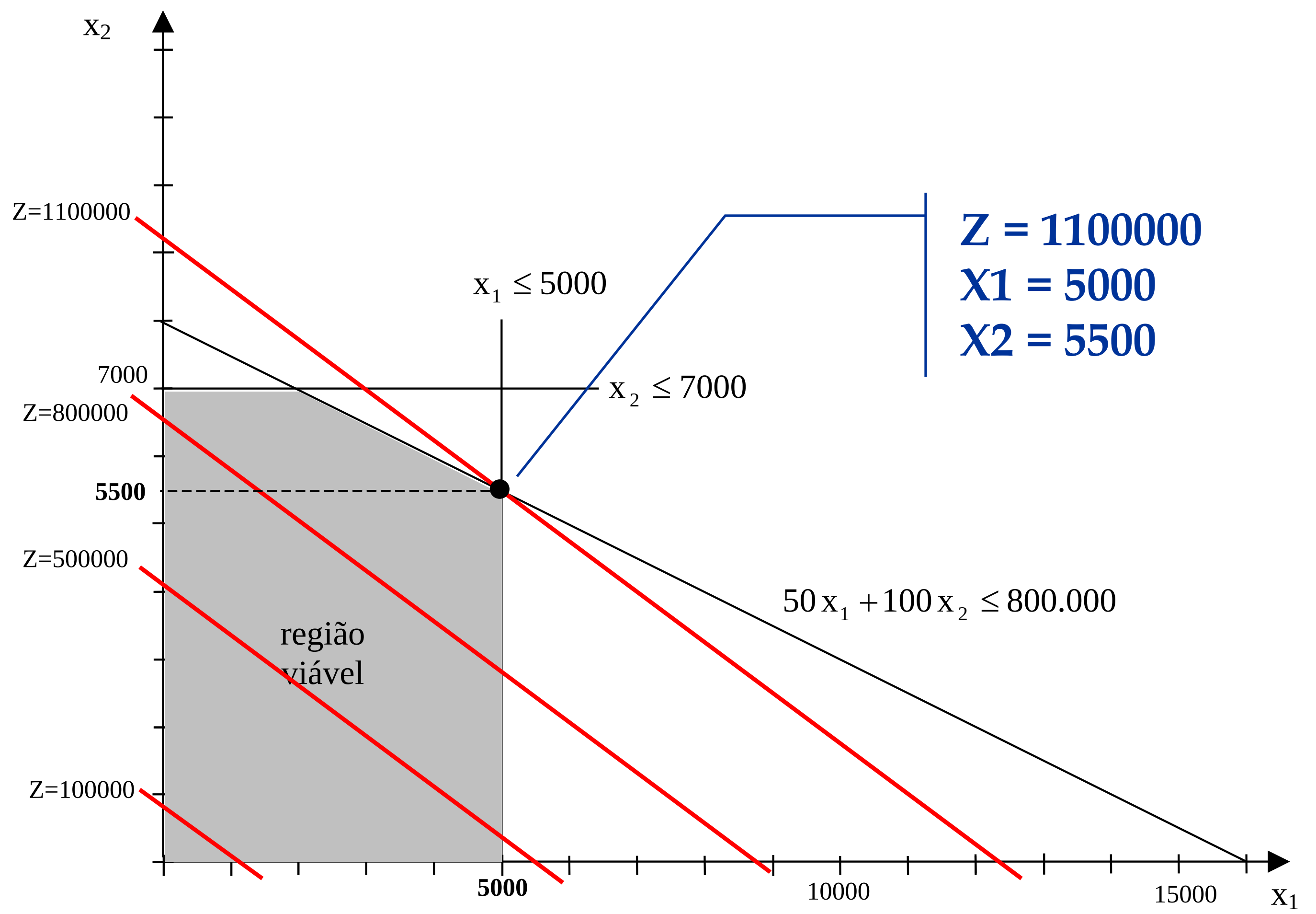
$$50x_1 + 100x_2 \leq 800.000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Interpretação Geométrica



Solução do Problema



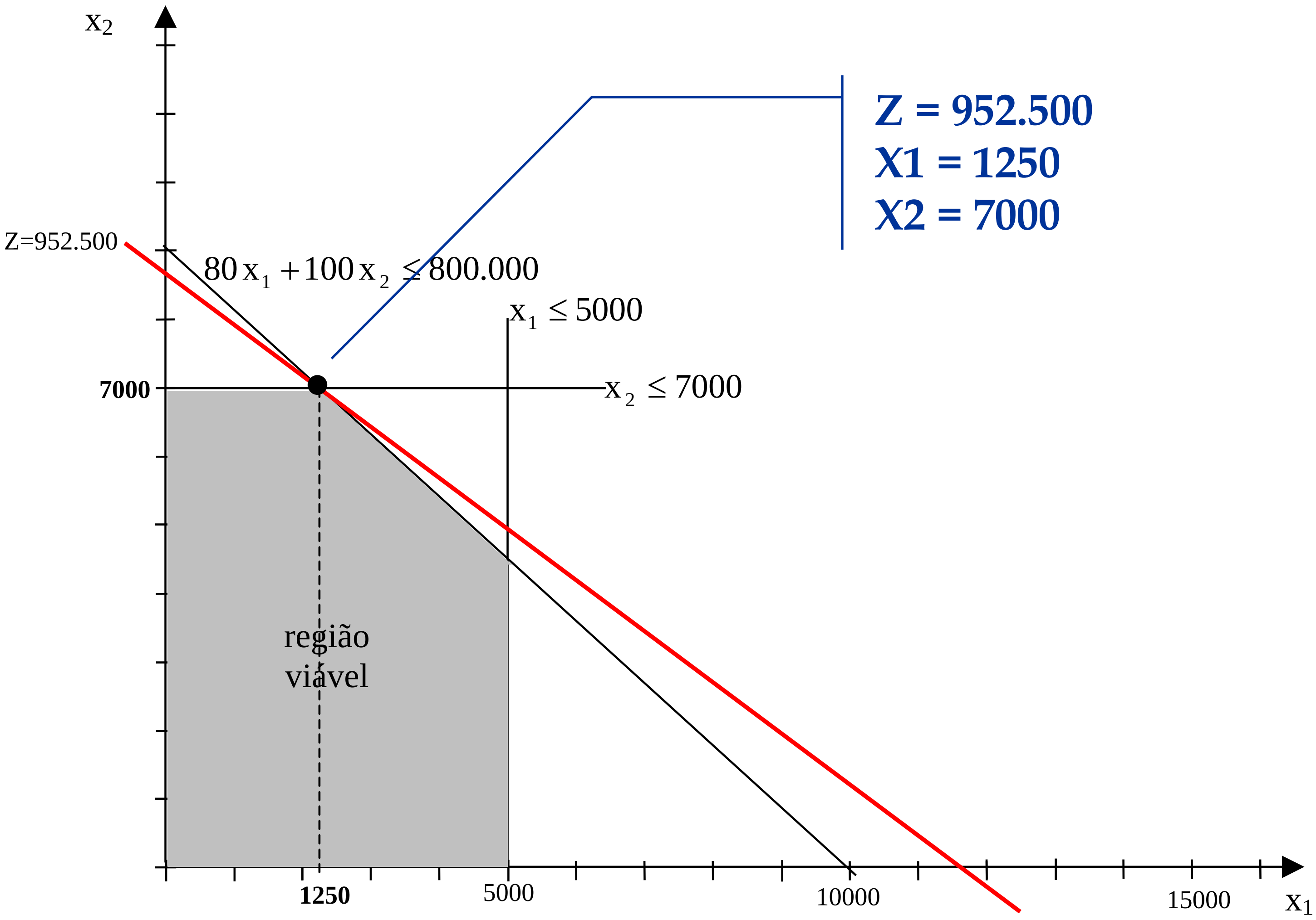
Análise

- A partir das figuras anteriores, observa-se que a solução ótima para o produtor é utilizar a capacidade máxima do gerador 1 (x_1=5000 MWh), que tem um custo de produção menor (50 R$/MWh) e uma margem de lucro na venda maior (Margem = Tarifa de venda – Custo de produção). A produção do gerador 2 (x_2=5500 MWh) é menor que sua capacidade máxima (7000 MWh) devido à restrição de máximo custo de produção total (R$ 800.000).

Análise

- O que ocorreria se o custo de produção do gerador 1 passasse de 50 R$/MWh para 80 R$/MWh ?

Nova solução



Análise

- Neste caso, embora o custo de produção do gerador 1 continue menor, a margem de lucro na venda da energia produzida pelo gerador 2 torna-se melhor (margem do gerador 1 igual a 10 R$/MWh e contra 20 R$/MWh do gerador 2). Neste caso, a melhor alternativa para o produtor é utilizar a capacidade máxima do gerador 2 (x_2=7000 MWh), e complementar sua produção com o gerador 1 (x_1=1250 MWh)

Solução do problema utilizando o SIMPLEX

<u>Passo 1</u>

Definir modelo equivalente, eliminando as desigualdades com a utilização de variáveis residuais.

$$
\begin{array}{llcccccl}
\text{Max } Z = 90x_1 + 120x_2 & & & & & & & \\
s.a. & x_1 & & + x_3 & & & = 5000 \\
 & & x_2 & & + x_4 & & = 7000 \\
 & 50x_1 + 100x_2 & & & & + x_5 & = 800000 \\
\text{com} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

Passo 2

- Determinar uma solução básica inicial:

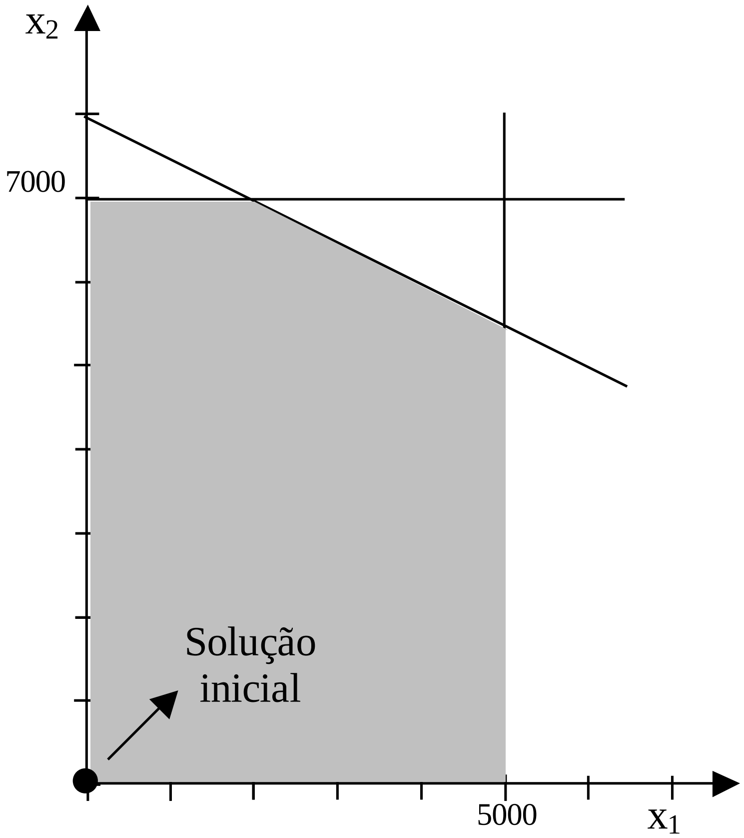
$$x_1 = x_2 = 0$$

$$x_3 = 5000$$

$$x_4 = 7000$$

$$x_5 = 800000$$

$$Z = 0$$



Passo 3

- **Obter outra solução básica, ou concluir que a solução atual é a ótima. A nova solução deve ser uma outra solução básica correspondente a um vértice adjacente que aumente o valor da função Z. Esta solução é obtida trocando-se uma variável básica com uma não básica**
- **Analisando a função objetivo, a variável x_2 é escolhida para entrar na base, pois tem maior coeficiente (120 contra 90 de x_1).**
- **Para sair da base, é escolhida a variável x_4, pois é a que mais limita o aumento da variável que vai entrar na base (x_2), ou seja:**

$$x_1 + x_3 = 5000 \qquad \rightarrow \text{sem limite para } x_2$$

$$x_2 + x_4 = 7000 \qquad \rightarrow x_2 = 7000/1 = 7000 \qquad (sai \;\; x_4)$$

$$50x_1 + 100x_2 + x_5 = 800000 \qquad \rightarrow x_2 = 800000/100 = 8000 \qquad (sai \;\; x_5)$$

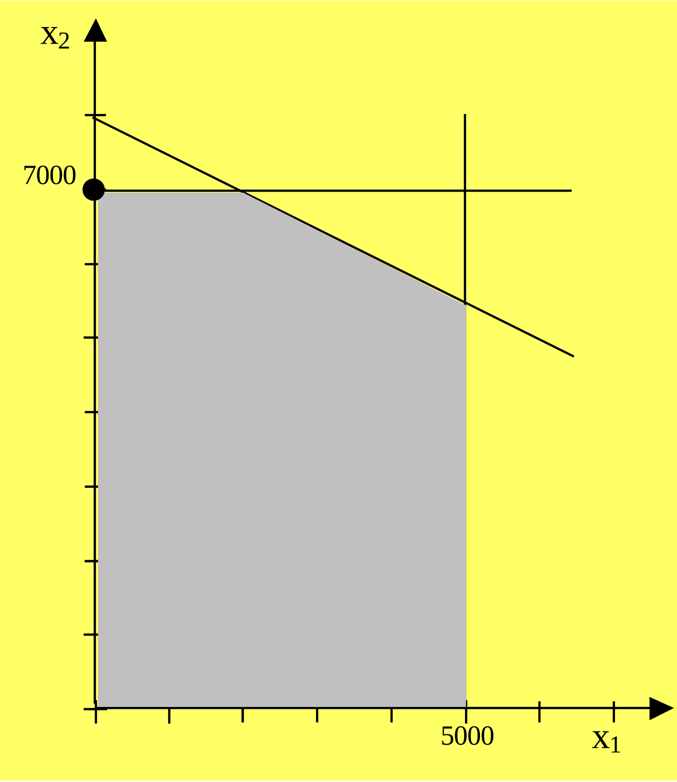
Passo 4

- **Determinar os novos valores das outras variáveis básicas (x_3 e x_5), utilizando manipulação algébrica das equações (cada variável básica deve aparecer em uma única equação, e cada equação deve conter somente uma variável básica):**

$$
\begin{aligned}
Z - 90x_1 - 120x_2 \quad &= 0 \\
x_1 \quad + x_3 \quad &= 5000 \\
x_2 \quad + x_4 \quad &= 7000 \quad \Leftarrow \textit{Linha Pivô} \\
50x_1 + 100x_2 \quad + x_5 &= 800000
\end{aligned}
$$

$$(x_1 = x_2 = 0, x_3 = 5000, x_4 = 7000,\ x_5 = 800000, Z = 0)$$

$$\Downarrow$$



$$
\begin{aligned}
Z - 90x_1 \quad + 120x_4 \quad &= 840000 \\
x_1 \quad + x_3 \quad &= 5000 \\
x_2 \quad + x_4 \quad &= 7000 \\
50x_1 \quad - 100x_4 + x_5 &= 100000
\end{aligned}
$$

$$(x_1 = x_4 = 0, x_2 = 7000, x_3 = 5000, x_5 = 100000, Z = 840000)$$

Passo 5

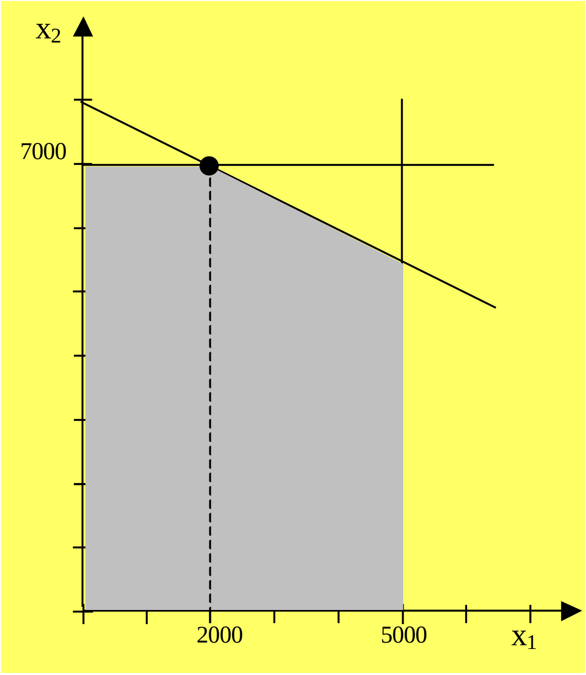
- Verificar se a solução é a ótima, verificando a equação correspondente à função objetivo a ser maximizada:

$$Z = 840000 + 90x_1 - 120x_4$$

- Como o valor atual de x_1 é zero, se esta variável entrar na base (aumentar seu valor) a função objetivo terá seu valor aumentado.
- Repetindo-se os passos 3 e 4, obtém-se nova solução (x_1 entra na base e x_5 sai):

$$\begin{aligned}
Z \quad & -60x_4 + 1{,}8x_5 = 1020000 \\
x_3 \quad & +2x_4 - 0{,}02x_5 = 3000 \\
x_2 \quad & +x_4 = 7000 \\
x_1 \quad & -2x_4 + 0{,}02x_5 = 2000
\end{aligned}$$

$$(x_1 = 2000, x_2 = 7000, x_3 = 3000, x_4 = x_5 = 0, Z = 1020000)$$



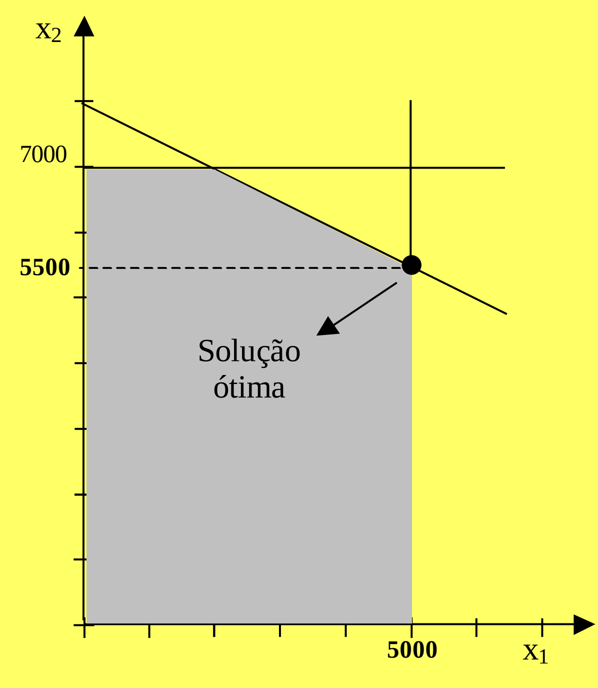
- **Analisando novamente a função objetivo:**

$$Z = 1020000 + 60x_4 - 1{,}8x_5$$

verifica-se que x_4 deve entrar na base, e pelas equações das restrições, x_3 deve sair, resultando:

$$\begin{aligned}
Z \quad + 30x_3 \quad + 1{,}2\,x_5 &= 1110000 \\
x_3 + 2x_4 - 0{,}02\,x_5 &= 3000 \\
x_2 - 0{,}5x_3 + 0{,}01x_5 &= 5500 \\
x_1 + x_3 &= 5000
\end{aligned}$$

$$(x_3 = x_5 = 0, x_1 = 5000, x_2 = 5500, x_4 = 1500, Z = 1110000)$$



Análise

$$Z = 1110000 - 30x_3 - 1{,}2x_5$$

- verifica-se que qualquer aumento de x_3 ou x_5 (valores atuais $x_3 = x_5 = 0$) irá reduzir o valor da função objetivo, e portanto conclui-se que a solução atual é a solução ótima, ou seja:

$$Z = 1110000$$

$$x_1 = 5000$$

$$x_2 = 5500$$