

3. Constantes elásticas e Lei de Hooke

(versão 14/03/2014)

Recomenda-se estudar o *Turcotte & Schubert*: parte 3.1 a 3.4

As deformações nas rochas são causadas por tensões. Para deformações bem pequenas (i.e., longe do limite de ruptura das rochas) e em temperatura ambiente, a relação entre tensão e deformação é geralmente linear. Esta relação de linearidade (ou proporcionalidade) entre tensão e deformação foi descoberta por Robert Hooke no século XVII e é chamada de “Lei de Hooke”. A Fig. 3.1 mostra o comportamento de uma amostra de rocha submetida a uma compressão até se romper. A Lei de Hooke só se aplica para deformações muito pequenas, por exemplo bem menores do que 1×10^{-3} no caso da Fig. 3.1.

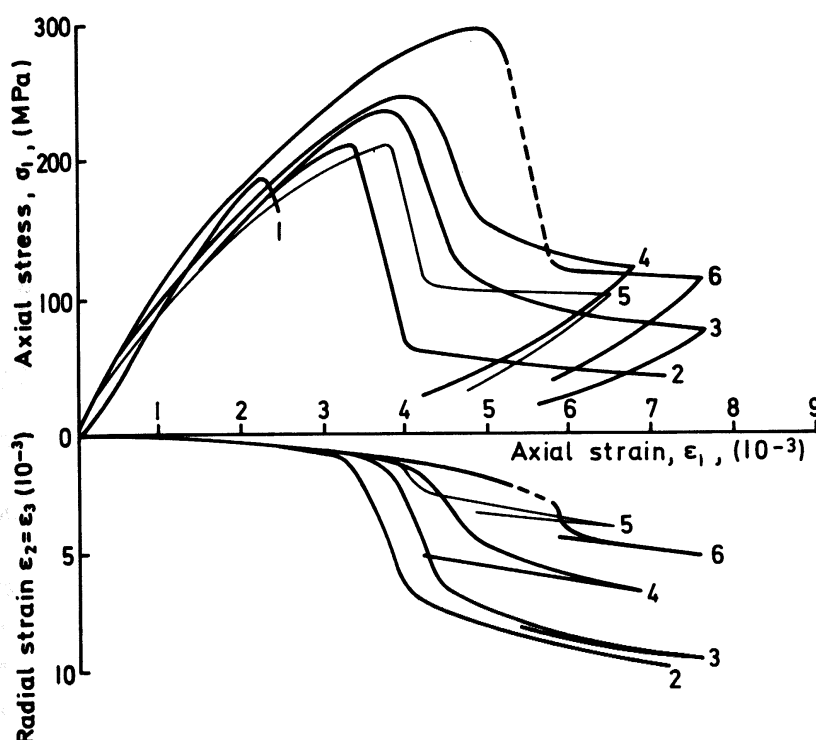


Fig. 3.1. Complete stress-strain curves for a single piece of argillaceous quartzite. Vertical axis is axial compressional stress σ_1 . Curve 1) uniaxial compression. Curve 2) Confining pressure $\sigma_2 = \sigma_3 = 3.45$ MPa. Curve 3) confining pressure = 6,9MPa; 4) 13.8 MPa; 6) 27.6 MPa. Curve 5 for cracked specimen at 27.6MPa. [Jaeger & Cook (1976), fig. 4.2.6].

A curva 1 da Fig. 3.1 corresponde a um ensaio onde só há tensão em uma única direção (compressão, neste caso), como esquematizado na Fig. 3.2. Este tipo de ensaio chama-se “tensão uniaxial”



Fig. 3.2. Tensão uniaxial: $p_{xx} = -\sigma_1$ (compressão). $p_{yy}=p_{zz}=0$; $p_{xy}=p_{xz}=p_{yz}=0$. A deformação $\epsilon_{xx} = -\epsilon_1$ da Fig. 3.1. Note que estamos adotando a convenção sismológica para o sinal das tensões.

Se a deformação for muito pequena, ela será aproximadamente proporcional à tensão aplicada, i.e.:

$$p_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (p_{xx} \text{ é a única componente não nula do esforço})$$

Neste tipo de ensaio uniaxial, a constante de proporcionalidade, E , é chamada de **módulo de Young**.

Exercício 3.1. Analise a curva 1 (tensão uniaxial) da Fig. 3.1 e estime o módulo de Young, E , desta amostra de quartzito.

Ainda no caso do ensaio uniaxial, quando a rocha sofre uma deformação linear (ε_{xx}) na direção da tensão aplicada (p_{xx}), ocorrerão deformações laterais nas outras direções (ε_{yy} e ε_{zz}), mas de sinais opostos. Se um corpo é esticado na direção x , ele sofrerá um encurtamento nas direções y e z . E vice-versa, se a tensão uniaxial for de compressão, haverá alongamentos laterais. A relação entre a deformação lateral e deformação na direção da tensão (axial) é denominada de **Coefficiente de Poisson** (ou Razão de Poisson, “*Poisson’s ratio*”), γ :

$$\gamma = \frac{-\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{-\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \quad \text{onde a tensão uniaxial é } p_{xx}.$$

Note que todas as constantes elásticas (E , γ , e outras abaixo) são sempre positivas.

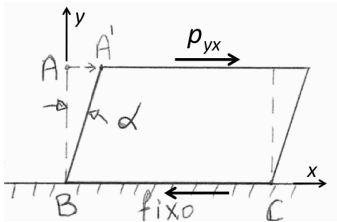
Exercício 3.2. Analise a curva 2 da Fig. 3.1, que corresponde à tensão $p_{xx} = -\sigma_1$, e pressão de confinamento $\sigma_2 = \sigma_3 = 3.45$ MPa em y e z , e estime o coeficiente de Poisson, γ , desta amostra de quartzito. Use o ponto da curva que corresponde à deformação uniaxial de 2×10^{-3} . Quando a deformação axial atingiu o valor de 2×10^{-3} , qual a variação volumétrica da rocha, θ ? [Obs.: γ é definido para tensão uniaxial, ou seja quando $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. No caso deste exercício, como $\sigma_1 \gg \sigma_2, \sigma_3$, podemos desprezar a pressão de confinamento e calcular γ pela razão das deformações lateral/axial da Fig. 3.1].

Uma outra constante elástica muito utilizada é a relação entre uma pressão confinante, P , e a deformação volumétrica θ :

$$P = -K \cdot \theta \quad \text{para o caso de } p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -P$$

K é chamada de **módulo de incompressibilidade**. P é a pressão “hidrostática” (pressão confinante, positiva) que provoca uma diminuição volumétrica, θ , negativa. Esta constante também é chamada em inglês de “*bulk modulus*” (“*bulk*” = “volumoso, grande”).

Finalmente, a medida da rigidez de um material é dada pelo **módulo de rigidez, μ** , que mede a relação entre a tensão cisalhante e o ângulo de cisalhamento α :



$$p_{yx} = \mu \alpha = 2 \mu \epsilon_{yx}$$

Fig. 3.3. Definição do ângulo de cisalhamento, α , para o caso de “cisalhamento simples” (ou, “*simple shear*”, em inglês).

Unidades de tensão (pressão)

Na literatura ainda é comum encontrarmos unidades de tensão fora do Sistema Internacional adotado atualmente, como abaixo:

$$1 \text{ bar} = 1 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (definição)} = 0.98 \times 10^6 \text{ dina/cm}^2; \quad 1 \text{ bar} \approx 1.03 \text{ atm}$$

$$1 \text{ Pascal} = 1 \text{ N/m}^2 \text{ (definição no S.I.)}; \quad 10 \text{ bar} \approx 1 \text{ MPa}$$

pressão confinante na Terra ($\rho g z$):

prof. z	kbar	MPa
2,5 km	1	100
10 km	3	300
35 km	10	1000

Nas rochas as constantes elásticas E , K e μ , são da ordem de 10^4 a 10^6 MPa, e geralmente expressas em GPa.

Comportamento reológico

A relação entre deformação e esforço nas rochas da crosta e manto pode ser bastante complexa e depende do tipo de rocha, da pressão de confinamento, da temperatura e da duração do esforço aplicado. Para rochas da crosta superior, a temperaturas baixas, pode-se simplificar a relação como sendo de dois tipos principais:

deformação elástica: ϵ varia linearmente com p e é reversível; o corpo volta à forma inicial quando a tensão é removida. Deformações puramente elásticas devem ser $\leq 10^{-5}$.

deformação plástica: relação entre ϵ e p não linear; a deformação não é totalmente reversível; o corpo fica com uma deformação residual permanente quando a tensão é retirada.

Aumentando-se a deformação plástica chega-se à ruptura da rocha, como visto na Fig. 3.1 e Fig. 3.4. Na deformação plástica a estrutura microscópica da rocha é alterada por microfaturas. O limite de resistência das rochas (“*yield stress*”) é muito variável pois depende do tipo e composição da rocha, da pressão de confinamento, da temperatura, etc. Apenas como exemplo, um granito pode ter resistência à ruptura de $\sim 2000 \text{ kgf/cm}^2$ (200 MPa) para compressão uniaxial, ou 50 kgf/cm^2 (5 MPa) para tração uniaxial.

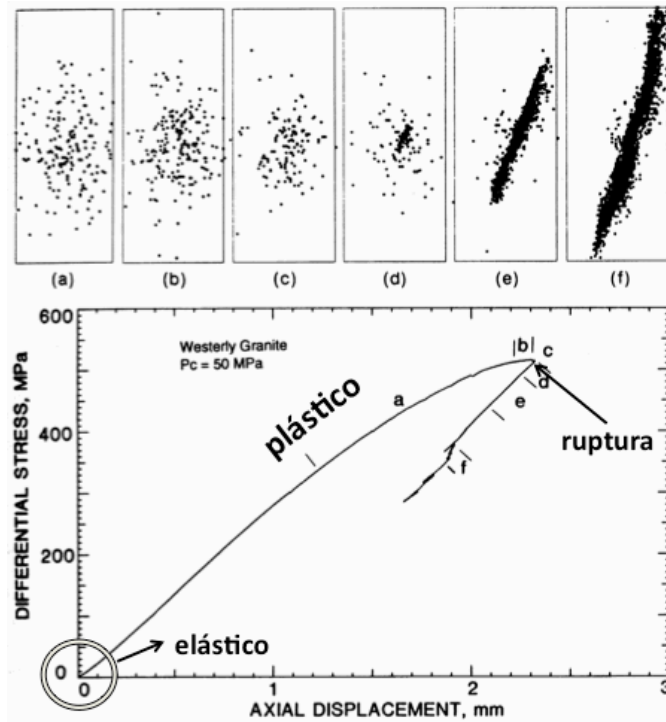


Fig. 3.4. Teste de ruptura em amostra de granito. Pressão de confinamento = 50 MPa. “Differential Stress” = diferença entre a tensão compressiva maior e as tensões laterais de confinamento. As figuras acima mostram as localizações das microfaturas detectadas por emissão acústica. O ponto “c” é o início da ruptura com a concentração de microfaturas onde se formará a fratura. [Lockner 1995].

Lei de Hooke Generalizada

A propagação de ondas sísmicas pela Terra corresponde a deformações muito pequenas dentro do comportamento elástico (com exceção das proximidades da falha de um terremoto). Nas definições acima das constantes elásticas, tratamos de casos particulares de tensões (uniaxial para E e γ , hidrostática para K , cisalhamento simples para μ). No caso de rochas isotrópicas (mesmo comportamento em qualquer direção), pode-se generalizar a relação linear entre tensões e deformações, conhecida como Lei de Hooke Generalizada:

$$p_{xx} = \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu \varepsilon_{xx} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{xx}$$

$$p_{yy} = \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu \varepsilon_{yy}$$

$$p_{zz} = ? \text{ (complete)}$$

Lei de Hooke generalizada

$$p_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy}$$

$$p_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz}$$

$$p_{yz} = ? \text{ (complete)}$$

As duas constantes, λ e μ , são chamadas constantes de Lamé. Apenas duas constantes definem completamente o comportamento elástico de meios isotrópicos, e qualquer constante pode ser expressa em função de outras duas quaisquer. μ = módulo de rigidez definido antes. A constante λ não tem uma definição geométrica simples, mas $\lambda = K - 2\mu/3$

Exercício 3.3. Uma barra de módulo de Young E está sujeita a uma compressão de 100 MPa (como na Fig. 3.2). Se a deformação linear na direção da pressão foi $\epsilon_{xx} = -4 \times 10^{-5}$ qual o módulo de Young? Se o material tem coeficiente de Poisson $\gamma = 0.25$, qual a variação volumétrica? [Resp.: $E = 2500$ GPa]

Exercício 3.4. Aplique a lei de Hooke generalizada para o caso particular de tensão uniaxial abaixo (Fig. 3.5) e mostre que o módulo de Young pode ser expresso como

$$E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu), \text{ e que o coeficiente de Poisson é } \gamma = \lambda/(2\lambda + 2\mu)$$

Dica: Use a Lei de Hooke para as três tensões p_{xx} , p_{yy} e p_{zz} ; substitua as deformações ϵ_{yy} e ϵ_{zz} , e expresse a relação apenas entre p_{xx} e ϵ_{xx} para obter E .

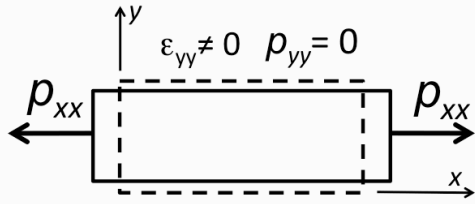
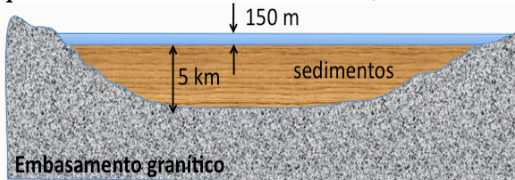


Fig. 3.5 Tensão uniaxial p_{xx} causando deformações ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e ϵ_{zz} .

Exercício 3.5. O reservatório hidrelétrico de Itaipu tem uma profundidade de 150m de água. As camadas de basalto e arenito da bacia sedimentar têm uma espessura total de 5km. Supondo que a pressão da água cause um deformação apenas na camada da bacia (sedimentos + basaltos) e que o embasamento cristalino não sofra nenhuma deformação, calcule o rebaixamento do fundo do lago devido ao peso da lâmina d’água. Use a Lei de Hooke com constantes $\lambda = \mu = 10$ GPa (i.e., 10×10^9 Pa). [Dica: como a bacia está contida no embasamento que é muito mais resistente, não haverá deformações horizontais, apenas verticais!].



[Resp.: 25 cm]

Exercício 3.6. Imagine uma barra de módulo de Young E e comprimento inicial L . Calcule o trabalho necessário para uma força F estender a barra até que o deslocamento final seja $x = u$. A área transversal da barra é A . Expresse o trabalho realizado pela força em termos da deformação final $\epsilon_f = u/L$. Atenção: lembre-se de que a força F varia em função do deslocamento x , $F = F(x)$. É preciso integrar o trabalho ao longo do deslocamento!

