Exercício 1 Primeira parte: Eq. de Kepler

Siga o seguinte roteiro para deduzir a eq. de Kepler.

1) Sejam: q_1 o vetor posição de um corpo de massa m_1
q_2 o vetor posição de um corpo de massa m_2

Se $x = q_2 - q_1 \in \mathbb{R}^2$ denota a posição relativa dos dois corpos que interagem gravitacionalmente, mostre que a eq. de movimento é:

$$\mu \ddot{x} = -\frac{k}{|x|^3} x \qquad \text{onde } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$k = G m_1 m_2$$

2) Mostre que o momento angular

$$\mu (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) = \ell \quad \text{é conservado}$$

3) Seja
$$x_1 = r \cos\theta$$
$$x_2 = r \sin\theta .$$

Mostre que
$$\begin{cases} \ell = \mu r^2 \dot{\theta} \\ \mu \ddot{r} - \dfrac{\ell^2}{\mu} \dfrac{1}{r^3} + \dfrac{k}{r^2} = 0 \end{cases}$$

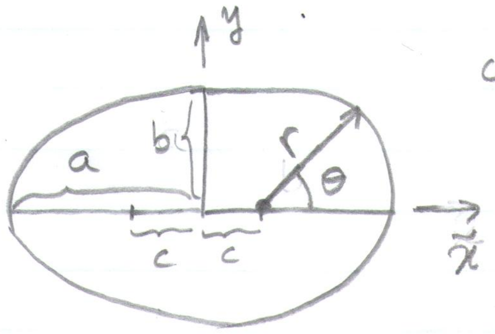
4) Mostre que $\mu \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} - \frac{k}{r} = h$ é conservado

5) Faça a mudança de variáveis $\rho = \frac{1}{r}$

integre a equaç p/ r e obtenha

$$\frac{\ell^2}{\mu k} = r\left(1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)\right) \quad , \quad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2\ell^2}{\mu k^2}h}$$

6) Considere uma elipse de forma



com equaç

$$\sqrt{(\tilde{x}-c)^2+y^2} + \sqrt{(\tilde{x}+c)^2+y^2} = 2a$$

$(c,0)$ = foco da elipse

Seja $\varepsilon = \frac{c}{a}$ a excentricidade da elipse

a o semi-eixo maior

b o semi-eixo menor

com $c^2+b^2=a^2 \Rightarrow b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

Fazendo $\tilde{x} - c = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

Conclua que a eq. desta elipse é: $r(1+$

$$r(1+\varepsilon\cos\theta) = a(1-\varepsilon^2)$$

7) De (5) e (6) conclua que, se $\theta_0 = 0$ então a equação em (5) descreve a órbita do corpo de massa m_2 em torno do corpo de massa m_1 que está posicionado no foco da elipse. Para $\theta = 0$ a distância entre os corpos é mínimo (pericentro) p/ $\theta = \pi$ ela é máxima (apocentro).

Mostre que o semi-eixo maior é dado por

$$a = \frac{\ell^2}{\mu k} \frac{1}{1-\varepsilon^2}$$

(8) Queremos calcular $\theta(t)$ (este ângulo é chamado anomalia verdadeira).

Para isso precisamos integrar

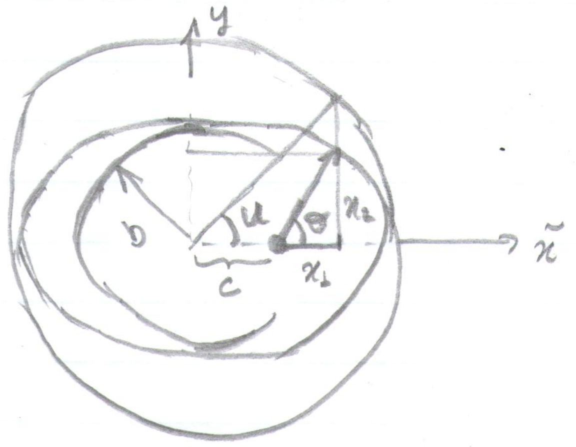
$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{\mu} \frac{1}{r^2} \quad \text{onde, de (5),} \quad \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{\ell^2}(1+\varepsilon\cos\theta)$$

A integração desta equação é mais fácil nas seguintes coordenadas.

9) Seja $\tilde{x} = a\cos u$
$y = b\sin u$

uma parametrização da elipse em (6)

tb. descrita por $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Usando que

$$\begin{cases} \tilde{x} = x_1 + c \\ y = x_2 \end{cases}$$

mostre que: $x_1 = a(\cos u - \varepsilon)$

$x_2 = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin u$

10) Use a conservação de momento angular (2)

$\mu(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) = \ell$ p/ mostrar que

$$(1-\varepsilon\cos u)\,\dot{u} = n = \frac{\ell}{\mu a b} = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)\,G}{a^3}}$$

11) Integre a eq. (10) e obtenha

$u - \varepsilon \sin u = n(t - t_0)$ Equação de Kepler

12) Os parâmetros da órbita do cometa Halley em torno do Sol são:

$\varepsilon = 0.96714291$

p = distância periélio 87 661 078 km

Q = distância afélio 5 248 238 957 km

$a = \frac{p+Q}{2}$

m_1 = massa do sol = $1.98847 * 10^{30}$ kg

$G m_1 = 1.327124 * 10^{20}\ m^3 s^{-2}$

Suponha que $t_0 = 0$ (p/ $t=0$ o cometa está no periélio).

a) Para $t_j = j \Delta t$ $j = 0, 1, \ldots 300$

$\Delta t = \frac{1}{4}$ ano terrestre

resolva a eq. (11) usando o método de Newton e obtenha as

anomalias excêntricas u_j $j=0, \dots 300$.
(As quantidades nt_j são chamadas anomalias médias)

b) Usando as eqs.

$$x_{1j} = a(\cos u_j - \varepsilon)$$

$$x_{2j} = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin u_j$$

plote as posições do cometa Halley em relação ao Sol. (se necessário reescale as variáveis x_1 e x_2 adequadamente).