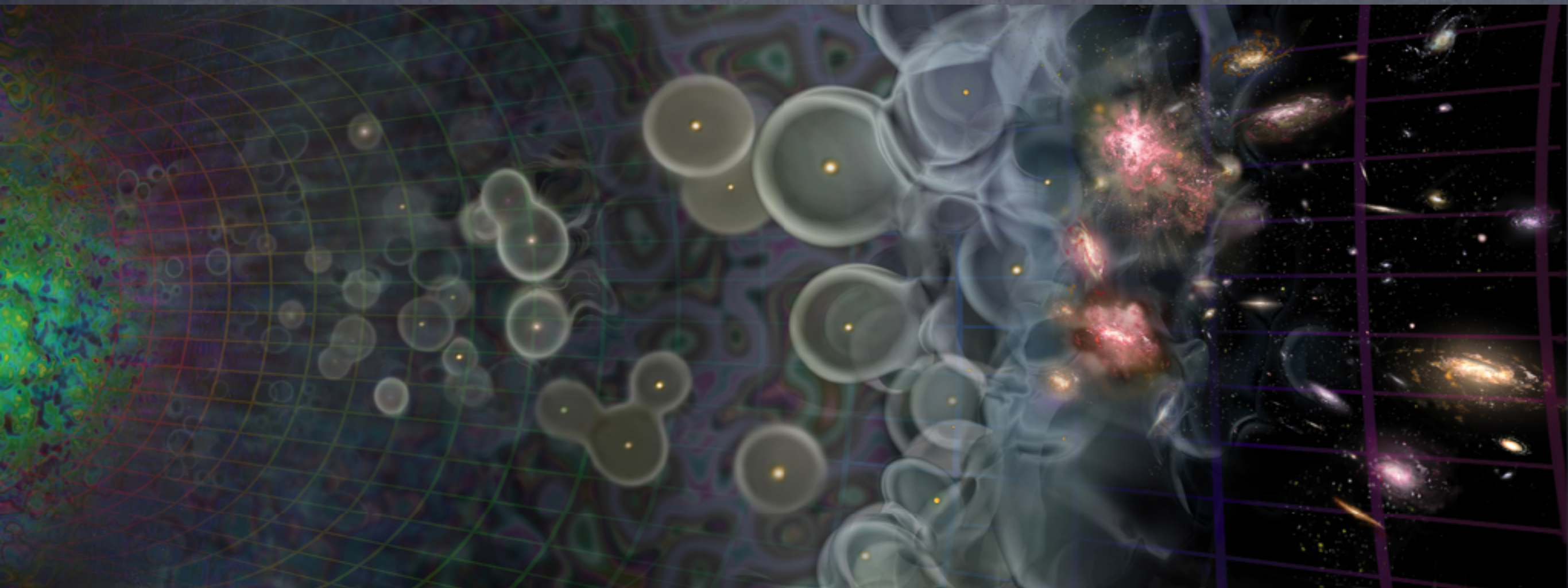


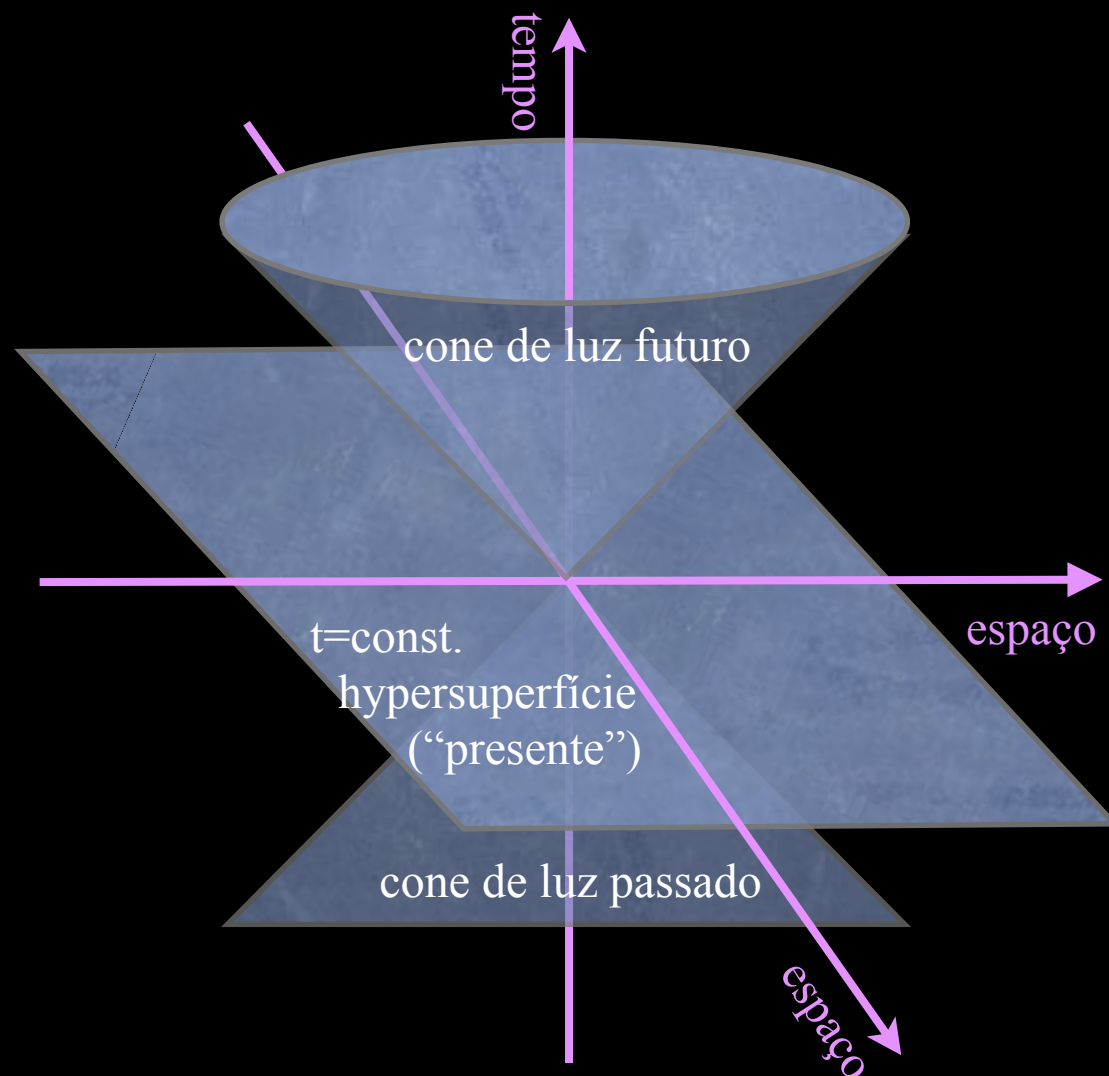
Introdução à Cosmologia Física



Introdução à Cosmologia Física

- Relatividade Restrita (revisão rápida)
- O Princípio da Equivalência
- Coordenadas generalizadas e a métrica
- A Relatividade Geral de Einstein
- Cosmologia relativística
- Leituras: Ryden, Cap. 3

Relatividade especial: o objeto fundamental é o cone de luz



Cone de luz:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2 \Rightarrow 0$$

Luz:

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = c$$

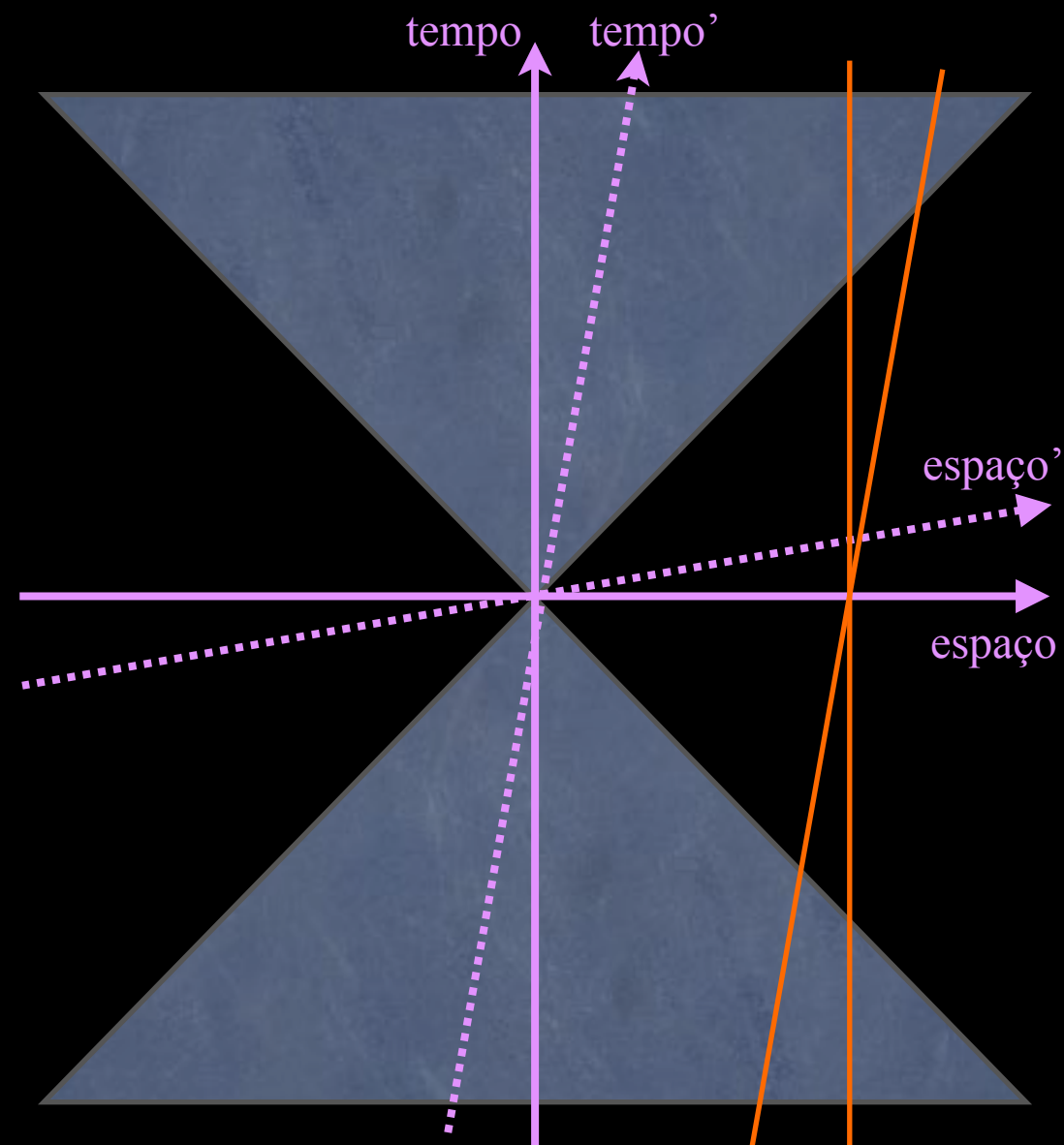
Bibliografia adicional:

C. Boyer, "A History of Mathematics"

H. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski & H. Weyl,
"The Principle of Relativity" ("O Princípio da Relatividade")

Introdução à Cosmologia Física

Relatividade especial: invariância do cone de luz sob "boosts"



$$dx^\mu \rightarrow dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v^i}{c} \\ -\gamma \frac{v_j}{c} & \delta_{ij} + (\gamma - 1) \frac{v^i v_j}{v^2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Lambda^\mu_\alpha(v) \Lambda^\alpha_\nu(-v) = \delta^\mu_\nu$$

Linha de mundo de observador
com $dx/dt = 0$, $dx'/dt' = -v$

Linha de mundo de observador
com $dx/dt = +v$, $dx'/dt' = 0$

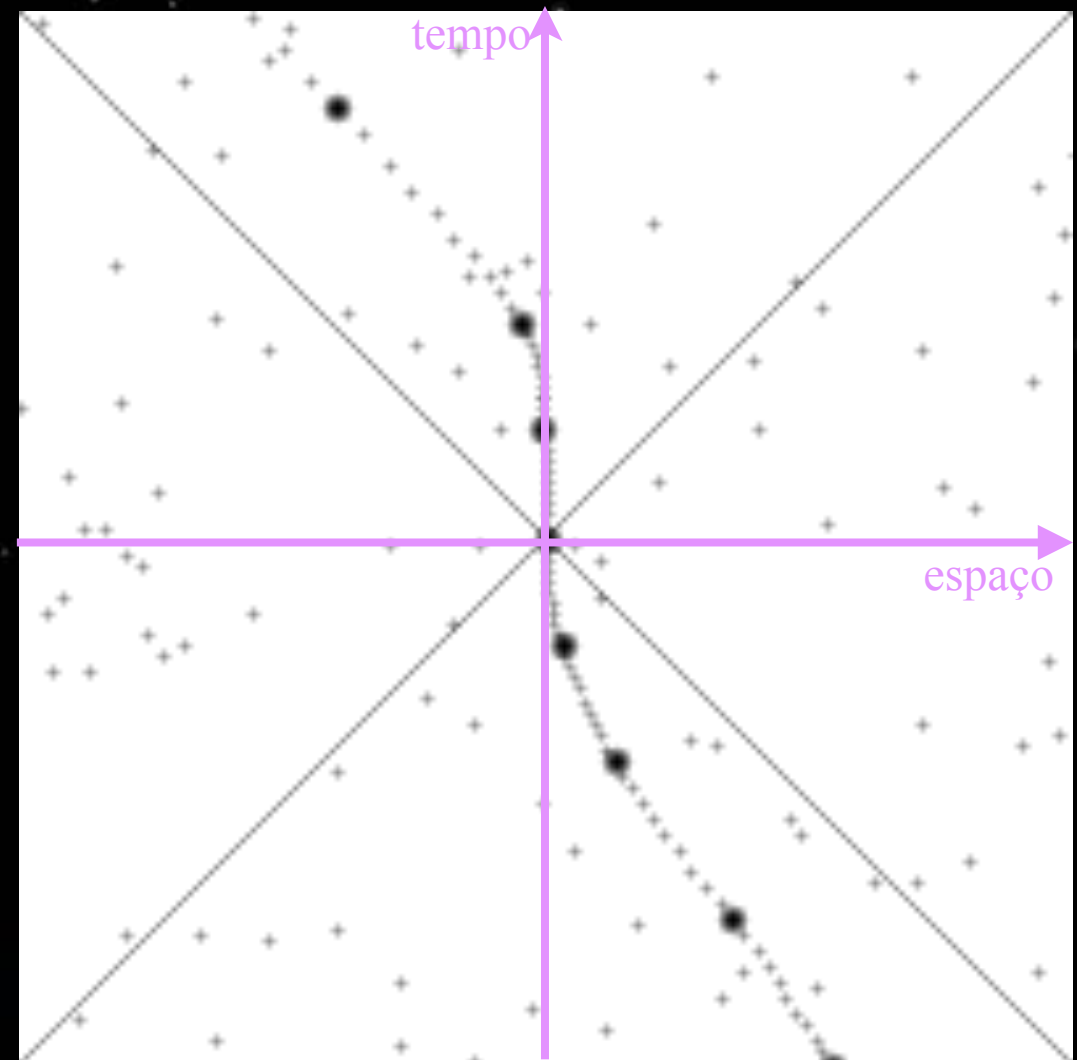
Introdução à Cosmologia Física

O princípio de equivalência de Einstein (1915!) permite tratar referenciais acelerados $\Rightarrow$ covariância sob transf. de coordenadas generalizadas



Observer
estacionário num
campo gravitacional

Observador acelerado
(queda livre)
=
observador inercial

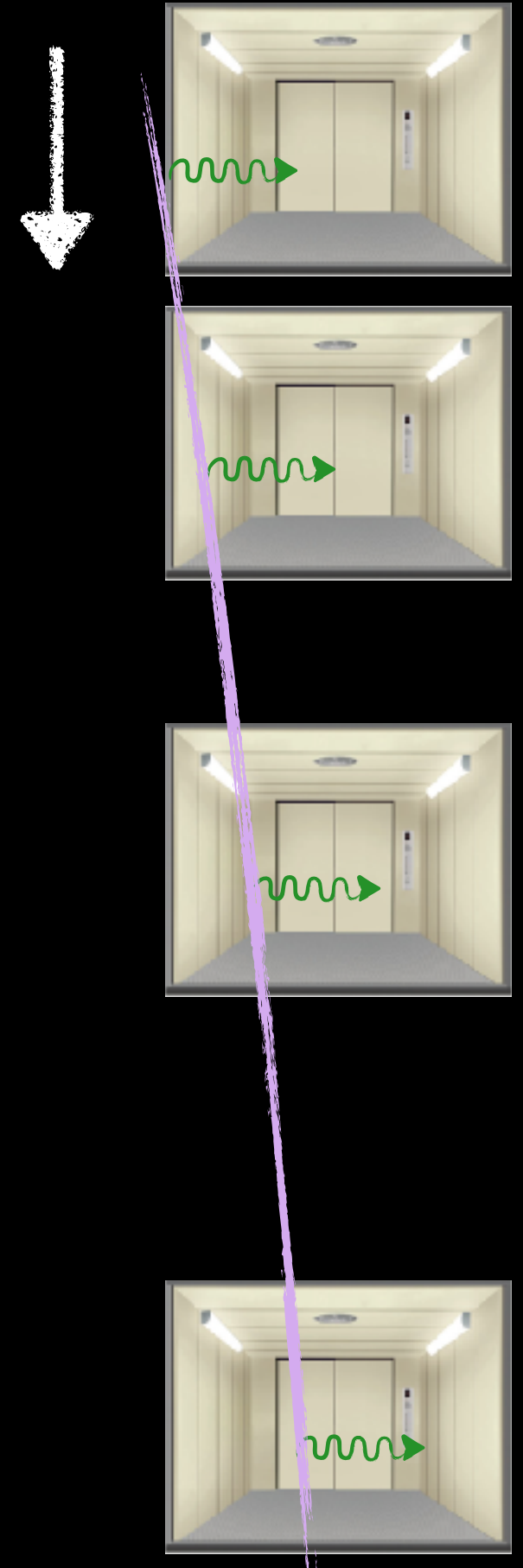
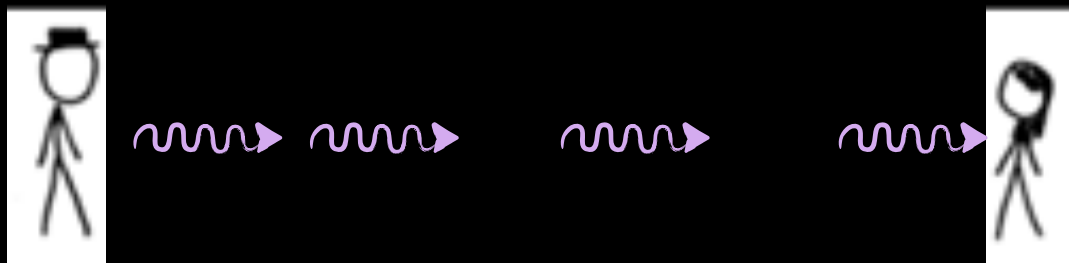


$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2$$
$$\Rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

métrica: geometria do
espaço-tempo

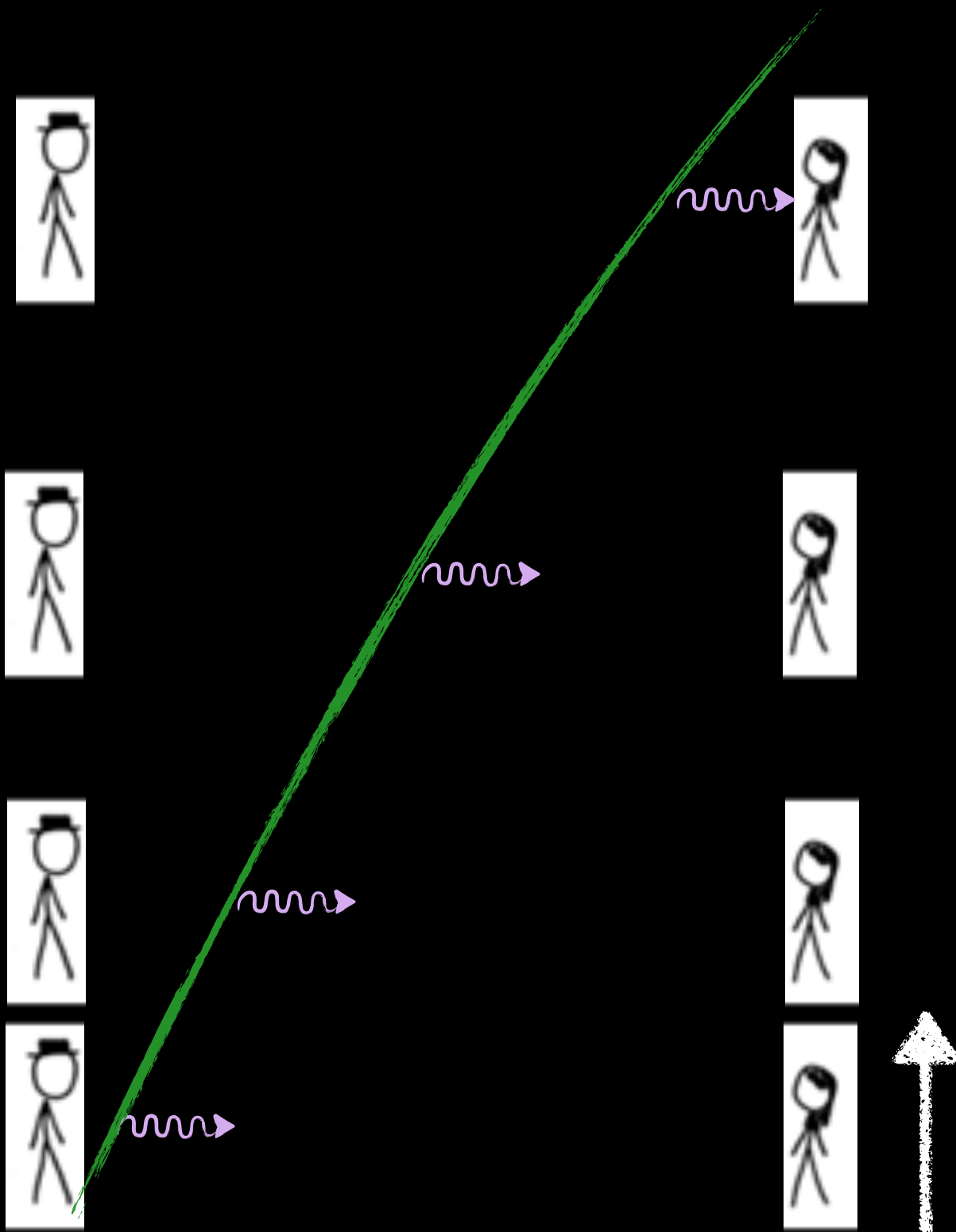
Introdução à Cosmologia Física

O elevador de Einstein visto de um observador parado na Terra:



Introdução à Cosmologia Física

O cara parado na Terra, visto desde o elevador de Einstein:



Mas... e agora? E o cone de luz?

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2 \Rightarrow 0$$

Pelo Princípio de Fermat, a luz tem que percorrer o caminho que minimiza o tempo de viagem.

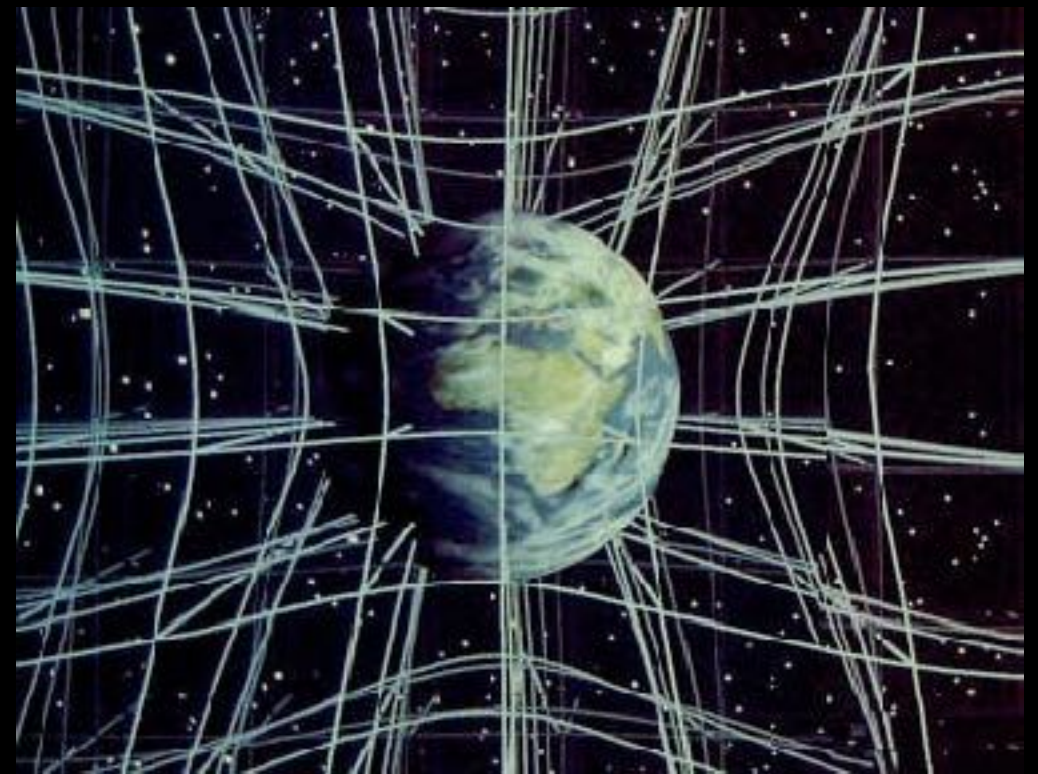
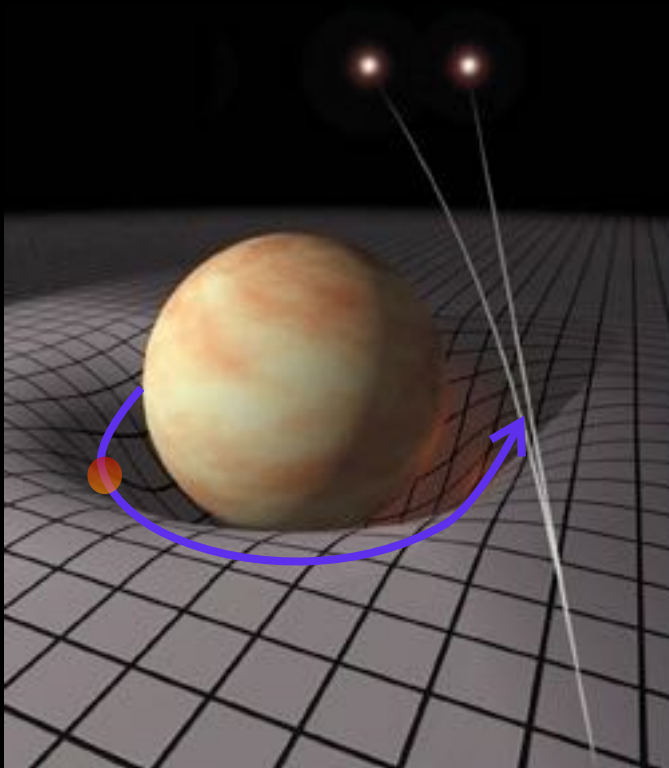
Mas como o menor tempo de viagem da luz pode ser uma curva, e não uma reta?

A resposta é que precisamos pensar em espaços curvos – ou melhor, espaços-tempo curvos!

Introdução à Cosmologia Física

Nas teorias "covariantes" da gravidade (p. ex., a Relatividade Geral), a **gravidade** é uma manifestação da **curvatura do espaço-tempo**

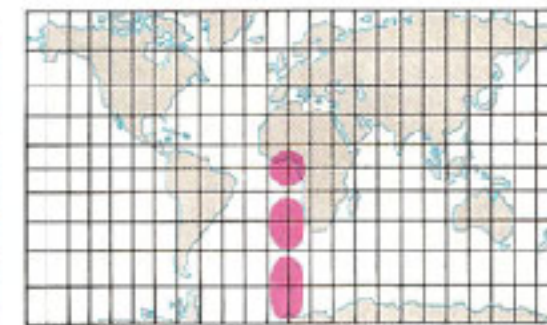
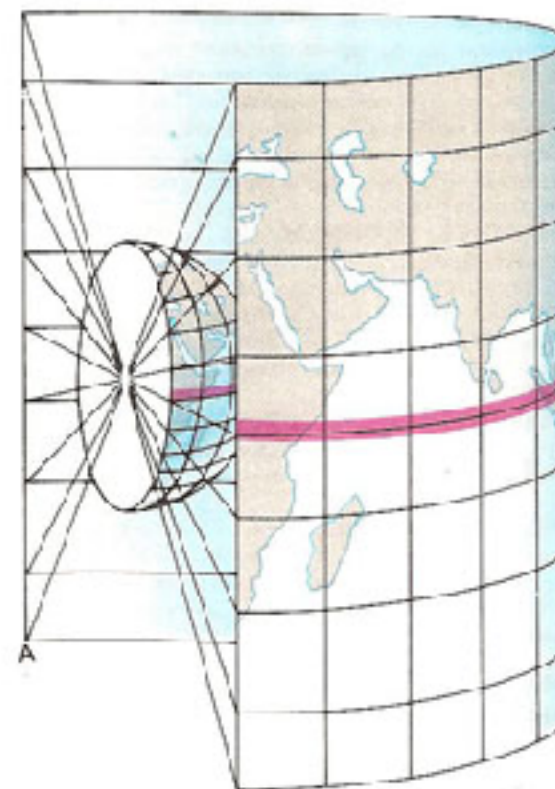
Nessas teorias, a **métrica** do espaço-tempo (i.e., sua **geometria**) tem dois papéis:
ela **determina** a trajetória da matéria... ...e é **curvada** pela matéria



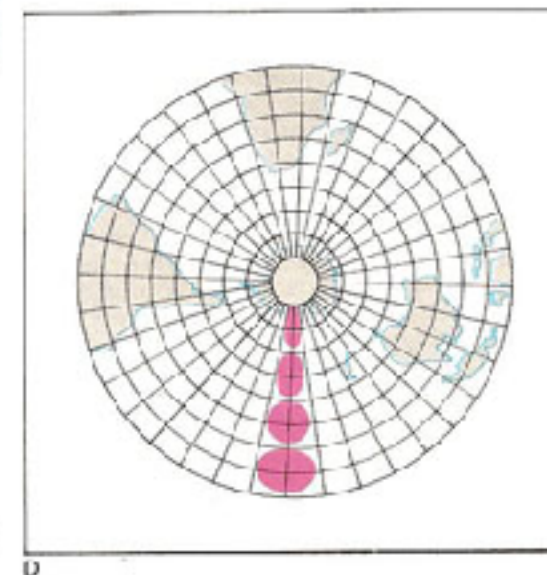
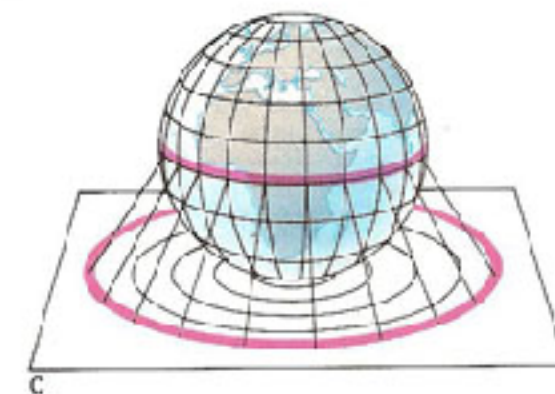
- O que significa uma "geometria" do espaço-tempo?
- O que determina essa geometria?
- Como podemos fazer medidas que testam essa teoria?

Introdução à Cosmologia Física

Um exercício simples:
a esfera e suas projeções

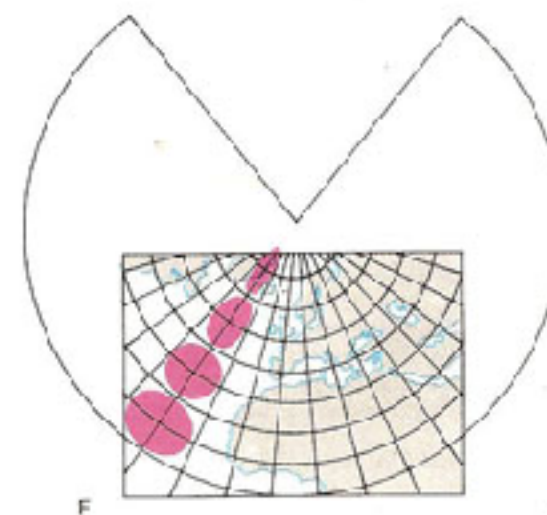
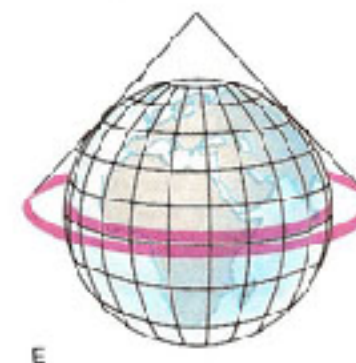


A,B: Mercator



C,D: Azimutal

E,F: Cônica



Introdução à Cosmologia Física

Qual a rota mais rápida de São Paulo a Paris?

E de São Paulo a Tokyo?...



Introdução à Cosmologia Física

Esta é a rota mais rápida de São Paulo a Tokyo!



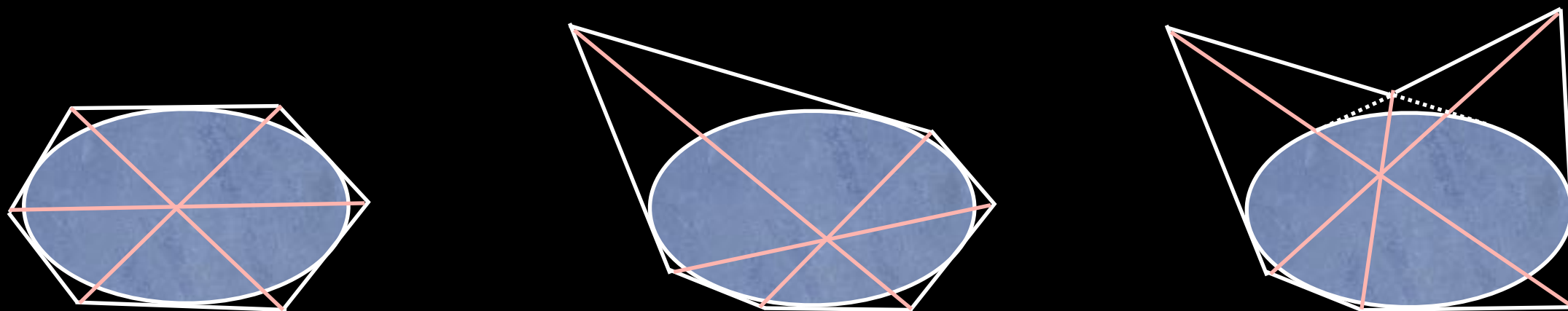
Introdução à Cosmologia Física

Preâmbulo: A pré-história da Geometria Diferencial

Após Newton, a Física se concentrou na Mecânica, Óptica, Termodinâmica; os matemáticos ficaram obcecados com a Análise; a Geometria era considerada assunto de 2ª classe

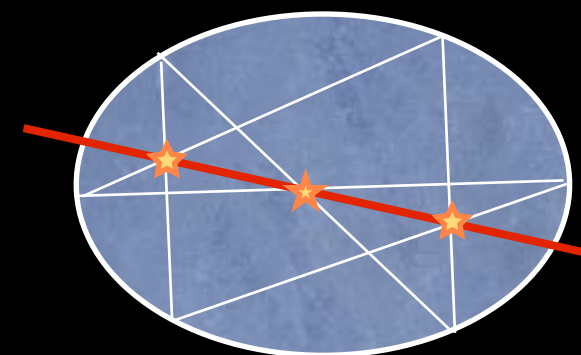
O retorno da Geometria iniciou c. 1806, quando **Charles J. Brianchon** (que tinha 21 anos) e **Gaspard Monge** ("Comte de Péluse") provaram o seguinte teorema:

Os seis lados de um hexágono circunscrevem uma seção cônica SSE as três linhas comuns aos três pares de vértices opostos têm um ponto em comum



Isso foi logo reconhecido como o **dual** (ou "dual projetivo") do teorema de **Pascal** de 1639 (demonstrado quando Pascal tinha 16 anos!), que afirma o seguinte:

Se um hexágono arbitrário está inscrito numa seção cônica, então os três pares das continuações de lados opostos se encontram em pontos numa linha reta.



Introdução à Cosmologia Física

Já esses resultados inspiraram Karl Feuerbach, em 1822, a (re-)descobrir as propriedades do círculo de 9 pontos

(Brianchon chegou antes...)

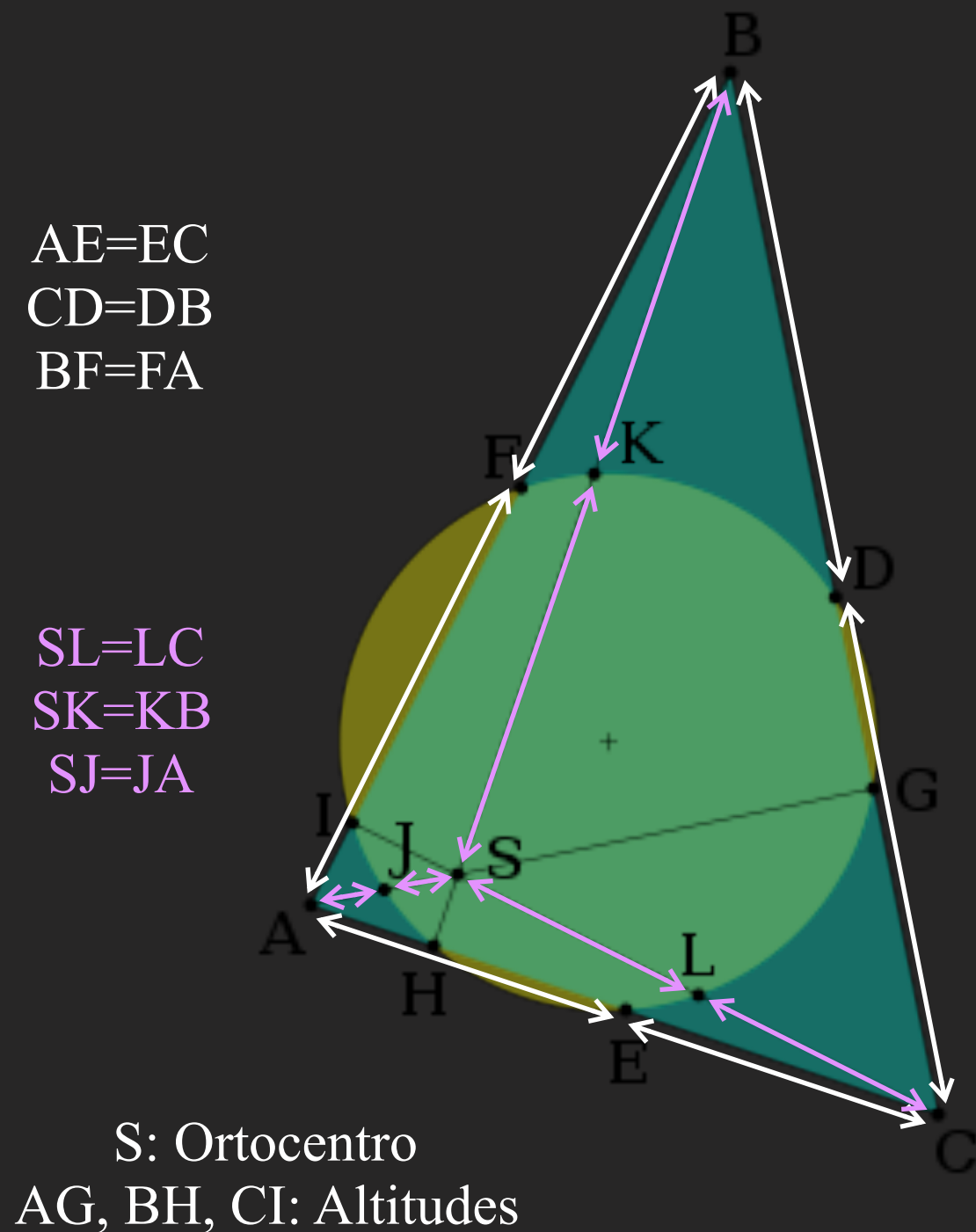


... e provar o Teorema de Feuerbach:

$AE=EC$
 $CD=DB$
 $BF=FA$

$SL=LC$
 $SK=KB$
 $SJ=JA$

"o mais belo teorema na Geometria desde Euclides"

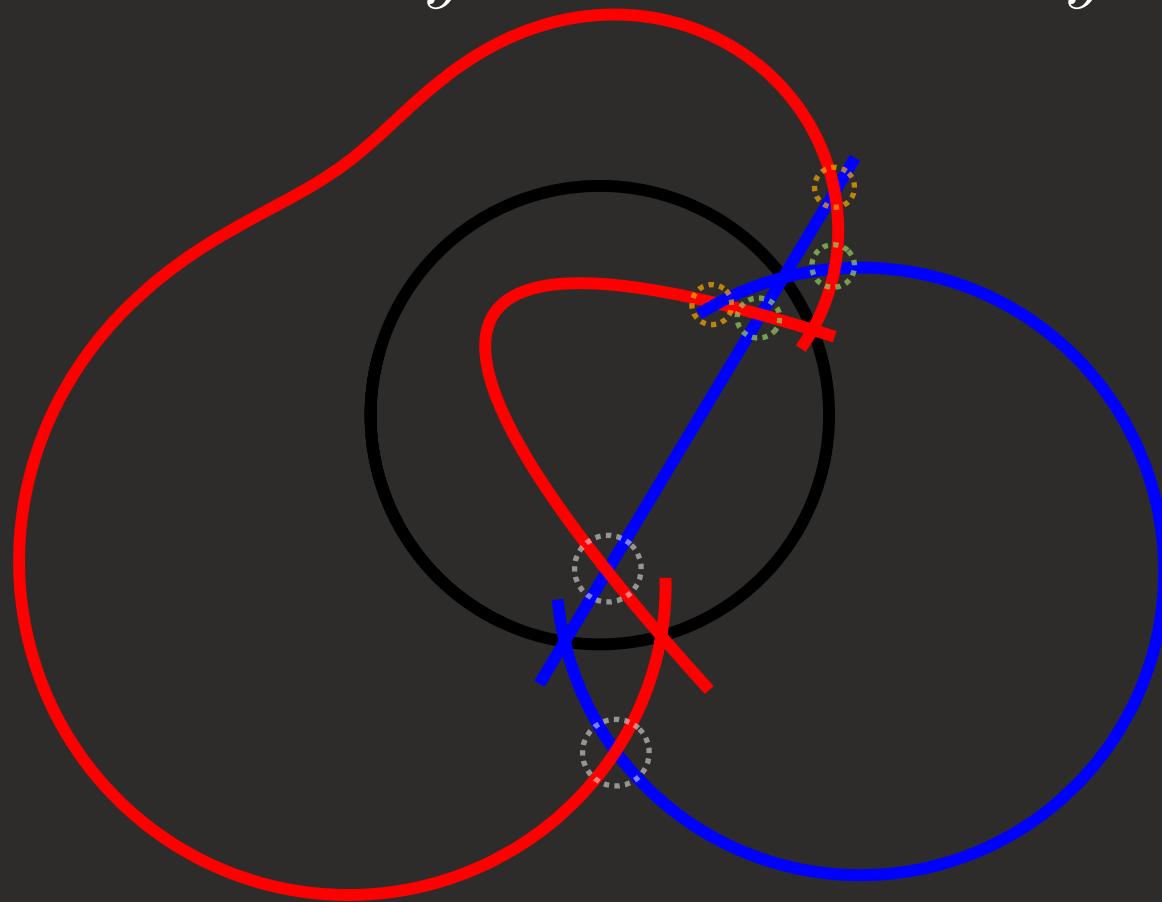


S: Ortocentro
AG, BH, CI: Altitudes

Introdução à Cosmologia Física

... que, por sua vez, levou **Jakob Steiner** (Steiner/Geometria :: Gauss/Análise) a descobrir, c. 1824, as leis da “geometria inversiva”: a todo ponto dentro (fora) de um círculo, corresponde outro ponto, fora (dentro) dele, dado pela transformação (para raio unitário):

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$



Essa é uma **transformação conforme** – que preserva os **ângulos** de linhas que cruzam.
(Essas transformações foram depois re-descobertas por outros, incluindo **Lord Kelvin**, no contexto da Eletrostática – no **método das imagens**.)

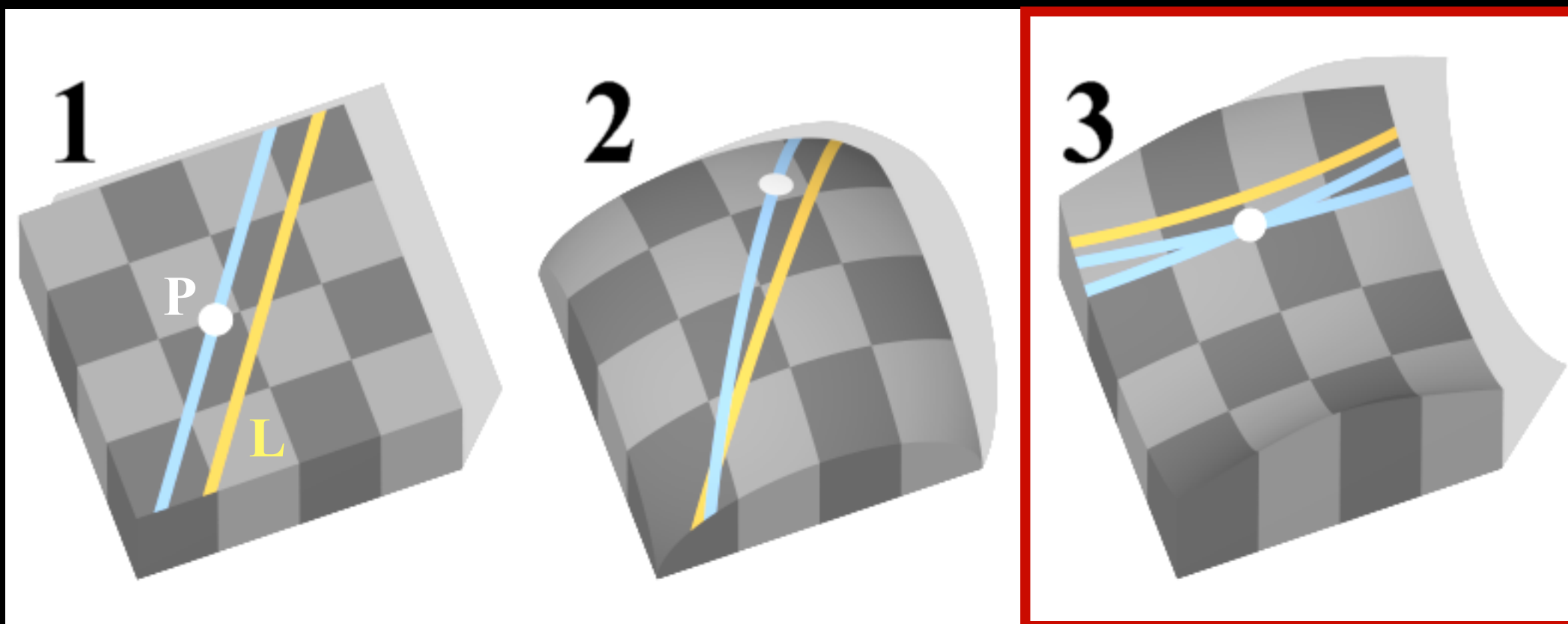
Introdução à Cosmologia Física

O estudo de transformação de coordenadas e de dualidades (e.g., pontos/linhas) reacendeu o interesse na Geometria, que recobrou uma reputação respeitável

Em ~1826 **Nicolai Lobachevski** (e, independentemente, **C. F. Gauss** e **János Bolyai**) miraram num dos pilares da Geometria Euclideana: o “postulado das paralelas”:

dada uma linha L e um ponto P , pode existir apenas uma linha que passa por P e não cruza L .

Lobachevski mostrou que isso era **falso**, construindo espaços “curvos”, infinitos, em 2D, (que ele chamava “geometrias imaginárias”) onde existem **muitas linhas por P** :



1. Plano, infinito
(Euclidean)

2. Curvo, finito
(fechado/elíptico)

3. Curvo, infinito
(aberto/hiperbólico)

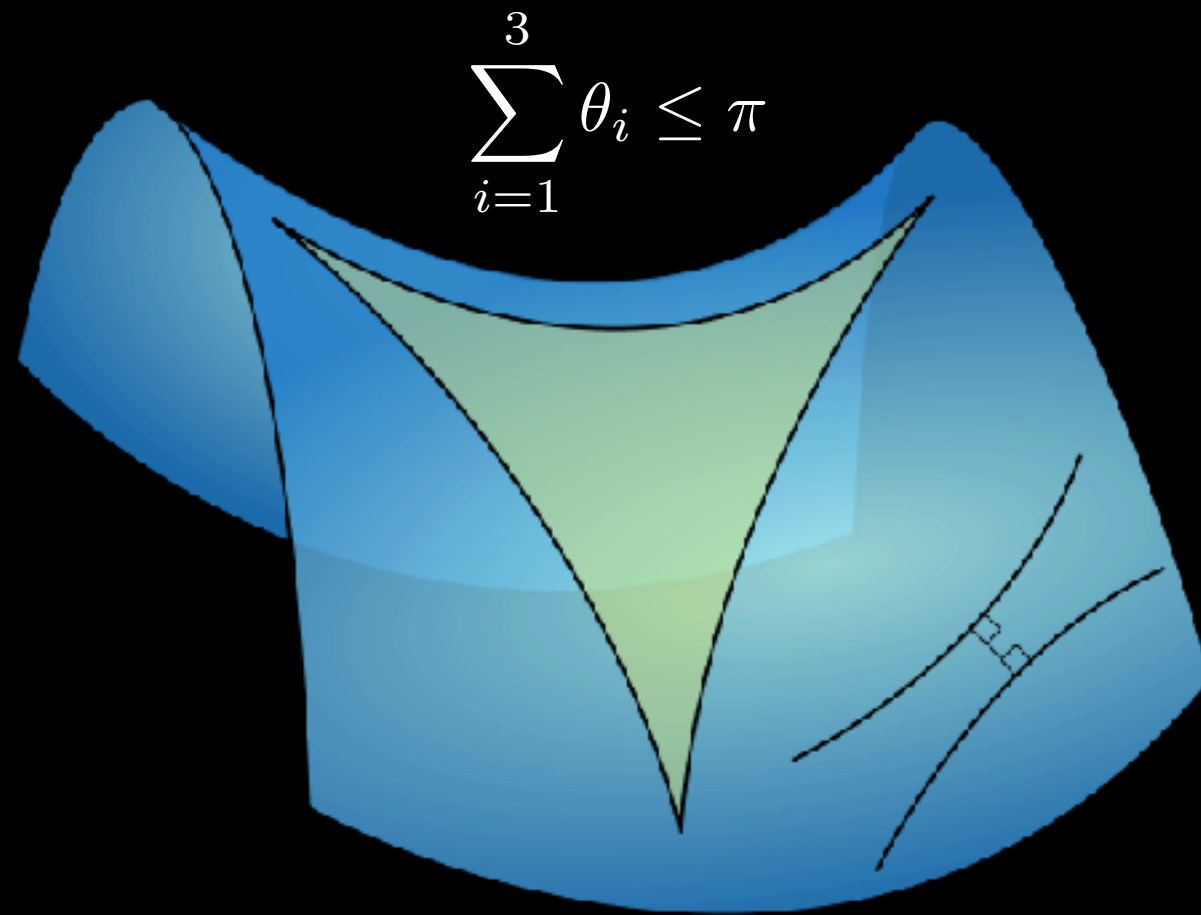
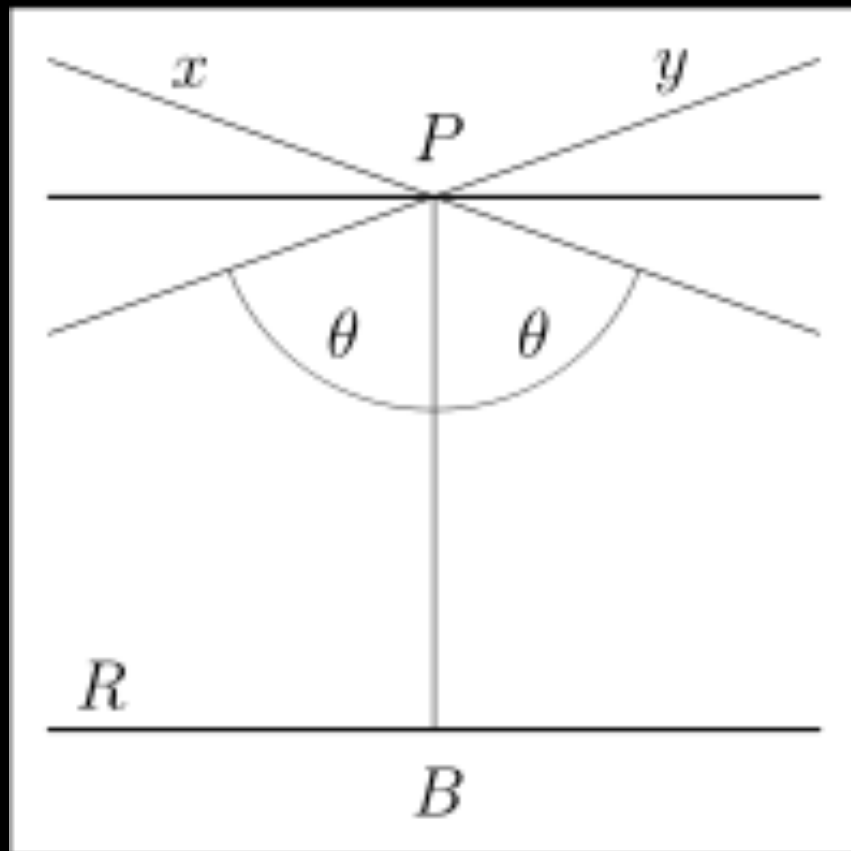
Espaço
de Gauss-
Lobachevski
-Bolyai

Introdução à Cosmologia Física

Geometria hiperbólica (ou Geometria de Bolyai-Lobachevsky)

Teorema ultraparalelo:

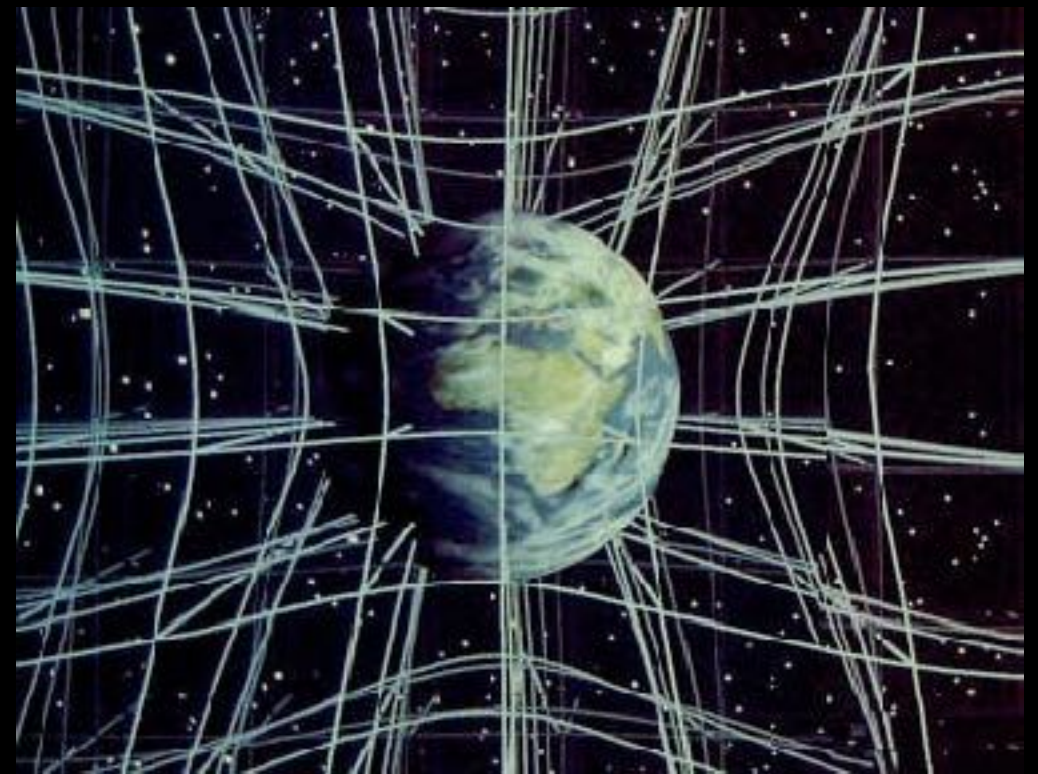
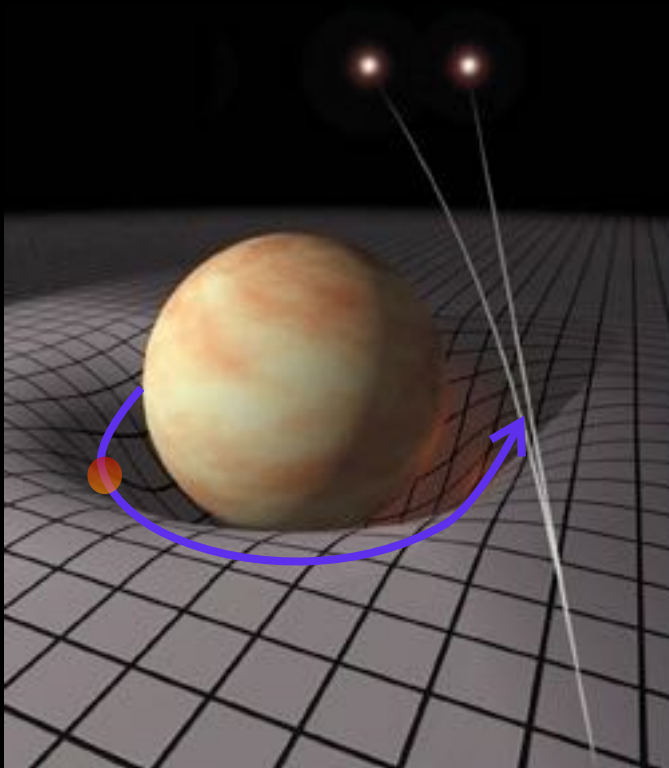
dadas duas linhas paralelas (hipérboles), há uma única linha perpendicular a elas.



Introdução à Cosmologia Física

Nas teorias "covariantes" da gravidade (p. ex., a Relatividade Geral), a **gravidade** é uma manifestação da **curvatura do espaço-tempo**

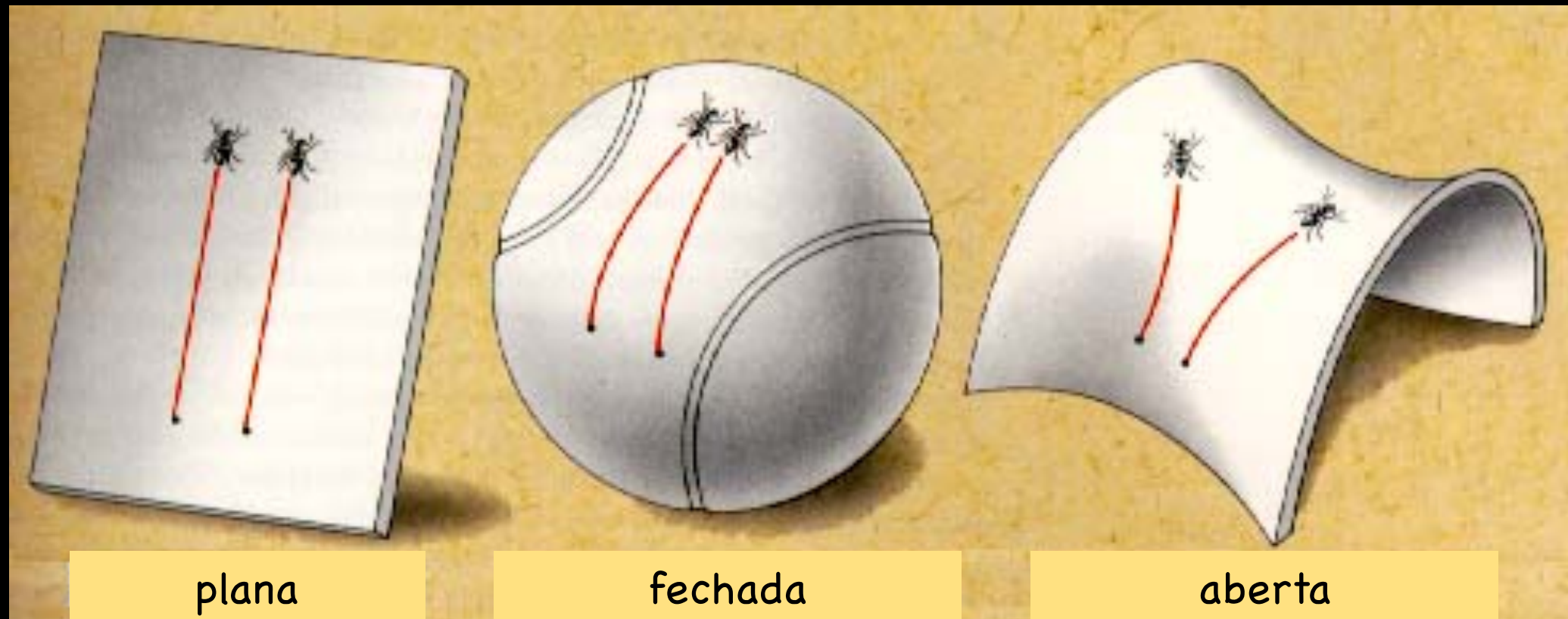
Nessas teorias, a **métrica** do espaço-tempo (i.e., sua **geometria**) tem dois papéis:
ela **determina** a trajetória da matéria... ...e é **curvada** pela matéria



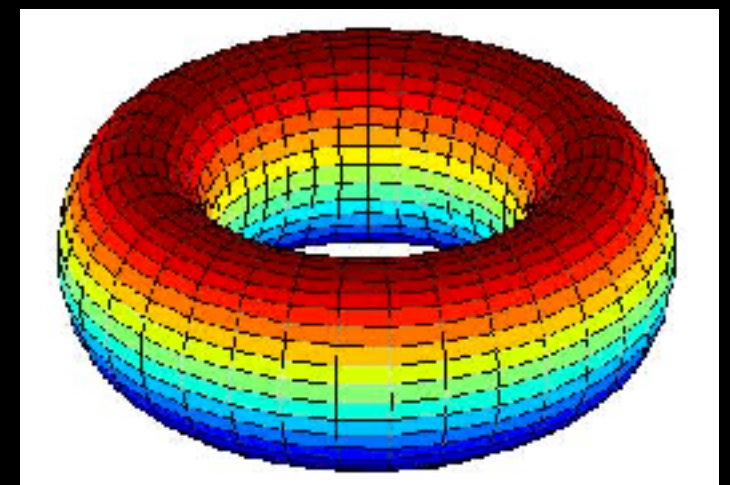
- O que significa uma "geometria" do espaço-tempo?
- O que determina essa geometria?
- Como podemos fazer medidas que testam essa teoria?

Introdução à Cosmologia Física

Visão "global" das geometrias plana (curvatura nula), fechada (curvatura positiva) e aberta (curvatura negativa):



Um aspecto crucial dessas geometrias é que **todos os pontos** desses espaços são **equivalentes**. Ou seja, não há **nenhuma posição privilegiada**, nem **nenhuma direção privilegiada**. Isso não é necessariamente verdade em outras geometrias, p. ex.:



Introdução à Cosmologia Física

Espaços **planos** (Euclidianos), **fechados** (i.e., esféricos) e **abertos** (GLB) são as únicas variedades que satisfazem um princípio simples: elas são homogêneas e isotrópicas.

Homogeneidade: o espaço tem as mesmas propriedades em todo lugar

Homogeneidade sem isotropia



Isotropia: todas as direções do espaço são equivalentes

Isotropia sem homogeneidade



Princípio cosmológico: o espaço é o mesmo em todo lugar, e em todas as direções

* Ehlers, Gehren & Sachs (1968): se todos os observadores inerciais medirem as mesmas propriedades da **matéria** (p. ex., a radiação cósmica de fundo), então o universo é homogêneo e isotrópico.

Introdução à Cosmologia Física

O espaço de Lobachevski foi uma das motivações para Georg B. Riemann, em 1854, propor sua visão global da **Geometria** como o estudo das variedades com qualquer número de dimensões, em qualquer tipo de espaço.



Essas geometrias são **essencialmente não-Euclidianas**: as distâncias entre dois pontos são dadas em termos de uma métrica, que é uma função diferenciável qualquer:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

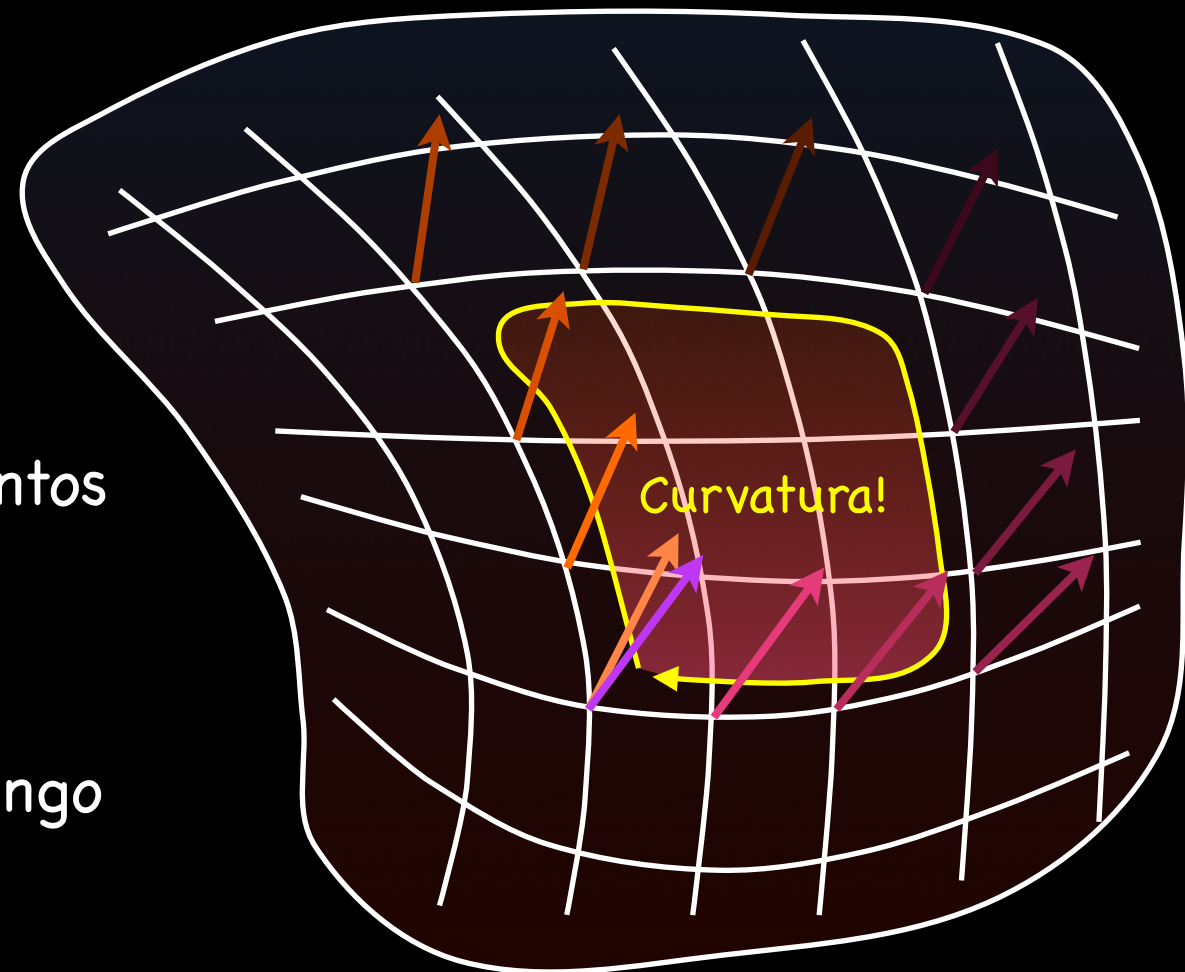
A métrica tem um papel dual:

- i) ela serve para medir a distância entre dois pontos quaisquer; e
- ii) ela determina (pelas **conexões afins**) como se deve **transportar quantidades geométricas** ao longo de um caminho suave na variedade – p. ex.:

aceleração

$$\frac{dV_\mu}{d\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\nu}{d\lambda} V_\alpha$$

$$\Delta V_\mu = \frac{1}{2} R_{\beta\mu\nu}^\alpha V_\alpha \oint dx^\mu x^\nu$$



Introdução à Cosmologia Física

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right)$$

$$\frac{D V^{\alpha}}{D x^{\beta}} = V^{\alpha}_{;\beta} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} V^{\mu}$$

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}$$

$$\frac{D V_{\alpha}}{D x^{\beta}} = V_{\alpha;\beta} = \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} V_{\mu}$$

A liberdade de escolha das coordenadas implica que, em qualquer ponto, podemos sempre usar o **Elevador de Einstein**, ir para um sistema no qual a métrica é, **localmente**, aquela de Minkowski, e assim fazer com que as **conexões se anulem**:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} , \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \rightarrow 0$$

Entretanto, se o espaço é **curvo**, as **derivadas** das conexões não podem também se anular...

$$\partial_{\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \neq 0 \quad !$$

Portanto, nunca podemos "anular" a curvatura!

Introdução à Cosmologia Física

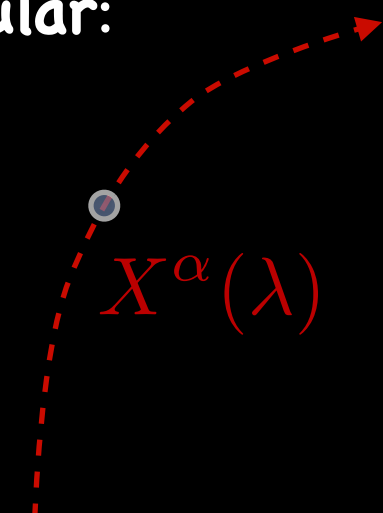
Agora, suponha que nos é dado um espaço com uma determinada métrica.

O que define um referencial em "queda livre" (inercial) em algum lugar desse espaço?

⇒ A **aceleração** em trajetórias que passam por aquele lugar deve **se anular**:

$$\frac{D^2 X^\alpha}{D\lambda^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 X^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dX^\mu}{d\lambda} \frac{dX^\nu}{d\lambda} = 0$$

Equação da geodésica



Note que a equação da geodésica determina tanto as coordenadas **espaciais e temporais** do observador inercial

⇒ "Tempo próprio" é o $X^0 = \tau$ ao longo da geodésica!

Limite Newtoniano

Pequenas velocidades...

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \approx \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\alpha \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0$$

Métrica estática, quase Minkowski...

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \rightarrow \Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \nabla^i g_{00} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla^i g_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \\ \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \end{cases}$$

$$g_{00} = 1 - 2\phi$$

Introdução à Cosmologia Física

Problema #1

Seja u uma curva geodésica. Mostre que: $u^\mu u_\nu ;_\mu = 0$

Problema #2

Seja $u(t,s)$ uma família de geodésicas, e $v(t,s)$ o vetor de desvio para essa família:

$$u^\mu = \frac{dX^\mu(t, s)}{dt}, \quad v^\mu = \frac{dX^\mu(t, s)}{ds}$$

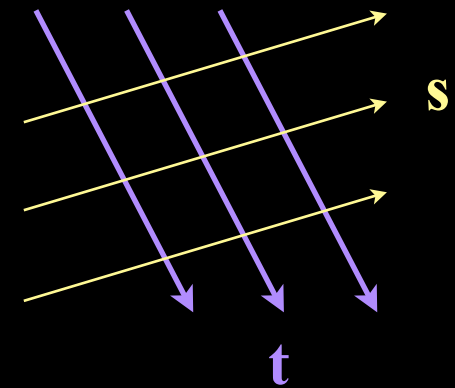
Isso implica que: $[u, v]^\mu = u^\nu v^\mu_{;\nu} - v^\nu u^\mu_{;\nu} = 0$

Use isso para calcular a aceleração de v no tempo t :

$$\frac{D^2 v^\mu}{D t^2} = u^\alpha D_\alpha (u^\beta D_\beta v^\mu)$$

e derive a equação do desvio geodésico.

(N.B.: aqui t é apenas um parâmetro, e não x^0 !)



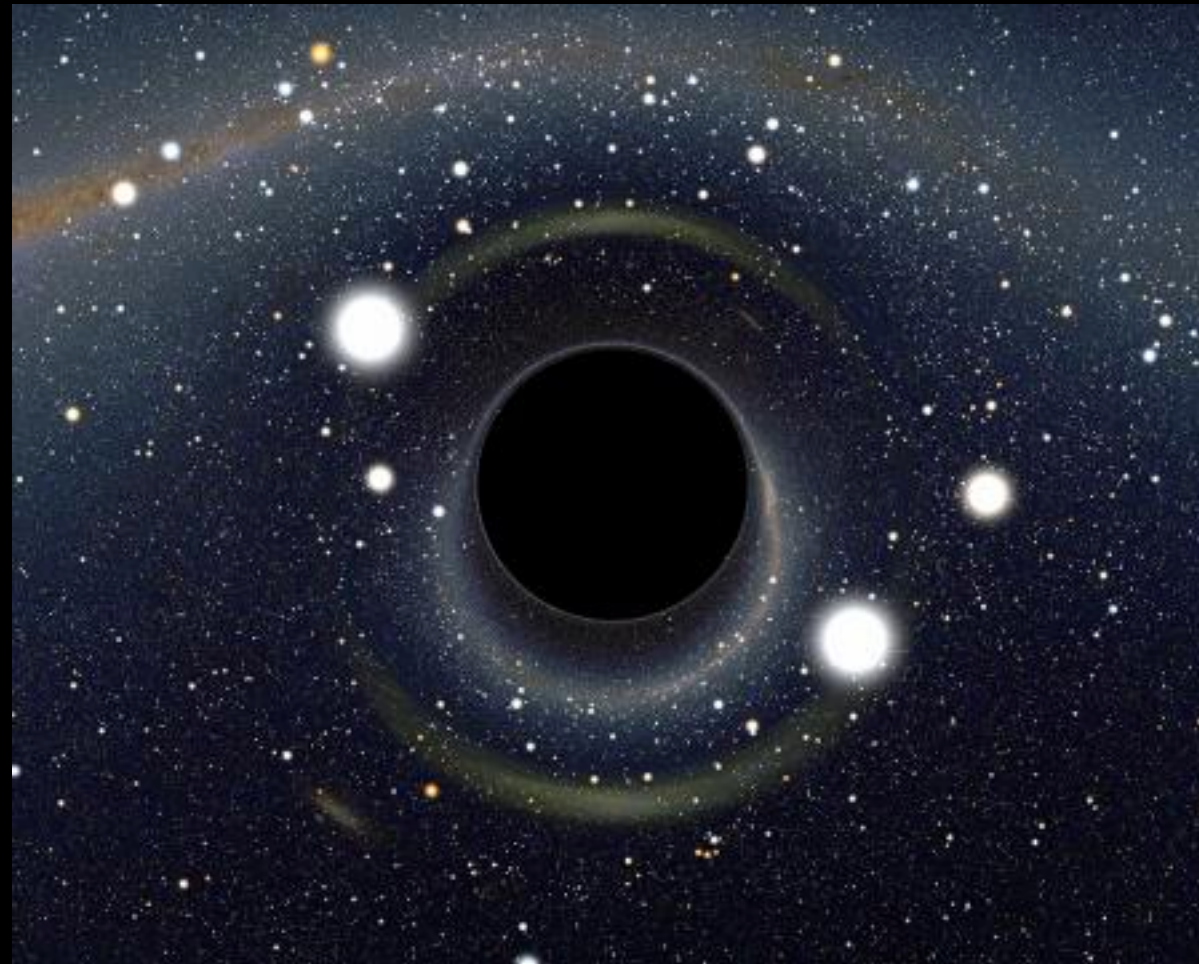
Introdução à Cosmologia Física

Problema #3

Tome uma geodésica tipo-tempo, $U^\mu U_\mu = -1$, num espaço-tempo de métrica $g_{\mu\nu}$.

Mostre que $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu$ é a métrica genuína das hipersuperfícies do tipo-espaço, definidas por essa geodésica – e que $h_{\mu\nu}$ é um operador de projeção nesse sub-espaço.

Buracos negros



Leitura adicional sugerida (divulgação científica):

Kip S. Thorne, "Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy"

Isaac Asimov, "O colapso do universo"

Buracos negros

Segundo Newton, a aceleração da gravidade da Terra é: $g_1 = \frac{GM}{r_1^2} \simeq 10 \text{ m/s}^2$

É mais interessante calcular o potencial:

$$\phi_1 = \frac{GM}{r_1} \simeq (8,2 \times 10^3 \text{ m/s})^2$$

Agora imagine que toda a massa da Terra fosse compactada no tamanho de uma bolinha de gude.

Aí o potencial gravitacional na vizinhança da bolinha seria:

$$\phi_2 \simeq (2.8 \times 10^8 \text{ m/s})^2$$



Buracos negros

Na Relatividade Geral, uma massa M "pontual" gera uma **métrica** do espaço-tempo conhecida como **Métrica de Schwarzschild** (1916):



$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r c^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$



$c=1$ (unidades "naturais")

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

O que acontece quando temos uma grande massa concentrada em um volume muito pequeno, menor que o **Raio de Schwarzschild**?

$$R_s = \frac{2 G M}{c^2} \rightarrow 2 G M$$

Introdução à Cosmologia Física

Vamos primeiro examinar o que acontece com o **cone de luz futuro** no espaço-tempo de Schwarzschild.

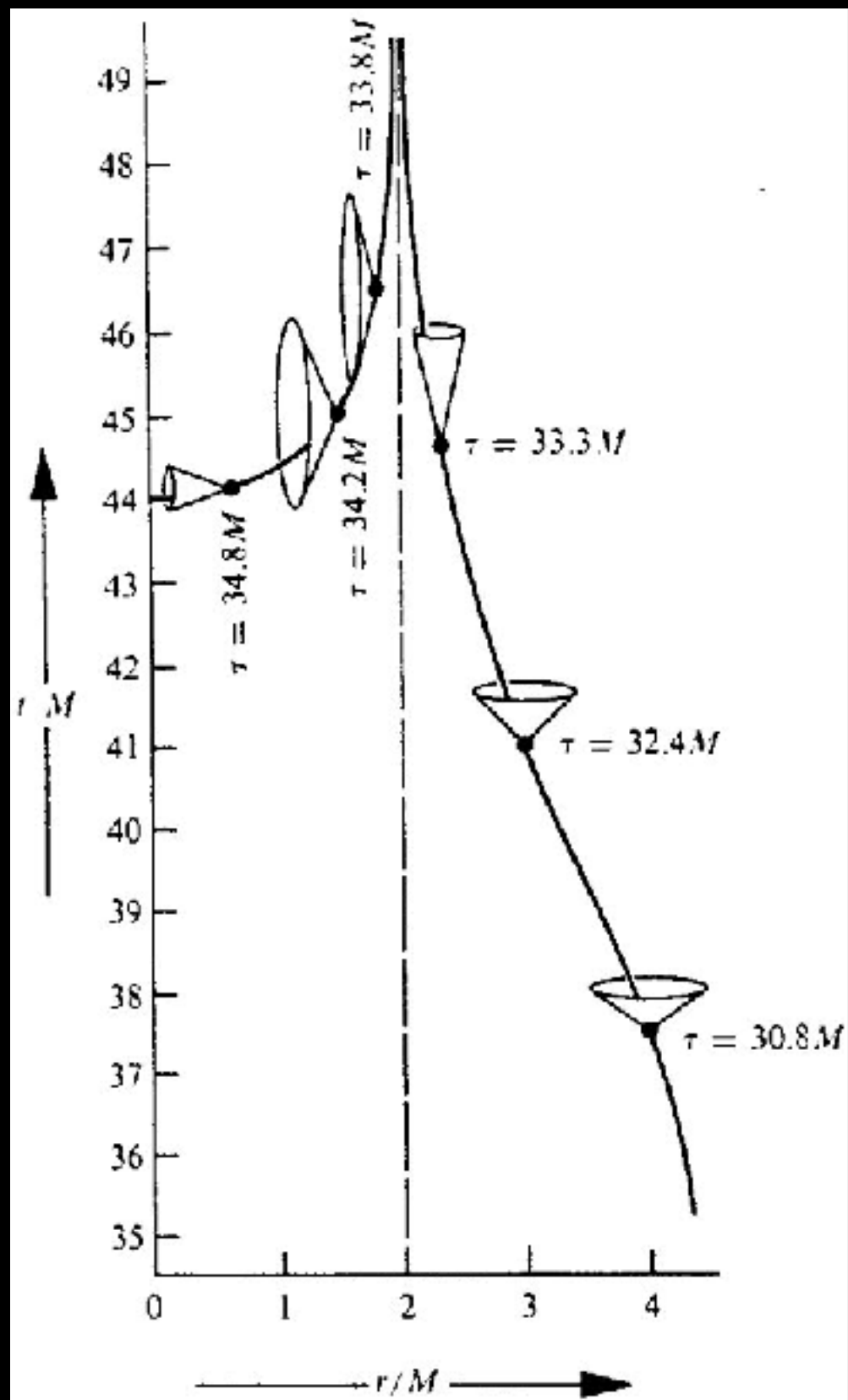
Fora do Raio de Schwarzschild, temos a situação usual: o cone de luz futuro aponta para... o futuro! (Ou seja, na direção de t crescendo.)

Porém, dentro do Raio de Schwarzschild o cone de luz futuro aponta na direção radial! Ou seja, o futuro de qualquer partícula, de qualquer corpo material, não importa as suas "particularidades", aponta para o ponto $r=0$ (onde está a massa M).

Em outras palavras: uma vez dentro do buraco negro, não há saída — nem para a luz!

No ponto $r=0$ a curvatura do espaço-tempo é infinita, e temos o que é conhecido como **singularidade**.

Linhas de mundo de trajetórias radiais



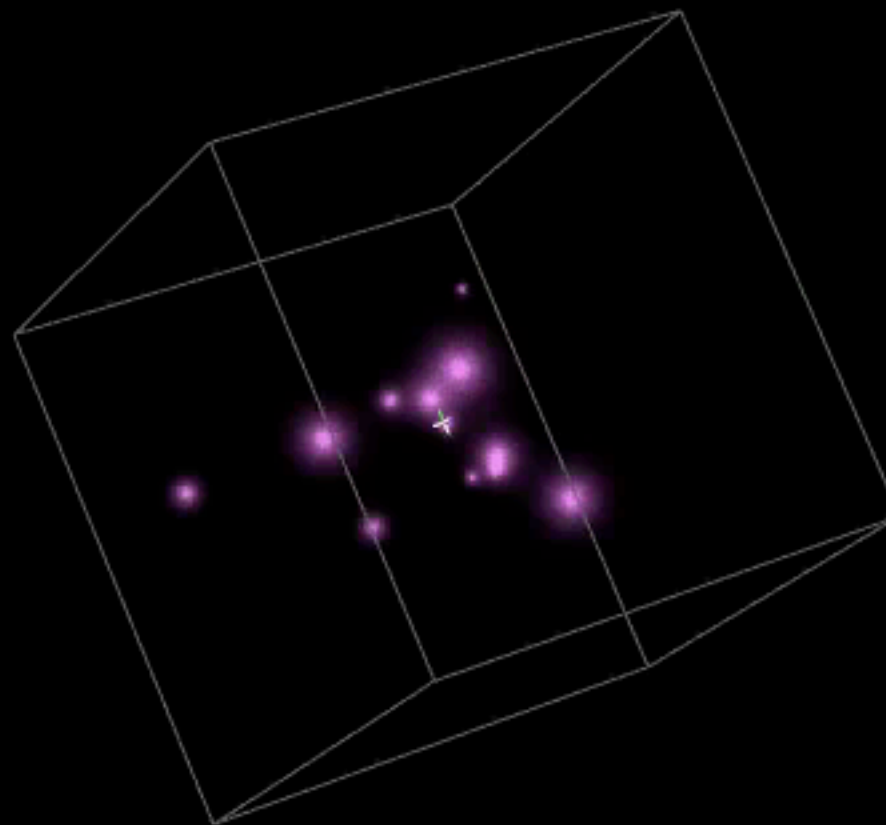
Introdução à Cosmologia Física

Buracos negros existem - e eles estão mais próximos do que você imagina!!!

Year: 1995.0

$$M \simeq 4.1 \times 10^6 M_{\odot}$$

The Acceleration of Stars Orbiting
the Milky Way's Central Black Hole



Data: Andrea Ghez, Jessica Lu (UCLA)
Visualization: Dinoj Surendran, Randy Landsberg,
Mark Subbarao (UChicago / Adler / KICP)

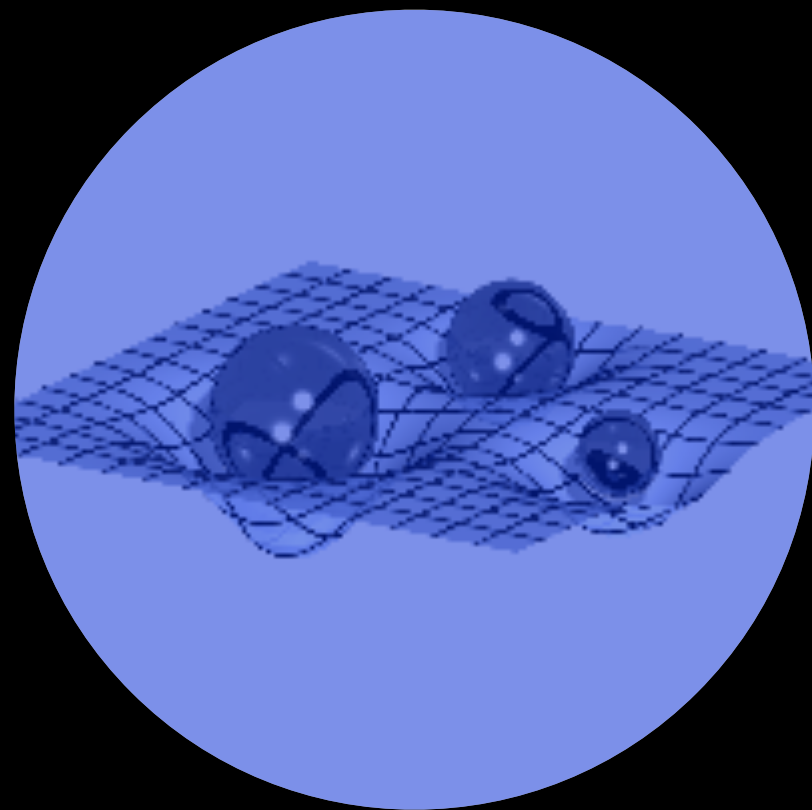


UCLA/Keck Galactic Center Group

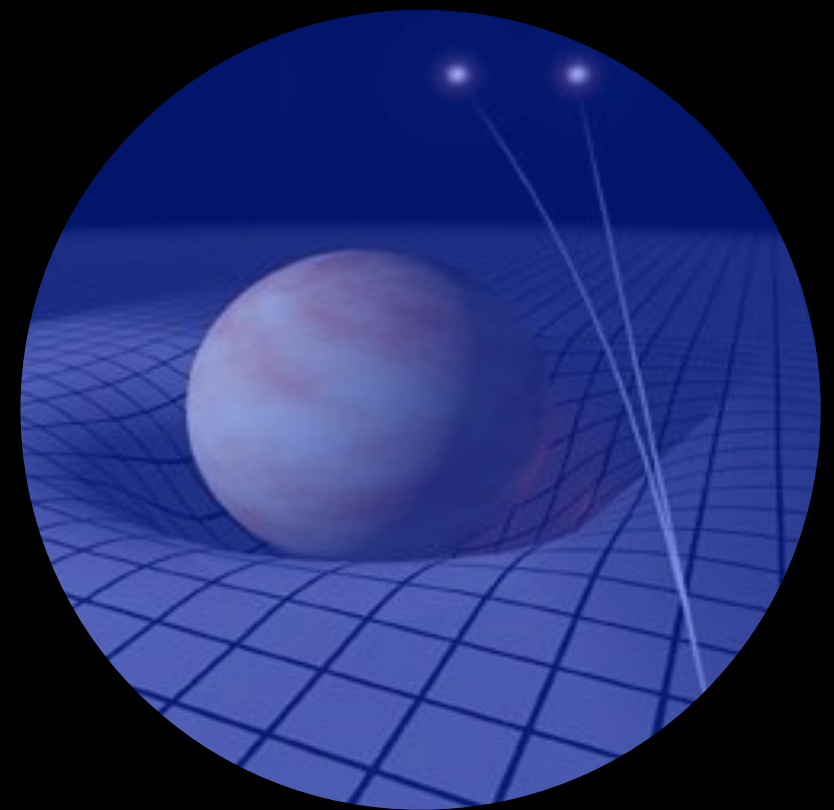
Relatividade Geral (continuação)

Obs: entrega da 1a Lista de Exercícios
adiada para 2a-feira, dia 27/8

Equações de Einstein



A matéria curva o espaço,
determinando a métrica...



... e a métrica determina a
cinemática da matéria...

Matéria e métrica determinam em conjunto a **dinâmica**

Matéria e gravidade têm que funcionar dentro de uma **dinâmica consistente**

⇒ **Simetrias básicas implicam em leis de conservação (Teorema de Noether)**

Introdução à Cosmologia Física

Simetrias e leis de conservação

Invariância sob translações/reparametrizações do **tempo** $\Rightarrow$ Conservação de **energia**

Invariância sob translações/reparametrizações do **espaço** $\Rightarrow$ Conservação de **momento**

Invariância sob **rotações** $\Rightarrow$ Conservação de **momento angular**

Mas e quanto aos **boosts** (rotações t-x)? Eles também são simetrias...

Além disso, elas misturam energia e momento! $P^\mu = mU^\mu$, $P'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} P^\alpha$

Conservação de momento para partículas pontuais (não-relativ.):

$$t \rightarrow t + \delta t$$

$$q \rightarrow q + \dot{q} \delta t$$

$$\dot{q} \rightarrow \dot{q} + \ddot{q} \delta t + \dot{q} \delta \dot{t}$$

$$S = \int dt L(q, \dot{q}) \quad , \quad L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q)$$

$$\delta S = \int dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] = \int dt \left[\dot{q} (\ddot{q} \delta t + \dot{q} \delta \dot{t}) - \frac{dV}{dq} \dot{q} \delta t \right]$$

$$\delta S_i^f = \left[\cancel{\dot{q}^2 \delta t} \right]_i^f - \int_i^f dt \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^2 + V(q) \right] \delta t = 0$$

Energia = "carga" conservada
 $t \rightarrow t + \delta t$: simetria "global"

Introdução à Cosmologia Física

Simetria de gauge (local) das teorias covariantes: transformações de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$$

Sob uma transformação de coordenadas, a **métrica muda como**:

$$g^{\mu\nu} \rightarrow g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} + \underbrace{\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}}_{\delta g^{\mu\nu}} + \mathcal{O}(\xi^2)$$

Em particular, se a **métrica é invariante** sob uma tal transformação, então ξ é um **vetor de Killing** (uma direção associada com alguma simetria).

Problema #5

Tome o espaço 3-dimensional de curvatura constante (GLB) em coordenadas esféricas:

$$d\Sigma_3^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2$$

Quantos vetores de Killing existem nesse espaço? Quais os seus significados?

Introdução à Cosmologia Física

A **dinâmica** da matéria deveria ser independente do sistema de coordenadas, e portanto a **ação da matéria** deveria ser **invariante** sob uma transformação de coordenadas:

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m$$

$$\delta_\xi S_m = \int d^4x \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_m}{\partial (\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \partial_\alpha \delta g^{\mu\nu} \right]$$

$$\delta_\xi S_m = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{}} (\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}) = \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu}$$

É OK assumir que isso se anula. Mas por quê?...

Mas como: $T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} = (T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{;\nu} - T^{\mu\nu}_{;\nu} \xi_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi_\mu) - T^{\mu\nu}_{;\nu} \xi_\mu$

$$\delta_\xi S_m = \int d^4x [\partial_\nu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi_\mu) - T^{\mu\nu}_{;\nu} \xi_\mu] \rightarrow 0$$

Então, temos as leis de **conservação**: $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$

$T_{\mu\nu}$:

- Energia
- Momento
- Estresses/fluxos de energia

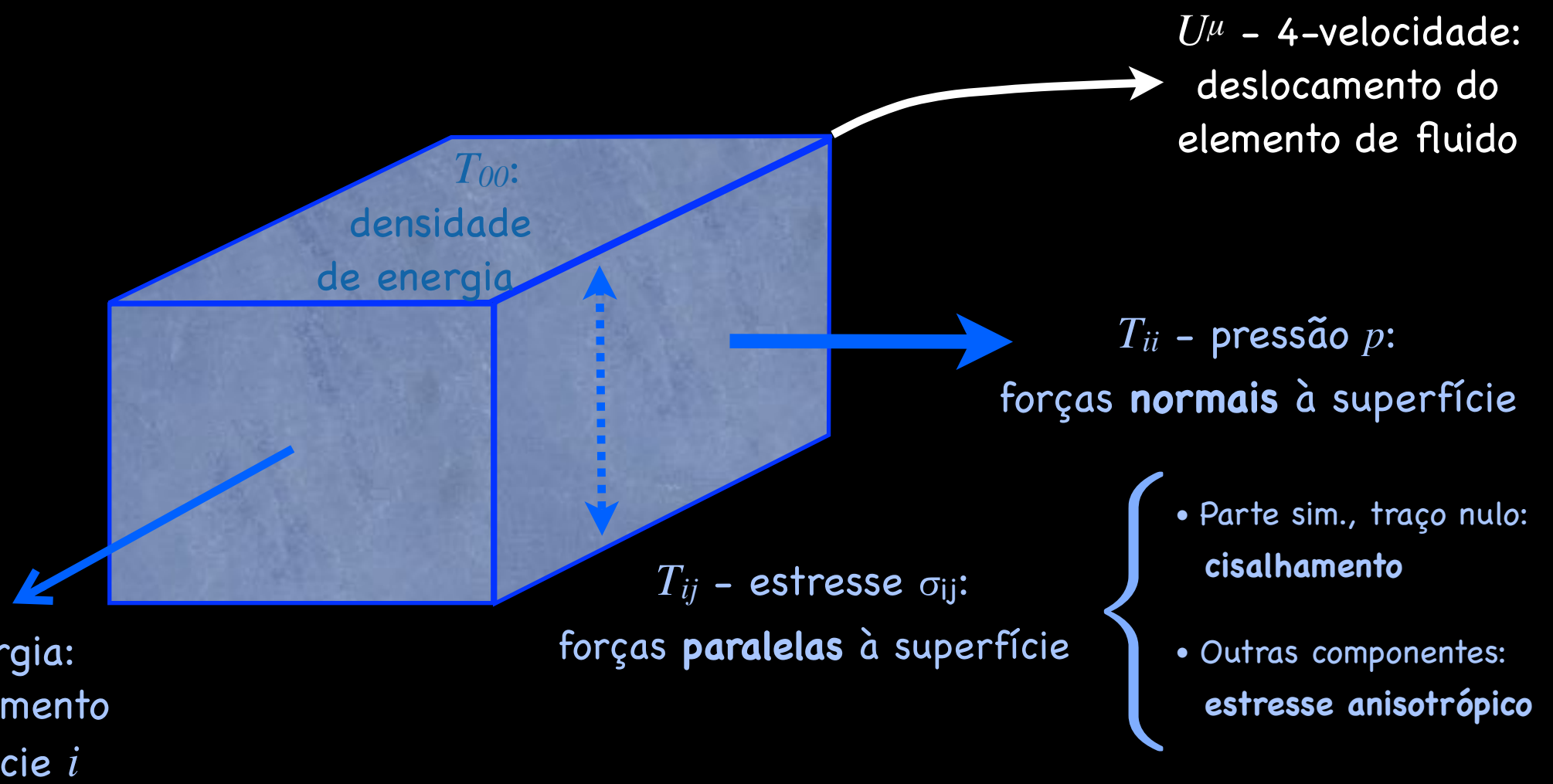
Introdução à Cosmologia Física

O Tensor de Energia e Momento (TEM)

Em geral, é mais informativo construir o TEM de primeiros princípios.

Num meio contínuo, as quantidades relevantes são: a **4-velocidade**, a **densidade de energia**, a **pressão isotrópica**, e o **estresse de cisalhamento**.

Considere um elemento de fluido:



Introdução à Cosmologia Física

No espaço-tempo de **Minkowsky** um fluido em repouso, sem nenhum estresse, fica determinado completamente em termos de sua **densidade de energia** e **pressão**:

$$T^{00} = \rho$$

$$T^{0i} = 0$$

$$T^{ij} = p \delta^{ij}$$

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0)$$

Ou, em termos da 4-velocidade: $T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p \eta^{\mu\nu}$

Para um fluido em movimento basta substituir a 4-velocidade por:

$$U^\mu \rightarrow \gamma(v)(1, \vec{v})$$

Nós temos então que:

$$T^{00} = \gamma^2(\rho + p) - p = \frac{\rho + p v^2}{1 - v^2}$$

$$T^{0i} = \frac{\rho + p}{1 - v^2} v^i$$

$$T^{ij} = \frac{\rho + p}{1 - v^2} v^i v^j + p \delta^{ij}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu T^{\mu 0} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho + p v^2}{1 - v^2} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{(\rho + p) v^i}{1 - v^2}$$

Introdução à Cosmologia Física

Em resumo:

Em qualquer formulação covariante da gravidade (na qual vale o Princípio da Equivalência), o “tensor de energia e momento” é quem determina todas as propriedades da matéria.

Esse objeto é um tensor simétrico, o que significa, por exemplo, que a densidade de momento é idêntica ao fluxo de energia

$$T_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c} \rho \\ \text{momentum density} \\ p_1 \\ \text{shear} \\ p_2 \\ \text{shear} \\ p_3 \end{array} \right)$$

$$T^{00} = \rho = \text{energy density}$$

$$T^{0i} = \text{energy flux components}$$

$$T^{i0} = \text{momentum density components}$$

$$T^{ii} = p_i = \text{pressure components}$$

$$T^{ij} = \text{shear components } (i \neq j)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

J. Bain

Quantidade conservada: $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$

Introdução à Cosmologia Física

No limite não-relativístico [i.e., jogamos fora termos $O(v^2)$], a conservação do TEM resulta na famosa **equação da continuidade**:

$$\partial_\mu T^{\mu 0} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho + p}{1 - v^2} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{(\rho + p) v^i}{1 - v^2}$$
$$\simeq \dot{\rho} + \vec{\nabla}[(\rho + p) \vec{v}] \simeq \dot{\rho} + (\rho + p) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

Isso é também equivalente à **conservação de energia** da Termodinâmica:

$$dE + p dV = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V} \frac{d(\rho V)}{dt} + p \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{d\rho}{dt} + (\rho + p) \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0$$

onde o volume muda de acordo com a divergência da velocidade:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

Conservação do TEM: $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Conservação de energia} \\ \bullet \text{ Equação de Euler} \end{array} \right.$

Introdução à Cosmologia Física

Problema #6

(a) Um campo escalar tem uma Lagrangeana:

$$L = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$$

Encontre o seu TEM. Dica:

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

(b) Encontre a Equação de Klein-Gordon (a "equação de movimento" para o campo) como resultado da conservação do TEM.

(c) Encontre a Equação de Klein-Gordon através do princípio variacional em termos do próprio campo escalar.

(d) Você é capaz de escrever esse TEM em termos de um "fluido",

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \quad ?$$

Introdução à Cosmologia Física

Problema #7

(a) Tome como ponto de partida a Lagrangeana do Eletromagnetismo:

$$L_{EM} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

Encontre o TEM do campo eletromagnético.

(b) Mostre que esse TEM é conservado devido às Equações de Maxwell (em espaços-tempo curvos).

(c) Mostre que, em 4D, o EM no vácuo é "conformemente invariante", i.e., as soluções das Equações de Maxwell são invariantes sob as transformações:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$$

Introdução à Cosmologia Física

As Equações de Einstein, finalmente!

A conservação do TEM deve ter uma contrapartida do lado da métrica do espaço-tempo. De fato, a ação de Einstein-Hilbert satisfaz esse vínculo, e temos que:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} + L_m \right] \longrightarrow G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}$$

Devido ao **Princípio Cosmológico**, em primeira aproximação os lados direito e esquerdo dessa equação devem ser **funções do tempo, apenas**.

Os únicos **parâmetros livres** dessa teoria são **constantes** no espaço e no tempo:

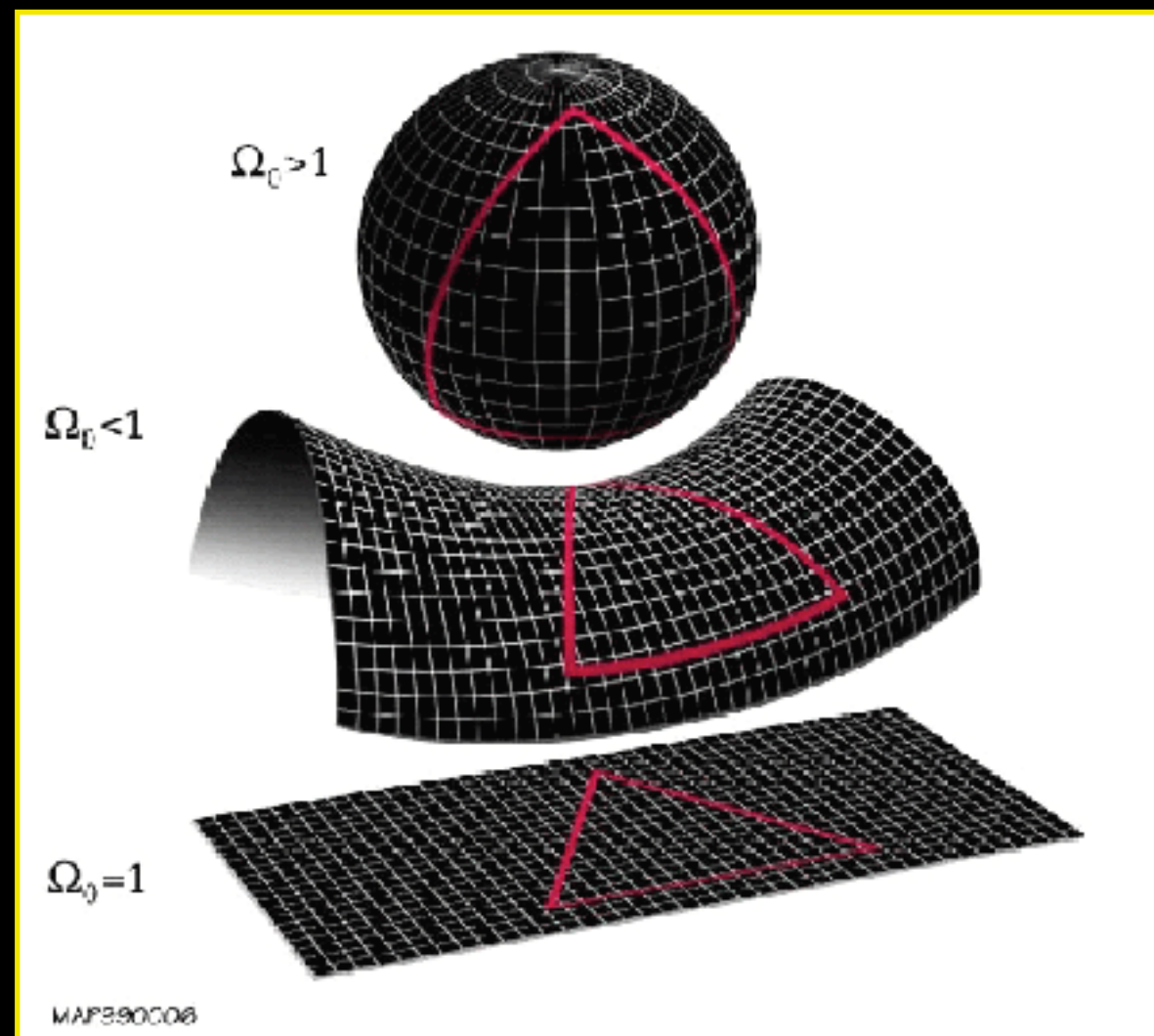
Métrica:

Curvatura espacial
Constante Cosmológica (Λ)

Matéria:

Massas
Constantes de acoplamento

A cinemática do universo: as equações de Friedmann



Introdução à Cosmologia Física

A métrica de FLRW

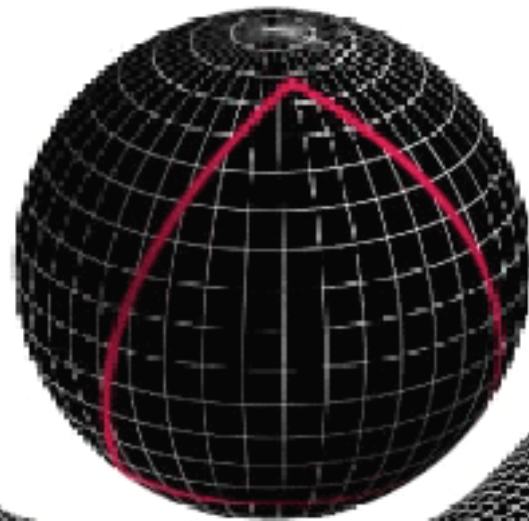
A. Friedmann (1922–24), G. Lemaitre (1927), H. P. Robertson (1935–36), A. G. Walker (1937)

Seções espaciais de curvatura constante:

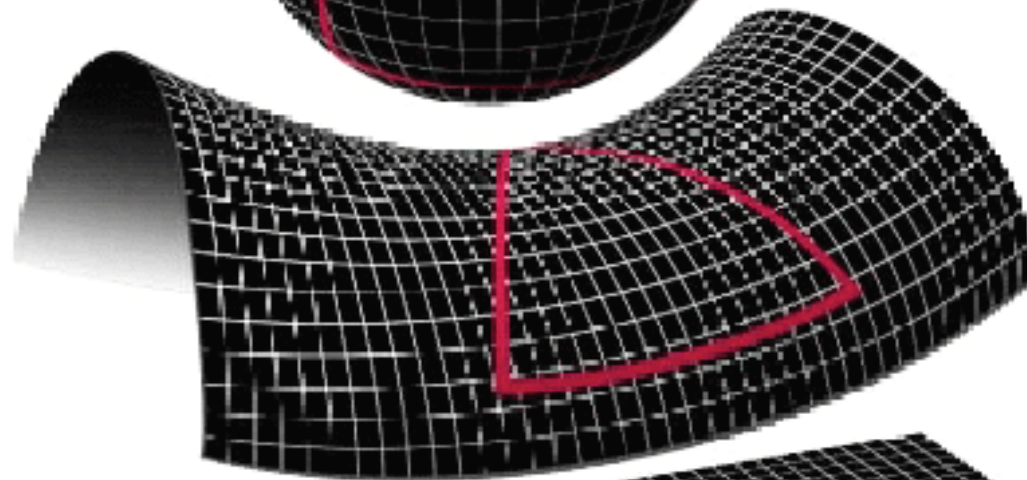
$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\Sigma^2$$

Def.: $a(t_0)=1$

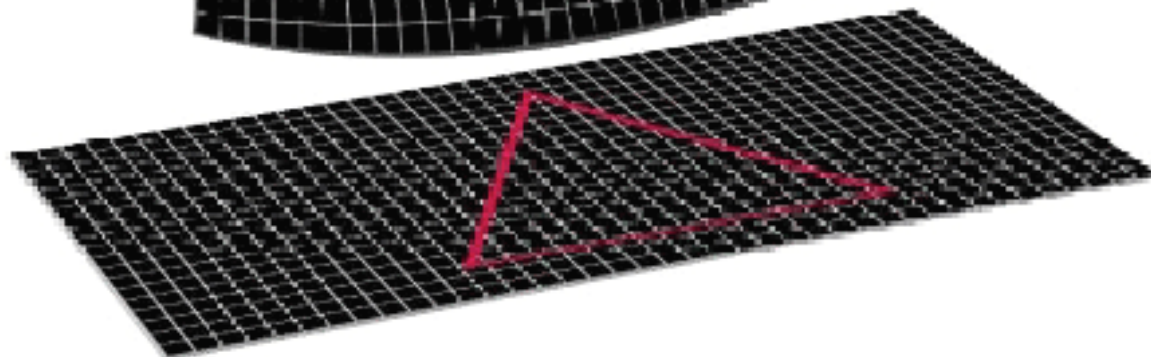
$k=1$



$k=-$



$k=0$



$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\Omega^2$$

$(r/R_0)^2$

$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\Omega^2$$

$(r/R_0)^2$

$$d\Sigma^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Introdução à Cosmologia Física

Alguns sistemas de coordenadas populares usados para expressar as seções espaciais de FLRW:

Coordenadas polares:

$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2$$

$$k = \pm (R_0)^{-2}$$

Coordenadas hiper-esféricas:

$$r = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k} \chi) \quad \Rightarrow \quad d\Sigma^2 = d\chi^2 + \frac{1}{k} \sin^2(\sqrt{k} \chi) d\Omega^2$$

Coordenadas conformes-Cartesianas:

$$r = \frac{R}{1 + \frac{k}{4} R^2} \quad \Rightarrow \quad d\Sigma^2 = \frac{dR^2 + R^2 d\Omega^2}{(1 + \frac{k}{4} R^2)^2}$$

A escolha mais comum é a segunda, já que em coordenadas hiper-esféricas as geodésicas radiais são triviais.

Introdução à Cosmologia Física

Problema #8

Mostre que a métrica das seções espaciais (3D) dos espaços-tempo FLRW em coordenadas conformes-Cartesianas,

$$d\Sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad , \quad \gamma_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{1}{4} k \vec{x}^2 \right)^{-2}$$

possui um tensor de Riemann dado por:

$$R_{ijkl} = k (\gamma_{il}\gamma_{jk} - \gamma_{ik}\gamma_{jl})$$

Problema #9

O volume 3D é definido como:

$$V = \int d^3x \sqrt{\det \gamma}$$

Qual é o volume da 3-esfera? Mostre que esse resultado se reduz ao usual no limite em que a curvatura espacial (k) é muito pequena.

Introdução à Cosmologia Física

Geodésicas nos espaços-tempos FLRW

Vamos tomar a métrica FLRW em coordenadas conformes-Cartesianas:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\Sigma^2$$

$$d\Sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad , \quad \gamma_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{1}{4} k \vec{x}^2 \right)^{-2}$$

As conexões são:

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^i = \Gamma_{i0}^0 = 0$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \dot{a} a \gamma_{ij} \quad , \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{k}{4} \vec{x}^2} \right) \times (\delta_{ij} x^k - \delta_{ik} x^j - \delta_{jk} x^i)$$

Problema #10

Calcule o tensor de Riemann da métrica FLRW nesse sistema de coordenadas. Quantas componentes independentes tem esse tensor?

Introdução à Cosmologia Física

Uma partícula inicialmente em repouso nessas coordenadas tem uma 4-velocidade:

$$U_0^\mu = \left. \frac{dx^\mu}{d\tau} \right|_0 = (1, 0, 0, 0)$$

A equação da geodésica é: $\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\alpha U^\beta = 0$

o que implica nas seguintes equações:

$$\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dU^0}{d\tau} + \Gamma_{ij}^0 U^i U^j = 0$$

$$\mu = k \quad \rightarrow \quad \frac{dU^k}{d\tau} + 2\Gamma_{0i}^k U^0 U^i + \Gamma_{ij}^k U^i U^j = 0$$

A solução para essas equações é: $U^\mu = U_0^\mu = (1, 0, 0, 0)$

Portanto, uma partícula em repouso em qualquer lugar desse espaço-tempo permanecerá em repouso, na mesma posição!

Esse é o significado prático (cinemático) de "homogeneidade e isotropia"!

Introdução à Cosmologia Física

Problema #11

Considere uma partícula se movendo com alguma velocidade inicial “peculiar” v_0 :

$$U_0^\mu = \gamma(v_0)(1, \vec{v}_0)$$

Encontre a para a equação da geodésica neste caso. Faça aproximações se for absolutamente necessário. O que acontece ao longo do tempo com essa velocidade peculiar inicial? Ela aumenta ou decai?

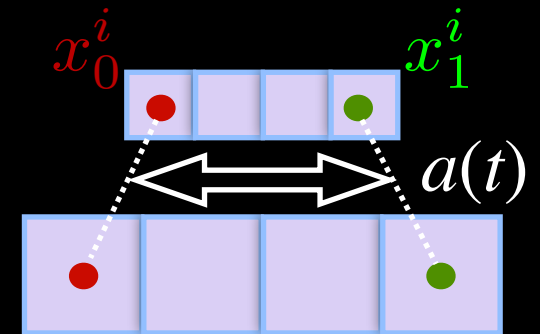
A métrica de FLRW e a dinâmica do universo

Considere dois corpos **em repouso**, em dois locais diferentes.

A distância (tipo-espaço) entre eles é dada, numa hipersuperfície $t=\text{const.}$, por:

$$\Delta s^2 = \Delta l^2(t) = a^2(t)(\vec{x}_0 - \vec{x}_1)^2 = a^2(t) \Delta \vec{x}^2$$

constante!



A **velocidade** com a qual esses corpos “em repouso” estão se afastando é dada por:

$$v = \frac{d}{dt} \Delta l = \frac{\dot{a}}{a} \Delta l$$

$$\frac{\dot{a}}{a} \equiv H$$

Parâmetro de Hubble

Considere agora um raio de luz se propagando na direção radial – e vamos usar **coordenadas hiper-esféricas**. Temos:

$$ds_0^2 = -dt^2 + a^2(t) d\chi^2 = 0$$

$$\Rightarrow \chi = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{dt}{a(t)}$$

t_0 ○



$t_0 + \Delta t$ ○



Introdução à Cosmologia Física

O redshift cosmológico

Suponha que temos uma fonte de luz emitindo radiação com frequência ν_0 numa posição radial r_0 , e num instante t_0 . Um instante T_0 depois, t_0+T_0 , a fonte de luz estará emitindo radiação com a mesma fase ($+2\pi$) que tinha em t_0 .

Os raios de luz emitidos em t_0 e t_0+T_0 são, depois, observado numa posição r_1 :

Diagram illustrating the cosmological redshift process:

- Source position: r_0
- Observer position: r_1
- Emission times: t_0 and t_0+T_0
- Observation times: $t_0+\Delta t$ and $t_0+\Delta t+T_1$

Relationships derived from the diagram:

$$\chi = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0+T_0}^{t_1+T_1} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+T_1} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{T_0}{a(t_0)} \simeq \frac{T_1}{a(t_1)} \Rightarrow \frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}$$

Introdução à Cosmologia Física

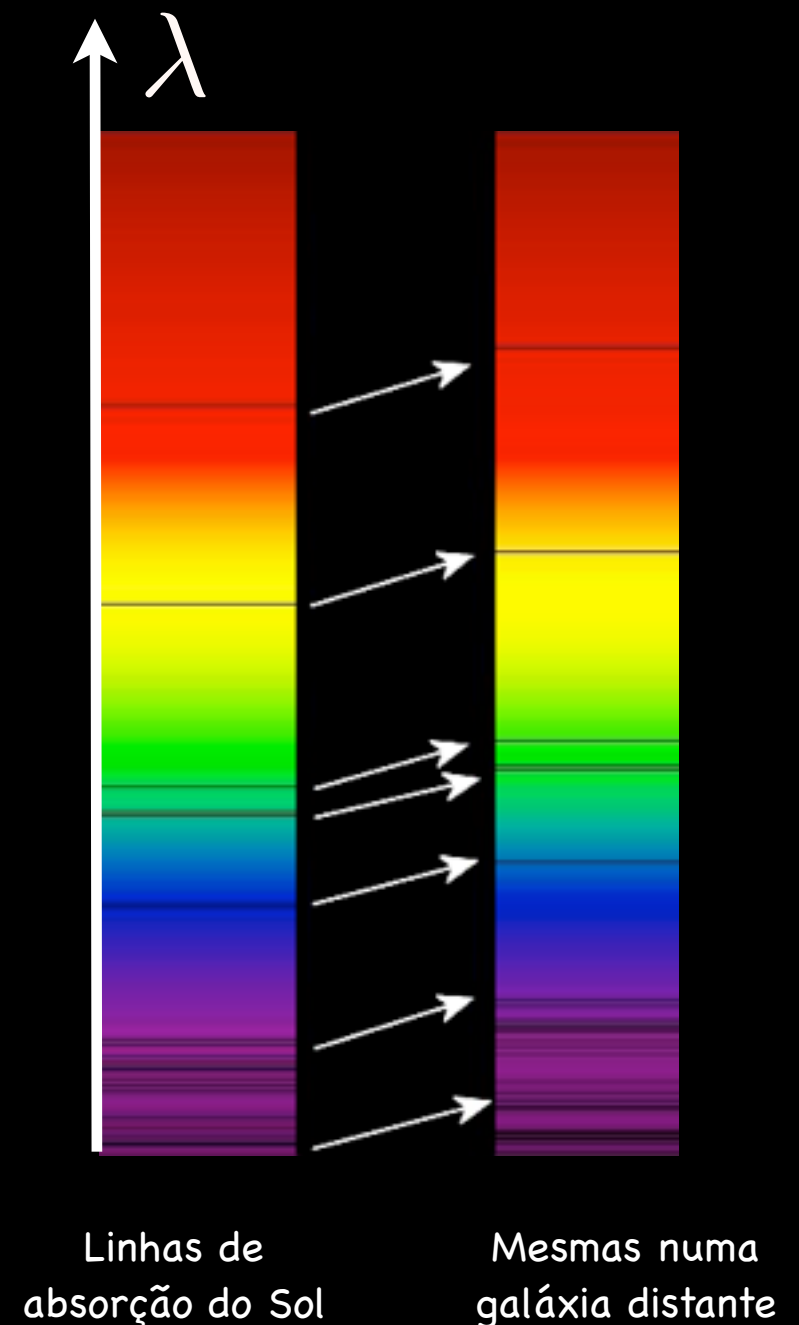
Em termos do **comprimento de onda** da luz:

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emm}}} = \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{emm}})}$$

O "**redshift**" (ou "blueshift") é definido como: $1 + z = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emm}}} = \frac{\nu_{\text{emm}}}{\nu_{\text{obs}}}$

$$\Rightarrow z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emm}}}{\lambda_{\text{emm}}} = \frac{\nu_{\text{emm}} - \nu_{\text{obs}}}{\nu_{\text{obs}}}$$

**Qualquer linha de emissão ou absorção
pode ser usada para calcular o redshift!**



Introdução à Cosmologia Física

Tipicamente, observamos aqui na Terra ($r=\chi=0, t=0$) a luz que é emitida por **galáxias distantes** num instante t no passado.

Como, por convenção, o fator de escala hoje é $a_0=a(t_0)=1$, temos que o **redshift** dessas galáxias distantes é:

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda}{\lambda} = \frac{a_0}{a(t)} - 1 = \frac{1}{a(t)} - 1$$

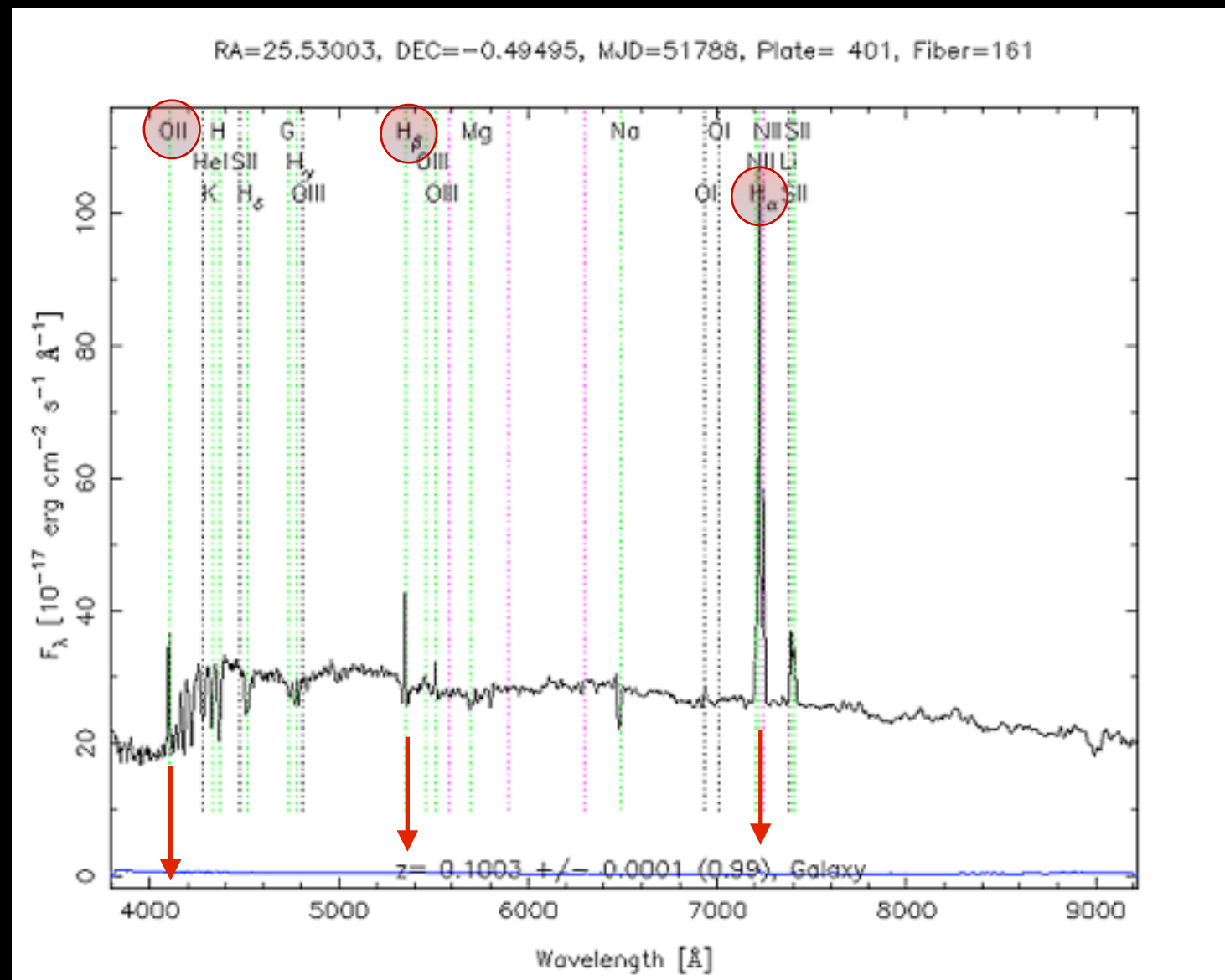
Exemplo: galáxia em **$z=0.1003$**

Em repouso, essas linhas são:

H_α : 6563 Å

H_β : 4861 Å

OII : 3727 Å



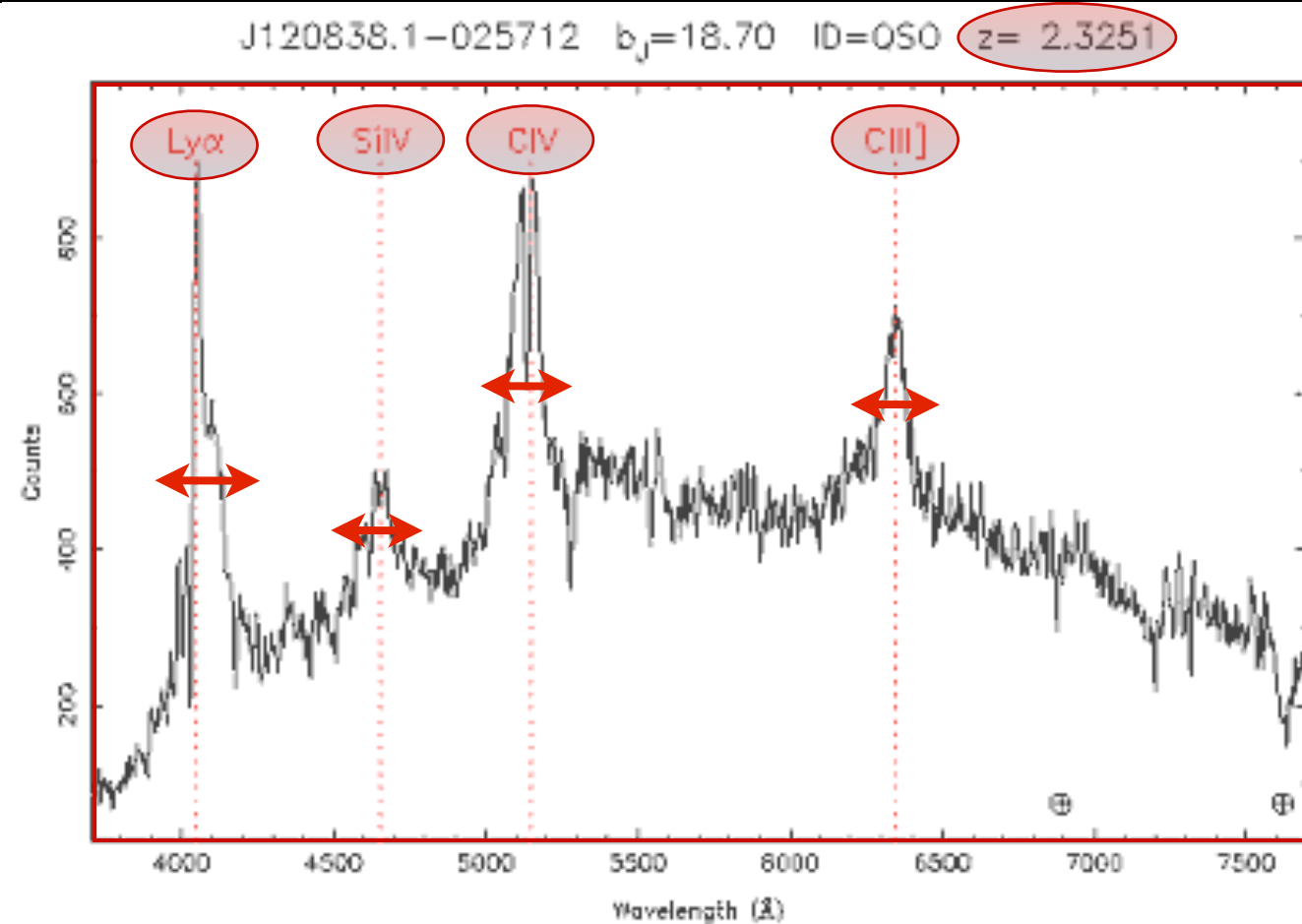
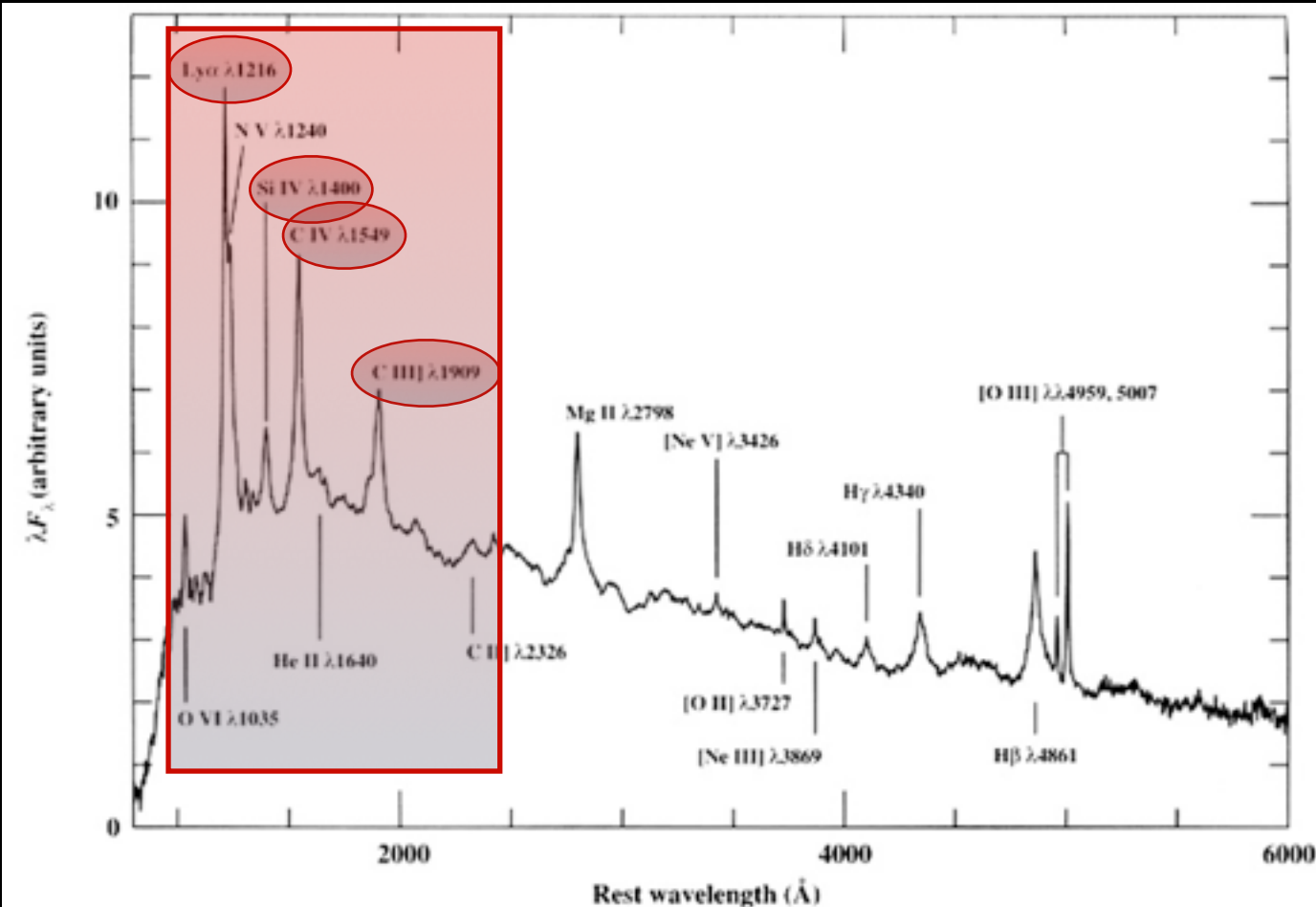
Introdução à Cosmologia Física

Outro exemplo: quasar ("quasi-stellar object")



Modelo (quasar típico, restframe)

Quasar verdadeiro (2dF survey)



O redshift cosmológico e o efeito Doppler se manifestam do mesmo modo!

Introdução à Cosmologia Física

Uma outra derivação do redshift

T, X : coordenadas do raio de luz
 E, p a menos de uma const. arb. " E_0 "

Como a luz é uma geodésica nula, temos: $l^\mu = (E = h\nu, \vec{p})$ $E = \frac{dT}{d\tau}$, $\vec{p} = \frac{d\vec{X}}{d\tau}$

com: $l^\mu l_\mu = g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = 0 \Rightarrow E = \frac{a p}{1 + \frac{k}{4} X^2}$

Vamos usar as coordenadas conformes-Cartesianas, e assumir que a luz se propaga na direção radial X :

$$\frac{dl^0}{d\tau} + \Gamma_{ij}^0 l^i l^j = 0 \Rightarrow \frac{dE}{d\tau} + \frac{da}{dT} a \frac{1}{1 + \frac{k}{4} X^2} p^2 = 0$$

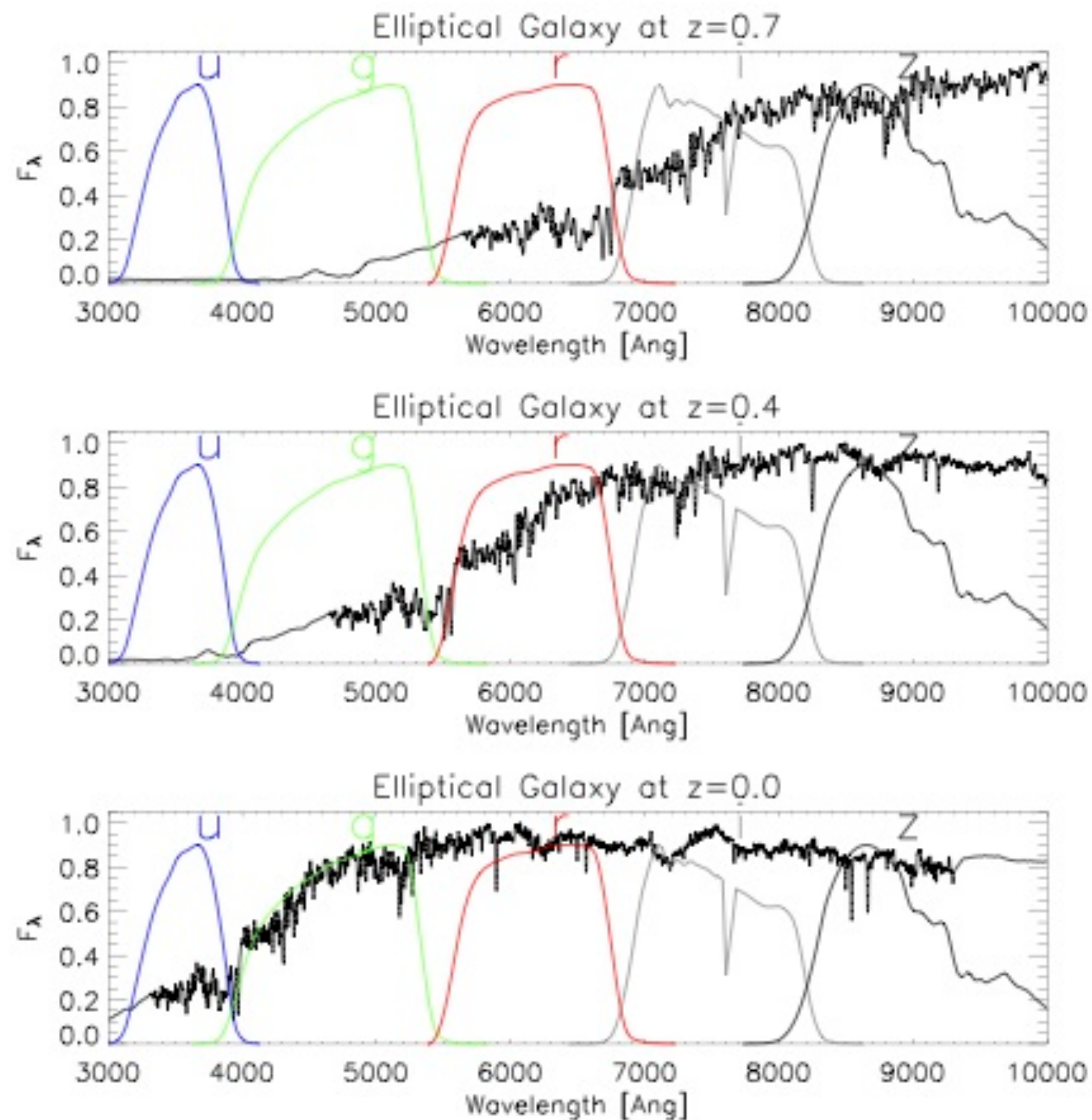
$$\Rightarrow \frac{dE}{d\tau} + \frac{da}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} a \frac{1}{1 + \frac{k}{4} X^2} p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{d\tau} + \frac{da}{d\tau} \frac{1}{E} \frac{1}{a} E^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{da} + \frac{E}{a} = 0 \Rightarrow E \sim \frac{1}{a}$$

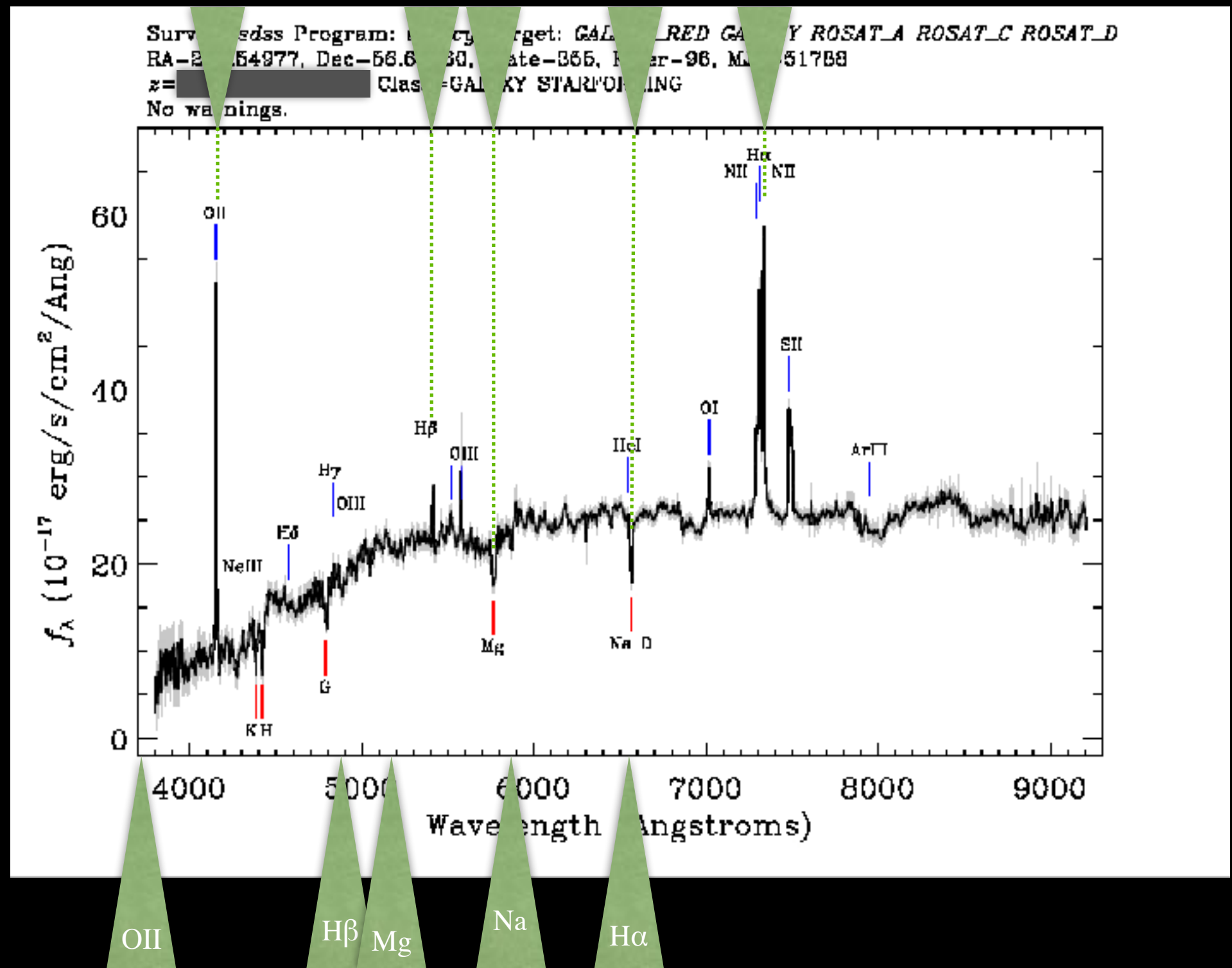
$$\begin{aligned} \nu &\sim \frac{1}{a} \\ \lambda &\sim a \end{aligned}$$

Introdução à Cosmologia Física



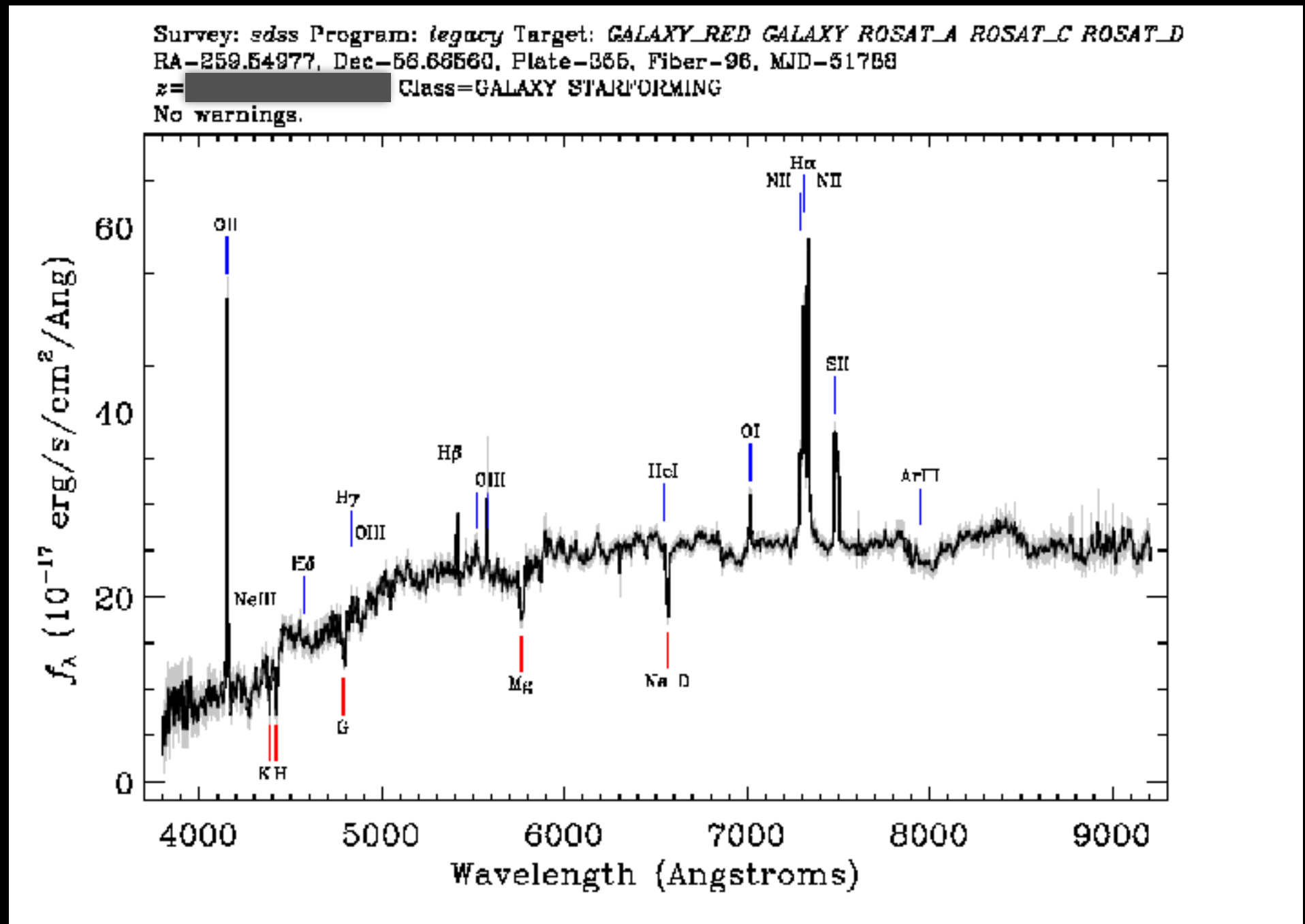
Introdução à Cosmologia Física

Linhas (Lab), Å:
OII : 3727 / 3730
H β : 4863
Mg : 5177
Na : 5896
H α : 6565



Introdução à Cosmologia Física

Linhas (Lab), Å:
OII : 3727 / 3730
H β : 4863
Mg : 5177
Na : 5896
H α : 6565



Introdução à Cosmologia Física

Leituras para a próxima aula:

Ryden, Cap. 3.3, 3.4 e 4.1