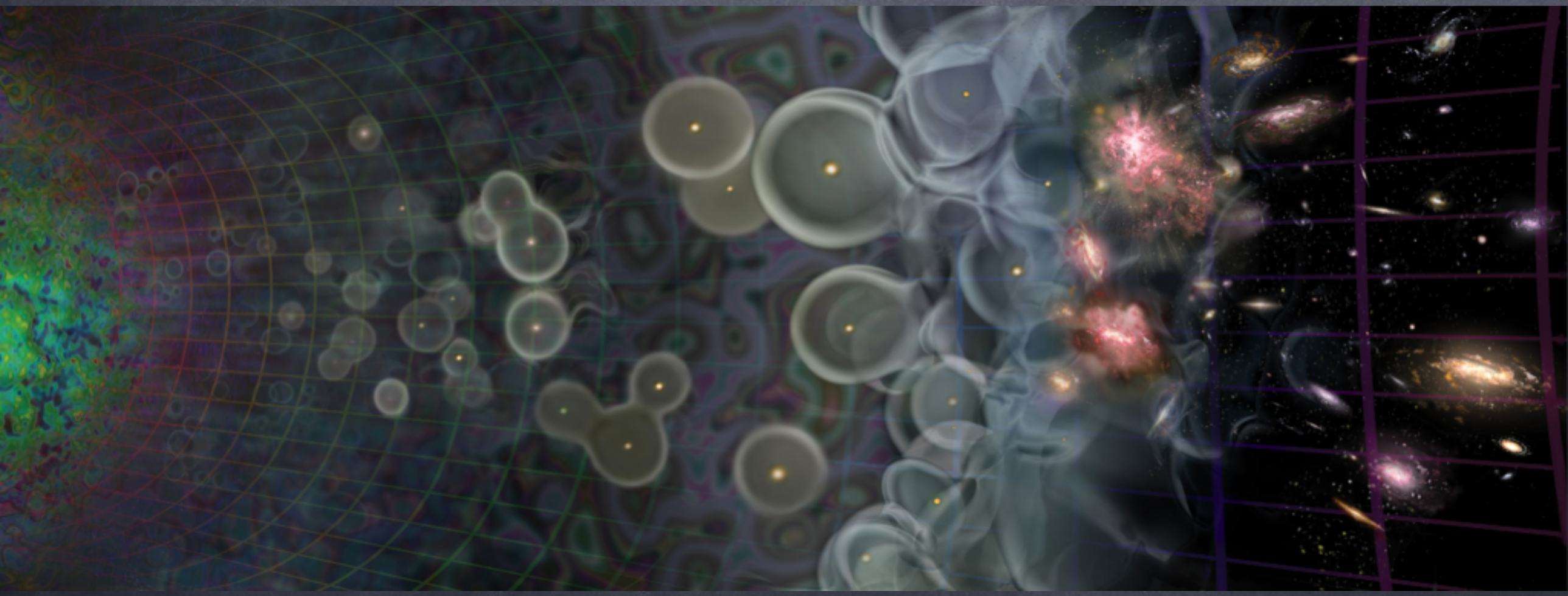
Introdução à Cosmologia Física



* 1a Lista de Exercícios - para 25/8 !

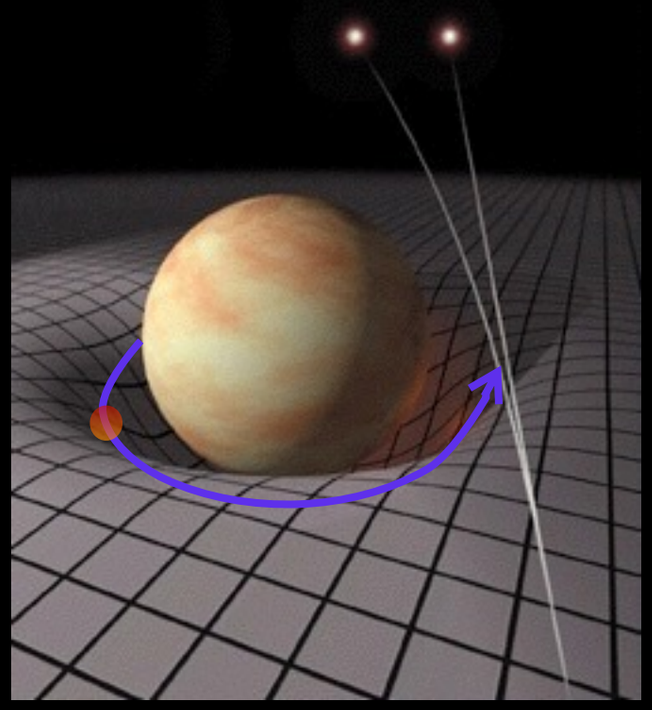
Hoje:

- A Relatividade Geral de Einstein
- As Equações de Einstein
- Buracos Negros
- A métrica FLRW e as Equações de Friedmann
- Cinemática em espaços-tempo FLRW

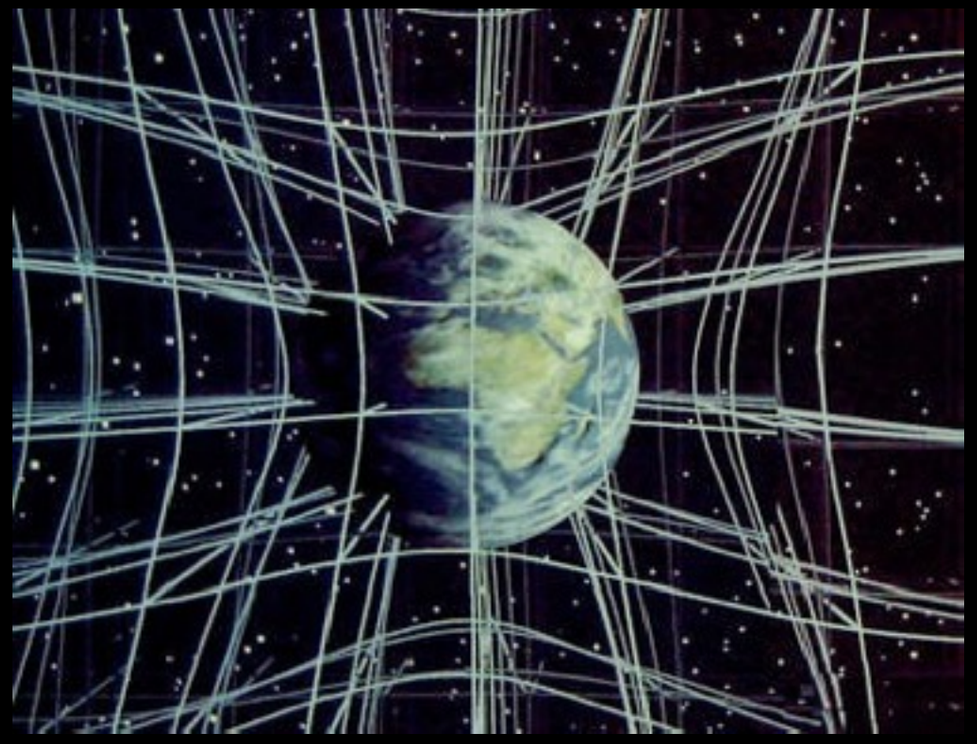
Nas teorias "covariantes" da gravidade (p. ex., a Relatividade Geral), a **gravidade** é uma manifestação da **curvatura do espaço-tempo**

Nessas teorias, a **métrica** do espaço-tempo (i.e., sua **geometria**) tem dois papéis:

ela **determina** a trajetória da matéria...



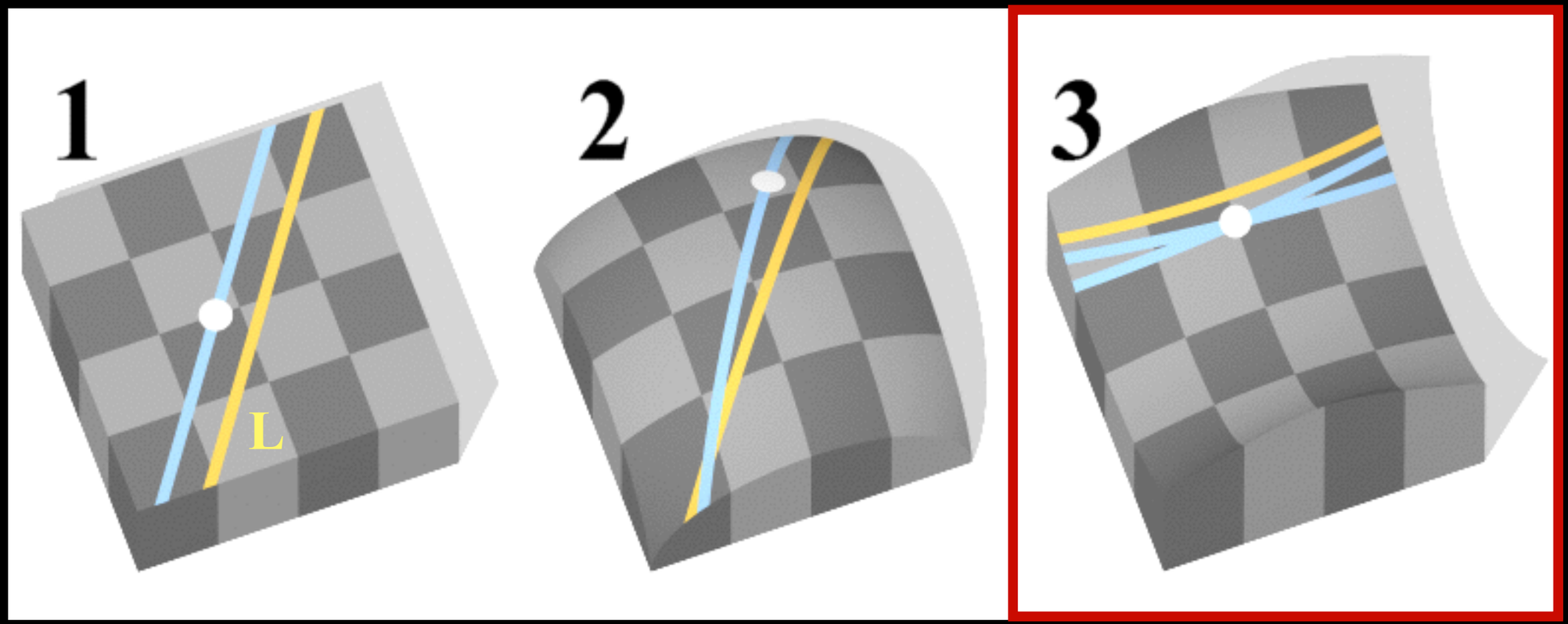
...e é **curvada** pela matéria



- O que significa uma "geometria" do espaço-tempo?
- O que determina essa geometria?
- Como podemos fazer medidas que testam essa teoria?

Introdução à Cosmologia Física - Aulas 5 e 6

Lobachevski mostrou que existem espaços "curvos", infinitos, onde existem **muitas linhas por P:**



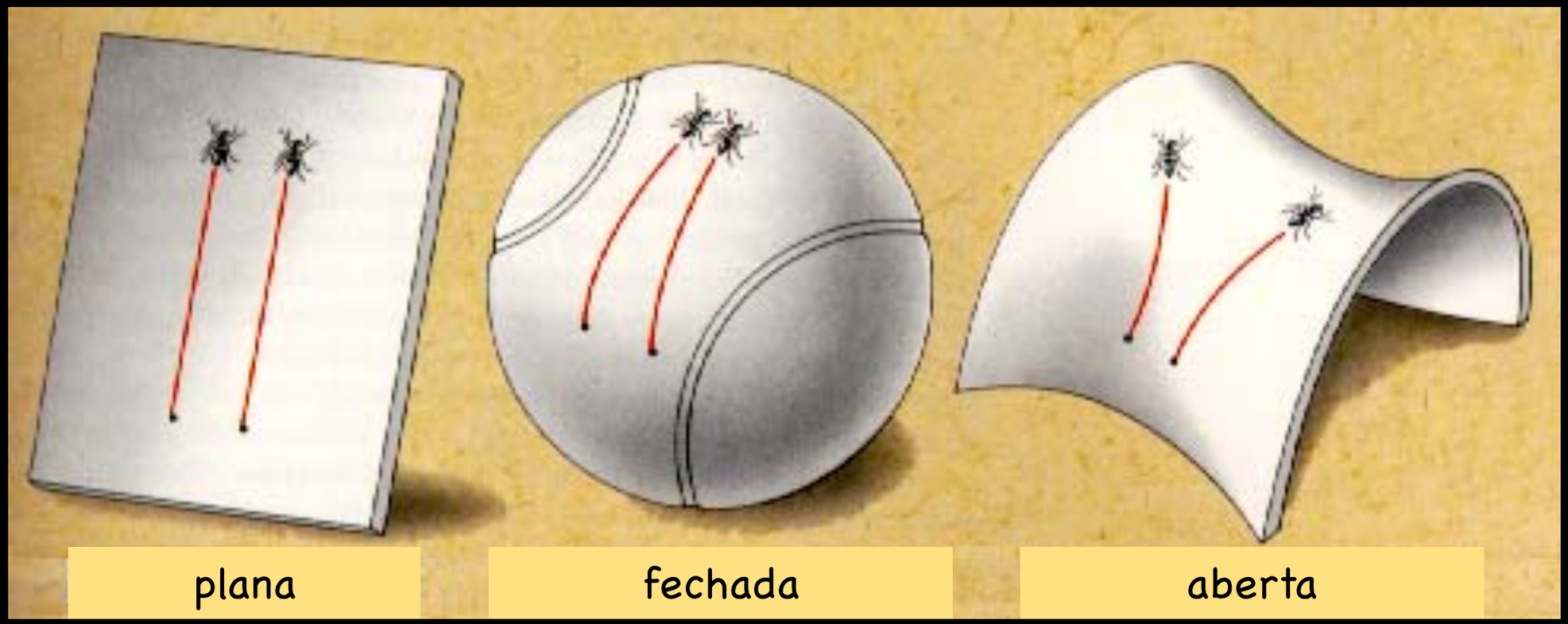
Espaço de Gauss-Lobachesvki -Bolyai

1. Plano, infinito (Euclidean)

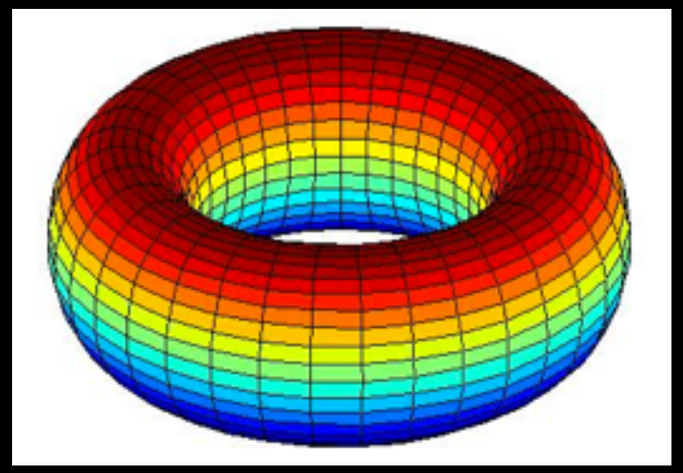
2. Curvo, finito (fechado/elíptico)

3. Curvo, infinito (aberto/hiperbólico)

Visão "global" das geometrias **plana** (**curvatura nula**), **fechada** (**curvatura positiva**) e **aberta** (**curvatura negativa**):



Um aspecto crucial dessas geometrias é que **todos** os **pontos** desses espaços são **equivalentes**. Ou seja, não há **nenhuma posição privilegiada**, nem **nenhuma direção privilegiada**. Isso não é necessariamente verdade em outras geometrias, p. ex.:



Introdução à Cosmologia Física - Aulas 5 e 6

Espaços **planos** (Euclideanos), **fechados** (i.e., esféricos) e **abertos** (GLB) são as **únicas variedades** que satisfazem um princípio simples: elas são **homogêneas** e **isotrópicas**.

Homogeneidade: o espaço tem as mesmas propriedades em todo lugar

Isotropia: todas as direções do espaço são equivalentes

Homogeneidade sem isotropia

Isotropia sem homogeneidade

Princípio cosmológico: o espaço é o mesmo em todo lugar, e em todas as direções

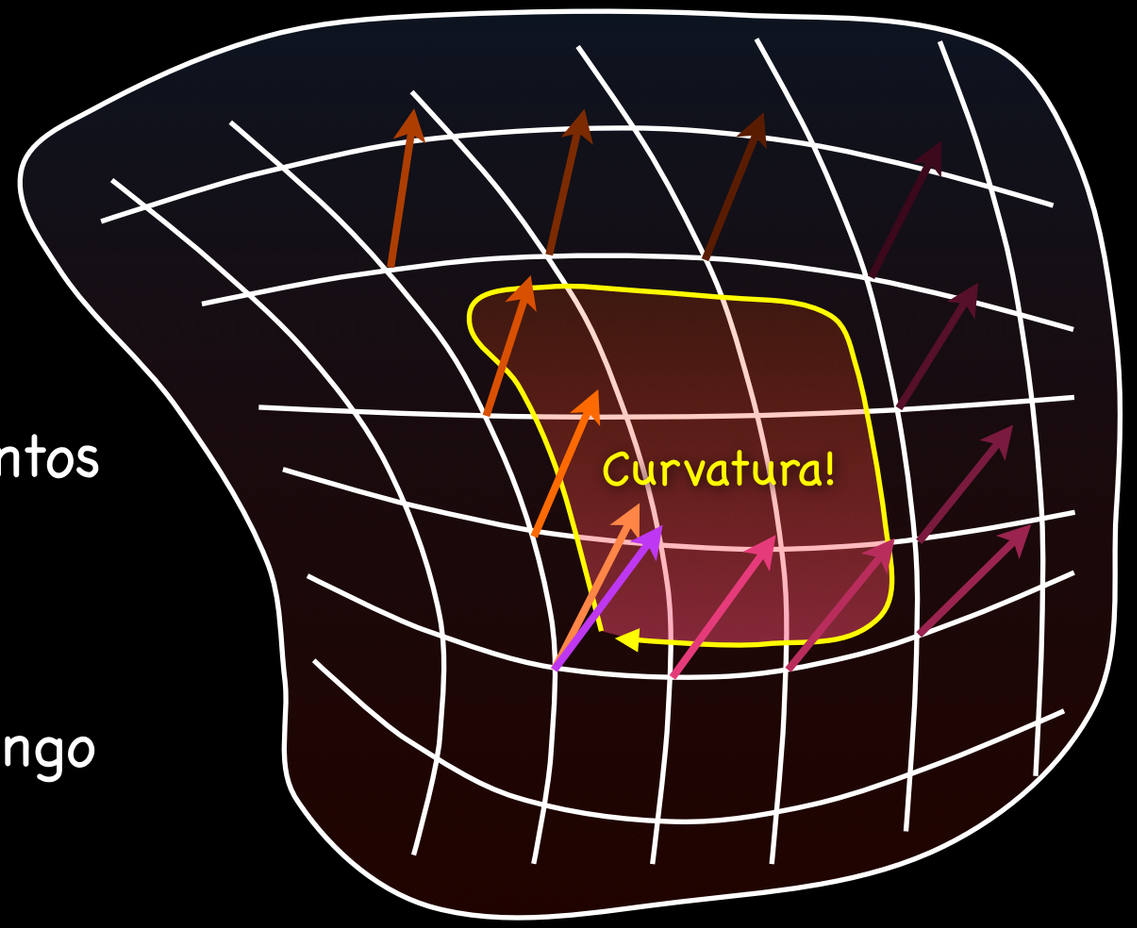
* Ehlers, Gehren & Sachs (1968): se todos os observadores inerciais medirem as mesmas propriedades da **matéria** (p. ex., a radiação cósmica de fundo), então o universo é homogêneo e isotrópico.

Introdução à Cosmologia Física - Aulas 5 e 6

O espaço de Lobachevski foi uma das motivações para **Georg B. Riemann**, em 1854, propor sua visão global da **Geometria como o estudo das variedades com qualquer número de dimensões, em qualquer tipo de espaço.**

Essas geometrias são **essencialmente não-Euclideanas**: as **distâncias** entre dois pontos são dadas em termos de uma **métrica**, que é uma **função diferenciável qualquer**:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$



A métrica tem um **papel dual**:

i) ela serve para **medir a distância** entre dois pontos quaisquer; e

ii) ela determina (pelas **conexões afins**) como se deve **transportar quantidades geométricas** ao longo de um caminho suave na variedade - p. ex.:

aceleração

$$\frac{d\,V_\mu}{d\lambda} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{d\,x^\nu}{d\lambda} V_\alpha$$

$$\Delta\, V_\mu = \frac{1}{2} R^\alpha_{\ \beta\mu\nu} V_\alpha \oint dx^\mu x^\nu$$

Introdução à Cosmologia Física - Aulas 5 e 6

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial\, g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial\, g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right)$$

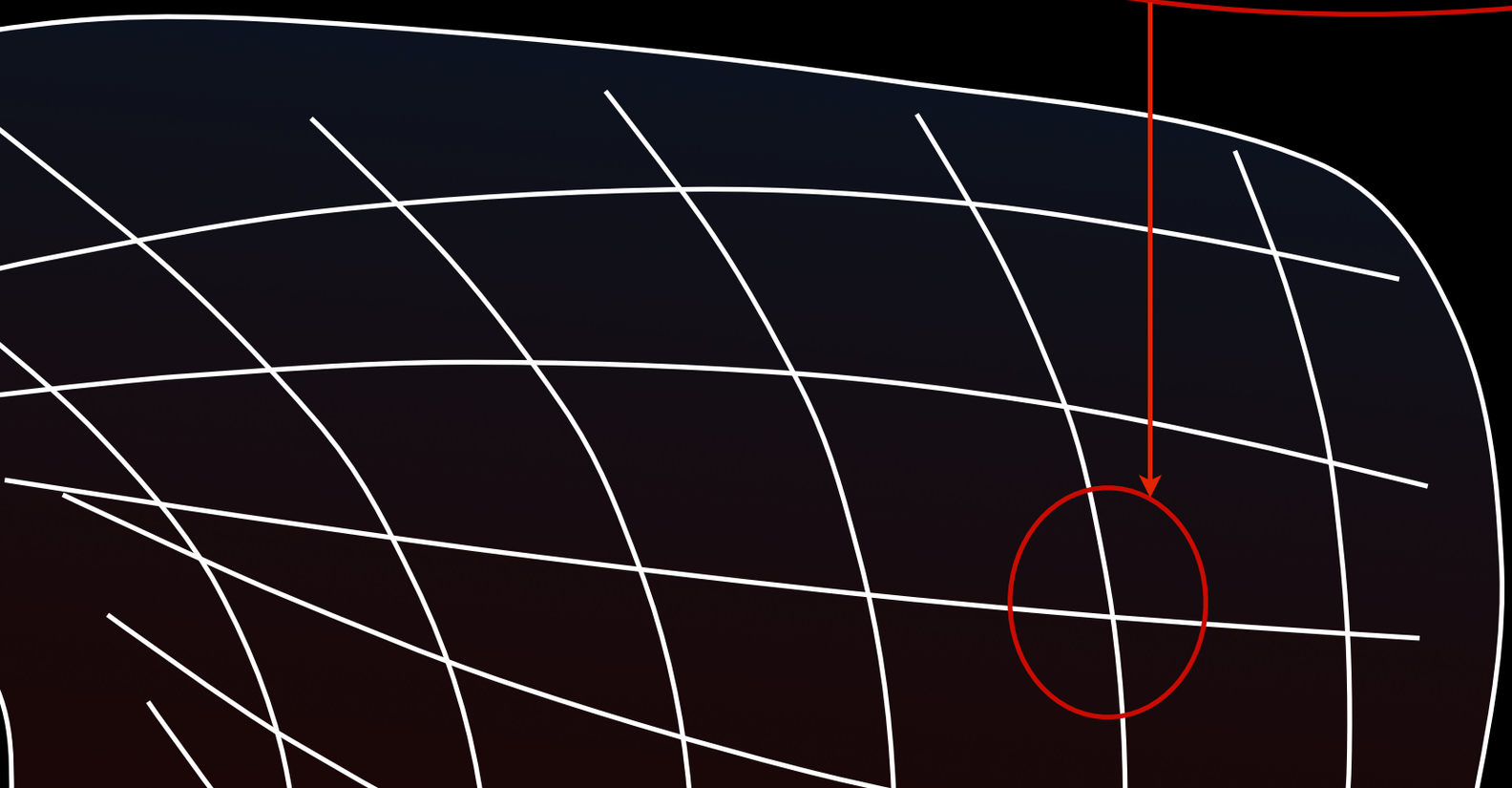
$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}$$

$$\frac{D\, V^{\alpha}}{D\, x^{\beta}} = V^{\alpha}_{\,;\beta} = \frac{\partial\, V^{\alpha}}{\partial\, x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} V^{\mu}$$

$$\frac{D\, V_{\alpha}}{D\, x^{\beta}} = V_{\alpha\,;\,\beta} = \frac{\partial\, V_{\alpha}}{\partial\, x^{\beta}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} V_{\mu}$$

A **liberdade de escolha das coordenadas** implica que, em qualquer ponto, podemos sempre usar o **Elevador de Einstein,** ir para um sistema no qual é métrica é, **localmente, aquela de Minkowski**, e assim fazer com que as **conexões se anulem**:

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu} \;,\quad \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \to 0$$



Entretanto, se o espaço é **curvo**, as **derivadas** das conexões não podem também se anular...

$$\partial_{\beta}\, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \neq 0 \quad !$$

Portanto, nunca podemos "anular" a curvatura!

Introdução à Cosmologia Física - Aulas 5 e 6

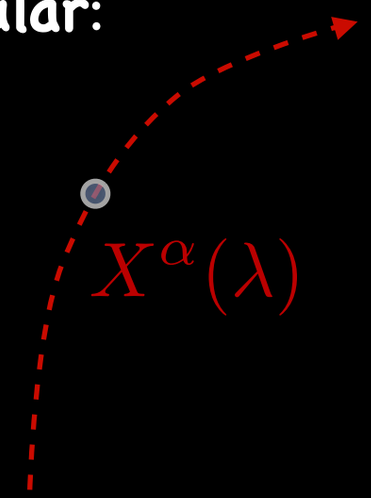
Agora, suponha que nos é dado um espaço com uma determinada métrica.

O que define um referencial em "queda livre" (inercial) em algum lugar desse espaço?

➟ A **aceleração** em trajetórias que passam por aquele lugar deve **se anular**:

$$\frac{D^2 X^\alpha}{D\lambda^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 X^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\lambda} \frac{dX^\nu}{d\lambda} = 0$$

Equação da geodésica



Note que a equação da geodésica determina tanto as coordenadas **espaciais e temporais** do observador inercial

➟ "Tempo próprio" é o $X^0 = \tau$ ao longo da geodésica!

Limite Newtoniano

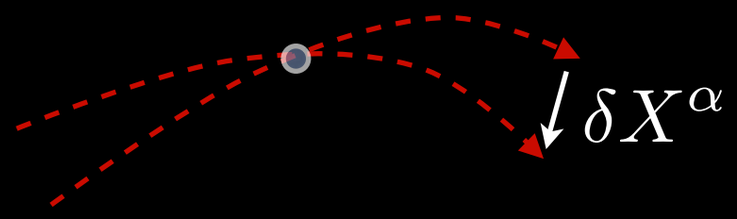
Pequenas velocidades... $\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \approx \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{00} \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0$

$g_{00} = 1 - 2\phi$

Métrica estática, quase Minkowski... $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \to \Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^i g_{00} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla^i g_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \\ \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \end{cases}$

1

Podemos também perguntar como duas geodésicas que passam pelo mesmo ponto se desviam uma da outra:



$$\frac{D^2\,\delta X^\alpha}{D\tau^2} = R^\alpha_{\ \beta\mu\nu}\,\delta X^\mu\,\frac{dX^\beta}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau}$$

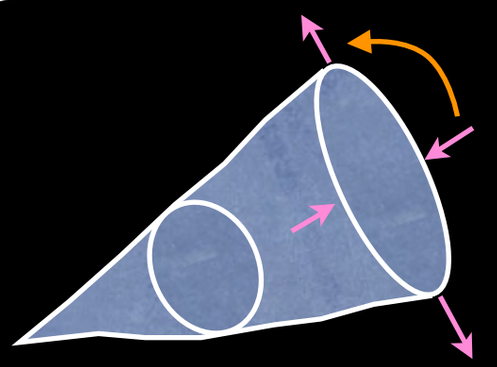
Esta é a **equação do desvio geodésico**. (Relacionada com a **Equação de Raychaudhuri.)**
Seja $u(\tau)$ uma geodésica do tipo-tempo, $u^\mu u_\mu$=-1 , e sua 4-divergência:

$$\theta = D_\mu u^\mu = u^\mu_{\ ;\mu}$$

Essa divergência obedece a Equação de Raychaudhuri:

$$\frac{d\,\theta}{d\,\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$$

$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\ \mu\alpha\nu}$



onde o tensor de rotação é: $\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(u_{\mu;\nu} - u_{\nu;\mu}\right)$

e o tensor de cisalhamento é: $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu}\right) - \frac{1}{3}\theta(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu)$

Introdução à Cosmologia Física - Aulas 5 e 6

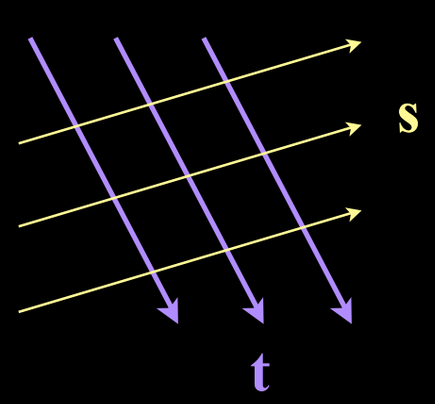
Problema #1

Seja u uma curva geodésica. Mostre que: $u^\mu \, u_{\nu \, ; \, \mu} = 0$

Problema #2

Seja $u(t,s)$ uma família de geodésicas, e $v(t,s)$ o vetor de desvio para essa família:

$$u^\mu = \frac{dX^\mu(t,s)}{dt} \quad , \quad v^\mu = \frac{dX^\mu(t,s)}{ds}$$



Isso implica que: $[u,v]^\mu = u^\nu v^\mu_{;\nu} - v^\nu u^\mu_{;\nu} = 0$

Use isso para calcular a aceleração de v no tempo t:

$$\frac{D^2 v^\mu}{D\, t^2} = u^\alpha D_\alpha (u^\beta D_\beta \, v^\mu)$$

e derive a equação do desvio geodésico.

(N.B.: aqui t é apenas um parâmetro, e **não** x^0 !)

Introdução à Cosmologia Física - Aulas 5 e 6

Problema #3

Tome uma geodésica tipo-tempo, $U^\mu U_\mu = -1$, num espaço-tempo de métrica $g_{\mu\nu}$.

Mostre que $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu$ é a métrica genuína das **hipersuperfícies do tipo-espaço,** definidas por essa geodésica - e que $h_{\mu\nu}$ é um **operador de projeção** nesse sub-espaço.

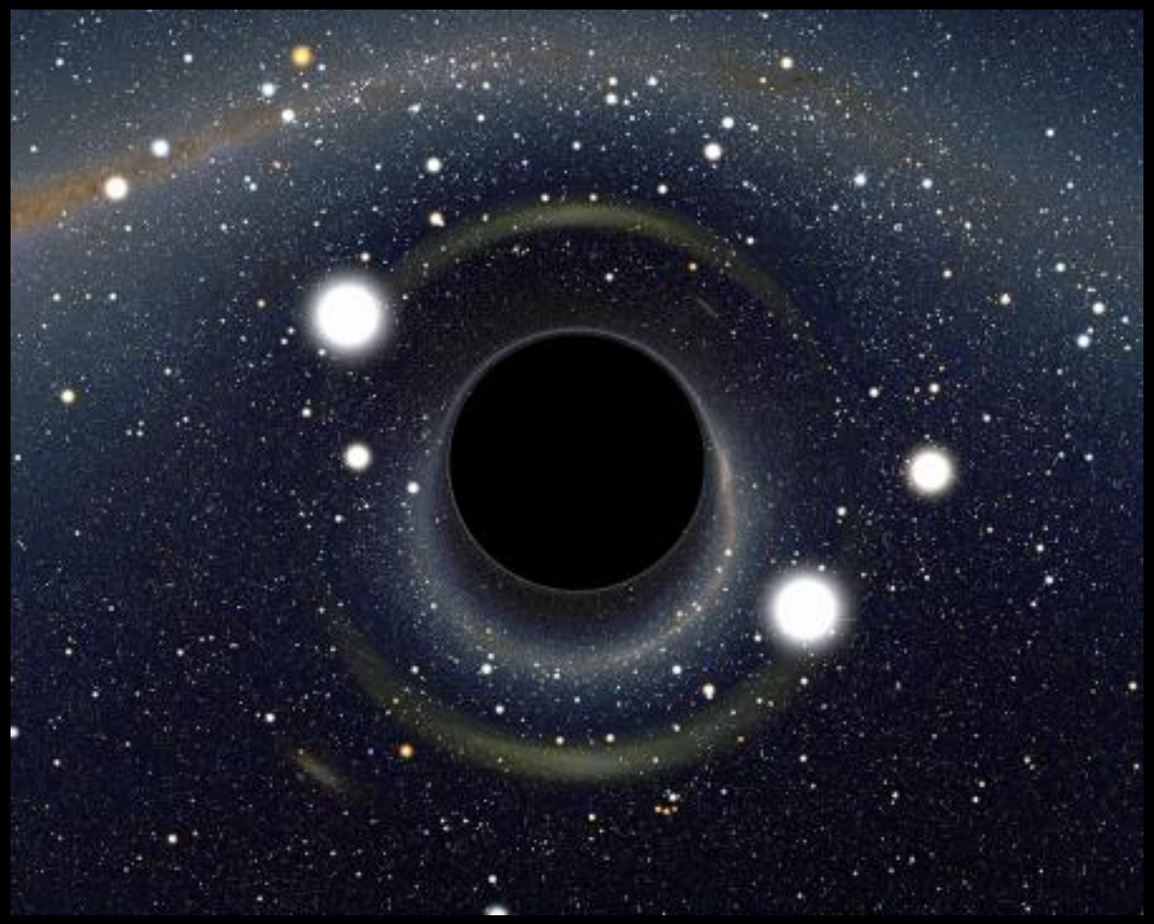
Problema #4

(a) Resolva a Equação de Raychaudhuri para θ, supondo $\omega=\sigma=R=0$. - i.e., Minkowski.

(b) Mostre que a família de geodésicas tipo-tempo $U^\mu=\gamma(v)[1, v]$, com $v = r/t$, são soluções para o θ calculado no item (a)

(c) Qual a interpretação de θ? Ele é bem definido para qualquer r e qualquer t ?

Buracos negros



Leitura adicional sugerida (divulgação científica):

Kip S. Thorne, "Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy"

Isaac Asimov, "O colapso do universo"

Buracos negros

Segundo Newton, a aceleração da gravidade da Terra é: $g_1 = \frac{GM}{r_1^2} \simeq 10\ m/s^2$

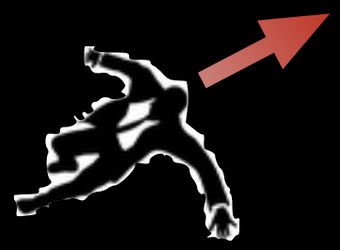
É mais interessante calcular o potencial:

$$\phi_1 = \frac{GM}{r_1} \simeq \left(8,2 \times 10^3\ m/s\right)^2$$

Agora imagine que toda a massa da Terra fosse compactada no tamanho de uma bolinha de gude.

Aí o potencial gravitacional na vizinhança da bolinha seria:

$$\phi_2 \simeq \left(2.8 \times 10^8\ m/s\right)^2$$



Buracos negros

Na Relatividade Geral, uma massa M "pontual" gera uma **métrica** do espaço-tempo conhecida como **Métrica de Schwarzschild** (1916):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r\,c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r\,c^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

c=1 (unidades "naturais")

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

O que acontece quando temos uma grande massa concentrada em um volume muito pequeno, menor que o **Raio de Schwarzschild**?

$$R_s = \frac{2\,G\,M}{c^2} \rightarrow 2\,G\,M$$

Introdução à Cosmologia Física - Aulas 5 e 6

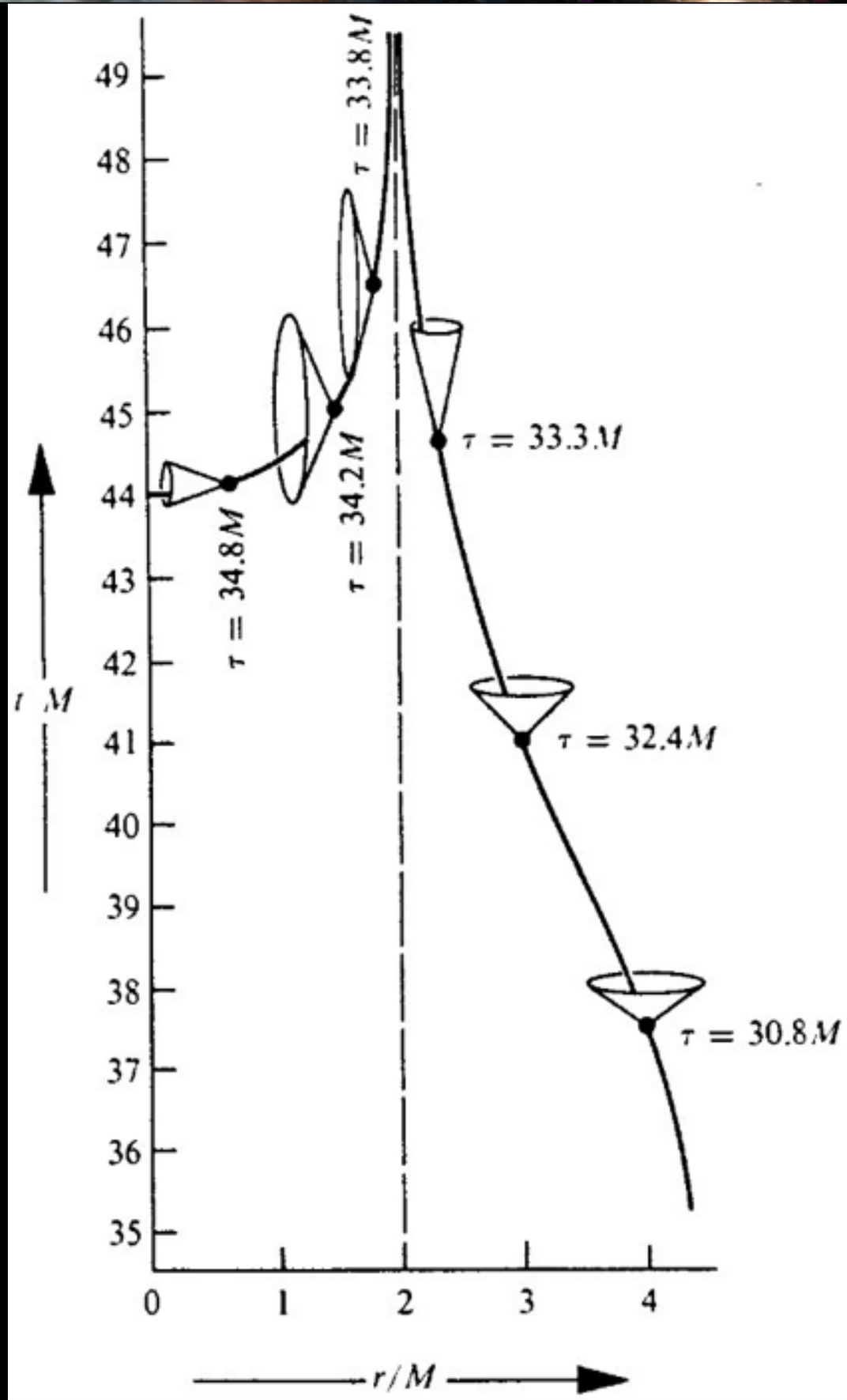
Vamos primeiro examinar o que acontece com o **cone de luz futuro** no espaço-tempo de Schwarzschild.

Fora do Raio de Schwarzschild, temos a situação usual: o cone de luz futuro aponta para... o futuro! (Ou seja, na direção de t crescendo.)

Porém, **dentro** do Raio de Schwarzschild o cone de luz futuro aponta na direção radial! Ou seja, o futuro de qualquer partícula, de qualquer corpo material, não importa as suas "particularidades", aponta para o ponto r=0 (onde está a massa M).

Em outras palavras: uma vez dentro do buraco negro, não há saída — nem para a luz!

No ponto r=0 a curvatura do espaço-tempo é infinita, e temos o que é conhecido como **singularidade**.



Introdução à Cosmologia Física - Aulas 5 e 6

Agora vamos ver o que acontece com as **trajetórias** de massas-teste no espaço-tempo de Schwarschild.

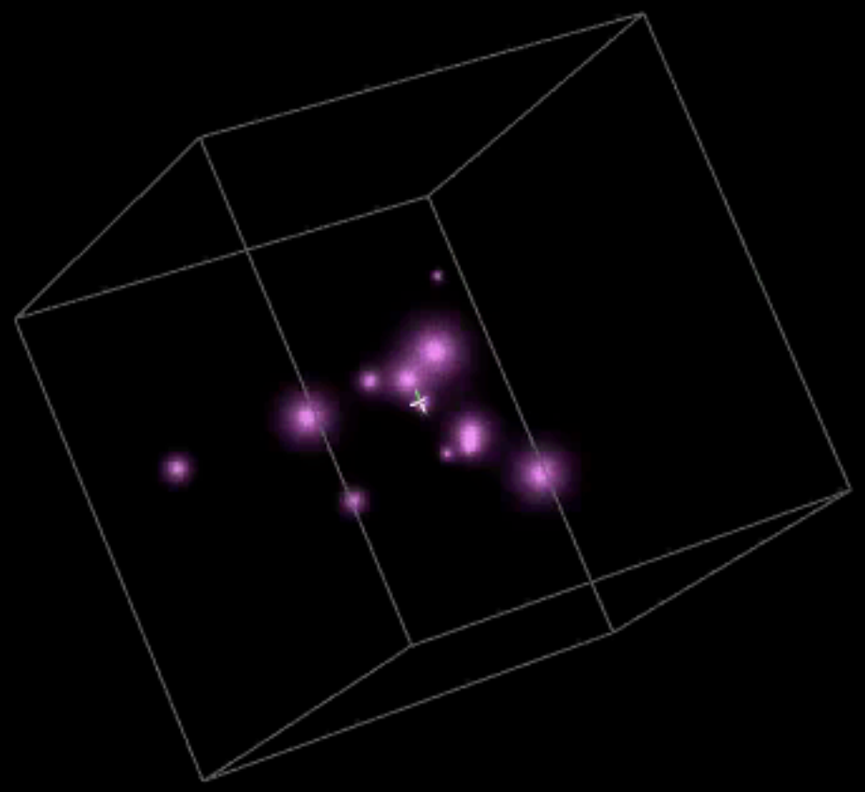
Lembre-se: é **trivial** (mesmo!) calcular as trajetórias, dada uma métrica — basta utilizar a **Equação da Geodésica**!

Notebook Mathematica...

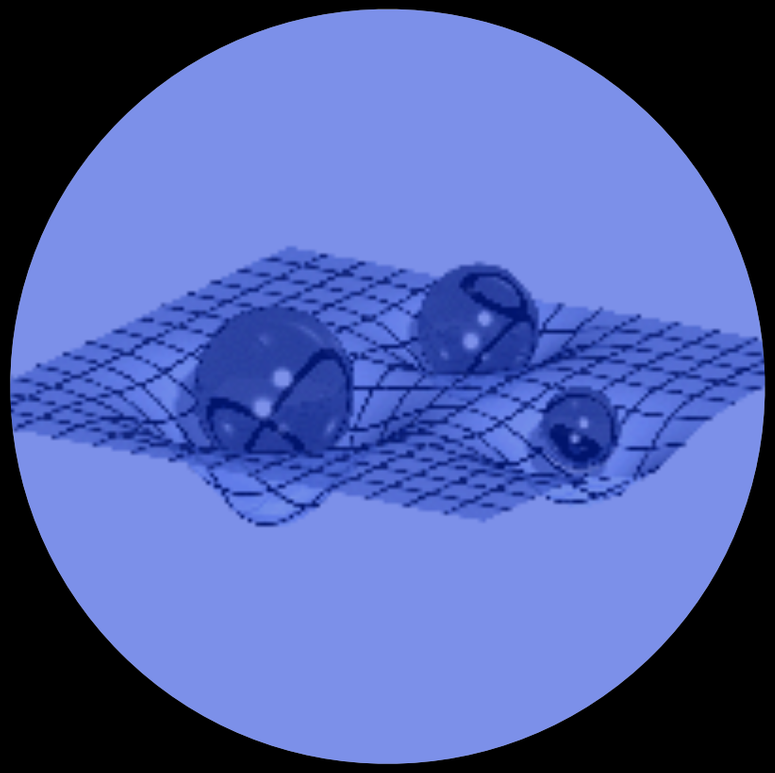
Introdução à Cosmologia Física - Aulas 5 e 6

Buracos negros existem - e eles estão mais próximos do que você imagina!!!

$$M \simeq 4.1 \times 10^6 M_\odot$$

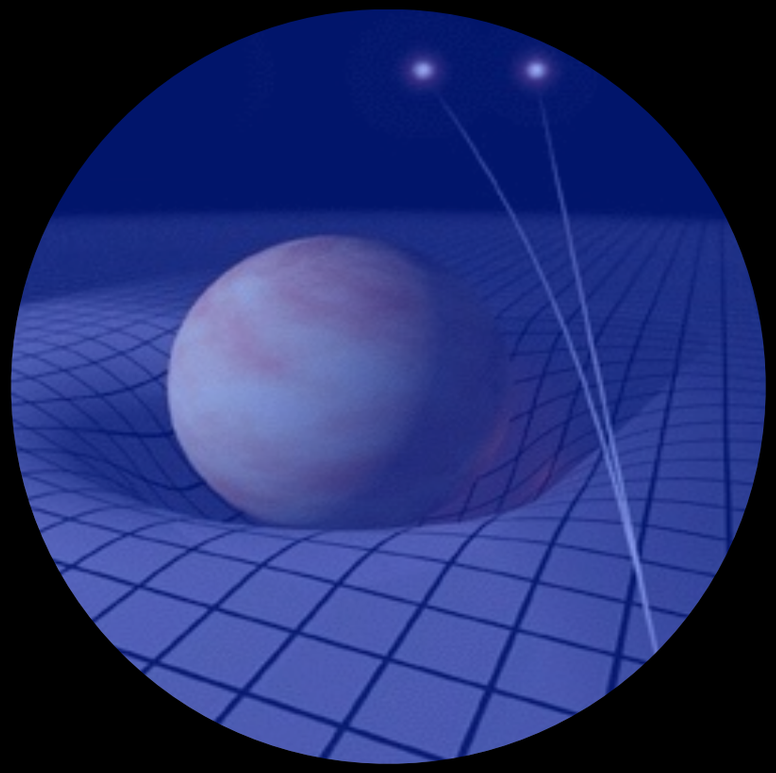


20/Agosto: as Equações de Einstein



A matéria curva o espaço, determinando a métrica...

... e a métrica determina a cinemática da matéria...



Matéria e métrica determinam em conjunto a **dinâmica**

Matéria e gravidade têm que funcionar dentro de uma **dinâmica consistente**

➟ **Simetrias básicas implicam em leis de conservação (Teorema de Noether)**

Simetrias e leis de conservação

Invariância sob translações/reparametrizações do **tempo** ➟ Conservação de **energia**

Invariância sob translações/reparametrizações do **espaço** ➟ Conservação de **momento**

Invariância sob **rotações** ➟ Conservação de **momento angular**

Mas e quanto aos **boosts** (rotações t-x)? Eles também são simetrias...

Além disso, elas misturam energia e momento! $P^\mu = mU^\mu \quad , \quad P'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} P^\alpha$

Conservação de momento para partículas pontuais (não-relativ.):

$$t \to t + \delta t$$
$$q \to q + \dot{q}\,\delta t$$
$$\dot{q} \to \dot{q} + \ddot{q}\delta t + \dot{q}\delta\dot{t}$$

$$S = \int dt\, L(q,\dot{q}) \qquad , \qquad L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$$

$$\delta S = \int dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right] = \int dt \left[\dot{q}(\ddot{q}\,\delta t + \dot{q}\,\delta\dot{t}) - \frac{dV}{dq}\dot{q}\,\delta t\right]$$

$$\delta S_i^f = [\dot{q}^2\delta t]_i^f - \int_i^f dt\, \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{q}^2 + V(q)\right]\delta t = 0$$

Energia = "carga" conservada

$t \to t + \delta t$: simetria "global"

Simetria de gauge (local) das teorias covariantes: transformações de coordenadas

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$$

Sob uma transformação de coordenadas, a **métrica muda como**:

$$g^{\mu\nu} \to g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\, g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} + \underbrace{\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}}_{\delta g^{\mu\nu}} + \mathcal{O}(\xi^2)$$

Em particular, se a **métrica é invariante** sob uma tal transformação, então ξ é um **vetor de Killing** (uma direção associada com alguma simetria).

Problema #5

Tome o espaço 3-dimensional de curvatura constante (GLB) em coordenadas esféricas:

$$d\Sigma_3^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2$$

Quantos vetores de Killing existem nesse espaço? Quais os seus significados?

Introdução à Cosmologia Física - Aulas 5 e 6

A **dinâmica** da matéria deveria ser independente do sistema de coordenadas, e portanto a **ação da matéria** deveria ser **invariante** sob uma transformação de coordenadas:

$$V^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,V^\mu\right)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{V}} d^4x\,\sqrt{-g}\,V^{\mu}_{;\mu} = \left(\sqrt{-g}\,V^\mu \mathcal{N}_\mu\right)_{\mathcal{N}_\mu:\mathcal{S}(\mathcal{V})}$$

$$S_m = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m$$

É OK assumir que isso se anula. Mas por quê?...

$$\delta_\xi S_m = \int d^4x\,\left[\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}\,\partial_\alpha \delta g^{\mu\nu}\right]$$

$$\delta_\xi S_m = \int d^4x\,\frac{\sqrt{-g}}{2}\,T_{\mu\nu}(\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}) = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\xi_{\mu;\nu}$$

Mas como: $T^{\mu\nu}\xi_{\mu;\nu} = (T^{\mu\nu}\xi_\mu)_{;\nu} - T^{\mu\nu}_{\;\;;\nu}\xi_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\xi_\mu\right) - T^{\mu\nu}_{\;\;;\nu}\xi_\mu$

$$\delta_\xi S_m = \int d^4x\,\left[\partial_\nu\left(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\xi_\mu\right) - T^{\mu\nu}_{\;\;;\nu}\xi_\mu\right] \to 0$$

Então, temos as leis de **conservação**: $T^{\mu\nu}_{\;\;;\nu} = 0$

$T_{\mu\nu}$:

- Energia
- Momento
- Estresses/fluxos de energia

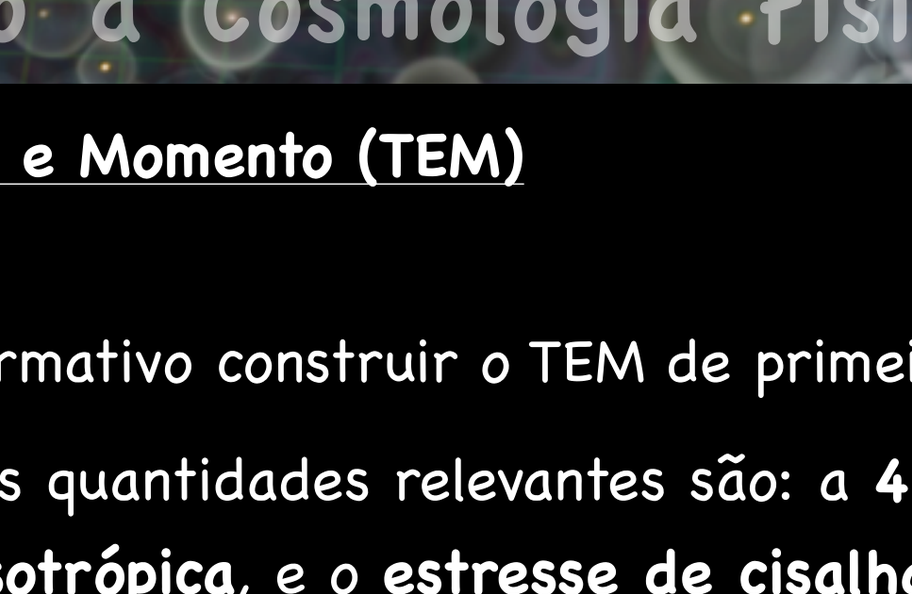
O Tensor de Energia e Momento (TEM)

Em geral, é mais informativo construir o TEM de primeiros princípios.

Num meio contínuo, as quantidades relevantes são: a **4-velocidade**, a **densidade de energia**, a **pressão isotrópica**, e o **estresse de cisalhamento**.

Considere um elemento de fluido:

U^μ - 4-velocidade: deslocamento do elemento de fluido



T_{ii} - pressão p: forças **normais** à superfície

T_{ij} - estresse σ_{ij}: forças **paralelas** à superfície

- Parte sim., traço nulo: **cisalhamento**
- Parte anti-simétrica: **estresse anisotrópico**

T_{0i} - fluxo de energia: fluxo de energia/momento através da superfície i

No espaço-tempo de **Minkowsky** um fluido em repouso, sem nenhum estresse, fica determinado completamente em termos de sua **densidade de energia** e **pressão**:

$$T^{00} = \rho \qquad T^{0i} = 0$$

$$T^{ij} = p\,\delta^{ij} \qquad U^{\mu} = (1,0,0,0)$$

Ou, em termos da 4-velocidade: $T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^{\mu}U^{\nu} + p\,\eta^{\mu\nu}$

Para um fluido em movimento basta substituir a 4-velocidade por:

$$U^{\mu} \to \gamma(v)(1,\vec{v})$$

Nós temos então que:

$$T^{00} = \gamma^2(\rho + p) - p = \frac{\rho + p\,v^2}{1 - v^2}$$

$$T^{0i} = \frac{\rho + p}{1 - v^2}\,v^i \qquad \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu 0} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho + p\,v^2}{1 - v^2} + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{(\rho + p)\,v^i}{1 - v^2}$$

$$T^{ij} = \frac{\rho + p}{1 - v^2}\,v^i\,v^j + p\delta^{ij}$$

No limite não-relativístico [i.e., jogamos fora termos $O(v^2)$], a conservação do TEM resulta na famosa **equação da continuidade**:

$$\partial_\mu T^{\mu 0} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho + p\,v^2}{1 - v^2} + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{(\rho + p)\,v^i}{1 - v^2}$$

Por quê é OK desprezar $\vec{\nabla}(\rho + p) \cdot \vec{v}$?

$$\simeq \dot{\rho} + \vec{\nabla}[(\rho + p)\,\vec{v}] \simeq \dot{\rho} + (\rho + p)\,\vec{\nabla}\,\vec{v}$$

Isso é também equivalente à **conservação de energia** que herdamos da Termodinâmica:

$$dE + p\,dV = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V}\frac{d(\rho V)}{dt} + p\,\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{d\rho}{dt} + (\rho + p)\,\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = 0$$

onde o volume muda de acordo com a divergência da velocidade: $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$

Conservação do TEM:

- **Conservação de energia**
- **Equação de Euler**

Introdução à Cosmologia Física - Aulas 5 e 6

Problema #6

(a) Um campo escalar tem uma Lagrangeana:

$$L = \sqrt{-g}\,\left[\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi\,-\,V(\phi)\right]$$

Encontre o seu TEM. Dica: $\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\,\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$

(b) Encontre a Equação de Klein-Gordon (a "equação de movimento" para o campo) como resultado da conservação do TEM.

(c) Encontre a Equação de Klein-Gordon através do princípio variacional em termos do próprio campo escalar.

(d) Você é capaz de escrever esse TEM em termos de um "fluido",

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\,U_\mu\,U_\nu + p\,g_{\mu\nu} \quad ?$$

Problema #7

(a) Tome como ponto de partida a Lagrangeana do Eletromagnetismo:

$$L_{EM} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \qquad , \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

Encontre o TEM do campo eletromagnético.

(b) Mostre que esse TEM é conservado devido às Equações de Maxwell (em espaços-tempo curvos).

(c) Mostre que, em 4D, o EM no vácuo é "conformemente invariante", i.e., as soluções das Equações de Maxwell são invariantes sob as transformações:

$$g_{\mu\nu} \to \bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$$

As Equações de Einstein, finalmente!

A conservação do TEM deve ter uma contrapartida do lado da métrica do espaço-tempo.

De fato, a ação de Einstein-Hilbert satisfaz esse vínculo, e temos que:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} + L_m \right] \quad \longrightarrow \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

Devido ao **Princípio Cosmológico**, em primeira aproximação os lados direito e esquerdo dessa equação devem ser **funções do tempo, apenas.**

Os únicos **parâmetros livres** dessa teoria são **constantes** no espaço e no tempo:

Métrica:

Curvatura espacial
Constante Cosmológica (Λ)

Matéria:

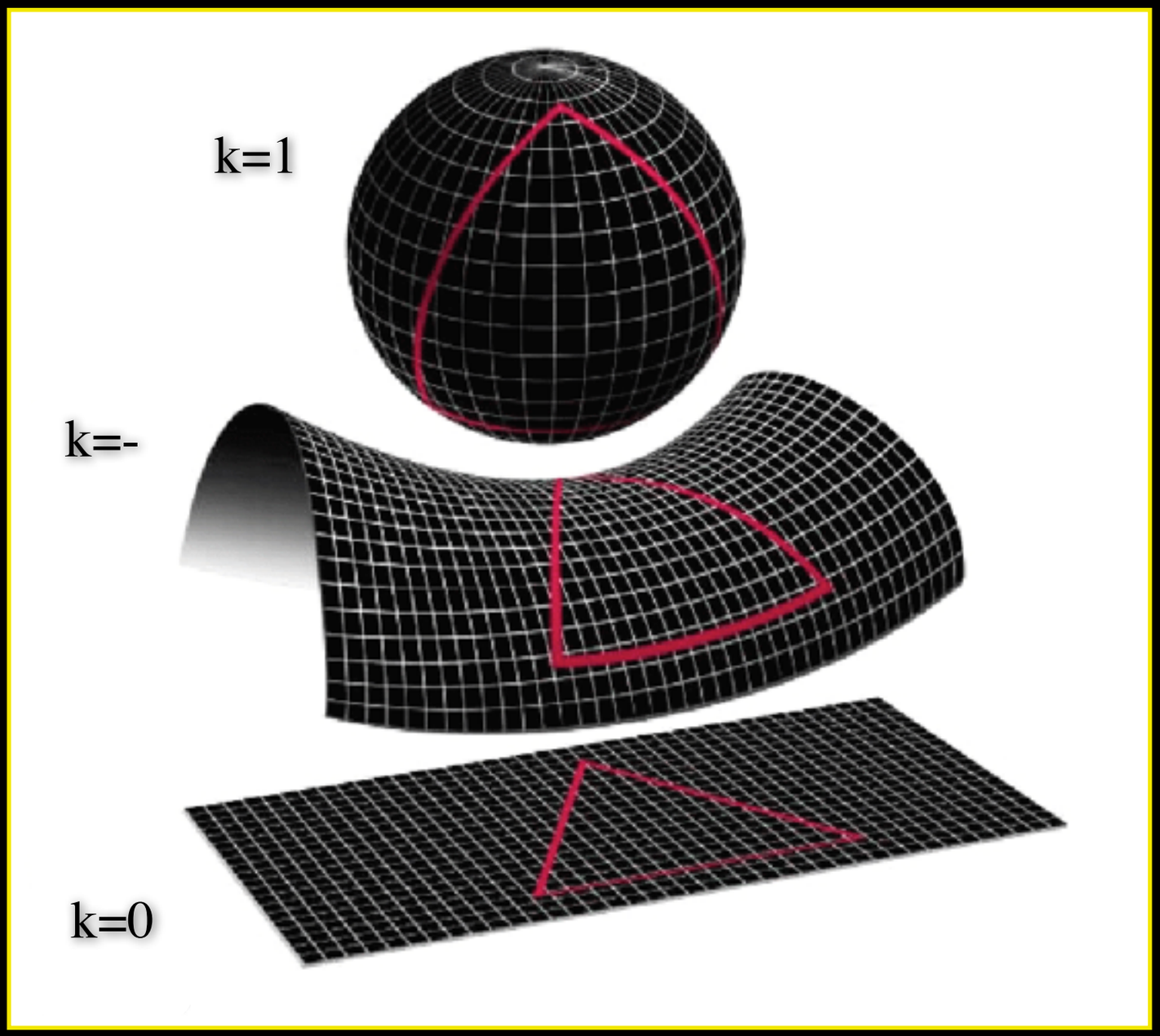
Massas
Constantes de acoplamento

A cinemática do universo: as equações de Friedmann

A. Friedmann (1922-24), G. Lemaitre (1927), H. P. Robertson (1935-36), A. G. Walker(1937)

Seções espaciais de curvatura constante: $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, d\Sigma^2$

Def.: $a(t_0)=1$



$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2$$

$(r/R_0)^2$

$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2$$

$(r/R_0)^2$

$$d\Sigma^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Alguns sistemas de coordenadas populares usados para expressar as seções espaciais de FLRW:

Coordenadas polares: $$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\, d\Omega^2$$

$k = \pm (R_0)^{-2}$

Coordenadas hiper-esféricas:

$$r = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\sqrt{k}\,\chi\right) \quad \Rightarrow \quad d\Sigma^2 = d\chi^2 + \frac{1}{k} \sin^2\left(\sqrt{k}\,\chi\right) d\Omega^2$$

Coordenadas conformes-Cartesianas:

$$r = \frac{R}{1+\frac{k}{4}R^2} \quad \Rightarrow \quad d\Sigma^2 = \frac{dR^2 + R^2 d\Omega^2}{(1+\frac{k}{4}R^2)^2}$$

Seções espaciais homogêneas e isotrópicas

A escolha mais comum é a segunda, já que em coordenadas hiper-esféricas as geodésicas radiais são triviais.

Problema #8

Mostre que a métrica das seções espaciais (3D) dos espaços-tempo FLRW em coordenadas conformes-Cartesianas,

$$d\Sigma^2 = \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j \quad , \quad \gamma_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{1}{4}\, k\, \vec{x}^{\,2}\right)^{-2}$$

possui um tensor de Riemann dado por:

$$R_{ijkl} = k\, (\gamma_{il}\gamma_{jk} - \gamma_{ik}\gamma_{jl})$$

Problema #9

O volume 3D é definido como: $$V = \int d^3x \sqrt{\det \gamma}$$

Qual é o volume da 3-esfera? Mostre que esse resultado se reduz ao usual no limite em que a curvatura espacial (k) é muito pequena.

Geodésicas nos espaços-tempos FLRW

Vamos tomar a métrica FLRW em coordenadas conformes-Cartesianas:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, d\Sigma^2$$

$$d\Sigma^2 = \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j \quad , \quad \gamma_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{1}{4}\, k\, \vec{x}^{\,2}\right)^{-2}$$

As conexões são: $\Gamma^0_{00} = \Gamma^i_{00} = \Gamma^0_{i0} = 0$

$$\Gamma^0_{ij} = \dot{a}\, a\, \gamma_{ij} \quad , \quad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\, \delta^i_j$$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{k}{4}\vec{x}^{\,2}}\right) \times \left(\delta_{ij} x^k - \delta_{ik} x^j - \delta_{jk} x^i\right)$$

Problema #10

Calcule o tensor de Riemann da métrica FLRW nesse sistema de coordenadas. Quantas componentes independentes tem esse tensor?

Uma partícula inicialmente em repouso nessas coordenadas tem uma 4-velocidade:

$$U_0^\mu = \left.\frac{dx^\mu}{d\tau}\right|_0 = (1,0,0,0)$$

A equação da geodésica é: $$\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 0$$

o que implica nas seguintes equações:

$$\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dU^0}{d\tau} + \Gamma^0_{ij}\, U^i U^j = 0$$

$$\mu = k \quad \rightarrow \quad \frac{dU^k}{d\tau} + 2\,\Gamma^k_{0i}\, U^0 U^i + \Gamma^k_{ij}\, U^i U^j = 0$$

A solução para essa equações é: $$U^\mu = U_0^\mu = (1,0,0,0)$$

Portanto, uma partícula em repouso em qualquer lugar desse espaço-tempo permanecerá em repouso, na mesma posição!

Esse é o significado prático (cinemático) de "homogeneidade e isotropia"!

Problema #11

Considere uma partícula se movendo com alguma velocidade initial "peculiar" v_0 :

$$U_0^\mu = \gamma(v_0)(1, \vec{v}_0)$$

Encontre a para a equação da geodésica neste caso. Faça aproximações se for absolutamente necessário. O que acontece ao longo do tempo com essa velocidade peculiar inicial? Ela aumenta ou decai?

Fim da Aula 5/6

Leituras para a próxima aula (25/8):

Ryden, Cap. 3.3, 3.4 e 4.1