

Apêndice G

Campo $\vec{B}$ de Solenóide Finito

Considere um solenóide de comprimento L e raio R , percorrido por uma corrente i , como na Fig. G.1. Vamos calcular o campo magnético B sobre o eixo y do solenóide usando a lei de Biot-Savart. Visualizamos o solenóide como um conjunto de N espiras de espessura Δy , tal que $N\Delta y = L$.

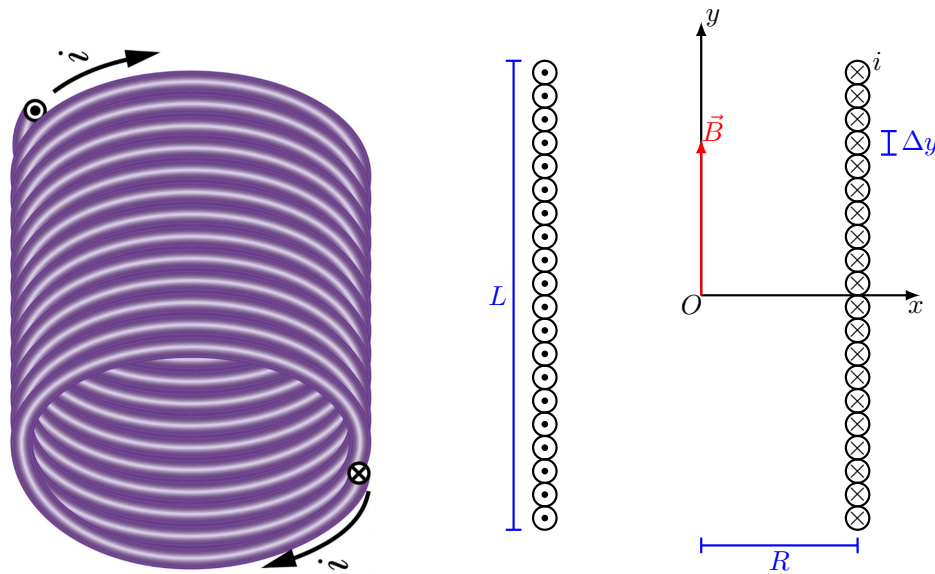


Figura G.1: Campo $\vec{B}$ sobre o eixo central y de um solenóide de comprimento L , raio R e corrente i percorrendo N espiras.

Sabemos que cada espira indexada por j e localizada na altura y'_j produz em um ponto y genérico do eixo um campo $\vec{B} = B\hat{y}$ (ver Seção 7.2.3), onde:

$$B(y, y'_j) = \frac{\mu_0 i R^2}{2[(y - y'_j)^2 + R^2]^{3/2}} \quad (\text{G.1})$$

O campo magnético total é obtido portanto somando as contribuições das N espiras:

$$B(y) = \sum_{j=1}^N B(y, y'_j) \quad (\text{G.2})$$

Podemos multiplicar esta soma por $1 = \Delta y N/L = n\Delta y$, onde $n = N/L$ é a densidade linear de espiras:

$$B(y) = \sum_{j=1}^N B(y, y'_j) \times 1 = \sum_{j=1}^N B(y, y'_j) n \Delta y \quad (\text{G.3})$$

Assumindo que a espessura da espira $\Delta y \rightarrow 0$ e $N = nL \rightarrow \infty$, podemos converter a soma em uma integral, obtendo:

$$\begin{aligned} B(y) &= \int_{-L/2}^{L/2} B(y, y') n \, dy' = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0 i R^2}{2[(y - y')^2 + R^2]^{3/2}} n \, dy' \\ &= \frac{\mu_0 i n R^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy'}{[(y' - y)^2 + R^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 i n R^2}{2} \left[\frac{y' - y}{R^2 \sqrt{(y' - y)^2 + R^2}} \right]_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{\mu_0 i n}{2} \left[\frac{L/2 - y}{\sqrt{(L/2 - y)^2 + R^2}} + \frac{L/2 + y}{\sqrt{(L/2 + y)^2 + R^2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

O campo no ponto $y = \alpha L/2$, em função de α :

$$B(\alpha) = \frac{\mu_0 i n}{2} \left[\frac{(1 - \alpha)L/2}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 (L/2)^2 + R^2}} + \frac{(1 + \alpha)L/2}{\sqrt{(1 + \alpha)^2 (L/2)^2 + R^2}} \right] \quad (\text{G.5})$$

Vamos considerar alguns casos.

G.1 Centro do Solenóide

Primeiramente, para $\alpha = 0$, $y = 0$ e estamos no centro do solenóide. Neste caso:

$$B(y = 0) = \frac{\mu_0 i n}{2} \left[\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}} + \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}} \right] = \mu_0 i n \left[\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}} \right] \quad (\text{G.6})$$

Para $L \gg R$, o colchete $\rightarrow 1$ e re-obtemos o resultado do solenóide infinito via a Lei de Ampere, ou seja $B(y = 0) = \mu_0 i n$ (Ver Seção 7.4.3).

G.2 Bordas do Solenóide

Para $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$, ou seja, nas fronteiras do solenóide temos em ambos os casos:

$$B(y = \pm L/2) = \frac{\mu_0 i n}{2} \left[\frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}} \right] \quad (\text{G.7})$$

Para $L \gg R$, o colchete $\rightarrow 1$ novamente e obtemos $B(y = \pm L/2) = \mu_0 i n/2$.

G.3 Dentro ou Fora do Solenóide

Vamos considerar agora apenas valores $\alpha > 0$ (eixo y positivo, i.e. parte superior do solenóide), mas $\alpha \neq 1$, pois este caso já foi considerado¹. Como $\sqrt{a^2} = |a|$, podemos fatorar o resultado geral:

$$\begin{aligned}
 B(\alpha) &= \frac{\mu_0 i n}{2} \left[\frac{(1-\alpha)L/2}{\sqrt{(1-\alpha)^2 (L/2)^2 + R^2}} + \frac{(1+\alpha)L/2}{\sqrt{(1+\alpha)^2 (L/2)^2 + R^2}} \right] \\
 &= \frac{\mu_0 i n}{2} \left[\frac{(1-\alpha)L/2}{|1-\alpha|L/2\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{(1-\alpha)L}\right)^2}} + \frac{(1+\alpha)L/2}{|1+\alpha|L/2\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{(1+\alpha)L}\right)^2}} \right] \\
 &\approx \frac{\mu_0 i n}{2} \left\{ \frac{(1-\alpha)}{|1-\alpha|} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{(1-\alpha)L} \right)^2 + \dots \right] + \frac{(1+\alpha)}{|1+\alpha|} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{(1+\alpha)L} \right)^2 + \dots \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{G.8}$$

Como estamos considerando apenas $\alpha > 0$, temos $\alpha + 1 > 0$ e portanto $\sqrt{(1+\alpha)^2} = |1+\alpha| = 1+\alpha$.

G.3.1 Fora

Se $\alpha > 1$, estamos em $y > L/2$, portanto *fora* do solenóide. Neste caso $1-\alpha < 0$ e portanto $\sqrt{(1-\alpha)^2} = |1-\alpha| = \alpha-1$. Temos então:

$$\begin{aligned}
 B(\alpha) &\approx \frac{\mu_0 i n}{2} \left\{ - \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{(1-\alpha)L} \right)^2 + \dots \right] + \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{(1+\alpha)L} \right)^2 + \dots \right] \right\} \\
 &\approx \mu_0 i n \left\{ \left(\frac{R}{(1-\alpha)L} \right)^2 - \left(\frac{R}{(1+\alpha)L} \right)^2 \right\} + \dots \\
 &\approx \mu_0 i n \left\{ \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{(1+\alpha)^2 - (1-\alpha)^2}{(1-\alpha^2)^2} \right\} + \dots \\
 &\approx \mu_0 i n \left\{ \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2} \right\} + \dots
 \end{aligned} \tag{G.9}$$

Portanto, quando $\alpha \gg 1$ (ponto muito afastado do solenóide), temos $B \approx 0$ mesmo para solenóide finito. Além disso, quando $L \gg R$ (solenóide muito longo), temos $B \approx 0$ em qualquer ponto fora do solenóide, como esperado.

¹Poderíamos considerar a parte inferior de forma similar.

G.3.2 Dentro

Já se $\alpha < 1$, estamos em $y < L/2$, portanto *dentro* do solenóide. Neste caso $1 - \alpha < 0$ e portanto $\sqrt{(1 - \alpha)^2} = |1 - \alpha| = 1 - \alpha$. Temos então:

$$\begin{aligned}
 B(\alpha) &\approx \frac{\mu_0 i n}{2} \left\{ \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{(1 - \alpha)L} \right)^2 + \dots \right] + \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{(1 + \alpha)L} \right)^2 + \dots \right] \right\} \\
 &\approx \mu_0 i n \left\{ 1 - \left[\left(\frac{R}{(1 - \alpha)L} \right)^2 + \left(\frac{R}{(1 + \alpha)L} \right)^2 \right] \right\} + \dots \\
 &\approx \mu_0 i n \left\{ 1 - \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{(1 + \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2}{(1 - \alpha^2)^2} \right\} + \dots \\
 &\approx \mu_0 i n \left\{ 1 - 2 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{(1 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^2} \right\} + \dots
 \end{aligned} \tag{G.10}$$

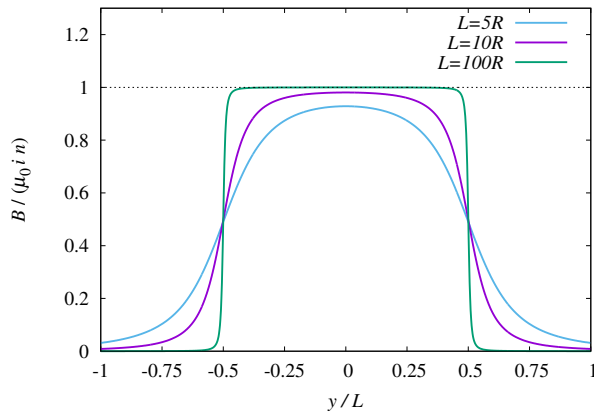


Figura G.2: Campo $B(y)$ no eixo y de um solenóide de raio R e comprimento L . O campo está normalizado por $\mu_0 i n$ (campo de um solenóide ideal: $L \gg R$), e o ponto y pelo comprimento L .

Portanto, quando $L \gg R$ (solenóide muito longo), temos $B \approx \mu_0 i n$ em qualquer ponto dentro do solenóide, como esperado (Seção 7.4.3).

Desta forma, um solenóide longo tem, ao longo do seu eixo, um campo constante dentro do solenóide e zero fora dele. Note que na borda, o valor do campo é metade do valor dentro, descrevendo a transição suave que ocorrerá em qualquer caso de solenóide finito.

Na Fig. G.2, mostramos $B(y)/(\mu_0 i n)$ versus y/L para diferentes valores de L/R , com $B(y)$ dado pela Eq. G.4. Fica claro que para $L \gg R$, temos $B(y) \approx \mu_0 i n$ dentro do solenóide e 0 fora dele.