PEF3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das Estruturas

Exercício 1

As vibrações livres do sistema estrutural da figura foram monitoradas e constatou-se que, após cinco ciclos completos a partir da primeira resposta máxima em deslocamentos, a amplitude foi de 10% daquela. Nestas condições:

a) Propor o oscilador de um grau de liberdade que representa o sistema da Figura 1, calculando a rigidez da mola que lhe é equivalente;
b) Determinar a taxa de amortecimento ξ, supondo comportamento viscoso linear;
c) Determinar o coeficiente de amortecimento c.

Dados: $\ell = 2m$, $EI = 10^6 Nm^2$, $k_m = 93750 Nm^{-1}$ e $m = 4500kg$.

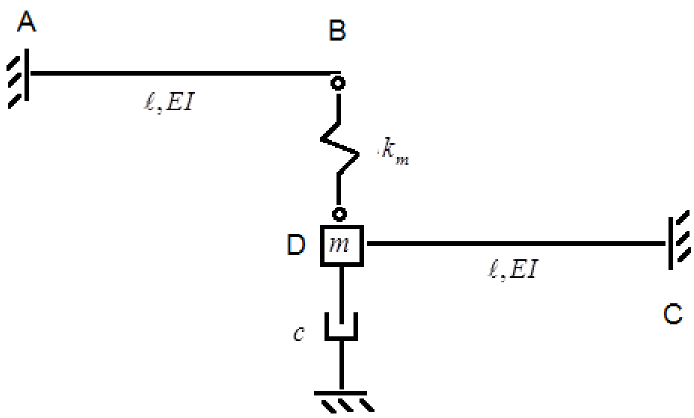


Figura 1

PEF3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das Estruturas

Exercício 2

As barras da estrutura reticulada plana da Figura 2, 1 vez hiperestática, são prismáticas de produto de rigidez à flexão $EI = 800\ kNm^2$. Considerar os casos a seguir:

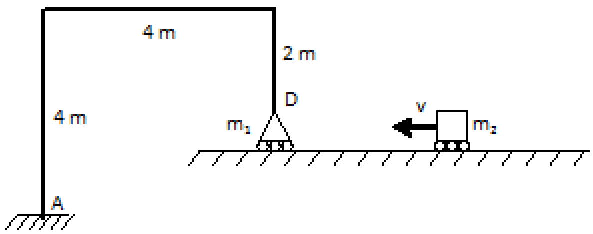


Figura 2

a) A estrutura está submetida a um choque mecânico perfeitamente inelástico, sendo conhecidas as massas, $m_1 = 800\ kg$ e$m_2 = 2400\ kg$, e a velocidade desta última antes do choque$v = 4\ m/s$. Determinar o máximo momento fletor na estrutura, decorrente do choque, desprezando o efeito do amortecimento.
b) A estrutura foi reforçada com uma mola, conforme representado na Figura 3. Por questões construtivas, esta foi instalada com uma inclinação $\alpha = 30°$ com a direção horizontal. Determinar o coeficiente de rigidez da mola k de forma que o momento máximo obtido no item anterior seja reduzido à metade.

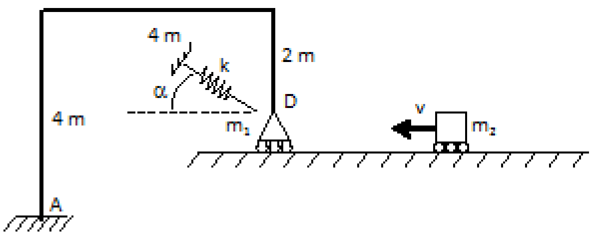


Figura 3

A solução da equação de vibrações livres não amortecidas é:

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta), \text{ com } \rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2 + (u_0)^2} \text{ e } \theta = \text{arctg}\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega u_0}\right)$$

PEF3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das Estruturas

Exercício 3

A Figura 4 apresenta uma viga biapoiada de comprimento L associada a molas de rigidezk_m. Sobre este conjunto e no centro da viga existe uma massa m_1 inicialmente em repouso. A massa m_2 cai a partir do repouso sobre a massa m_1. Notar que a Figura 5 apresenta a solução elástica da flecha de uma viga biapoiada. Desconsiderar qualquer forma de dissipação de energia:

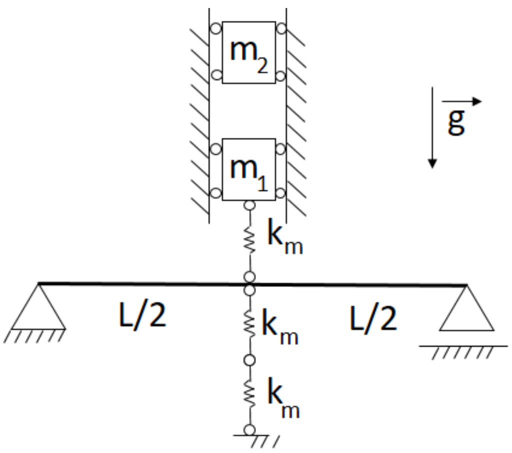


Figura 4

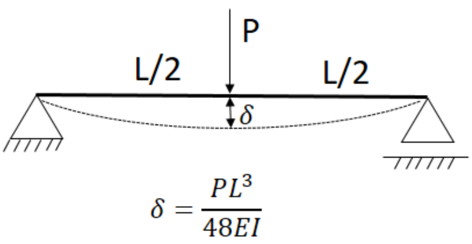


Figura 5

a) Fazer uma representação esquemática de um modelo de um grau de liberdade para o sistema após o choque mecânico, suposto perfeitamente inelástico. Escrever a equação de movimento para esse modelo, deixando-a como função dos parâmetros do enunciado, da aceleração gravitacional g e da rigidez equivalente relevante ao modelo k_{eq}.
b) Obter uma expressão para a rigidez equivalente do modelo k_{eq} em função dos dados do enunciado.

A partir do item c, adotar os seguintes valores numéricos:

$m_1 = 500\ kg$; $L = 8\ m$; $EI = 5\ 10^4\ Nm^2$; $k_m = 10^5 N/m$ e $g = 10\ m/s^2$

c) A Figura 6 apresenta a série temporal de velocidade do sistema após o choque mecânico. As coordenadas dos pontosP_1, P_2 e P_3 são, respectivamente $(0; 0{,}5)$, $(0{,}814; 0{,}513)$. Determinar o valor da massa m_2 e sua velocidade imediatamente antes do choque.

PEF3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das Estruturas

d) Escrever a solução geral $u(t)$ da equação de movimento obtida no item a, bem como a série temporal $\dot{u}(t)$, enunciando as condições iniciais a serem utilizadas na resolução. Não é necessário o cálculo das constantes de integração da solução particular.
e) Calcular o máximo deslocamento das massas após o choque mecânico. Dica: este valor pode ser obtido mais facilmente por meio da análise daFigura 6.

Calcular o maior momento fletor, em módulo, na viga biapoiada após o choque mecânico.

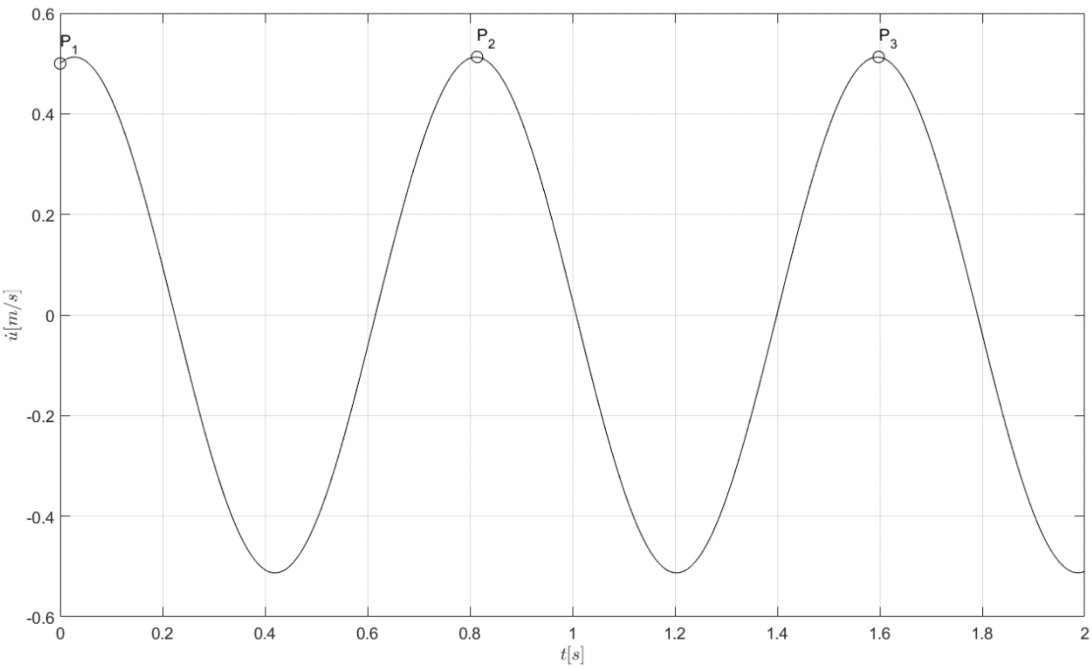


Figura 6

PEF3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das Estruturas

Exercício 4

Você está desenvolvendo sua tese de doutorado sob orientação de um docente do Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica. A sua tese estuda uma nova concepção de turbina eólica, representada por uma massa $M = 2000\,kg$ suportada por duas barras imponderáveis inclinadas. Seu objeto de interesse é o movimento lateral $u(t)$ decorrente da interação da turbina com o vento incidente com velocidade U_∞. Da interação da turbina com a corrente de vento, surge uma força lateral que pode ser modelada como $p(t) = p_o \sin \bar{\omega} t$. A Figura 7 é uma representação esquemática do problema, onde cada barra foi modelada como um elemento visco-elástico.

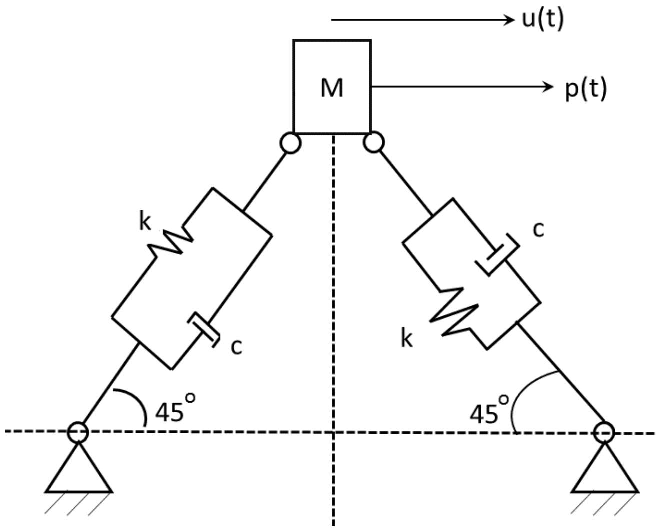


Figura 7

a) Propor um modelo de um grau de liberdade para o estudo do movimento lateral $u(t)$. Explicitar as expressões para a rigidez equivalente k_{eq} e para a constante de amortecimento equivalente c_{eq} como função dos parâmetros do enunciado.
b) Supor que tanto a amplitude da excitação p_o quanto sua frequência $\bar{\omega}$ sejam funções da intensidade média de corrente de vento U_∞. Admite-se que a frequência da excitação é dada por $\bar{\omega} = \alpha_1 U_\infty$, onde α_1 é uma constante a ser determinada. Foram feitos experimentos com três valores de corrente média de vento, a saber, $U_\infty = 10\,m/s$, $U_\infty = 2{,}5\,m/s$ e $U_\infty = 0{,}5\,m/s$. Nestes experimentos, foram monitoradas as séries temporais de força externa $p(t)[N]$ e de deslocamento $u(t)[m]$, em regime permanente. Estas séries temporais estão ilustradas na Figura 8, juntamente com os respectivos valores máximos. Qual a

correnteza de vento U_∞ que leva à condição de ressonância? Justificar sua resposta.

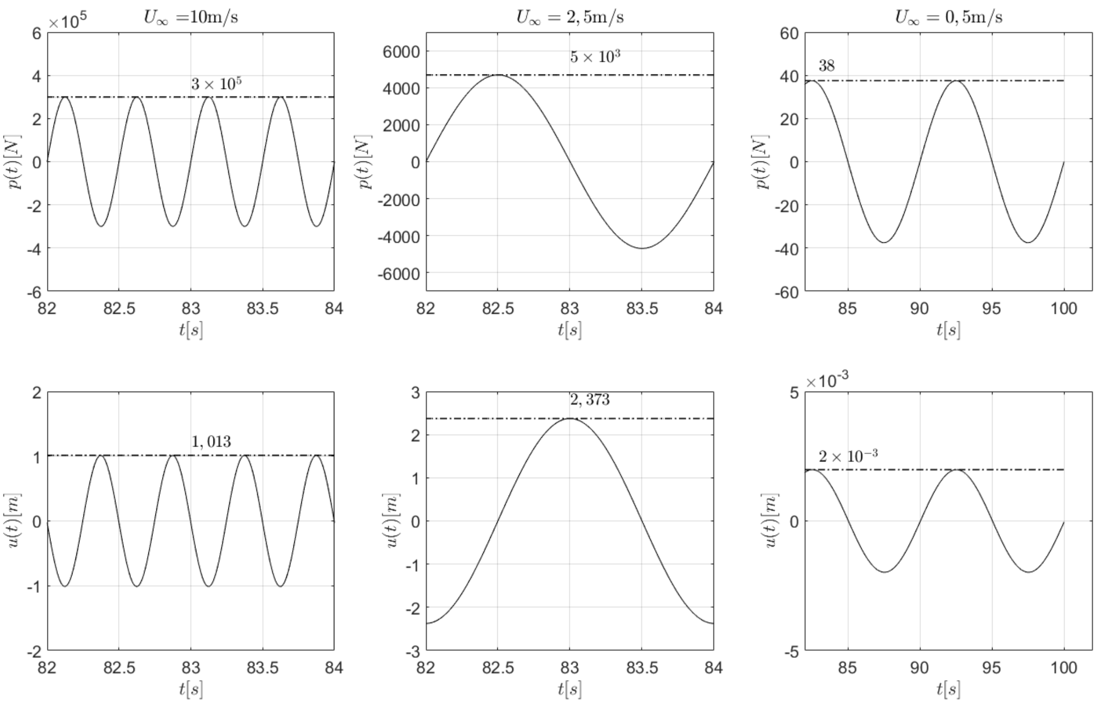


Figura 8

c) Com base na Figura 8, quais os valores da frequência natural não amortecida, da constante α_1 e da rigidez equivalentek_{eq}?
d) Ainda com base na Figura 8, determinar o fator de amplificação dinâmica D e a taxa de amortecimento do sistema ζ.
e) A Figura 9 apresenta a série temporal de deslocamento $u(t)$ da turbina em vibração livre. Sabe-se que as coordenadas do ponto P_1 indicado são $(2\,s; 0{,}073\,m)$. Determinar as coordenadas do ponto P_2. Justificar as simplificações utilizadas.

Formulário:

Características do sistema: $\zeta = \frac{c}{2m\omega}$, com $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Solução da equação diferencial $m\ddot{u} + ku = 0$: $u(t) = \rho\cos(\omega t - \theta)$

PEF3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das Estruturas

Solução da equação diferencial $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0$: $u(t)=\rho e^{-\xi\omega t}\cos(\omega_D t-\theta)$, com $\xi=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{u_1}{u_2}\right)$

Solução particular da equação diferencial $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0$:
$u_p(t)=\bar{\rho}\mathrm{sen}(\bar{\omega}t-\bar{\theta})$, com $\bar{\rho}=D\frac{p_0}{k}$, $D=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$ e $\bar{\theta}=\mathrm{arctg}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$.

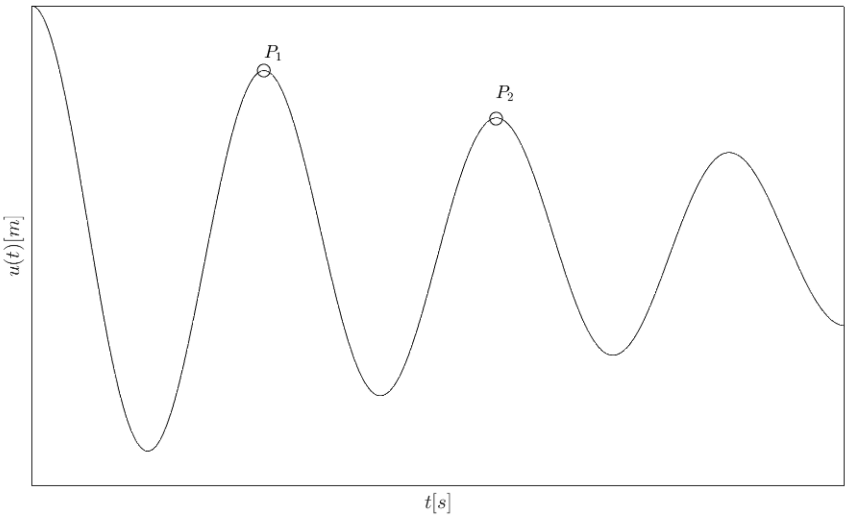


Figura 9

Curiosidade: existem projetos conceituais de turbinas eólicas semelhantes a pipas. Esta concepção visa à exploração de energia eólica onde os ventos mais favoráveis estão em altitudes mais elevadas.

PEF3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das Estruturas

Exercício 5

Determinar o diagrama de momentos fletores máximos, em regime permanente, das colunas da fundação aporticada de máquina representada na Figura 10. A estrutura é modelada como um sistema de um grau de liberdade (deslocamento horizontal da viga de suporte da máquina, suposta **infinitamente rígida**).

A massa das colunas é desprezível, a da viga rígida é $M = 1000\,kg$ e a da máquina é $m_{maq} = 500\,kg$. Sabe-se que, devido ao desbalanceamento das massas, a máquina aplica à estrutura um carregamento horizontal harmônico $p(t) = p_o \sin \bar{\omega} t$, de intensidade $p_o = 81\,N$ e frequência $\bar{\omega} = 9 rad/s$. A constante do amortecedor viscoso linear instalado é $c = 1875\,Ns/m$, a altura das colunas é $h = 2\,m$ e seu produto de rigidez à flexão é $EI = 8\,10^4 Nm^2$.

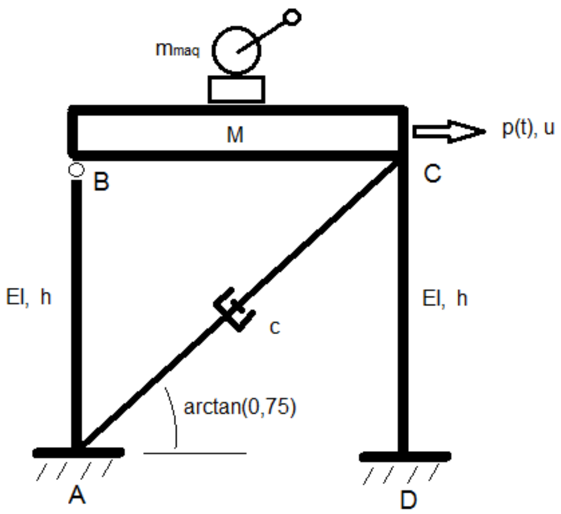


Figura 10

A solução em regime permanente da equação diferencial:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{p_o}{m}\sin \bar{\omega} t$$

é $u(t) = \bar{\rho}\sin(\bar{\omega}t - \bar{\theta})$, sendo $\bar{\rho} = D u_{est}$, com u_{est} indicando a resposta para um carregamento estático de intensidadep_o.

Formulário:

$$D = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}}\ ,\ \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}\ ,\ \zeta = \frac{c}{2m\omega}\ \text{e}\ \bar{\theta} = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

PEF3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das Estruturas

Exercício 6

A viga AB da Figura 11, suposta imponderável, dá suporte a uma máquina de massa $m = 1050\ kg$ que, quando em funcionamento, aplica-lhe uma força na direção transversal $p = p_o \sin \overline{\omega} t$, com $p_o = 262{,}50\ N$.

Sabe-se que, para a condição de **ressonância**, o maior momento fletor na viga, **em regime permanente**, vale $M_1 = 10{,}50\ kNm$. Considerar a modelagem do sistema com um único grau de liberdade, a saber, o deslocamento transversal $u(t)$ da massa.

Dados: $EI = 560\ kNm^2$ e $a = 2\ m$.

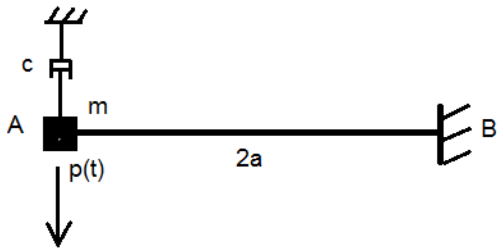


Figura 11

a) Determinar o coeficiente de amortecimento subcrítico c do amortecedor instalado, nestas condições.
b) O sistema estrutural foi alterado, conforme se indica na Figura 12, com o coeficiente de rigidez da mola valendo $k = 38182\ N/m$. A viga CED é prismática, com $EI = 560\ kNm^2$. Determinar, nestas novas condições, o diagrama dos máximos momentos fletores em toda a estrutura, **em regime permanente**, para o **mesmo carregamento anteriormente aplicado**.

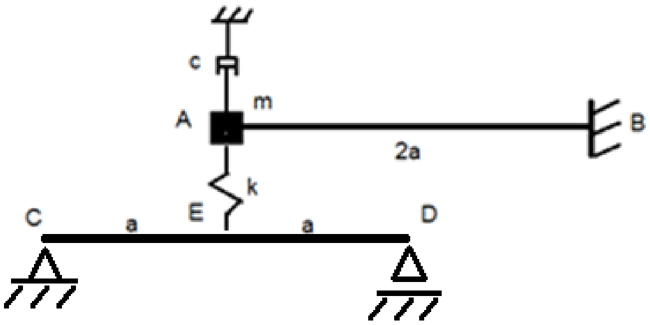


Figura 12

PEF3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das Estruturas

Formulário:

$u(t) = \bar{\rho}\sin(\bar{\omega}t - \bar{\theta})$, $\bar{\rho} = D\frac{p_o}{k^*}$, $D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}}$, $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega^*}$, $\zeta^* = \frac{c}{2m\omega^*}$ e $\omega^* = \sqrt{\frac{k^*}{m}}$

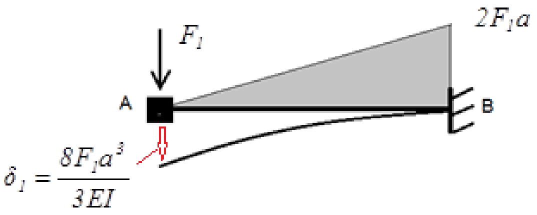


Figura 13

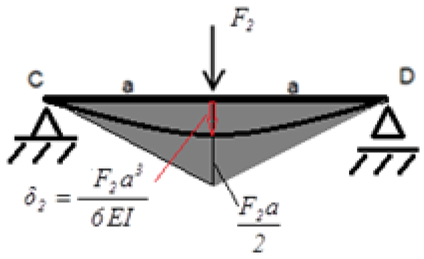


Figura 14

PEF3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das Estruturas

Exercício 7

Considere a estrutura isostática submetida à excitação horizontal de suporte representada na Figura 15. Nos cálculos, considere um modelo em que o único grau de liberdade é o deslocamento horizontal da massa m.

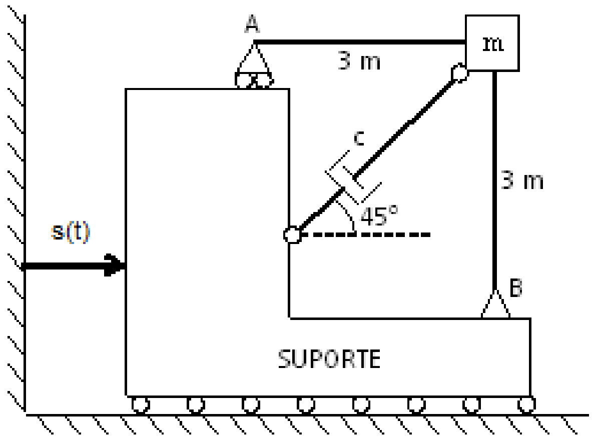


Figura 15

Dados: $EI = 2{,}7\ 10^7\ Nm^2$, $c = 2\ 10^4\ Ns/m$, $s(t) = 0{,}002 \sin 45t$ e $m = 1200\ kg$.

Sabe-se que o sistema se encontra em regime permanente.

a) Utilizar o teorema dos esforços virtuais para determinar o coeficiente de rigidez equivalente da estrutura.
b) Por motivos construtivos, o deslocamento horizontal máximo da massa m **em relação ao suporte** não pode superar 5 mm. Verificar se tal condição é violada.
c) Sabe-se que a massa m representa um telescópio. Para que sua precisão não seja prejudicada, o deslocamento máximo **em relação a um referencial inercial** não pode superar 10 mm. Verificar se tal condição é violada.

Formulário:

$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}}$, $TR = D\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}$ e $u_e = \beta^2 x_o$.

Para funções $f(x)$ e $g(x)$ lineares:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f_a(2g_a+g_b)+f_b(g_a+2g_b)\right]$$

PEF3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das Estruturas

Respostas

Exercício 1

$$k_{eq} = 450000 Nm^{-1}$$

$$\xi = 7,3\%$$

$$c = 6579\, kg/s$$

Exercício 2

$$M_{\max} = 61970 Nm$$

$$k_m = 133333\, N/m$$

Exercício 3

$$\left(m_1 + m_2\right)\ddot{u} + k_{eq}u = \left(m_1 + m_2\right)g$$

$$k_{eq} = \frac{k_m\left(\dfrac{48EI}{L^3} + \dfrac{k_m}{2}\right)}{\dfrac{48EI}{L^3} + \dfrac{3}{2}k_m}$$

$$m_2 = 49kg\ ,\ v = 5,6\, m/s$$

$$u\left(t\right) = \rho\cos\left(\omega t - \theta\right) + \frac{m_1 + m_2}{k_{eq}}g\ ,\ u\left(0\right) = 0,14m\ ,\ \dot{u}\left(0\right) = 0,5\, m/s$$

$$u_{\max} = 0,22m$$

$$M_{\max} = 2036Nm$$

Exercício 4

$$k_{eq} = k\ ;\ c_{eq} = c$$

$$U_{\infty} = 2,5\, m/s$$

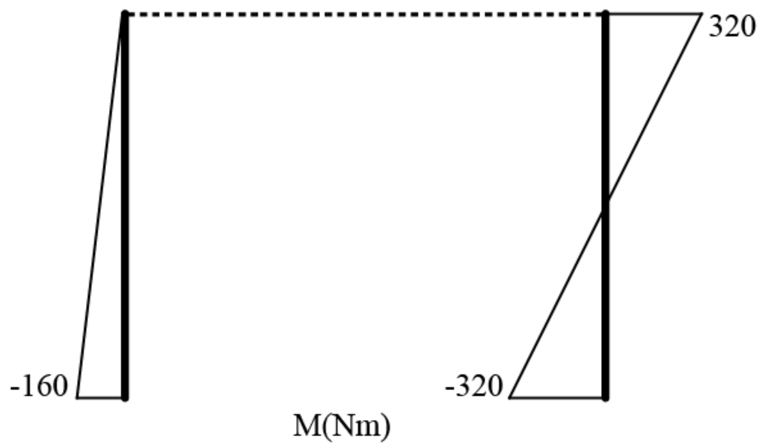
$$\omega = \pi\, rad/s\ ,\ \alpha_1 = 1,26\, rad/m\ ,\ k_{eq} = 19739\, N/m$$

$$D = 9,4\ ,\ \xi = 5,3\%$$

$$P_2 = \left(4s; 0,052m\right)$$

PEF3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das Estruturas

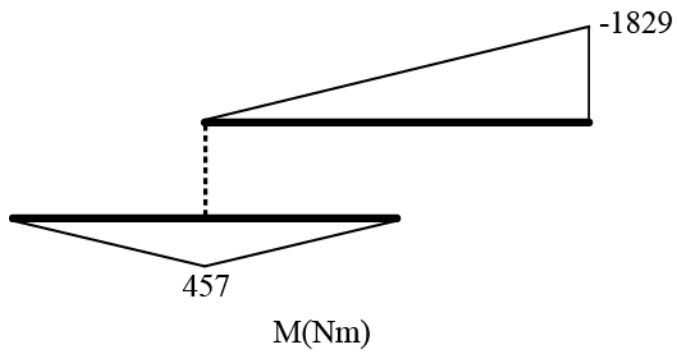
Exercício 5



Exercício 6

$c = 528 kg/s$

Observação: Diagrama sem M_{est}.



Exercício 7

$k_{eq} = 1,5 \cdot 10^6\ N/m$

$u_{rel,\max} = 4,7mm$ (Condição não violada)

$u_{tot,\max} = 3,1mm$ (Condição não violada)