

Introdução à análise de sinais

PEF 3401 - Mecânica das Estruturas II

Prof. Dr. Guilherme R. Franzini

Prof. Dr. Carlos E. N. Mazzilli

Prof. Dr. João Cyro André

- 1 Objetivos
- 2 Série de Fourier
- 3 Transformada de Fourier
- 4 Aspectos práticos de análise de sinais utilizando o MATLAB[®]
- 5 Aplicações

- 1 Objetivos
- 2 Série de Fourier
- 3 Transformada de Fourier
- 4 Aspectos práticos de análise de sinais utilizando o MATLAB®
- 5 Aplicações

- Apresentar aspectos relacionados à Série de Fourier e à Transformada de Fourier;
- Introduzir aspectos práticos de análise de sinais em ambiente MATLAB® e/ou Octave, indicando alguns exemplos ilustrativos.

- 1 Objetivos
- 2 Série de Fourier
- 3 Transformada de Fourier
- 4 Aspectos práticos de análise de sinais utilizando o MATLAB®
- 5 Aplicações

- Uma função $x(t)$ é periódica de período T se $x(t) = x(t + T), \forall t$;
- Seja $x(t)$ um sinal periódico de período $T = 2\pi/\omega$. A Série de Fourier deste sinal consiste na projeção deste sinal em um conjunto de funções harmônicas da forma $[\cos n\omega t, \sin n\omega t], n = 1, 2, 3 \dots, \infty$;
- Considerando o seguinte produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt$ é trivial notar que as funções trigonométricas formam o conjunto ortogonal;

- Logo $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t);$
- $a_n = \frac{\int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt}{\int_0^T \cos^2(n\omega t) dt} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt, n = 1, 2, \dots;$
- $b_n = \frac{\int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt}{\int_0^T \sin^2(n\omega t) dt} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt, n = 1, 2, \dots;$
- $a_0 = \frac{\int_0^T x(t) \cos(0\omega t) dt}{\int_0^T \cos^2(0\omega t) dt} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt; \text{ Média do sinal}$

- A Série de Fourier pode ser escrita tanto na forma trigonométrica quanto na forma de uma exponencial complexa. Para tanto, basta lembrar da fórmula de Euler
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

- Logo, a forma complexa da Série de Fourier é

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \text{ com } c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-in\omega t} dt$$

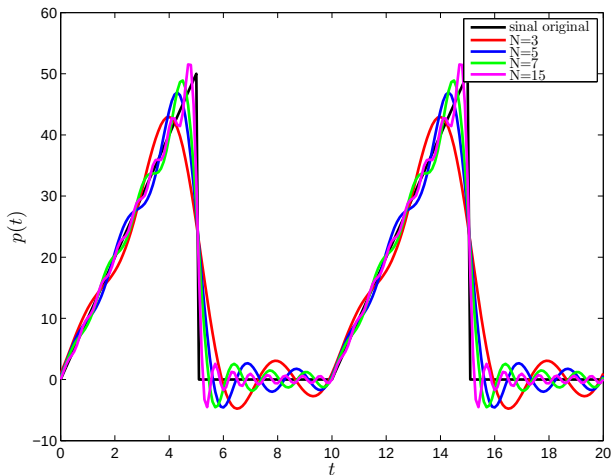
Expansão, em Série de Fourier, de uma função dente-de-serra, dada em um período T_p por:

$$p(t) = p_0 t, T_p k < t < T_p(2k + 1)/2, k = 0, 1, 2 \dots \quad (1)$$

$$p(t) = 0, T_p(2k + 1)/2 < t < T_p(k + 1), k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

- Frequência fundamental $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T_p}$
- Série truncada em N termos
- $$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\bar{\omega}t) + b_n \sin(n\bar{\omega}t)$$
- $$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos(n\bar{\omega}t)$$
- $$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin(n\bar{\omega}t)$$

Considerando $p_0 = 10$ e $T_p = 10$, temos:



- 1 Objetivos
- 2 Série de Fourier
- 3 Transformada de Fourier**
- 4 Aspectos práticos de análise de sinais utilizando o MATLAB[®]
- 5 Aplicações

- A Série de Fourier é apropriada para o tratamento de sinais periódicos. Como proceder quando o sinal é aperiódico?
- Lançamos mão do seguinte artifício matemático. Um sinal aperiódico é um sinal periódico com período $T \rightarrow \infty$

- Na Série de Fourier na forma complexa, o intervalo entre as frequências é ω . Aqui, este intervalo será definido como $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$

- Logo:

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T x(t) e^{-in\Delta\omega t} dt \right) e^{in\Delta\omega t}$$

- Quando $T \rightarrow \infty$, o intervalo entre as frequências tende a $d\omega$. Já o produto $n\Delta\omega$ tende a ω quando $n \rightarrow \infty$. Assim:

-

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) d\omega$$

Definimos:

- Transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

- Transformada de Fourier inversa:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

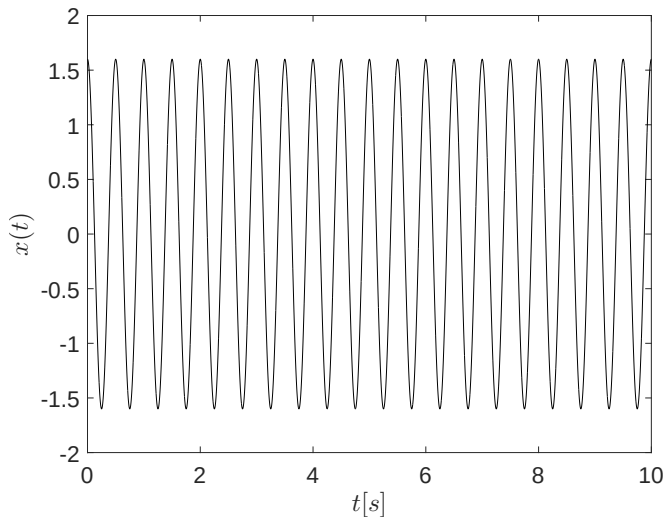
- 1 Objetivos
- 2 Série de Fourier
- 3 Transformada de Fourier
- 4 Aspectos práticos de análise de sinais utilizando o MATLAB®**
- 5 Aplicações

- Na prática, quando vamos analisar sinais obtidos tanto por meio de experimentos quanto por meio de simulações numéricas, o tempo não é uma grandeza contínua;
- Foco desta apresentação: Condições onde o tempo é dado por um conjunto de N pontos (tamanho da amostra), amostrados com frequência constante e igual a f_s (frequência de amostragem). O período de amostragem é $T_s = 1/f_s$.
- Faz-se necessário, então, o uso da Transformada de Fourier Discreta. Um algoritmo bastante eficiente para este cálculo é denominado *Fast Fourier Transform - FFT*.

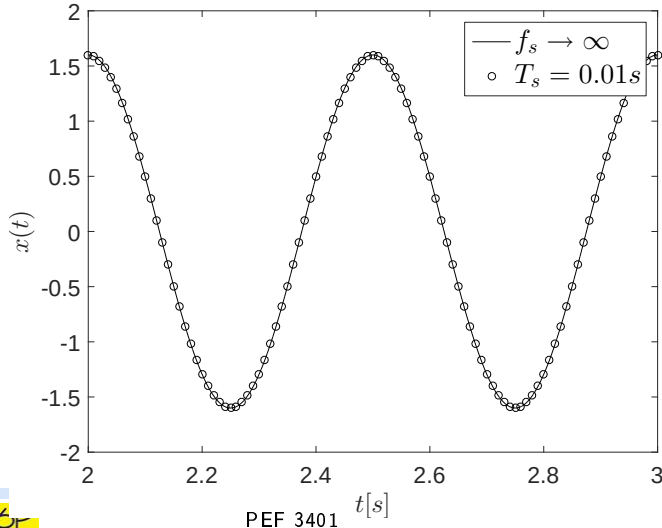
Veremos como obter, a partir de um sinal $x(t)$, o espectro de amplitude $U(f)$ no MATLAB®. Fisicamente $U(f)$ ilustra a amplitude de cada componente de frequência do sinal.

Como o tempo passa a ser descrito de maneira discreta, o vetor com as frequências a serem obtidas também será dada de forma discreta.

Considere o sinal de tempo contínuo dado por $x(t) = A \cos(\omega t)$, com $A = 1.6$ e $\omega = 4\pi \text{ rad/s}$



Considere o sinal de tempo discreto x_d obtido a partir de experimentos com período de amostragem $T_s = 0,01s$.

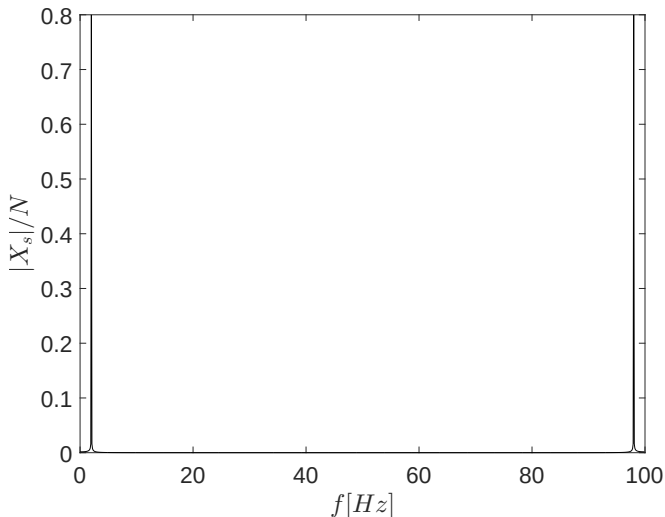


Em um primeiro momento, obtemos as componentes complexas de frequência a partir da Transformada Discreta de Fourier. Em seguida, construiremos o vetor correspondente às frequências obtidas.

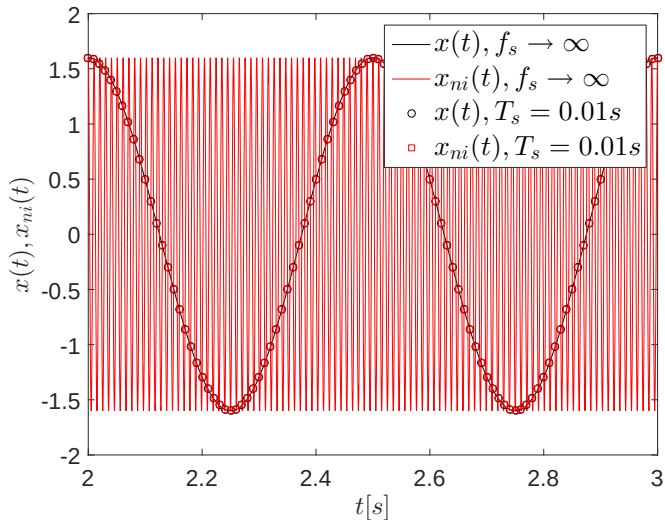
- Comando 1: $X_s = \text{fft}(x)$;
- Comando 2: $N = \text{size}(x)$;
- Comando 3: $\text{freq} = [0 : 1 : N - 1] * fs / N$;

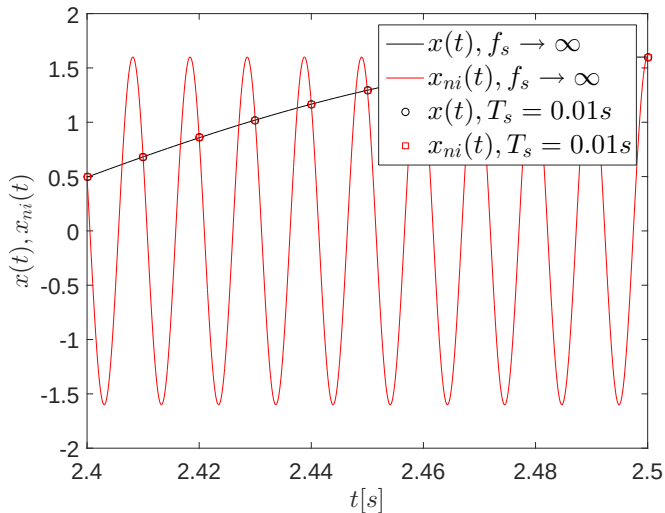
Agora, obteremos a amplitude de cada componente de frequência. Isto é feito por meio do módulo dos números complexos obtidos a partir da Transformada de Fourier. A divisão pelo tamanho da amostra é devida ao algoritmo FFT.

- Comando 4: $absXs = abs(Xs)/N;$



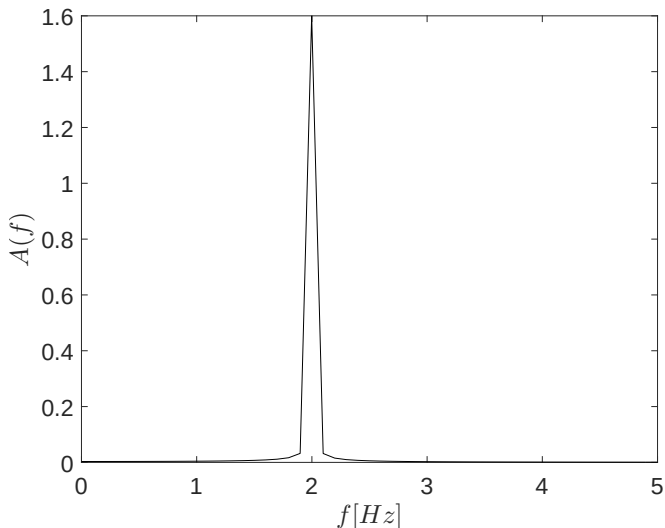
A análise espectral em tempo discreto identificou duas frequências (2Hz e 98Hz), com amplitudes iguais à metade daquela associada ao sinal de tempo contínuo. Note a simetria com relação à $f_s/2$. Vejamos qualitativamente.





- Vimos que a análise espectral em tempo discreto fornece duas frequências, a frequência de interesse e uma alta frequência sem interesse (*aliasing*). A cada frequência, está associada uma amplitude igual à metade do sinal original.
- A obtenção de um espectro de amplitude representativo deve considerar apenas as frequências inferiores a $f_s/2$ e a amplitude do espectro deve ser multiplicada por 2.
- Logo, a maior frequência de interesse de um sinal amostrado com f_s deve ser inferior a $f_s/2$ (Teorema da Amostragem ou Teorema de Nyquist).

Espectro de amplitude $A(f)$

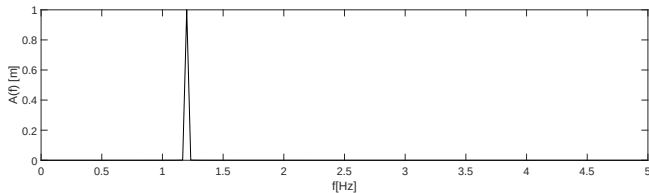
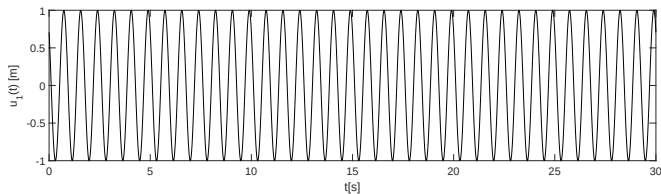


```
function [freq,Amp,fd,Ad]=EspectroAmplitude(t,sinal)

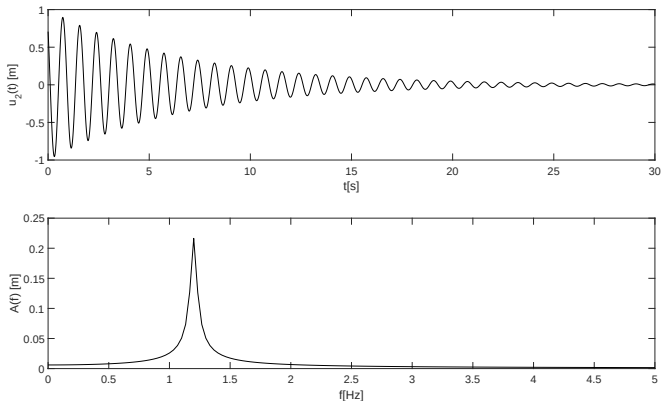
%% Calcula o espectro de amplitude do sinal
%[freq,Amp,fd,Ad]=EspectroAmplitude(t,sinal)
% Entradas - t -> vetor de tempo
%          sinal
% saida    - freq -> vetor de frequencias
%          - Amp  -> vetor de amplitudes
%          - fd   -> frequencia dominante
%          - Ad   -> amplitude na frequencia dominante
%%
N=length(t);
deltat=t(2)-t(1);
deltaf=1/deltat;
freq=[0:N-1]*deltaf/N;
Xs=fft(sinal);
Amp=abs(Xs)/N;
Amp=2*Amp(1:fix(N/2));
freq=freq(1:fix(N/2));
[Ad,indice]=max(Amp);
fd=freq(indice);
```

- 1 Objetivos
- 2 Série de Fourier
- 3 Transformada de Fourier
- 4 Aspectos práticos de análise de sinais utilizando o MATLAB®
- 5 Aplicações**

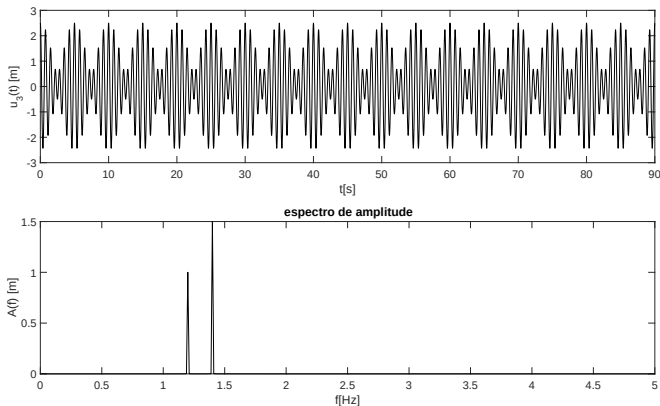
$$\rho = 1\text{m}; f = 1,2\text{Hz}; \theta = \pi/4$$



$$\rho = 1\text{m}; f = 1,2\text{Hz}; \zeta = 0.02; \theta = \pi/4$$

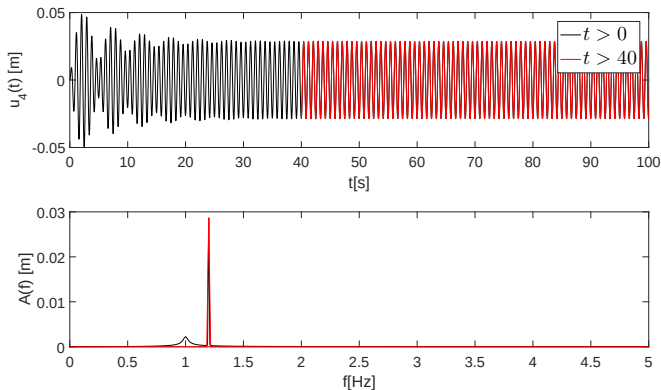


$$\rho_1 = 1\text{m}; f_1 = 1,2\text{Hz}; \rho_2 = 1.5\text{m}; f_2 = 1,4\text{Hz}$$



$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = p_0/m \cos(\bar{\omega}t)$$

$$u(0) = 0\text{m}; \dot{u}(0) = 0\text{m/s}; m = 1\text{kg}; k = 4\pi^2\text{N/m}; \bar{\omega} = 1.2\omega; \zeta = 2\%$$



$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = p_0/m \cos(\bar{\omega}t)$$
$$u(0) = 0\text{m}; \dot{u}(0) = 0\text{m/s}; m = 1\text{kg}; k = 4\pi^2\text{N/m}; \bar{\omega} = 1.2\omega; \zeta = 0$$

