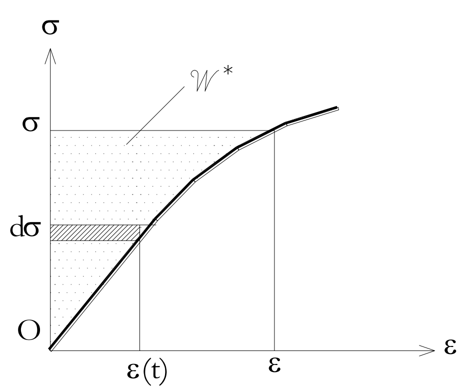
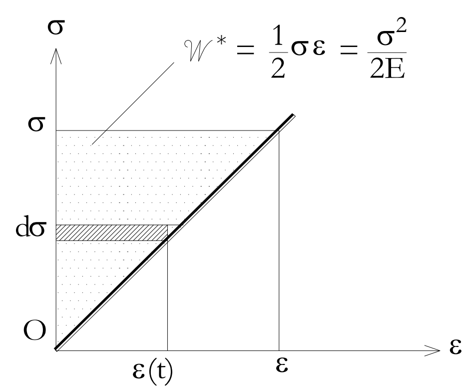
Teoremas de Energia Complementar

Energia de deformação complementar

$$\mathcal{U}^* = T^*_{\text{int}} \qquad \mathcal{U}^* = \int_V \mathcal{W}^* dV \qquad \mathcal{U}^* + \mathcal{U} = \int_V \sigma\varepsilon dV$$

Material elástico linear: $\mathcal{W}^* = \mathcal{W}$





Energia de deformação complementar

Teoria elementar de barra plana

$$\mathcal{U}^* = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon dV = \frac{1}{2}\int_V E\varepsilon^2 dV = \frac{1}{2}\int_V E\left(u' - zw''\right)^2 dV = \frac{1}{2}\int_{est}\int_A E\left(u' - zw''\right)^2 dAdx$$

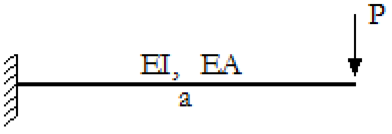
$$\mathcal{U}^* = \frac{1}{2}\int_{est} EI_y\left(w''\right)^2 ds + \frac{1}{2}\int_{est} EA\left(u'\right)^2 ds = \int_{est} \frac{M_y^{\;2}}{2EI_y} ds + \int_{est} \frac{N^2}{2EA} ds$$

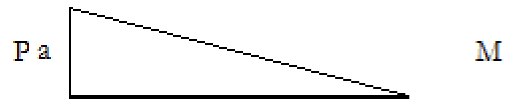
Teoria elementar de barra espacial

$$\mathcal{U}^* = \frac{1}{2}\int_{est} EI_y\left(w''\right)^2 ds + \frac{1}{2}\int_{est} EI_z\left(v''\right)^2 ds + \frac{1}{2}\int_{est} EA\left(u'\right)^2 ds + \frac{1}{2}\int_{est} GI_T\left(\theta'\right)^2 ds$$

$$\mathcal{U}^* = \int_{est} \frac{M_y^{\;2}}{2EI_y} ds + \int_{est} \frac{M_z^{\;2}}{2EI_z} ds + \int_{est} \frac{N^2}{2EA} ds + \int_{est} \frac{T^2}{2GI_T} ds$$

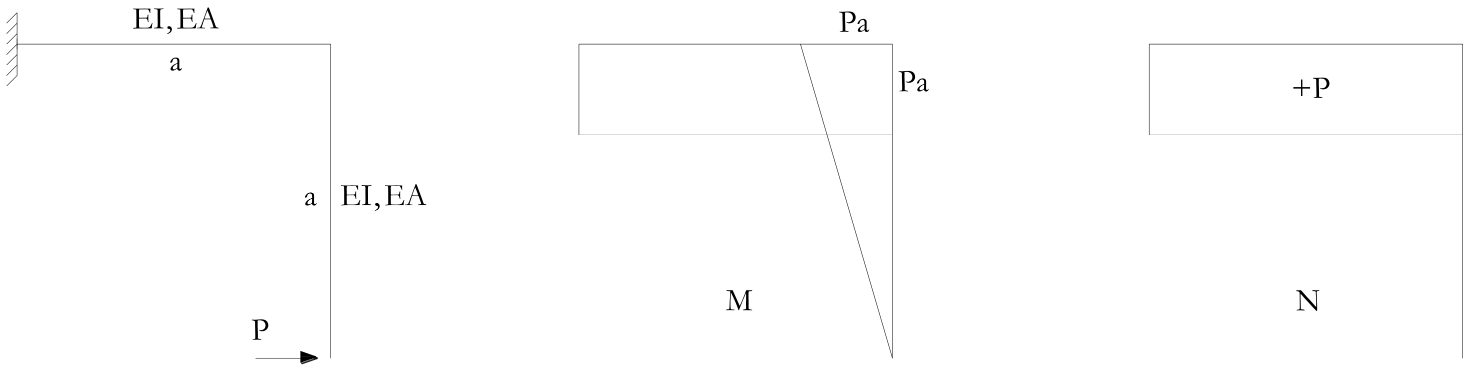
Exemplo 1
Cálculo de energia de deformação complementar





$$\mathcal{U}^* = \mathcal{U} = \int_{est} \frac{{M_y}^2}{2EI_y} ds = \frac{P^2 a^3}{6EI}$$

Exemplo 2
Cálculo de energia de deformação complementar

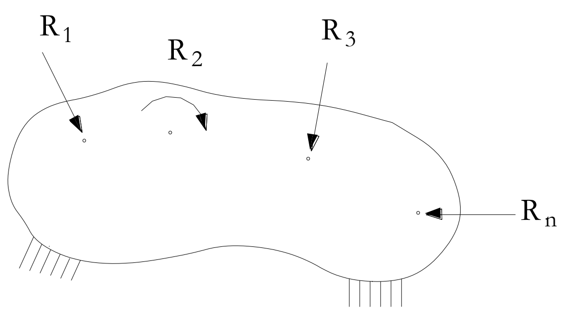


$$\mathcal{U}^{*} = \mathcal{U} = \int_{est} \frac{M_y^{\ 2}}{2EI_y} ds + \int_{est} \frac{N^2}{2EA} ds = \frac{2P^2a^3}{3EI} + \frac{P^2a}{2EA} = \frac{2P^2a^3}{3EI}\left(1 + \frac{h^2}{16a^2}\right)$$

Energia potencial total complementar

$$\Pi^* = \mathcal{U}^*\left(R_i\right) + \mathcal{P}^*\left(R_i\right) = \mathcal{U}^*\left(R_i\right) - \sum_{i=1}^{n} R_i \hat{U}_i$$

Teorema: “entre todas as soluções equilibradas,
aquela que também é compatível torna estacionária a energia
potencial total complementar”



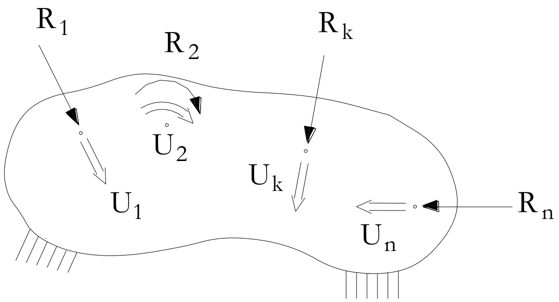
$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial R_k} = \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial R_k} - \hat{U}_k = 0$$

Observação 1: supor vínculos conjugados às cargas R_i **com recalques energeticamente conjugados iguais a** $\hat{U}_i$

Observação 2: aliviando a notação, no lugar de $\hat{U}_i$ **usaremos simplesmente** U_i **, a menos que se refira efetivamente a recalque de apoio, quando também denotaremos** X_i **e não mais** R_i **a correspondente reação vincular**

Primeiro teorema de Engesser

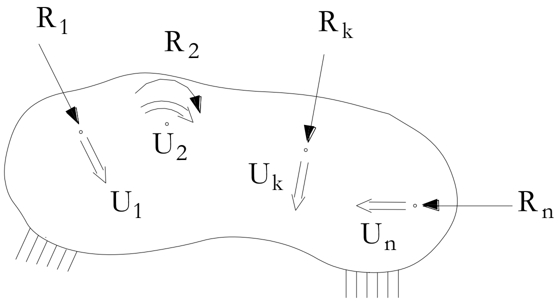
(por F. Engesser em 1889 - apud J.T.Oden)



$$\frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial R_k} = U_k$$

Teorema: “Se a energia de deformação complementar for expressa em função de n esforços independentes entre si, então a sua derivada parcial em relação a um desses esforços é igual ao deslocamento corrrespondente”

Segundo teorema de Castigliano



$$\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial R_k} = U_k$$

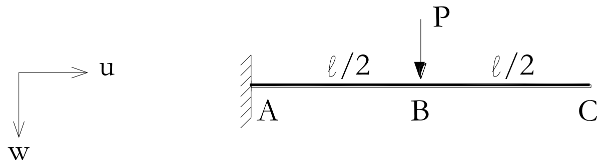
Teorema: “Se a energia de deformação for expressa em função de n esforços independentes entre si, então a sua derivada parcial em relação a um desses esforços é igual ao deslocamento corrrespondente”

Aplicações do segundo teorema de Castigliano

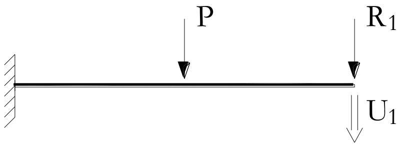
- Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas
- Análise de estruturas pelo método dos esforços que permite escolher entre todas as soluções equilibradas aquela também compatível
- Cálculo de deslocamentos em estruturas hiperestáticas
- Nas duas aplicações é importante observar que os esforços devem ser independentes entre si. Para atender essa condição os esforços, objetos de aplicação do teorema, serão definidos sempre em uma estrutura isostática, a original ou uma isostática fundamental selecionada

Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas
Conceituação por exemplo simples

Calcular o deslocamento vertical do ponto C



$$\Pi^*\left(P,R_1\right)=\mathcal{U}^*\left(P,R_1\right)+\mathcal{P}^*\left(R_1\right)$$



$$\mathcal{U}^*=\int_0^{\ell}\frac{M^{e2}}{2EI}dx \qquad \mathcal{P}^*=-R_1U_1$$

R_1 Esforço correspondente ao deslocamento que se quer calcular

Teorema da energia potencial complementar total $\Rightarrow$

$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial R_1}\left(P,0\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\mathcal{U}^*}{\partial R_1}\left(P,0\right)=U_1$$

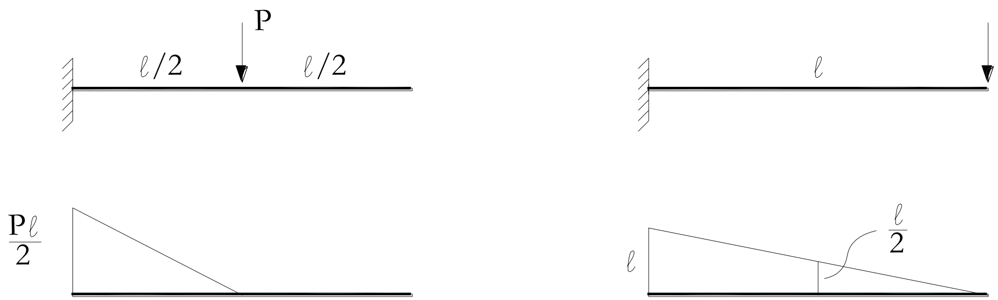
Segundo teorema de Castigliano $\Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial\mathcal{U}^*\left(P,R_1\right)}{\partial R_1}\right|_{R_1=0}=\frac{\partial\mathcal{U}^*}{\partial R_1}\left(P,0\right)=U_1$$

Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas
Conceituação por exemplo simples

Calcular o deslocamento vertical do ponto C

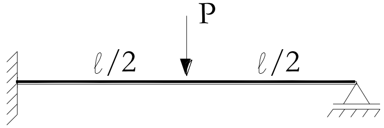
$$U_1 = \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial R_1} = \int_0^\ell \frac{M^e}{EI}\frac{\partial M^e}{\partial R_1}dx \qquad M^e = M + R_1\bar{M}_1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M^e}{\partial R_1} = \bar{M}_1 \\ \left(M\right)_{R_1=0} = M \end{cases}$$



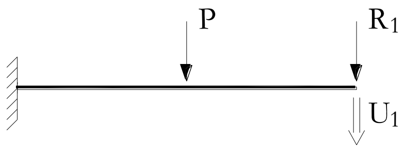
$$U_1 = \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial R_1}\left(P,0\right) = \int_0^\ell \frac{M^e}{EI}\frac{\partial M^e}{\partial R_1}dx = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}_1}{EI}dx = \frac{5P\ell^3}{48EI}$$

Método dos Esforços

Conceituação por exemplo simples



$$\Pi^*\left(P,R_1\right)=\mathcal{U}^*\left(P,R_1\right)+\mathcal{P}^*\left(R_1\right)$$



$$\mathcal{U}^*=\int_0^{\ell}\frac{M^{e2}}{2EI}dx \qquad \mathcal{P}^*=-R_1\hat{U}_1$$

$R_1 = X_1$ Incógnita hiperestática

Teorema da energia potencial complementar total $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\mathcal{U}^*}{\partial X_1}\left(P,X_1\right)=\hat{U}_1$

Segundo teorema de Castigliano $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\Pi^*}{\partial X_1}\left(P,X_1\right)=0 \Rightarrow \dfrac{\partial\mathcal{U}^*}{\partial X_1}\left(P,X_1\right)=\hat{U}_1$

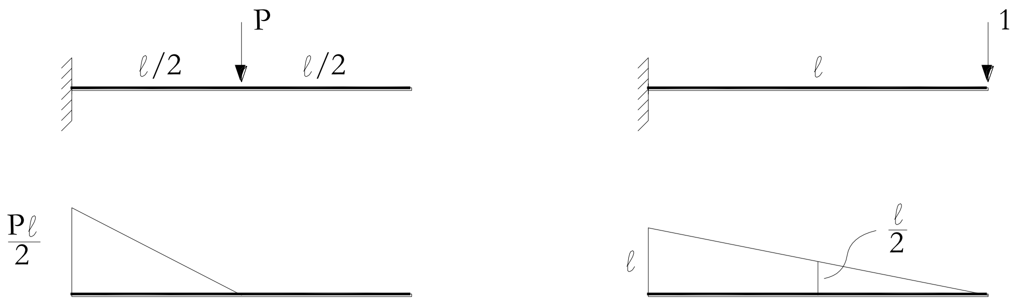
Teorema de Menabrea

Método dos Esforços

Conceituação por exemplo simples

$$\frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial X_1}\left(P, X_1\right) = \int_0^{\ell} \frac{M^e}{EI}\frac{\partial M^e}{\partial X_1}\,dx = 0$$

$$M^e = M_0 + X_1 \bar{M}_1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M^e}{\partial x_1} = M_1 \\ M = M_0 + X_1 \bar{M}_1 \end{cases}$$

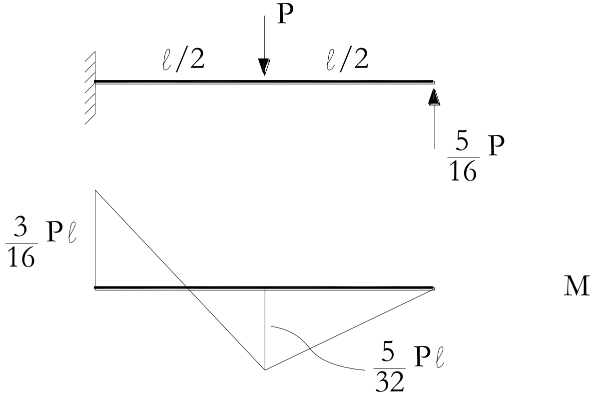


Método dos Esforços

Conceituação por exemplo simples

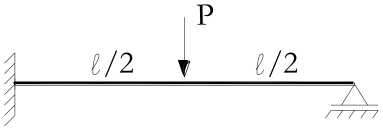
$$\frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial R_1}(P, X_1) = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}_1}{EI}dx = \int_0^\ell \frac{\left(M_0 + X_1\bar{M}_1\right)\bar{M}_1}{EI}dx = \hat{U}_1 = 0$$

$$\int_0^\ell \frac{M_0\bar{M}_1}{EI}dx + X_1\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1\bar{M}_1}{EI}dx = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = -\frac{\int_0^\ell \frac{M_0\bar{M}_1}{EI}dx}{\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1\bar{M}_1}{EI}dx} = -\frac{5}{16}P$$



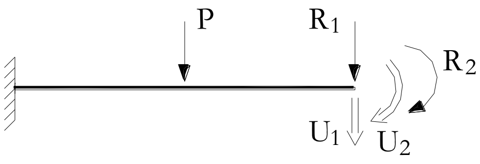
Cálculo de deslocamentos - estruturas hiperestáticas
Conceituação por exemplo simples

Calcular a rotação do ponto C



$$\Pi^*(P,R_1,R_2) = \mathcal{U}^*(P,R_1,R_2) + \mathcal{P}^*(R_1,R_2)$$

(R_1, R_2)



$$\mathcal{U}^* = \int_0^\ell \frac{M^{e2}}{2EI}dx \qquad \mathcal{P}^* = -R_1\hat{U}_1 - R_2U_2$$

$R_1 = X_1 \quad \rightarrow$ incógnita hiperestática

$R_2 \quad \rightarrow$ esforço correspondente ao deslocamento que ser quer calcular

Segundo teorema de Castigliano $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial X_1}(P,X_1,0) = \hat{U}_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial R_2}(P,X_1,0) = U_2 \end{cases}$$

Cálculo de deslocamentos - estruturas hiperestáticas
Conceituação por exemplo simples

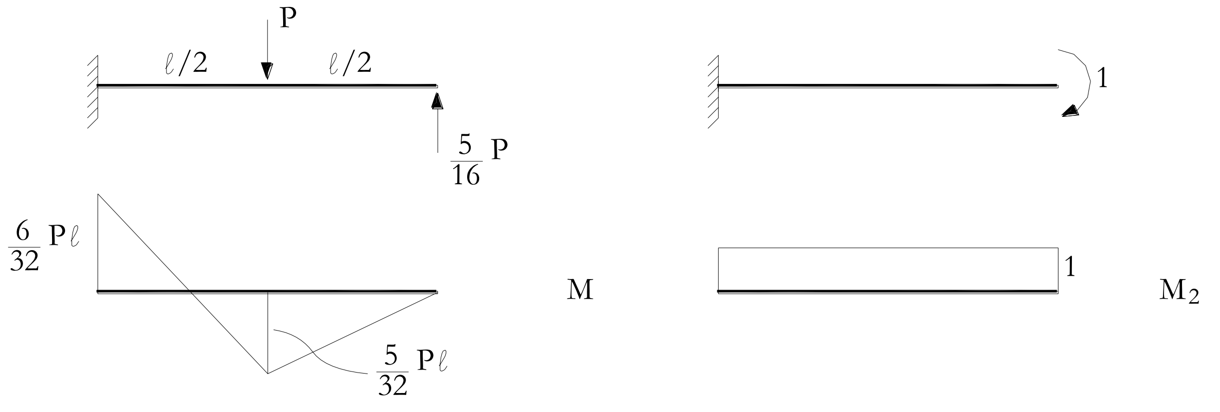
Calcular a rotação do ponto C

$$M^e = M_0 + X_1 \bar{M}_1 + R_2 \bar{M}_2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M^e}{\partial X_1} = \bar{M}_1 \\ \dfrac{\partial M^e}{\partial R_2} = \bar{M}_2 \\ M = M_0 + X_1 \bar{M}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial X_1}\left(P, X_1, 0\right) = \hat{U}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \displaystyle\int_0^\ell \frac{M\bar{M}_1}{EI} dx = 0 \quad \rightarrow \quad X_1 \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial R_2}\left(P, X_1, 0\right) = U_2 \quad \rightarrow \quad \displaystyle\int_0^\ell \frac{M\bar{M}_2}{EI} dx = U_2 \quad \rightarrow \quad U_2 \end{cases}$$

Cálculo de deslocamentos - estruturas hiperestáticas
Conceituação por exemplo simples

Calcular a rotação do ponto C



$$U_2 = \int_0^{\ell} \frac{M\bar{M}_2}{EI}\,dx = -\frac{P\ell^2}{32EI}$$

Observações sobre a aplicação do segundo teorema de Castigliano

$$\Pi^*\left(c.e., R_1, \cdots, R_{n+m}\right) = \mathcal{U}^*\left(c.e., R_1, \cdots, R_{n+m}\right) - \sum_{k=1}^{n+m} R_k U_k$$

$$\Pi^*\left(c.e., X_1, \cdots, X_n, R_1 \cdots, R_m\right) = \mathcal{U}^*\left(c.e., X_1, \cdots, X_n, R_1 \cdots, R_m\right) - \sum_{i=1}^{n} X_i \hat{U}_i - \sum_{j=1}^{m} R_j U_j$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial X_i}\left(c.e., X_1, \cdots, X_n, 0, \cdots, 0\right) = \hat{U}_i \quad \rightarrow$$

Equações reduzidas de compatibilidade, que levantam a indeterminação estática do problema

$$U_j = \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial R_j}\left(c.e., X_1, \cdots, X_n, 0 \cdots, 0\right) \quad \rightarrow$$

Equações para o cálculo dos deslocamentos, correspondentes aos esforços Rj

Método dos esforços

- Formulação direta das equações de compatibilidade, que envolve grandezas vetoriais - forças e deslocamentos

- Formulação baseada no teorema dos esforços virtuais que envolve grandeza escalar - trabalho

- Formulação baseada no teorema da energia potencial total complementar ou no segundo teorema de Castigliano, que envolve grandeza escalar - energia