

L. 187

54

Roberto Arruda de Souza Lima
Adolfo Mamoru Nishiyama

Contratos Bancários

Aspectos Jurídicos e Técnicos
da Matemática Financeira para Advogados

SÃO PAULO
EDITORA ATLAS S.A. - 2007

1

Juros

1.1 Definição

Os juros podem ser definidos como a remuneração atribuída ao capital. Para o capitalista, os juros representam a produtividade do capital. Voltemos ao passado, à Grécia antiga, para compreender melhor esta definição. Considere o caso de um agricultor pobre, que não possui animais para auxiliá-lo no preparo da terra. Esse agricultor procura ajuda junto a um homem rico, que possui excesso de animais em sua propriedade e pede emprestado um animal. O rico aceita emprestar o animal, mas faz a seguinte observação: "Este animal que está sendo emprestado, caso ficasse na minha propriedade, iria reproduzir, gerando mais riqueza. Para que eu não perca esta oportunidade de ganho, será acertado que todos os filhotes que este animal vier a ter no período em que estiver emprestado serão de minha propriedade." Assim, o animal (ou seja, o capital) foi emprestado, mas os seus filhotes (*tokos*,¹ em grego) retornaram ao proprietário. Da mesma forma que o homem que emprestou o animal, quem possui capital e concede um empréstimo deseja receber rendimentos ("filhotes").

Pode-se definir o juro através da ótica do consumidor que decide realizar uma aplicação financeira. Para ele, o juro representa um "prêmio" pela postergação do consumo. Isto porque as pessoas preferem consumir no presente. Para adiarem seu consumo, isto é, para pouparem, exigem um prêmio, um benefício para desistirem de consumir no presente.

¹ Dá a origem da palavra *anatocismo* (do grego, *ana* = repetição; *tokos* = progénie, filhote), que significa a incidência de juros sobre juros, que será discutida adiante (juros compostos).

Os juros podem ser classificados de acordo com suas diversas características, por exemplo, quanto à incorporação de correção monetária.² Neste caso, dividem-se em dois grupos: pós-fixados (quando são aplicados sobre o valor inicial, do empréstimo ou da aplicação, atualizado pela correção monetária) e pré-fixados (quando incluem em sua taxa uma expectativa da correção monetária, sendo aplicados diretamente sobre o principal).

A metodologia de cálculo dos juros, tanto nos pós quanto nos pré-fixados, diverge caso a caso. Mas há uma predominância na aplicação de metodologias diversas, conforme a origem do financiamento: empréstimos externos, por exemplo, costumam ser calculados com juros simples (ou lineares), enquanto empréstimos internos são caracterizados pela capitalização dos juros (juros compostos ou exponenciais).

1.2 Juros simples

O cálculo dos juros simples, também chamados de lineares, é preciso e, conforme sua denominação, de simples aplicação. Neste caso, os juros são calculados (e pagos) unicamente sobre o capital inicial (principal) e proporcionalmente ao tempo em que é aplicado. Genericamente, os juros simples podem ser calculados de acordo com a seguinte expressão:

$$J = P \times i \times n$$

Sendo:

J = valor dos juros;

P = Principal (capital);

i = taxa de juros (forma unitária);³

n = número de períodos (por exemplo, se a taxa estiver expressa em percentual ao ano, n será o número de anos; se a taxa estiver expressa em percentual ao mês, n será o número de meses).

Muitas vezes, deseja-se saber o saldo da operação (empréstimo ou aplicação) e não apenas os juros. Neste caso, pode-se obter o saldo final através da expressão:

² A correção monetária será discutida detalhadamente mais adiante. No momento, basta a definição dada por Diniz (1998): "correção monetária – revisão estipulada pelas partes ou impostas por lei, que tem como ponto de referência a desvalorização da moeda. É a atualização do valor real desta, tendo em vista a data do entabulamento do vínculo e a execução da prestação (R. Limongi França). Trata-se, portanto, de uma operação para atualizar o poder aquisitivo da moeda conforme os índices oficiais baixados pelo governo".

³ Por exemplo, 12% na forma unitária corresponde a 0,12 (isto é, $12 \div 100 = 0,12$).

$$Sd = P + J$$

Ou seja:

$$Sd = P \times (1 + i \times n)$$

Sendo Sd = Saldo final

Na prática, muitas vezes é desejado o cálculo dos juros por um tempo que não necessariamente corresponde a um número exato de períodos. Pode-se ter, por exemplo, uma taxa de juros expressa em percentual ao mês e desejar calcular os juros por 50 dias, ou seja, por prazo maior que um período (30 dias) e menor que dois períodos (60 dias). Para realizar o cálculo em situações como esta, pode ser adotado o seguinte método. A taxa informada é dividida pelo número de dias na forma apresentada (30 se for ao mês e 360 se for ao ano). O resultado desta divisão corresponde a um fator diário que é multiplicado pelo número de dias no período em análise. Por exemplo:

Exemplo 1.2.1 Juros Simples

Questão: Cálculo dos juros simples no período de 92 dias, considerando uma taxa de 3% a.m. (três por cento ao mês):

- transformar a taxa de percentual para a forma unitária:
 $3 \div 100 = 0,03$
- calcular o fator diário:
 $0,03 \div 30 = 0,001$
- calcular a taxa por 92 dias:
 $0,001 \times 92 = 0,092$
- transformar da forma unitária para percentual:
 $0,092 \times 100 = 9,2$

Resposta: 9,2 % no período (que deverão ser aplicados sobre o capital inicial).

Como no exemplo exposto, no cálculo dos juros simples (também chamados de juros lineares), o valor é obtido sem que os juros sejam incorporados ao capital. Portanto, neste caso, os juros não rendem juros.

Para melhor ilustração e compreensão da metodologia de cálculo (e suas implicações), propõem-se os exercícios a seguir (as respostas são apresentadas ao final do livro).

Exercício 1.2.1

Considerando um valor inicial de R\$ 100,00 e juros simples de 10% ao mês, calcular o saldo nas datas do quadro abaixo:

Dias Decorridos	0	30	60	90	120	150
Saldo	100,00					

Exercício 1.2.2

Considerando um valor inicial de R\$ 200,00 e juros simples de 10% ao mês, calcular o saldo nas datas do quadro abaixo:

Dias Decorridos	0	30	60	90	120	150
Saldo	200,00					

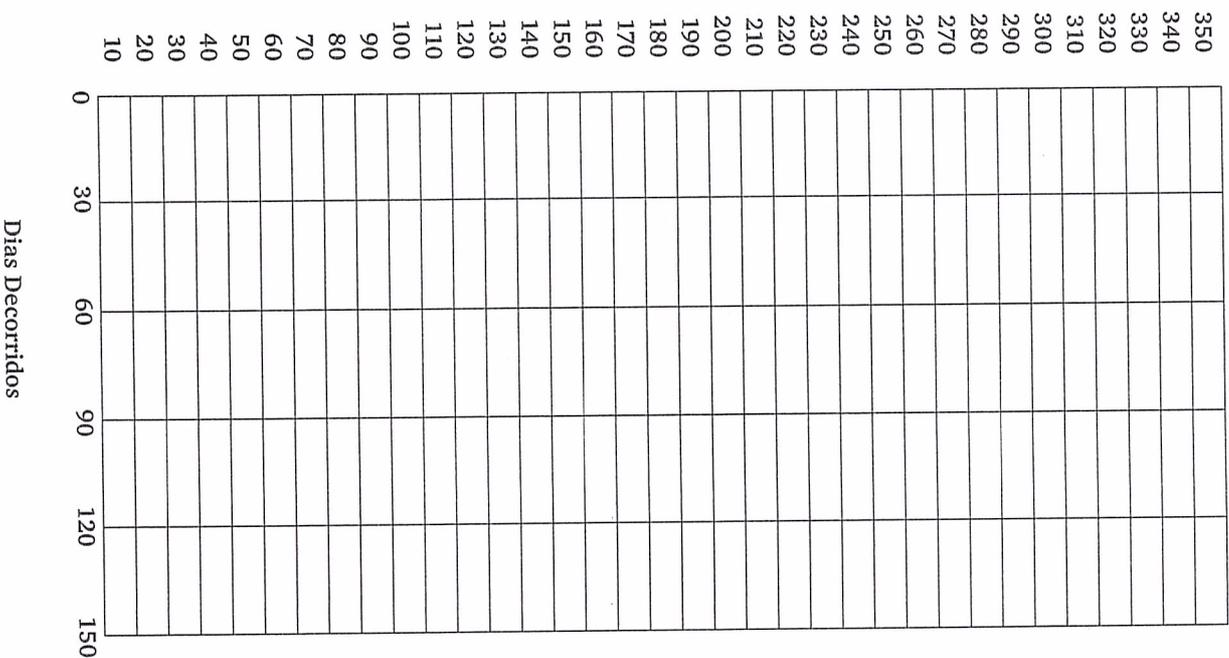
Exercício 1.2.3

Considerando um valor inicial de R\$ 100,00 e juros simples de 20% ao mês, calcular o saldo nas datas do quadro abaixo:

Dias Decorridos	0	30	60	90	120	150
Saldo	100,00					

Exercício 1.2.4

Representar graficamente, a seguir, os resultados obtidos nos exercícios 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3:



Neste momento, já é possível destacar algumas observações sobre os juros simples que serão de grande valia nos comentários e análises que serão apresentados mais adiante.

Primeiro, o impacto causado ao se multiplicar o valor do principal (nos exemplos, o principal foi multiplicado por 2, passando de R\$ 100,00 para R\$ 200,00) é o mesmo da multiplicação da taxa de juros (que, nos exemplos, também foi multiplicada por 2, passando de 10% para 20% a.m.). O impacto referido é a velocidade de crescimento do saldo, ilustrada pela inclinação das retas principal ou dos juros, maior será a velocidade de crescimento (inclinação da reta no gráfico) do saldo.

Verifica-se outra característica dos juros simples através dos exercícios a seguir:

Exercício 1.2.5

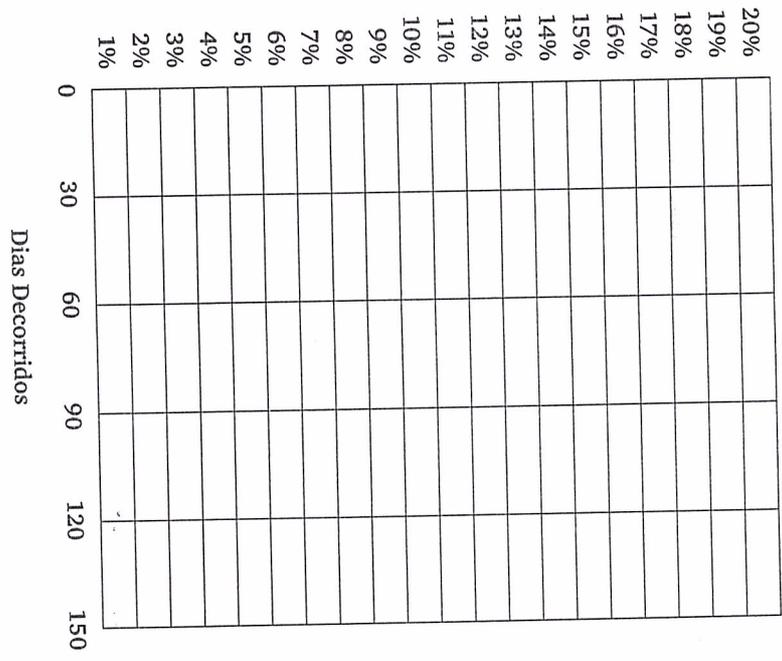
Preencher o quadro a seguir, calculando a variação percentual do saldo a cada mês para os resultados obtidos nos exercícios 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3:

OBS.: Para se obter a variação percentual, deve-se dividir o saldo de determinado mês pelo saldo do mês imediatamente anterior. Do resultado desta divisão deve ser subtraída uma unidade, e este novo resultado deve ser multiplicado por 100. Por exemplo, se o saldo de um mês for 125 e o saldo do mês imediatamente anterior for 100, a variação terá sido de 25%, obtida pelo cálculo: $\{ [(125 \div 100) - 1] \times 100 \}$.

Dias Decorridos	Exercício 1.2.1	Exercício 1.2.2	Exercício 1.2.3
30			
60			
90			
120			
150			

Exercício 1.2.6

Representar graficamente, abaixo, os resultados obtidos no exercício 1.2.5:



Uma importante observação retirada destes exercícios é que, ao adotar os juros simples, o saldo cresce, percentualmente, cada vez menos. A variação do saldo de um período (no caso, 30 dias) é cada vez menor, tendendo a zero. Ou seja, com o passar do tempo, o incremento dos juros passa a ser insignificante em relação ao saldo devedor.

A seguir, são propostos exercícios, mas, antes, os Boxes 1.1 e 1.2 apresentam conceitos introdutórios sobre a utilização de calculadora financeira e de planilhas eletrônicas.

Boxe 1.1 Iniciando a utilização de calculadora financeira.

Diversas marcas e modelos de calculadoras financeiras encontram-se disponíveis no mercado. Ao longo deste livro, estará sendo discutida a utilização da calculadora da marca líder de mercado (Figura 1.1). Os conceitos apresentados são válidos para as demais marcas, eventualmente necessitando de pequenos ajustes que poderão ser verificados no manual do usuário de cada calculadora.

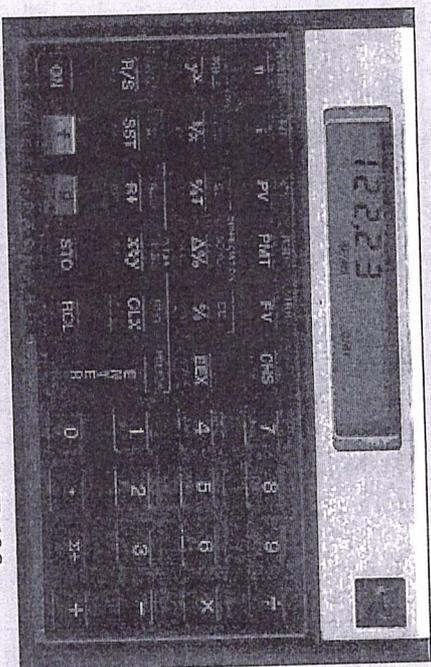


Figura 1.1 Calculadora financeira HP 12C.

Inicialmente, é importante destacar que, internamente, a calculadora armazena os dados em quatro “pastas” (o termo correto é registradores de armazenamento), denominadas pelas letras T, Z, Y e X. Na pasta X fica o número que aparece no visor (no caso da Figura 1.1, o número 122,23). Se for pressionada a tecla “enter” ou introduzido algum outro número, o valor que estava na pasta X é transferido para a pasta Y. Simultaneamente, o número que estava na pasta Y é transferido para a pasta Z, e o da pasta Z, para a pasta T. O que estava na pasta T é descartado.

Os operadores “+”, “×”, “_” e “÷” realizam, respectivamente, a divisão, multiplicação, subtração e soma do número que está na pasta Y pelo número que está na pasta X. Assim, para calcular o valor de juros correspondente a 10% do valor de um principal de R\$ 120,00, devem-se realizar as seguintes operações:

Pressionar	Visor	Pasta X	Pasta Y	Pasta Z	Pasta T
120	120,00	120,00	0,00	0,00	0,00
enter	120,00	120,00	120,00	0,00	0,00
10	10,00	10,00	120,00	0,00	0,00
100	100,00	100,00	10,00	120,00	0,00
÷	0,10	0,10	120,00	0,00	0,00
X	12,00	12,00	0,00	0,00	0,00

Observa-se que o resultado obtido é R\$ 12,00.

Boxe 1.2 Iniciando a utilização de planilha eletrônica.

Da mesma forma que as calculadoras financeiras, diversas marcas e modelos de planilhas eletrônicas encontram-se disponíveis no mercado. Ao longo deste livro, é discutida a utilização da planilha eletrônica líder de mercado, que compõe o pacote Office da Microsoft (Excel). Os conceitos apresentados são válidos para as demais marcas, eventualmente necessitando de pequenos ajustes que poderão ser verificados no manual do usuário de cada planilha eletrônica. Para calcular o valor de juros correspondente a 10% do valor de um principal de R\$ 120,00, podem-se realizar as seguintes operações (Figura 1.2):

- Digitar na célula B3: Principal
- Digitar na célula C5: 120
- Digitar na célula B5: Taxa de juros
- Digitar na célula C5: 0,1
- Digitar na célula B7: Juros
- Digitar na célula C5: =C3*C5

Note que na célula C5 foi digitada uma fórmula matemática. Ela inicia-se com o sinal “=”, que indica que será digitada uma fórmula e não um texto. A seguir, é dada a operação desejada, no caso, o valor do principal multiplicado pela taxa de juros. Note que o operador da multiplicação é, no Excel, o símbolo “*”.

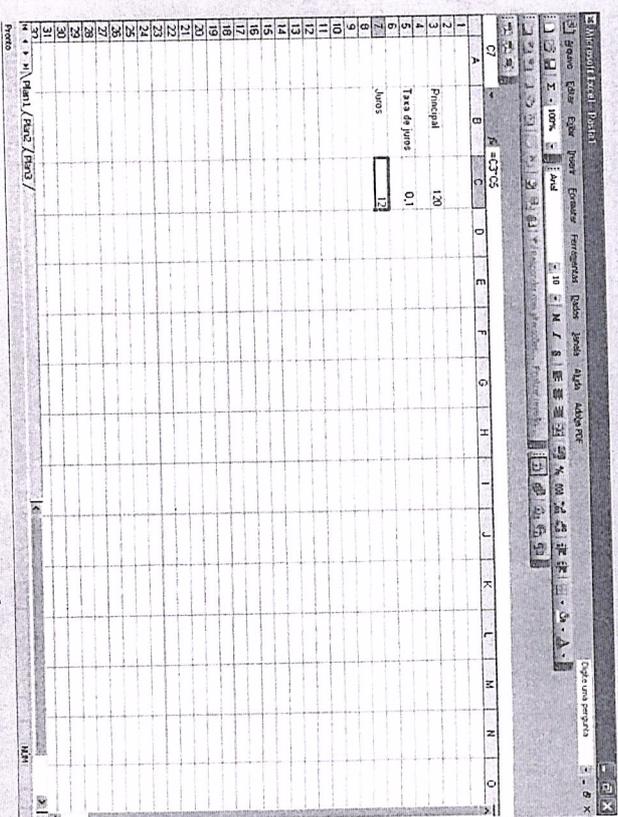


Figura 1.2 Planilha Microsoft Excel.

1.3 Exercícios resolvidos – juros simples

Exercício 1.3.1

Um indivíduo toma um empréstimo de R\$ 100,00 pelo prazo de 7 anos (84 meses). O banco cobra juros simples de 1,0% ao mês. Calcule o valor anual dos juros e o saldo devedor ao final de cada ano. Considere que não ocorre capitalização anual dos juros.⁴

Resposta:

Taxa de juros anual: $1\% \text{ a.m.} \times 12 \text{ meses} = 12\% \text{ a.a.}$

Valor dos juros anuais: $R\$ 100,00 \times 12\% \text{ a.a.} = R\$ 12,00$ por ano

Ano	Saldo Inicial	Juros	Saldo Final
0	R\$ 100,00	0	R\$ 100,00
1	R\$ 100,00	R\$ 12,00	R\$ 112,00
2	R\$ 112,00	R\$ 12,00	R\$ 124,00
3	R\$ 124,00	R\$ 12,00	R\$ 136,00
4	R\$ 136,00	R\$ 12,00	R\$ 148,00
5	R\$ 148,00	R\$ 12,00	R\$ 160,00
6	R\$ 160,00	R\$ 12,00	R\$ 172,00
7	R\$ 172,00	R\$ 12,00	R\$ 184,00

Exercício 1.3.2

Um indivíduo realiza uma aplicação de R\$ 120,00 pelo prazo de 5 anos (60 meses). O banco remunerará a aplicação com juros simples de 1,0% ao mês. Calcule o valor anual dos juros e o saldo ao final de cada ano. Considere que não ocorre capitalização anual dos juros.

Resposta:

Taxa de juros anual: $1\% \text{ a.m.} \times 12 \text{ meses} = 12\% \text{ a.a.}$

Valor dos juros anuais: $R\$ 120,00 \times 12\% \text{ a.a.} = R\$ 14,40$ por ano

Ano	Saldo Inicial	Juros	Saldo Final
0	R\$ 120,00	0	R\$ 120,00
1	R\$ 120,00	R\$ 14,40	R\$ 134,40
2	R\$ 134,40	R\$ 14,40	R\$ 148,80
3	R\$ 148,80	R\$ 14,40	R\$ 163,20
4	R\$ 163,20	R\$ 14,40	R\$ 177,60
5	R\$ 177,60	R\$ 14,40	R\$ 192,00

Exercício 1.3.3

Um indivíduo realiza uma aplicação de R\$ 200,00 pelo prazo de 3 meses. No vencimento, é resgatado o valor do principal acrescido dos juros, totalizando R\$ 230,00. Considerando que os juros da aplicação eram simples, calcule a taxa mensal de juros desta operação.

Resposta:

Total de juros recebidos: $R\$ 230,00 - R\$ 200,00 = R\$ 30,00$

Percentual de juros recebidos no período:

$$R\$ 30,00 \div R\$ 200,00 = 0,15 = 15\%$$

Taxa de juros mensal: $15\% \div 3 \text{ meses} = 5\% \text{ a.m.}$

Exercício 1.3.4

Um indivíduo toma um empréstimo de R\$ 160,00 pelo prazo de 100 dias. O banco cobra juros simples de 9,0% ao ano. Calcule o valor total (principal acrescido de juros) que deverá ser pago no vencimento desta operação.

Resposta:

Taxa de juros ao dia: $9\% \div 360 \text{ dias} = 0,025\% \text{ ao dia}$

Percentual de juros no período: $0,025\% \text{ ao dia} \times 100 \text{ dias} = 2,5\%$

Valor dos juros: $R\$ 160,00 \times 2,5\% = R\$ 4,00$

Valor total no vencimento: $R\$ 160,00 + R\$ 4,00 = R\$ 164,00$

Exercício 1.3.5

Um indivíduo deseja adquirir uma mercadoria que custa R\$ 1.040,00. Para tanto, deseja utilizar exclusivamente o valor que será investido, hoje, em uma aplicação que lhe rende 6% ao ano (juros simples). O valor total de sua aplicação, hoje, corresponde a apenas R\$ 1.000,00. Quantos meses o aplicador deverá aguardar até possuir o montante de recursos necessário para sua compra?

Resposta:

Valor de rendimentos de que necessita:

$$R\$ 1.040,00 - R\$ 1.000,00 = R\$ 40,00$$

Taxa de juros ao mês: $6\% \text{ a.a.} \div 12 \text{ meses} = 0,5\% \text{ a.m.}$

Valor dos juros a cada mês: $R\$ 1.000,00 \times 0,5\% = R\$ 5,00$

Número de meses que deverá aguardar: $R\$ 40,00 \div R\$ 5,00 = 8$

O aplicador deverá aguardar 8 meses até possuir o montante de recursos necessário para sua compra.

⁴ A capitalização de juros será discutida posteriormente.

1.4 Exercícios propostos – juros simples

Exercício 1.4.1

Um comerciante compra mercadorias com 120 dias de prazo para pagar. Sobre o preço a vista das mercadorias, que é de R\$ 500,00 cada unidade, seus fornecedores acrescentam 6% ao ano de juros simples. O comerciante vende as mercadorias também por R\$ 500,00 para seus clientes pagarem em 90 dias, mas acrescenta 0,7% ao mês de juros simples. Desconsiderando outras despesas e receitas, o comerciante tem lucro ou prejuízo nas suas atividades?

Exercício 1.4.2

Um investidor pode aplicar seus recursos em três bancos. O Banco A oferece juros de 8% ao ano; o Banco B, juros de 0,7% ao mês; e o Banco C, juros de 2,2% ao trimestre. Qual banco oferece maior rentabilidade para o investidor?

Exercício 1.4.3

Um indivíduo toma um empréstimo de R\$ 500,00 pelo prazo de 60 dias. O banco cobra juros simples de 7,5% ao ano. Calcule o valor de juros que deverá ser pago no vencimento desta operação.

Exercício 1.4.4

Uma loja oferece uma mercadoria por R\$ 600,00 a vista. Se o cliente optar por comprá-la a prazo, será vendida por R\$ 624,00 para ser paga em 40 dias. Qual é a taxa de juros simples, ao ano, cobrada pela loja?

Exercício 1.4.5

Um indivíduo possui R\$ 900,00 em uma aplicação que lhe rende 2,2% ao mês (juros simples). Deseja adquirir uma mercadoria que custa R\$ 900,00 a vista ou R\$ 960,00 para pagar com 90 dias de prazo. Deve comprar a vista ou a prazo?

Respostas:

Exercício 1.4.1: Lucro de R\$ 0,50 por unidade da mercadoria.

Exercício 1.4.2: Banco C.

Exercício 1.4.3: R\$ 6,25.

Exercício 1.4.4: 36% ao ano.

Exercício 1.4.5: A vista.

1.5 Juros compostos

No cálculo composto (também chamado de exponencial), amplamente utilizado nas operações bancárias no Brasil, os juros são incorporados ao principal, passando também a render juros. Em outras palavras, os juros gerados pela aplicação são incorporados à mesma, participando da geração de juros no período seguinte. Genericamente, os juros compostos podem ser calculados de acordo com a seguinte expressão:

$$J = P \times [(1 + i)^n - 1]$$

Sendo:

J = valor dos juros pagos;

P = Principal (capital);

i = taxa de juros (forma unitária);

n = número de períodos.

Muitas vezes, deseja-se saber o saldo da operação (empréstimo ou aplicação) e não apenas os juros. Neste caso, pode-se obter o saldo final através da expressão:

$$Sd = P + J$$

Ou seja:

$$Sd = P \times [(1 + i)^n]$$

Sendo Sd = Saldo final

O cálculo dos juros compostos é mais complexo. Se a capitalização dos juros for diária, como tem sido a prática bancária no Brasil, a taxa é transformada em um fator diário que é capitalizado até a data final do período através de operações exponenciais.

Para o cálculo do fator diário, a taxa de juros é colocada na forma unitária (por exemplo, 12% são transformados em 0,12). A seguir é adicionado 1 (uma unidade), que representa a incorporação do principal. Desta soma é obtida a raiz referente ao número de dias em que a taxa foi informada (raiz quadrada se a taxa era de 12% por dois dias, raiz cúbica se a taxa era de 12% por 3 dias, raiz

trigésima se a taxa era 12% ao mês, e assim por diante). O resultado desta operação é elevado a potência equivalente ao número de dias do período que está sendo calculado (ao quadrado se for por dois dias, elevado a 92 se o período a ser calculado for de 92 dias, e assim por diante). Para se obter a taxa de juros, deve-se retirar 1 (uma unidade, que representou a incorporação do principal) do resultado obtido e multiplicar o resultado por 100 (para se obter a taxa em percentual). O exemplo a seguir ilustra esta forma de cálculo:

Exemplo 1.5.1 Juros exponenciais.

Questão: Cálculo dos juros compostos no período de 92 dias, considerando uma taxa de 3% a.m. (três por cento ao mês):

- a) colocar na forma unitária: $3 \div 100 = 0,03$
- b) calcular o fator diário de forma exponencial, isto é, extraindo a raiz trigésima (preferente aos 30 dias do mês):

$$\sqrt[30]{(1 + 0,03)} = 1,000985779$$

- c) calcular a taxa no período de 92 dias:

$$(1,000985779)^{92} - 1 = 0,094882440 \approx 0,095$$

Resposta: 9,5% no período.

Para melhor ilustração e compreensão da metodologia de cálculo (e suas implicações), propõem-se os exercícios a seguir (as respostas são apresentadas ao final deste livro). Antes, porém, os Boxes 1.3 e 1.4 apresentam como realizar os cálculos com a utilização de calculadora financeira e de planilhas eletrônicas.

Boxe 1.3 Cálculo de juros compostos utilizando calculadora financeira.

Três teclas que não haviam sido utilizadas no cálculo com juros simples serão importantes agora. A tecla “x^{xy}” faz com que o número que está na pasta X troque de posição com o número que está na pasta Y. A tecla “y^x” eleva o número que está na pasta Y à potência equivalente ao número que está na pasta X. E a tecla “1/x” calcula o quociente da divisão de 1 pelo número que está na pasta X.

Adicionalmente, convém relembrar que extrair a raiz de um número é o mesmo que elevar este número à potência 1/n (por exemplo, $\sqrt[3]{27} = 27^{1/3}$). Assim, o exemplo 1.5.1 pode ser resolvido da seguinte forma:

Pressionar	Visor	Pasta X	Pasta Y	Pasta Z	Pasta T
3	3,00	3,00	0,00	0,00	0,00
enter	3,00	3,00	3,00	0,00	0,00
100	100,00	100,00	3,00	0,00	0,00
÷	0,03	0,03	0,00	0,00	0,00
1	1,00	1,00	0,03	0,00	0,00
+	1,03	1,03	0,00	0,00	0,00
30	30,00	30,00	1,03	0,00	0,00
1/x	0,03	0,03	1,03	0,00	0,00
y ^x	1,000986	1,000986	0,00	0,00	0,00
92	92,000000	1,000986	1,000986	0,00	0,00
y ^x	1,094882	1,094882	0,00	0,00	0,00
1	1,000000	1,000000	1,094882	0,00	0,00
-	0,094882	0,094882	0,00	0,00	0,00
100	100,000000	100,000000	0,094882	0,00	0,00
×	9,488	9,488	0,00	0,00	0,00

Observação: Para definir o número de casas decimais, devem-se pressionar as teclas f (amarela) e, na sequência, o número de casas decimais desejadas.

A matemática nos diz que a equação a seguir é verdadeira:

$$\left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \left(x^{1/m}\right)^n = x^{n/m}$$

Por exemplo:

$$\left(\sqrt[3]{8}\right)^6 = \left(8^{1/3}\right)^6 = 8^{2} = 64$$

Esta equação é útil quando o problema apresentado no exemplo 1.5.1 é resolvido da seguinte forma:

$$\text{Taxa de juros} = \left(\sqrt[30]{1 + 0,03} \right)^{92} - 1 = \left(1,03^{1/30} \right)^{92} - 1 = 1,03^{92/30} - 1 \approx 0,095$$

Boxe 1.4 Cálculo de juros compostos utilizando planilha financeira.

O problema apresentado no exemplo 1.5.1 pode ser resolvido utilizando-se planilha financeira. Antes de apresentar esta resposta, é importante destacar que, no Excel, o símbolo “^” significa “elevado à potência”. Por exemplo: 3^2 = 9, ou seja, três ao quadrado é igual a nove.

Fazendo o cálculo passo a passo:

- digitar na célula B3: taxa ao mês;
- digitar na célula C5: 3;
- digitar na célula B5: número de dias;
- digitar na célula C5: 92;
- digitar na célula B7: taxa no período;
- digitar na célula C5: =(1+C3/100)^(C5/30)-1.

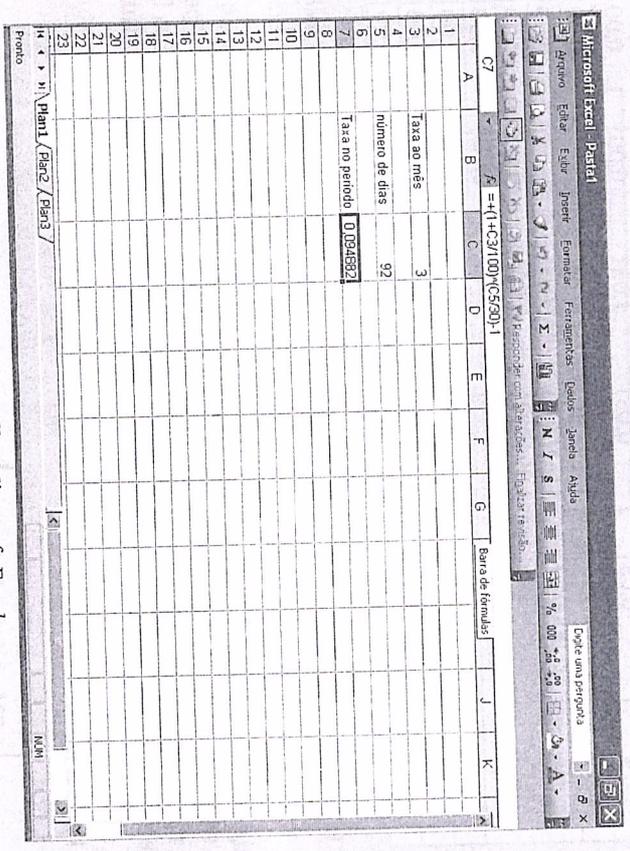


Figura 1.3 Planilha Microsoft Excel.

Exercício 1.5.1

Considerando um valor inicial de R\$ 100,00 e juros compostos de 10% ao mês, calcular o saldo nas datas do quadro abaixo:

Dias Decorridos	0	30	60	90	120	150
Saldo	100,00					

Exercício 1.5.2

Considerando um valor inicial de R\$ 200,00 e juros compostos de 10% ao mês, calcular o saldo nas datas do quadro abaixo:

Dias Decorridos	0	30	60	90	120	150
Saldo	200,00					

Exercício 1.5.3

Considerando um valor inicial de R\$ 100,00 e juros compostos de 20% ao mês, calcular o saldo nas datas do quadro abaixo:

Dias Decorridos	0	30	60	90	120	150
Saldo	100,00					

Exercício 1.5.4

Representar graficamente, na folha a seguir, os resultados obtidos nos exercícios 1.5.1, 1.5.2 e 1.5.3:

350				
340				
330				
320				
310				
300				
290				
280				
270				
260				
250				
240				
230				
220				
210				
200				
190				
180				
170				
160				
150				
140				
130				
120				
110				
100				
90				
80				
70				
60				
50				
40				
30				
20				
10				
0				

Dias Decorridos

Neste momento, já é possível destacar uma observação sobre os juros compostos que os diferencia dos simples.

O impacto causado ao multiplicar o valor do principal (nos exemplos, multiplicou-se o principal por 2, que passou de R\$ 100,00 para R\$ 200,00) é bem menos significativo que o da multiplicação da taxa de juros (que também foi multiplicada por 2, passando de 10% para 20% a.m.). O impacto referido é a velocidade de crescimento do saldo, ilustrada pelas inclinações das curvas do exercício 1.5.4.

Verifica-se outra característica dos juros compostos através dos exercícios a seguir:

Exercício 1.5.5

Preencher o quadro a seguir, calculando a variação percentual do saldo a cada mês para os resultados obtidos nos exercícios 1.5.1, 1.5.2 e 1.5.3:

OBS.: Para se obter a variação percentual, deve-se dividir o saldo de um determinado mês pelo saldo do mês imediatamente anterior. Do resultado desta divisão deve ser subtraída uma unidade, e este novo resultado deve ser multiplicado por 100. Por exemplo, se o saldo do mês for 125 e o saldo do mês imediatamente anterior for 100, a variação terá sido de 25%, obtida pelo cálculo $\{ [(125 \div 100) - 1] \times 100 \}$.

Dias Decorridos	Exercício 1.5.1	Exercício 1.5.2	Exercício 1.5.3
30			
60			
90			
120			
150			

Exercício 1.5.6

Representar graficamente, abaixo, os resultados obtidos no exercício 1.5.5:

20%				
19%				
18%				
17%				
16%				
15%				
14%				
13%				
12%				
11%				
10%				
9%				
8%				
7%				
6%				
5%				
4%				
3%				
2%				
1%				
0				

Dias Decorridos

Uma importante observação retirada destes exercícios é que, ao se adotarem os juros compostos, o saldo cresce, percentualmente, igualmente a cada período. Ou seja, com o passar do tempo, o incremento dos juros representa o mesmo impacto sobre o saldo devedor.

1.6 Exercícios resolvidos – juros compostos

Exercício 1.6.1

Um indivíduo toma um empréstimo de R\$ 100,00 pelo prazo de 7 anos (84 meses). O banco cobra juros compostos de 1,0% ao mês. Calcule o valor anual dos juros e o saldo devedor ao final de cada ano. Considere que ocorre capitalização mensal dos juros.

Resposta:

Taxa de juros anual: $(1,01)^{12} - 1 = 0,126825 = 12,6825\%$ a.a.

Ano	Saldo Inicial	Juros	Saldo Final
0	R\$ 100,00	0	R\$ 100,00
1	R\$ 100,00	R\$ 12,68	R\$ 112,68
2	R\$ 112,68	R\$ 14,29	R\$ 126,97
3	R\$ 126,97	R\$ 16,10	R\$ 143,08
4	R\$ 143,08	R\$ 18,15	R\$ 161,22
5	R\$ 161,22	R\$ 20,45	R\$ 181,67
6	R\$ 181,67	R\$ 23,04	R\$ 204,71
7	R\$ 204,71	R\$ 25,96	R\$ 230,67

Observação: Houve arredondamento de centavos.

Exercício 1.6.2

Um indivíduo realiza uma aplicação de R\$ 120,00 pelo prazo de 5 anos (60 meses). O banco remunera a aplicação com juros compostos de 1,0% ao mês. Calcule o valor anual dos juros e o saldo ao final de cada ano. Considere que ocorre capitalização mensal dos juros.

Resposta:

Taxa de juros anual: $(1,01)^{12} - 1 = 0,126825 = 12,6825\%$ a.a.

Ano	Saldo Inicial	Juros	Saldo Final
0	R\$ 120,00	0	R\$ 120,00
1	R\$ 120,00	R\$ 15,22	R\$ 135,22
2	R\$ 135,22	R\$ 17,15	R\$ 152,37
3	R\$ 152,37	R\$ 19,32	R\$ 171,69
4	R\$ 171,69	R\$ 21,77	R\$ 193,47
5	R\$ 193,47	R\$ 24,54	R\$ 218,00

Observação: Houve arredondamento de centavos.

Exercício 1.6.3

Um indivíduo realiza uma aplicação de R\$ 400,00 pelo prazo de três meses. No vencimento, é resgatado o valor do principal acrescido dos juros, totalizando R\$ 463,05. Considerando que os juros da aplicação eram compostos, calcule a taxa mensal de juros desta operação. Considere que ocorre capitalização mensal dos juros.

Resposta:

Total de juros recebidos: R\$ 463,05 – R\$ 400,00 = R\$ 63,05

Percentual de juros no período: $R\$ 63,05 \div R\$ 400,00 = 0,157625 = 15,7625\%$

Taxa de juros mensal: $\sqrt[3]{1,157625} - 1 = 0,05 = 5\%$

Taxa de juros = 5% ao mês

Exercício 1.6.4

Um indivíduo toma um empréstimo de R\$ 160,00 pelo prazo de 100 dias. O banco cobra juros compostos de 9,0% ao ano. Calcule o valor total (principal acrescido de juros) que deverá ser pago no vencimento desta operação. Considere que ocorre capitalização diária dos juros.

Resposta:

Taxa de juros ao dia: $\sqrt[360]{1,09} - 1 = 0,000239411 = 0,0239411\%$

Percentual de juros no período: $(1,000239411)^{100} - 1 = 0,024227 = 2,4227\%$

Valor dos juros: R\$ 160,00 \times 2,4227% = R\$ 3,88

Valor total no vencimento: R\$ 160,00 + R\$ 3,88 = R\$ 163,88

Exercício 1.6.5

Um indivíduo deseja adquirir uma mercadoria que custa R\$ 1.040,00. Para tanto, vai utilizar exclusivamente o valor que tem investido em uma aplicação que lhe rende 6% ao ano (juros compostos). O valor total de sua aplicação, hoje, corresponde a apenas R\$ 1.000,00. Quantos meses o aplicador deverá aguardar até possuir o montante de recursos necessário para sua compra? Considere que ocorre capitalização mensal dos juros.

Resposta:

Ao contrário do exercício 1.3.5, que considerava os juros simples, a res-
posta deste exercício requer maiores conhecimentos matemáticos, acima do
nível proposto para este texto. O objetivo deste exercício é a verificação, pelo
leitor, da maior complexidade do cálculo que envolve juros compostos.

Para saciar a curiosidade do leitor mais interessado, é apresentada abaixo
a solução deste problema. O leitor que encontrar maior dificuldade nesta
resposta poderá desconsiderar este exercício sem prejuízo da continuidade
da leitura.

Valor de rendimentos de que necessita: R\$ 1.040,00 – R\$ 1.000,00 =
R\$ 40,00

Taxa de rendimento mínima: R\$ 40,00 ÷ R\$ 1.000,00 = 0,04 = 4%

Taxa de juros ao mês: $\sqrt[12]{1,06} - 1 = 0,00486755 = 0,486755\%$

Taxa de juros após n meses = $(1,00486755)^n - 1$

Deseja-se obter n tal que:

$(1,00486755)^n - 1 = 0,04$, ou seja,

$(1,00486755)^n = 1,04$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da equação:

$\ln(1,00486755)^n = \ln(1,04)$

$n \ln(1,00486755) = \ln(1,04)$

$n(0,00485574) = 0,03922071$

$n = 0,03922071 \div 0,00485574 = 8,08$

Como o rendimento, neste caso, é mensal, o arredondamento é realizado
para cima, isto é, passamos de 8,08 para 9.

O aplicador deverá aguardar 9 meses até possuir o montante de recursos ne-
cessário para sua compra.

1.7 Exercícios propostos – juros compostos**Exercício 1.7.1**

Um comerciante compra mercadorias com 120 dias de prazo para pagar.
Sobre o preço a vista das mercadorias, que é de R\$ 500,00 cada unidade, seus
fornecedores acrescentam 6% ao ano de juros compostos. O comerciante vende
as mercadorias também por R\$ 500,00 para seus clientes pagarem em 90 dias,
mas acrescenta 0,7% ao mês de juros compostos. Desconsiderando outras des-
pesas e receitas, ele tem lucro ou prejuízo nas suas atividades? Considere que
ocorre capitalização mensal dos juros.

Exercício 1.7.2

Um investidor pode aplicar seus recursos em três bancos. O Banco A oferece
juros de 8% ao ano; o Banco B, juros de 0,7% ao mês; e o Banco C, juros de 2,2%
ao trimestre. Qual banco oferece maior rentabilidade para o investidor? Consi-
dere que ocorre capitalização mensal dos juros.

Exercício 1.7.3

Um indivíduo toma um empréstimo de R\$ 500,00 pelo prazo de 60 dias. O
banco cobra juros compostos de 7,5% ao ano. Calcule o valor de juros que deve-
rá ser pago no vencimento desta operação. Considere que ocorre capitalização
diária dos juros.

Exercício 1.7.4

Uma loja oferece uma mercadoria por R\$ 600,00 a vista. Se o cliente optar
por comprá-la a prazo, a mesma é vendida por R\$ 630,00 para ser paga em 60
dias. Qual é a taxa de juros compostos, ao ano, cobrada pela loja? Considere que
ocorre capitalização mensal dos juros.

Exercício 1.7.5

Um indivíduo possui R\$ 900,00 em uma aplicação que lhe rende 2,2% ao mês
(juros compostos). Ele deseja adquirir uma mercadoria que custa R\$ 900,00 a vista
ou R\$ 960,00 para pagar com 90 dias de prazo. Deve comprar a vista ou a prazo?

Respostas:

Exercício 1.7.1: Lucro de R\$ 0,77 por unidade da mercadoria.

Exercício 1.7.2: Banco C.

Exercício 1.7.3: R\$ 6,06.

Exercício 1.7.4: 34% ao ano.

Exercício 1.7.5: A prazo.

1.8 Comparação: juros simples × compostos

Nos simples exemplos apresentados, já fica evidenciada a diferença que há nos resultados das duas metodologias de cálculo de juros (simples e compostos). Nota-se que o saldo devedor eleva-se mais rápido no cálculo composto (exponencial). Quanto maior o prazo e maior a taxa, mais evidente é a diferença.

A Figura 1.4 ilustra a evolução do saldo (principal acrescido de juros), utilizando as duas metodologias:

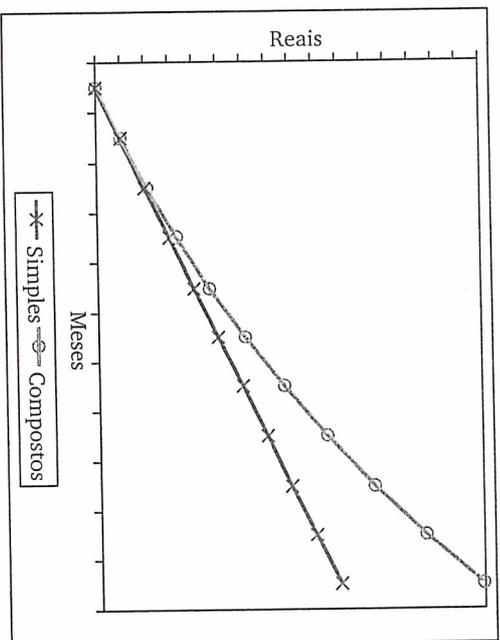


Figura 1.4 Comparação entre juros simples e compostos: evolução do saldo devedor.

O Quadro 1.1 apresenta os valores utilizados na Figura 1.4, que parte de um saldo de R\$ 100,00 e cresce juros de 10% a.m.

Quadro 1.1 Evolução do saldo devedor.

Mês	Cálculos Simples		Cálculos Compostos	
	Juros	Saldo	Juros	Saldo
Início	-	100,00	-	100,00
1	10,00	110,00	10,00	110,00
2	10,00	120,00	11,00	121,00
3	10,00	130,00	12,10	133,10
4	10,00	140,00	13,31	146,41
5	10,00	150,00	14,64	161,05
6	10,00	160,00	16,11	177,16
7	10,00	170,00	17,72	194,87
8	10,00	180,00	19,49	214,36
9	10,00	190,00	21,44	235,79
10	10,00	200,00	23,58	259,37
			5,3 %	10,0 %

Do Quadro 1.1, um dos fatos que pode ser observado, e que já foi anteriormente comentado, é que no cálculo linear, dos juros simples, o acréscimo representado pelos juros nos saldos é proporcionalmente cada vez menor, 10%, 9%, 8%, tendendo a zero à medida que aumenta o número de meses.

É interessante observar o efeito da capitalização dos juros sobre a evolução do saldo devedor. Em alguns casos, o crescimento do saldo devedor pode ocorrer de forma mais próxima daquela verificada na aplicação de juros compostos, quando comparados à utilização de juros simples sem capitalização anual. A Figura 1.5 ilustra esta situação, partindo de R\$ 100,00, considerando uma taxa de juros de 1% ao mês e o prazo total de 240 meses.

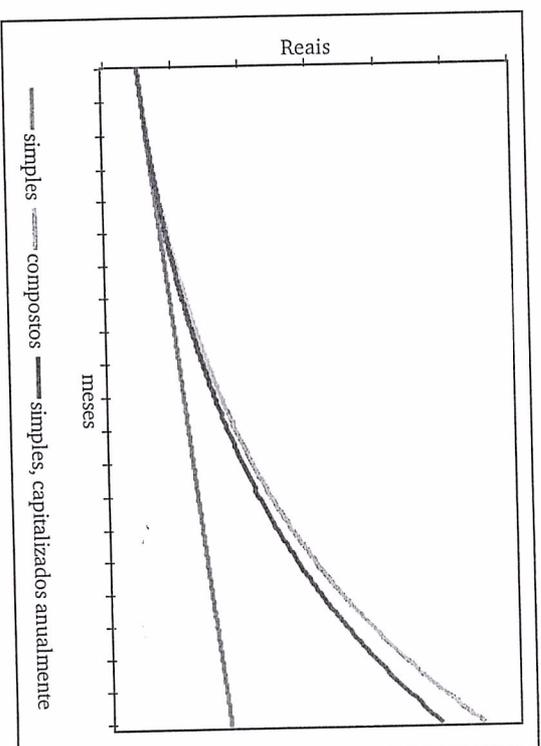


Figura 1.5 Evolução do saldo devedor considerando a capitalização anual dos juros.

1.9 Aplicação prática – juros

A Figura 1.6 apresenta uma cópia da primeira página de uma cédula rural pignoratícia, emitida em 1990 com vencimento em 10 de novembro de 1991. O valor do título era de CR\$ 35.967.292,62.

Observe que o valor total do título foi dividido em duas parcelas (destacadas na margem da Figura 1.5 como subtítulo A e subtítulo B), com incidência de diferentes taxas de juros (destacadas na margem da Figura 1.6 como taxa A e taxa B).

Sobre a primeira parcela (subtotal A), o contrato previa incidência de taxa de juros de 9,0% a.a. (taxa A). Já na segunda parcela (subtotal B), a cédula estipulava a cobrança de taxa de juros de 3,25% a.m. (taxa B).