DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA NAVAL E OCEÂNICA
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PNV3324 FUNDAMENTOS DE CONTROLE EM ENGENHARIA

NOTAS DE AULA*

Prof. Helio Mitio Morishita

* Este texto é um mero roteiro de estudo e não substitui as referências bibliográficas indicadas para a disciplina.

3 TÉCNICAS DE ANÁLISE DE SISTEMAS LINEARES**

**Texto baseado no livro:

Schwarz, R. J e Friedland, G. Sistemas Lineares, Ao Livro Técnico e Editôra da Universidade de São Paulo, 1972

Até o presente momento foi visto que é necessário obter o modelo matemático do sistema a ser controlado para se projetar o controlador. Este modelo matemático é representado por equações diferenciai e o desempenho do sistema de controle é avaliado através da sua resposta. Isto significa que deve-se resolver a equação diferencial sujeita a um termo forçante com determinadas condições iniciais. Para obter a resposta do sistema existem dois procedimentos:

a) resolver diretamente a equação diferencial. Este procedimento nem sempre é possível pois muitas vezes é difícil obter a solução particular;
b) Dividir a entrada em conjunto de funções elementares, todas similares em forma. Obtém-se então a resposta do sistema para a função elementar e a resposta será então a composição da entrada de todas as funções elementares.

Na área de controle normalmente adota-se a segunda alternativa e serão consideradas duas funções elementares: a primeira é a “função” impulso e a segunda uma função harmônica que recai na Transformada de Fourier e de Laplace.

3.1 RESPOSTA DE UM SISTEMA CONTÍNUO NO DOMÍNIO DO TEMPO

O objetivo deste capítulo é obter uma expressão para a resposta de um sistema para uma entrada qualquer. O procedimento a ser utilizado é válido somente para sistemas lineares e consiste em decompor o sinal de entrada em impulso unidade, obter a resposta do sistema a este impulso e obter a resposta do sistema como a composição dos sinais de entrada.

3.1.1 DECOMPOSIÇÃO DE SINAIS CONTÍNUOS NO TEMPO EM IMPULSOS UNIDADE

Para efetuar a decomposição de sinais será definida, inicialmente, a função pulso unitário como sendo:

$$p_\tau(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau} & para\ 0 \le t < \tau \\ 0 & para\ \ t < 0\ \ e\ \ t \ge \tau \end{cases} \tag{3.1}$$

Um sinal *f(t)*, como mostrado na Fig. 3.1, pode ser aproximado em qualquer intervalo finito $-\mathrm{T} \le \mathrm{t} \le \mathrm{T}$ por um número finito de pulsos unitários de largura $\Delta\lambda$, que ocorrem em $\mathrm{t} = \mathrm{k}\Delta\lambda$ $(\mathrm{k} = 0, \pm 1, \pm 2, .., \pm \mathrm{N} = \mathrm{T}/\Delta\lambda)$. Como a altura de um pulso unitário é $1/\Delta\lambda$, o pulso que ocorre em $\mathrm{t} = \mathrm{k}\Delta\lambda$ deve ser multiplicado por $\mathrm{f}(\mathrm{k}\Delta\lambda)\Delta\lambda$ para tornar sua amplitude igual ao valor da função aproximada. Desta forma a função pode ser aproximada por:

$$f(t) \cong \sum_{k=-N}^{N} f(k\Delta\lambda)\, p_{\Delta\lambda}(t - k\Delta\lambda)\Delta\lambda \quad para\ -T \le t \le T \tag{3.2}$$

Naturalmente a aproximação da função é melhor quanto menor for $\Delta\lambda$. No caso limite em que $\Delta\lambda \to 0$ e $N \to \infty$ (mas $\mathrm{N}\Delta\lambda = \mathrm{T}$), os valores de $\mathrm{k}\Delta\lambda$ podem assumir todos os valores no intervalo (-T,T) e são, portanto, substituíveis pela variável contínua λ. Desta forma quando $\Delta\lambda \to 0$ e $N \to \infty$ a equação 3.2 torna-se:

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \mathrm{f}(\lambda)\delta(\mathrm{t} - \lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{3.3}$$

onde δ é o impulso unidade ou delta de Dirac. Qualitativamente, o impulso unidade pode ser considerado como o limite quando $\tau \to 0$ de um pulso unitário p_τ.

Para estender esta relação ao domínio completo da definição de f(t) ($-\infty < \mathrm{t} < \infty$), fazemos $\mathrm{T} \to \infty$ e obtemos

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\delta(\mathrm{t} - \lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{3.4}$$

A equação (3.4) mostra a decomposição de um sinal contínuo *f(t)* em impulso unidade. Esta equação pode também ser usada como a definição do impulso unidade $\delta(\mathrm{t})$.

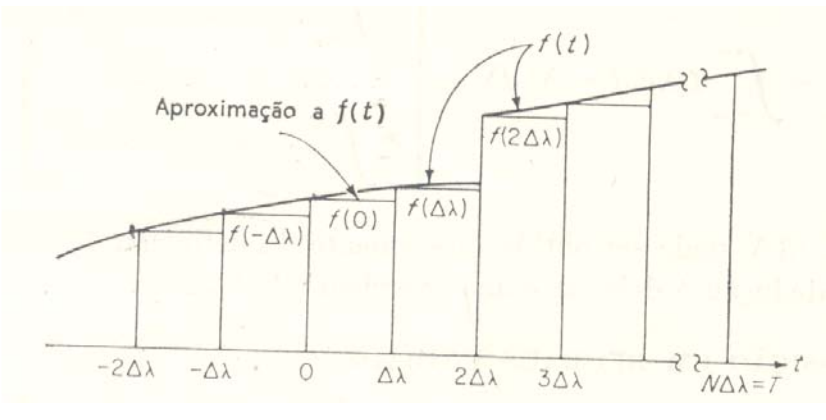

Fig. 3.1 Decomposição de um sinal em pulso unidade

3.1.2 RESPOSTA A IMPULSO EM SISTEMAS CONTÍNUOS NO TEMPO

Como qualquer sinal de excitação contínuo no tempo pode ser decomposto numa série de impulsos unidade, segue-se que a resposta de um *sistema linear* a qualquer excitação desse tipo pode ser encontrada se conhecermos a resposta do sistema a impulsos unidade aplicados em qualquer tempo. Ou seja, a resposta ao impulso caracteriza completamente o sistema.

A resposta a impulso de um sistema linear é função do tempo que, em geral, depende também do instante de aplicação do impulso. Assim, definimos

$\mathrm{h(t,\tau) = H\delta(t-\tau)}$ = resposta de H no instante t ao impulso unidade δ aplicado no instante τ.

H deve ser entendida como sendo um operado matemático.

Seja $x(t)$ o sinal de entrada contínuo em um sistema. Este sinal pode ser decomposto, de acordo com a eq. 3.4 como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda \tag{3.5}$$

Se a saída de H é y(t) tem-se

$$y(t) = Hx(t) = H\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda \tag{3.6}$$

Se o sistema é *linear* a equação (3.6) pode ser reescrita como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)H\delta(t-\lambda)d\lambda \tag{3.7}$$

Como $\mathrm{h(t,\tau) = H\delta(t-\tau)}$ a resposta do sistema é dada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t,\lambda)d\lambda \tag{3.8}$$

Esta integral é a forma geral para a obtenção da resposta de um *sistema linear* quando perturbado com um sinal x(t). Ela pode ser considerada como a soma das respostas a impulsos ocorridos em instantes λ de intensidade $\mathrm{x(\lambda)d\lambda}$ com λ variando de $-\infty$ a ∞.

A partir da equação (3.8) podem ser considerados alguns casos particulares.

Sistema causal

Neste caso $h(t,\lambda) = 0$ *para* $\lambda > t$ porque a resposta no instante *t* não pode depender dos valores futuros e a integração pode ser terminada em $\lambda = \mathrm{t}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)h(t,\lambda)d\lambda \tag{3.9}$$

Sistema causal e invariante com o tempo

Num sistema invariante com o tempo, a resposta a um impulso depende somente do tempo decorrido entre o instante τ de aplicação do impulso e o instante t de observação, de forma que:

$$h(t,\tau) = H\delta(t-\tau) = h(t-\tau)$$

Se adicionarmos a hipótese de que o sistema é invariante com o tempo na equação (3.9) resulta que a saída do sistema é dada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \tag{3.10}$$

Em controle é normal admitir que a entrada começa em $t = 0$, isto é $x(t) = 0$ para $t < 0$. A resposta do sistema pode, então, ser calculada como:

$$y(t) = \int_{0}^{t} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \tag{3.11}$$

Esta equação é conhecida como integral de convolução e ela é a base para o entendimento da resposta de sistema no domínio da freqüência que será vista em seguida.

3.2 TRANSFORMADAS DE FOURIER E DE LAPLACE

A equação (3.11) permite obter a resposta de um sistema linear, causal e invariante no domínio do tempo para uma entrada qualquer. Ela é baseada na decomposição do sinal utilizando delta de Dirac. No entanto, este procedimento apresenta como desvantagem a necessidade de calcular uma integral, que pode não ser imediato, e não permite prever o formato do sinal de saída do sistema. Naturalmente pode-se escolher outras funções elementares para efetuar a decomposição do sinal. Entre as diversas funções existentes, uma que é extremamente conveniente para ser selecionado como elementar é a função exponencial e^{st} onde s é uma variável complexa. A vantagem desta função é que o seu formato é preservado na saída (a menos da amplitude e fase) uma vez que o modelo matemático de um sistema envolve, geralmente, derivada e/ou integral e nestes casos tem-se:

$$\frac{de^{st}}{dt} = se^{st}$$

$$\int_{-\infty}^{t} e^{st}dt = \frac{1}{s}e^{st} \quad \text{se}\,\text{Re}\ \ s > 0$$

A variável s de uma maneira geral é um número complexo:

$s = \sigma + \omega j$

Baseado no sinal elementar e^{st} são definidos as Transformadas de Fourier e de Laplace.

3.2.1 TRANSFORMADA DE FOURIER

Considere a decomposição de um sinal periódico x(t) com período T considerando a função elementar e^{st} com $\sigma = 0$. Esta decomposição é conhecida como série de Fourier e ela é expressa como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \qquad -T/2 < t < T/2 \qquad (3.12)$$

onde $\omega_0 = 2\pi/T$

Pode-se mostrar que as amplitudes das exponenciais podem ser calculadas como:

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \qquad (3.13)$$

Pode-se provar que a série de Fourier converge para x(t) desde que ela seja muito lisa por partes. Para uma função aperiódica ($T \to \infty$) as amplitudes transformam-se em uma função contínua dada por:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad (3.14)$$

A expressão (3.14) é conhecida como Transformada de Fourier de x(t) e pode ser escrita simbolicamente como:

$$X(j\omega) = \Im[x(t)] \qquad (3.15)$$

Para que exista a integral definida pela equação (3.14) é necessário que:

a) x(t) seja muito lisa por partes; (3.16.a)

b) $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ (3.16.b)

Utilizando a Transformada de Fourier o sinal *x(t)* é dado por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \qquad (3.17)$$

3.2.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Embora a maioria dos sinais satisfaça a condição 3.16.a, existem uma ampla classe de sinais importantes que não satisfaz a condição 3.16.b, tais como o sinal degrau unitário e rampa unitária. Para contornar este problema pode-se multiplicar x(t) por $e^{-\sigma t}$ onde $\sigma > 0$. O novo sinal $x(t)e^{-\sigma t}$ tem uma transformada de Fourier se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t)e^{-\sigma t} \right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right| e^{-\sigma t} dt \quad < \infty \tag{3.18}$$

Com esta modificação é possível garantir a transformada de Fourier de sinais como degrau unidade e rampa unidade já que a condição 3.16.b é satisfeita. A transformada de Fourier do sinal modificado é:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \tag{3.19}$$

Seja

$$s = \sigma + j\omega \tag{3.20}$$

Substituindo (3.20) em (3.19) tem-se:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \tag{3.21}$$

Em controle, normalmente, admite-se que a entrada x(t) é nula para t<0. Desta forma a integral definida por (3.21) pode ser reescrita como:

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \tag{3.22}$$

A função $X(s)$ obtida por (3.22) é denominada pela maioria dos textos de controle como sendo a Transformada de Laplace de um sinal $x(t)$. Em geral ela é indicada como:

$$\pounds[x(t)] = X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Pode-se mostrar que, utilizando a Transformada de Laplace, o sinal *x(t)* é dado por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st} ds \tag{3.23}$$