

PME 3230

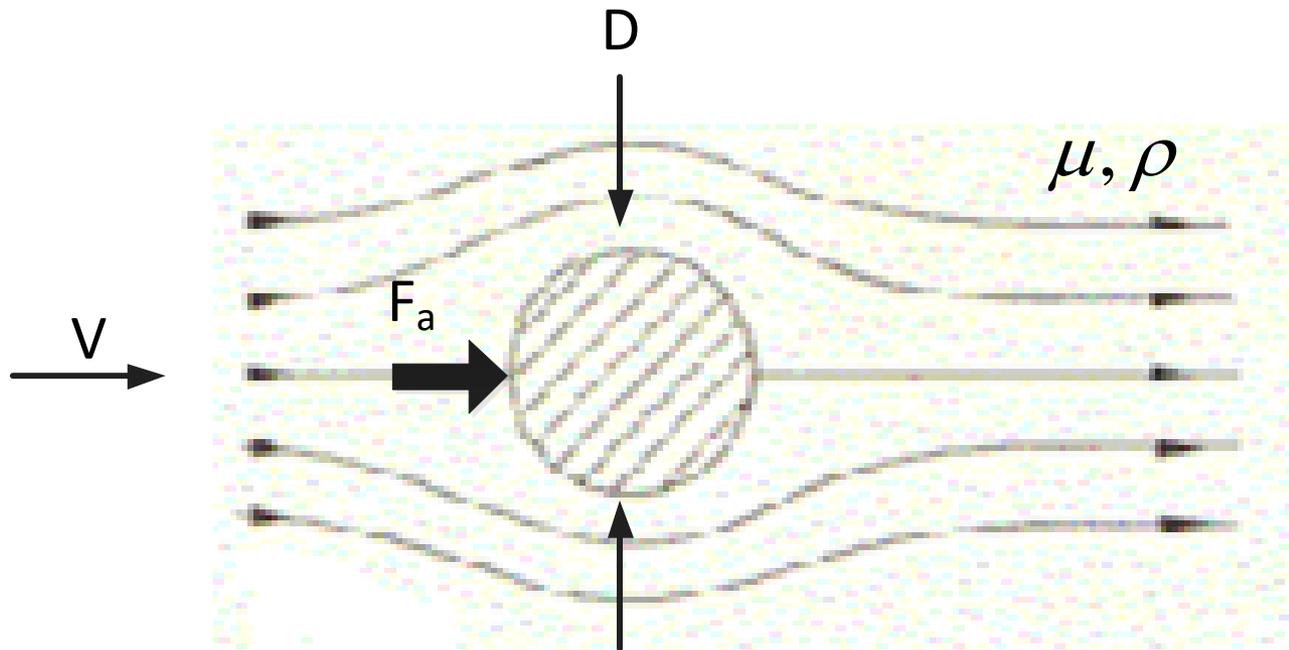
Análise Dimensional, Semelhança e Modelos

Alberto Hernandez Neto

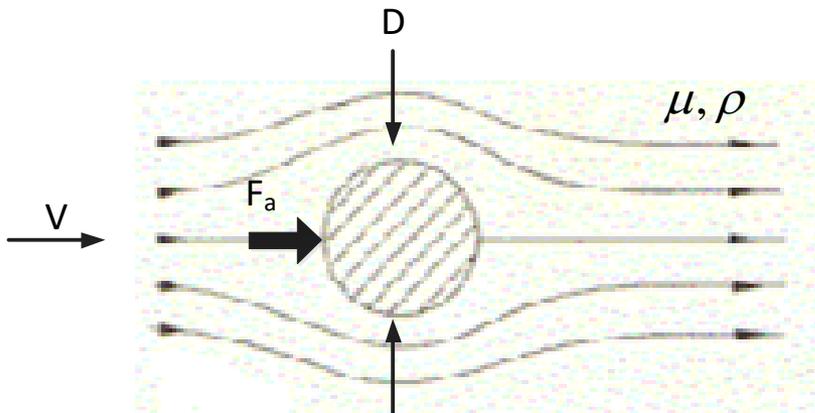
Aplicação da análise dimensional:

- Desenvolvimento de equações
- Conversão entre diferentes sistemas de unidades
- Avaliação das variáveis relevantes em um determinado problema teórico ou experimental
- Desenvolvimento de protótipos
- Aplicação não restrita à Mecânica dos Fluidos

Exemplo: Determinação da força de arrasto (F_a) no escoamento ao redor de uma esfera lisa em um líquido



Parâmetros importantes:



D = Diâmetro da esfera

V = velocidade de escoamento

μ = viscosidade dinâmica do fluido

ρ = massa específica do fluido

F_a = força de arrasto

$$F_a = f(D, V, \mu, \rho)$$

Como determinar f ?

1ª solução: Variação de cada parâmetro, mantendo os demais constantes

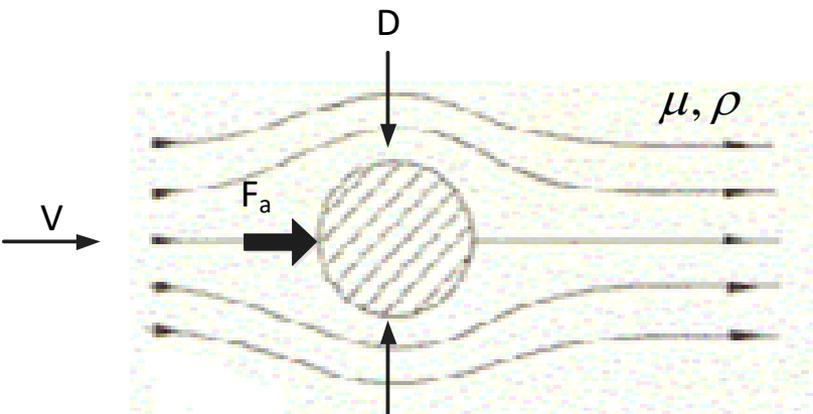
Procedimento:

- Bancada experimental montada para medição de F_a
- Variação de cada parâmetro para 10 valores diferentes
- Número total de experimentos: 10^4
- Tempo de cada experimento: 5 minutos
- Tempo total de experimentos: 5×10^4 minutos \approx 830 horas \approx 35 dias corridos



- Custo alto
- Relação entre os parâmetros

2ª solução: Aplicação da Análise Dimensional



D = Diâmetro da esfera

V = velocidade de escoamento

μ = viscosidade dinâmica do fluido

ρ = massa específica do fluido

F_a = força de arrasto

Força de arrasto adimensional $\Rightarrow \frac{F_a}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$

\uparrow Número de Reynolds (adimensional)

Teorema Π de Buckingham

Enunciado: Dada uma relação entre n parâmetros da forma

$$g(q_1; q_2; \dots ; q_n) = 0,$$

então os n parâmetros podem ser agrupados em $n - m$ razões independentes adimensionais, ou parâmetros Π , que podem ser expressos em forma funcional por:

Teorema Π de Buckingham

$$G(\Pi_1; \Pi_2; \dots; \Pi_n) = 0, \text{ ou}$$

$$\Pi_1 = G1(\Pi_2; \Pi_3; \dots; \Pi_{n-m}) = 0$$

O número m é usualmente (mas nem sempre) igual ao número mínimo r de dimensões independentes necessárias para especificar as dimensões de todos os parâmetros $q_1; q_2; \dots; q_n$.

A forma de G ou $G1$ não é prevista pelo teorema \rightarrow determinação experimental

Este teorema é baseado no conceito de homogeneidade dimensional

Teorema Π de Buckingham

Determinação dos grupos Π :

1. Liste os parâmetros envolvidos (n)
2. Selecione um conjunto de dimensões fundamentais (primárias) – MLt ou FLt (r)
3. Liste as dimensões dos parâmetros em termos das dimensões primárias (matriz dimensional)
4. Selecione da lista um número m de parâmetros, chamados de repetentes, que, em conjunto, incluam todas as dimensões primárias. Não selecione o parâmetro dependente.
5. Estabeleça equações dimensionais combinando os parâmetros repetentes com cada um dos remanescentes ($n-m$) equações
6. Verifique se cada grupo obtido é adimensional

Teorema Π de Buckingham

Aplicando o teorema ao problema do escoamento da esfera:

1. $F_a, D, V, \mu, \rho \rightarrow n = 5$

2. Usando M, L e t $\rightarrow r = 3$

3. $F_a \doteq \frac{ML}{t^2}$ $D \doteq L$ $V \doteq \frac{L}{t}$ $\mu \doteq \frac{M}{Lt}$ $\rho \doteq \frac{M}{L^3}$

Matriz dimensional:

	F_a	D	V	ρ	μ
M	1	0	0	1	1
L	1	1	1	-3	-1
t	-2	0	-1	0	-1

$m = 3$

4. Usando D, V e ρ

5. $n - m$ equações $\rightarrow 5 - 3 = 2$

Teorema Π de Buckingham

$$\Pi_1 = F_a D^a V^b \rho^c = (MLt^{-2})(L)^a (Lt^{-1})^b (ML^{-3})^c = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$[L]: 1 + a + b - 3c = 0$$

$$[t]: -2 - b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$\text{Logo: } 1 + a - 2 - 3(-1) = 0 \Rightarrow a = -2$$

Portanto:

$$\Pi_1 = \frac{F_a}{\rho V^2 D^2}$$

Teorema Π de Buckingham

$$\Pi_2 = \mu D^a V^b \rho^c = (ML^{-1}t^{-1})(L)^a (Lt^{-1})^b (ML^{-3})^c = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$[L]: -1 + a + b - 3c = 0$$

$$[t]: -1 - b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$\text{Logo: } -1 + a + (-1) - 3(-1) = 0 \Rightarrow a = -1$$

Portanto:

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

Teorema Π de Buckingham

6. Usando F , L e t ($M=FL^{-1}t^2$)

$$\Pi_1 = \frac{F_a}{\rho V^2 D^2} = \frac{F}{(FL^{-4}t^2)(Lt^{-1})^2(L)^2} = F^0 L^0 t^0 \quad \checkmark$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{FL^{-2}t}{(FL^{-4}t^2)(Lt^{-1})(L)} = F^0 L^0 t^0 \quad \checkmark$$

Portanto:

$$\frac{F_a}{\rho V^2 D^2} = \phi_1 \left(\frac{\mu}{\rho V D} \right)$$

Teorema Π de Buckingham

Qualquer potência ou produto de adimensionais também é adimensional

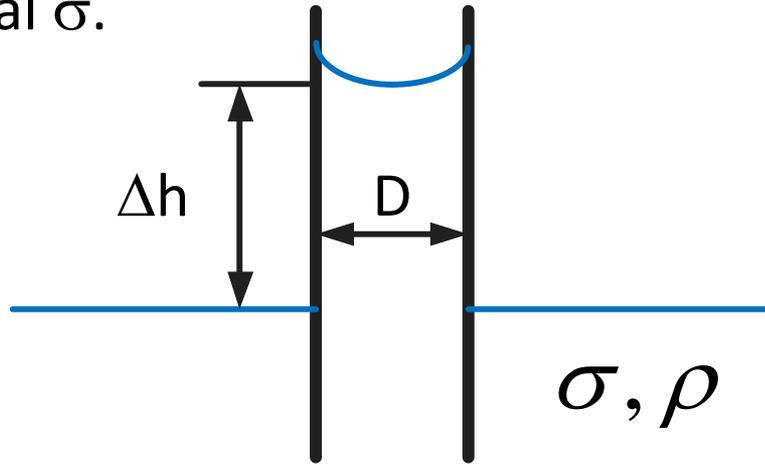
$$\Pi'_2 = \Pi_2^{-1} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

$$\frac{F_a}{\rho V^2 D^2} = \phi_1 \left(\frac{\rho V D}{\mu} \right)$$

Sendo que ϕ_1 é determinado experimentalmente

Exercício 1

Obter grupos adimensionais Π necessários para a determinação experimental da ascensão capilar h que ocorre quando um tubo de diâmetro D é inserido em um líquido de densidade ρ e tensão superficial σ .



$$\Delta h = f(D, \sigma, \rho)$$

Aplicando o teorema :

1. $\Delta h, D, \sigma, \rho \rightarrow n = 4$

2. Usando M, L e $t \rightarrow r=3$

3. $\Delta h \doteq L \quad D \doteq L \quad \sigma \doteq \frac{M}{t^2} \quad \rho \doteq \frac{M}{L^3}$

Exercício 1

Matriz dimensional:

	Δh	D	σ	ρ
M	0	0	1	1
L	1	1	0	-3
t	0	0	-2	0

$m=2$

4. Usando D e σ

5. $n-m$ equações $\rightarrow 4-2=2$

Exercício 1

$$\Pi_1 = \Delta h D^a \rho^b = (L)(L)^a (ML^{-3})^b = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: b = 0$$

$$[L]: 1 + a - 3b = 0 \Rightarrow a = -1$$

Portanto:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta h}{D}$$

Quando $m < r$, uma das equações será Linearmente Dependente

Exercício 1

$$\Pi_2 = \sigma D^a \rho^b = (Mt^{-2})(L)^a (ML^{-3})^b = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

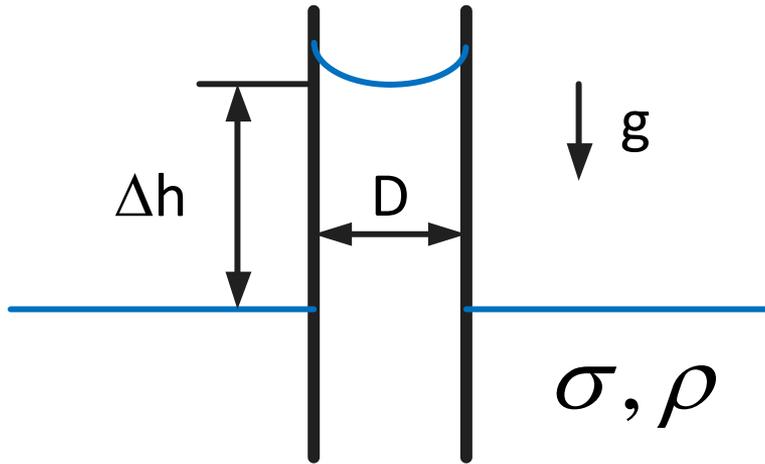
$$[L]: a - 3b = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$[t]: -2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Impossível}$$

Portanto: Definição de parâmetros incompleta

Exercício 1

Introduzindo um novo parâmetro: gravidade g



$$\Delta h = f(D, \sigma, \rho, g)$$

Aplicando o teorema :

1. $\Delta h, D, \sigma, \rho, g \rightarrow n = 5$

2. Usando M, L e $t \rightarrow r=3$

3. $\Delta h \doteq L$ $D \doteq L$ $\sigma \doteq \frac{M}{t^2}$ $\rho \doteq \frac{M}{L^3}$ $g \doteq \frac{L}{t^2}$

Exercício 1

Matriz dimensional:

	Δh	D	g	ρ	σ
M	0	0	0	1	1
L	1	1	1	-3	0
t	0	0	-2	0	-2

$m=3$

4. Usando D, g e $\rho \rightarrow r=3$
5. $n-m$ equações $\rightarrow 5-3=2$

Exercício 1

$$\Pi_1 = \rho^a D^b g^c \Delta h = (ML^{-3})^a (L)^b (Lt^{-2})^c (L) = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: a = 0$$

$$[t]: -2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$[L]: -3a + b + c + 1 = 0 \Rightarrow -3(0) + b + 0 + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

Portanto:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta h}{D}$$

Exercício 1

$$\Pi_2 = \rho^a D^b g^c \sigma = (ML^{-3})^a (L)^b (Lt^{-2})^c (Mt^{-2}) = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$[t]: -2c - 2 = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$[L]: -3a + b + c = 0 \Rightarrow -3(-1) + b + 0 - 1 = 0 \Rightarrow b = -2$$

Logo:

$$\Pi_2 = \frac{\sigma}{\rho g D^2}$$

Portanto:

$$\frac{\Delta h}{D} = \phi\left(\frac{\sigma}{\rho g D^2}\right) \quad \text{Fluido estático, tempo não afeta o fenômeno}$$

Exercício 1

6. Usando F, L e t ($M=FL^{-1}t^2$)

$$\Pi_1 = \frac{\Delta h}{D} = \frac{L}{L} = F^0 L^0 t^0 \quad \checkmark$$

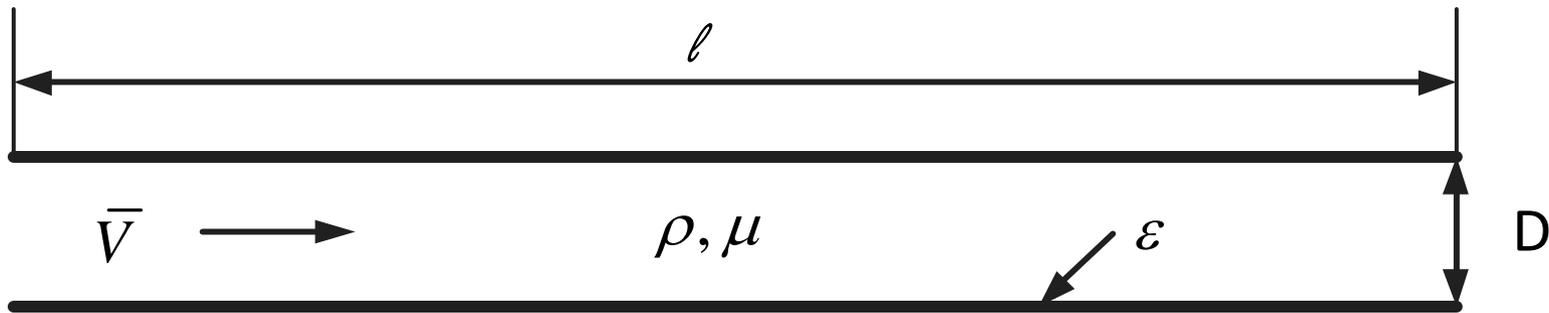
$$\Pi_2 = \frac{\sigma}{\rho g D^2} = \frac{(FL^{-1})}{(FL^{-4}t^2)(Lt^{-2})(L)^2} = F^0 L^0 t^0 \quad \checkmark$$

Portanto:

$$\frac{\Delta h}{D} = \phi_1 \left(\frac{\sigma}{\rho g D^2} \right)$$

Exercício 2

Escoamento permanente incompressível viscoso através de um tubo retilíneo horizontal



$$\Delta p = f(\rho, \bar{V}, D, L, \mu, \epsilon)$$

Aplicando o teorema :

1. $\Delta p, \rho, \bar{V}, D, l, \mu, \epsilon \rightarrow n = 7$

2. Usando M, L e t $\rightarrow r = 3$

3. $\Delta p \doteq \frac{M}{Lt^2}$ $\rho \doteq \frac{M}{L^3}$ $\bar{V} \doteq \frac{L}{t}$ $D \doteq L$ $l \doteq L$ $\mu \doteq \frac{M}{Lt}$ $\epsilon \doteq L$

Exercício 2

Matriz dimensional:

	Δp	ρ	\bar{V}	D	ℓ	μ	ε
M	1	1	0	0	0	1	0
L	-1	-3	1	1	1	-1	1
t	-2	0	-1	0	0	-1	0

$m=3$

4. Usando ρ , \bar{V} e D
5. $n-m$ equações $\rightarrow 7-3=4$

Exercício 2

$$\Pi_1 = \Delta p \rho^a \bar{V}^b D^c = (ML^{-1}t^{-2})(ML^{-3})^a (Lt^{-1})^b (L)^c = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$[t]: -2 - b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$[L]: -1 - 3a - b + c = 0 \Rightarrow -1 - 3(-1) - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

Portanto:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2}$$

Exercício 2

$$\Pi_2 = \ell \rho^a \bar{V}^b D^c = (L)(ML^{-3})^a (Lt^{-1})^b (L)^c = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: a = 0$$

$$[t]: -b = 0$$

$$[L]: 1 - 3a + b + c = 0 \Rightarrow 1 - 3(0) + 0 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

Portanto:

$$\Pi_2 = \frac{\ell}{D}$$

Exercício 2

$$\Pi_3 = \mu \rho^a \bar{V}^b D^c = (ML^{-1}t^{-1})(ML^{-3})^a (Lt^{-1})^b (L)^c = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$[t]: -1 - b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$[L]: -1 - 3a + b + c = 0 \Rightarrow -1 - 3(-1) - 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

Portanto:

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{\rho \bar{V} D}$$

Exercício 2

$$\Pi_4 = \varepsilon \rho^a \bar{V}^b D^c = (L)(ML^{-3})^a (Lt^{-1})^b (L)^c = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: a = 0$$

$$[t]: -b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$[L]: 1 - 3a + b + c = 0 \Rightarrow 1 - 3(0) + 0 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

Portanto: $\Pi_4 = \frac{\varepsilon}{D}$

Logo: $\frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2} = \phi \left(\frac{\ell}{D}, \frac{\mu}{\rho \bar{V} D}, \frac{\varepsilon}{D} \right)$

Grupos adimensionais importantes

Número de Reynolds	$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{\text{Forças de inércia}}{\text{Forças viscosas}}$
Número de Euler	$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{\text{Forças de pressão}}{\text{Forças de inércia}}$
Número de Froude	$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}} = \frac{\text{Forças de inércia}}{\text{Forças gravitacionais}}$
Número de Weber	$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma} = \frac{\text{Forças de inércia}}{\text{Forças de tensão superficial}}$
Número de Mach	$Ma = \frac{V}{c} = \frac{\text{Forças de inércia}}{\text{Forças de compressibilidade}}$
Número de Strouhal	$St = \frac{\omega L}{V} = \frac{\text{Forças de aceleração local}}{\text{Forças de aceleração convectiva}}$

Correlação de dados experimentais

a) 1 parâmetro Π :

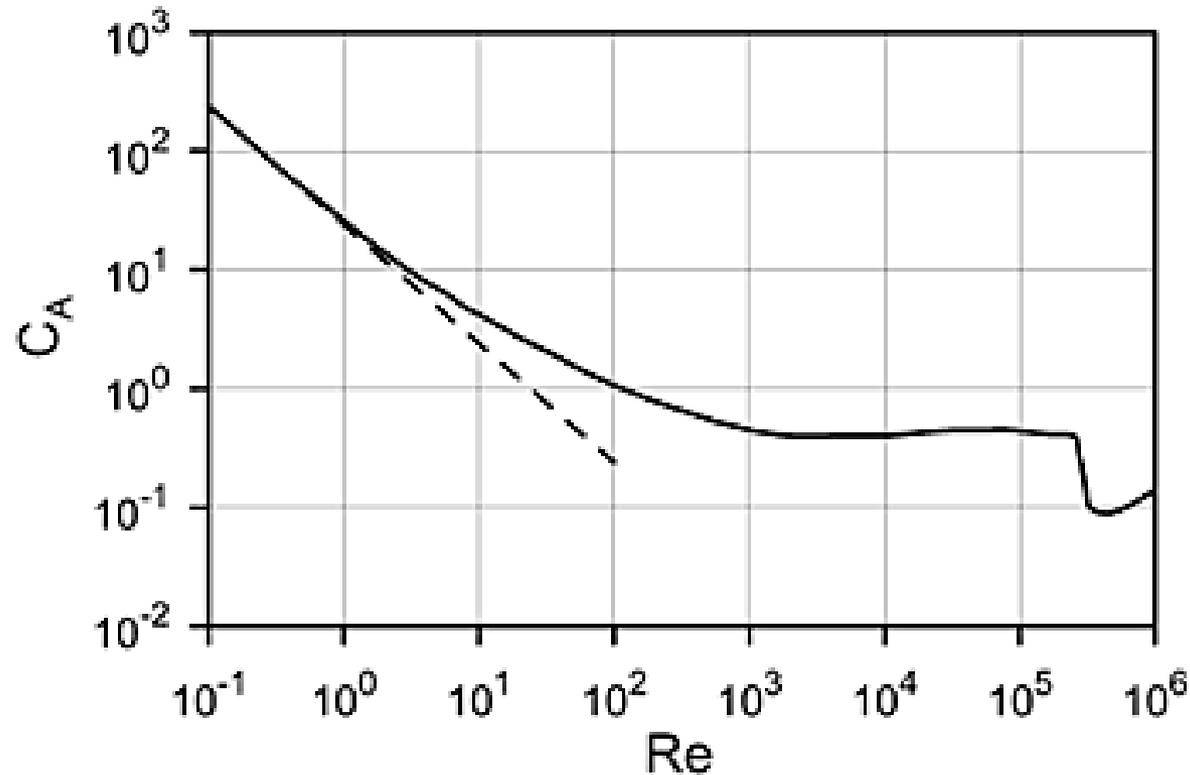
$\Pi_1 = C \rightarrow$ Análise Dimensional fornece a forma específica da relação.

Exemplo: partícula esférica se movendo em fluido ultra-viscoso:

$$F_a = f(d, V, \mu) \Rightarrow \Pi_1 = \frac{F_a}{\mu V d} \Rightarrow F_a = C \mu V d$$

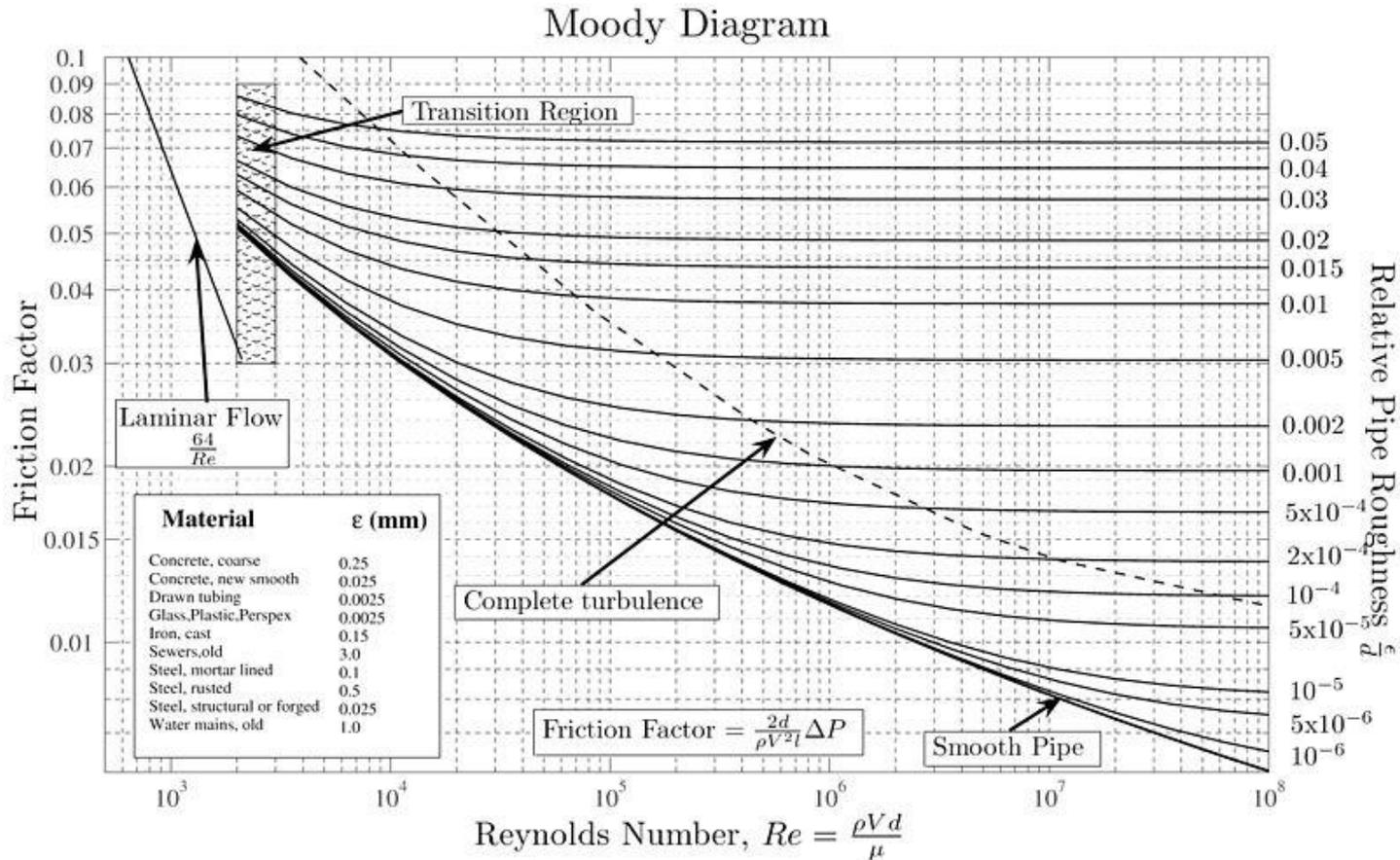
Correlação de dados experimentais

a) 2 parâmetros Π : gráfico xy \rightarrow Coeficiente de arrasto de uma esfera lisa



Correlação de dados experimentais

a) 3 parâmetros Π : curvas de nível \rightarrow Diagrama de Moody



Modelos e semelhança

Modelos :

Representação de um sistema físico (protótipo) que pode ser utilizado para prever o comportamento de alguma característica do sistema. Podem ser matemáticos, computacionais, físicos, . . .

Semelhança :

Característica que faz com que os dados obtidos em testes com modelos possam ser transpostos por escala e prever características do protótipo.

- a) Geométrica: dimensões (razão de escala linear, ângulos e direções do escoamento preservados)
- b) Cinemática: velocidades no escoamento (partículas homólogas atingem pontos homólogos em tempos homólogos)
- c) Dinâmica: forças aplicadas. Grupos adimensionais têm que ter o mesmo valor no modelo e no protótipo.

Dinâmica → Cinemática → Geométrica

Modelos e semelhança

Escalas

Razão entre o valor de uma grandeza no modelo e o valor da mesma grandeza no protótipo.

$$\text{Comprimento: } \lambda_L = \frac{L_m}{L_p} \quad \text{Velocidade: } \lambda_V = \frac{V_m}{V_p}$$

$$\text{Massa específica: } \lambda_\rho = \frac{\rho_m}{\rho_p} \quad \frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p} \Rightarrow \lambda_V = \frac{\lambda_V}{\lambda_L}$$

Exemplo: números de Reynolds iguais

$$\text{Re}_m = \text{Re}_p \Rightarrow \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p} \Rightarrow \frac{\rho_m}{\rho_p} \frac{V_m}{V_p} \frac{L_m}{L_p} \frac{\mu_p}{\mu_m} = 1 \Rightarrow \lambda_\rho \lambda_V \lambda_L \frac{1}{\lambda_\mu} = 1$$

Exercício 3

Um experimento para prever a força de arrasto em um sonar de submarino é realizado com um modelo em escala 1:5 em água a 20°C. Quando a velocidade do escoamento no modelo é de $V_m = 60 \text{ km/h}$, mede-se uma força $F_{am} = 30 \text{ N}$. Sabendo que o protótipo navegará em águas a 4°C, qual será a velocidade do protótipo V_p para que haja semelhança completa? Neste caso, qual será a força de arrasto correspondente F_{ap} ?

$$\frac{F_a}{\rho V^2 L^2} = \phi \left(\frac{\rho V L}{\mu} \right)$$

$$\text{Re}_m = \text{Re}_p \Rightarrow \frac{\cancel{\rho_m} V_m L_m}{\mu_m} = \frac{\cancel{\rho_p} V_p L_p}{\mu_p}$$

$$\rho(20^\circ \text{C}) \approx \rho(4^\circ \text{C}) = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu(20^\circ \text{C}) = 10^{-3} \text{ kg/(m.s)}$$

$$V_p = V_m \frac{L_m}{L_p} \frac{\mu_p}{\mu_m} = 60 \times \frac{1}{5} \times \frac{1,58 \times 10^{-3}}{1,00 \times 10^{-3}} = 19 \text{ km/h}$$

$$\mu(4^\circ \text{C}) = 1,58 \times 10^{-3} \text{ kg/(m.s)}$$

Exercício 3

$$C_{a,m} = C_{a,p} \Rightarrow \frac{F_{a,m}}{\cancel{\rho_m} V_m^2 L_m^2} = \frac{F_{a,p}}{\cancel{\rho_p} V_p^2 L_p^2}$$

$$F_{a,p} = F_{a,m} \left(\frac{V_p^2}{V_m^2} \right) \left(\frac{L_p^2}{L_m^2} \right) = 30x \left(\frac{19}{60} \right)^2 \left(\frac{5}{1} \right)^2 = 75,2N$$

Exercício 4

Um hélice de 6m de diâmetro desloca um barco com $V = 7,5\text{m/s}$, girando a 120 rpm. Para um modelo geometricamente semelhante, escala 1:10, usado para medir a força axial F , determine qual a velocidade e rotação do modelo, V_m e n_m , para que haja semelhança completa. Nessa condição, qual a escala das forças?

Dado: $F = f(\rho, V, D, n; g)$.

Aplicando o teorema :

1. $F, \rho, V, D, n, g \rightarrow n = 6$

2. Usando M, L e t $\rightarrow r=3$

3. $F \doteq \frac{ML}{t^2} \quad \rho \doteq \frac{M}{L^3} \quad V \doteq \frac{L}{t} \quad D \doteq L \quad n \doteq \frac{1}{t} \quad g \doteq \frac{L}{t^2}$

Exercício 4

Matriz dimensional:

	F	ρ	V	D	n	g
M	1	1	0	0	0	1
L	1	-3	1	1	0	1
t	-2	0	-1	0	-1	-2

$m=3$

4. Usando ρ , V e D
5. $n-m$ equações $\rightarrow 6-3=3$

Exercício 4

$$\Pi_1 = F \rho^a V^b D^c = (ML^{-1}t^{-2})(ML^{-3})^a (Lt^{-1})^b (L)^c = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$[t]: -2 - b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$[L]: 1 - 3a + b + c = 0 \Rightarrow 1 - 3(-1) - 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$$

Portanto:

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

Exercício 4

$$\Pi_2 = n\rho^a V^b D^c = (t^{-1})(ML^{-3})^a (Lt^{-1})^b (L)^c = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: a = 0$$

$$[t]: -1 - b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$[L]: -3a + b + c = 0 \Rightarrow -3(0) - 1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

Portanto:

$$\Pi_2 = \frac{nD}{V}$$

Exercício 4

$$\Pi_3 = g \rho^a V^b D^c = (Lt^{-2})(ML^{-3})^a (Lt^{-1})^b (L)^c = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: a = 0$$

$$[t]: -2 - b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$[L]: 1 - 3a + b + c = 0 \Rightarrow 1 - 3(0) - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

Portanto:

$$\Pi_3 = \frac{gD}{V^2}$$

Exercício 4

$$\Pi_3 = g \rho^a V^b D^c = (Lt^{-2})(ML^{-3})^a (Lt^{-1})^b (L)^c = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: a = 0$$

$$[t]: -2 - b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$[L]: 1 - 3a + b + c = 0 \Rightarrow 1 - 3(0) - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

Portanto:

$$\Pi_3 = \frac{gD}{V^2}$$

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = \phi\left(\frac{nD}{V}, \frac{gD}{V^2}\right)$$

Exercício 4

Igualando os adimensionais para semelhança completa:

$$\frac{n_m D_m}{V_m} = \frac{n_p D_p}{V_p} \Rightarrow \lambda_n = \frac{\lambda_V}{\lambda_D}$$

$$\frac{g D_m}{V_m^2} = \frac{g D_p}{V_p^2} \Rightarrow \lambda_V = \sqrt{\lambda_D}$$

$$\lambda_D = \frac{1}{10} \Rightarrow \lambda_V = \sqrt{\frac{1}{10}}$$

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{\lambda_D}}{\lambda_D} = \lambda_D^{-1/2} = \sqrt{10}$$

$$V_m = \lambda_V V_p = \sqrt{\frac{1}{10}} \times 7,5 = 2,37 \text{ m/s}$$

$$n_m = \lambda_n n_p = \sqrt{10} \times 120 = 379 \text{ rpm}$$

$$\frac{F_m}{\rho_m V_m^2 D_m^2} = \frac{F_p}{\rho_p V_p^2 D_p^2} \Rightarrow \lambda_F = \lambda_V^2 \lambda_D^2 = \left(\lambda_D^{1/2}\right)^2 \lambda_D^2 = \lambda_D^3 = \frac{1}{1000}$$

Semelhança incompleta

A semelhança dinâmica pode requerer a duplicação de diversos adimensionais, o que pode não ser possível na prática.

Exemplo 1: escoamentos com superfície livre

- Gravidade (Fr) e tensão superficial (We) podem ser importantes para a formação de ondas.
- Casos típicos: navios, rios e lagos.

Arrasto em navio

Duas origens: resistência de onda (g), forças viscosas (μ)

$$C_A = f(Fr, Re)$$

Semelhança incompleta

Igualando os adimensionais do modelo e do protótipo:

$$Fr_m = Fr_p \Rightarrow \frac{V_m}{\sqrt{gL_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{gL_p}} \Rightarrow \lambda_V = \lambda_L^{1/2} \quad (1)$$

$$Re_m = Re_p \Rightarrow \frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p} \Rightarrow \lambda_\nu = \lambda_V \lambda_L \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2): $\lambda_\nu = \lambda_L^{1/2} \lambda_L = \lambda_L^{3/2}$

Considerando: $\lambda_L \approx \frac{1}{100} \Rightarrow \lambda_\nu = \frac{1}{1000}$

Não existe líquido com $\nu = 0,001\nu_{\text{água}}$

Semelhança incompleta

Solução:

- Utilizar a hipótese: $C_A (Fr, Re) = C_{Ao} (Fr) + C_{Av} (Re)$

Procedimento:

1. Realiza-se o experimento com semelhança de número de Froude com o protótipo
2. Mede-se o arrasto total no modelo
3. Calcula-se o arrasto viscoso no modelo com relação derivada da teoria da camada limite
4. Subtrai-se o arrasto viscoso calculado do arrasto total medido para obter o arrasto de onda no modelo
5. Transpõe-se por escala o arrasto de onda para o protótipo, pois:

$$Fr_p = Fr_m$$

Semelhança incompleta

6. Calcula-se o arrasto viscoso no protótipo com relação derivada da teoria da camada limite
7. Somam-se os arrastos viscoso e de onda no protótipo para se obter o arrasto total

Exemplo: rios e lagos

Pequena profundidade do modelo faz com que a tensão superficial torne-se importante no experimento. A solução normalmente adotada é utilizar duas escalas de comprimento diferentes, uma para o plano horizontal e outra para a direção vertical.

Escoamentos confinados

- Internos ou externos, sem superfície livre
- Dominam forças de inércia e viscosas (Re é importante)
- Compressibilidade do fluido também é importante se $Ma > 0,3$

Exercício 5

Um modelo de automóvel em escala 1:5 será usado para estimar a força de arrasto no protótipo andando a 90 km/h. Qual deve ser a velocidade do modelo, V_m ? Qual será a escala de forças,

$\lambda_F = F_{A,m} / F_{A,p}$, nesta condição?

$$C_A = f(\text{Re}) \quad \therefore \text{Re}_m = \text{Re}_p \Rightarrow \lambda_V = \frac{\lambda_v}{\lambda_L}$$

Escoamentos confinados

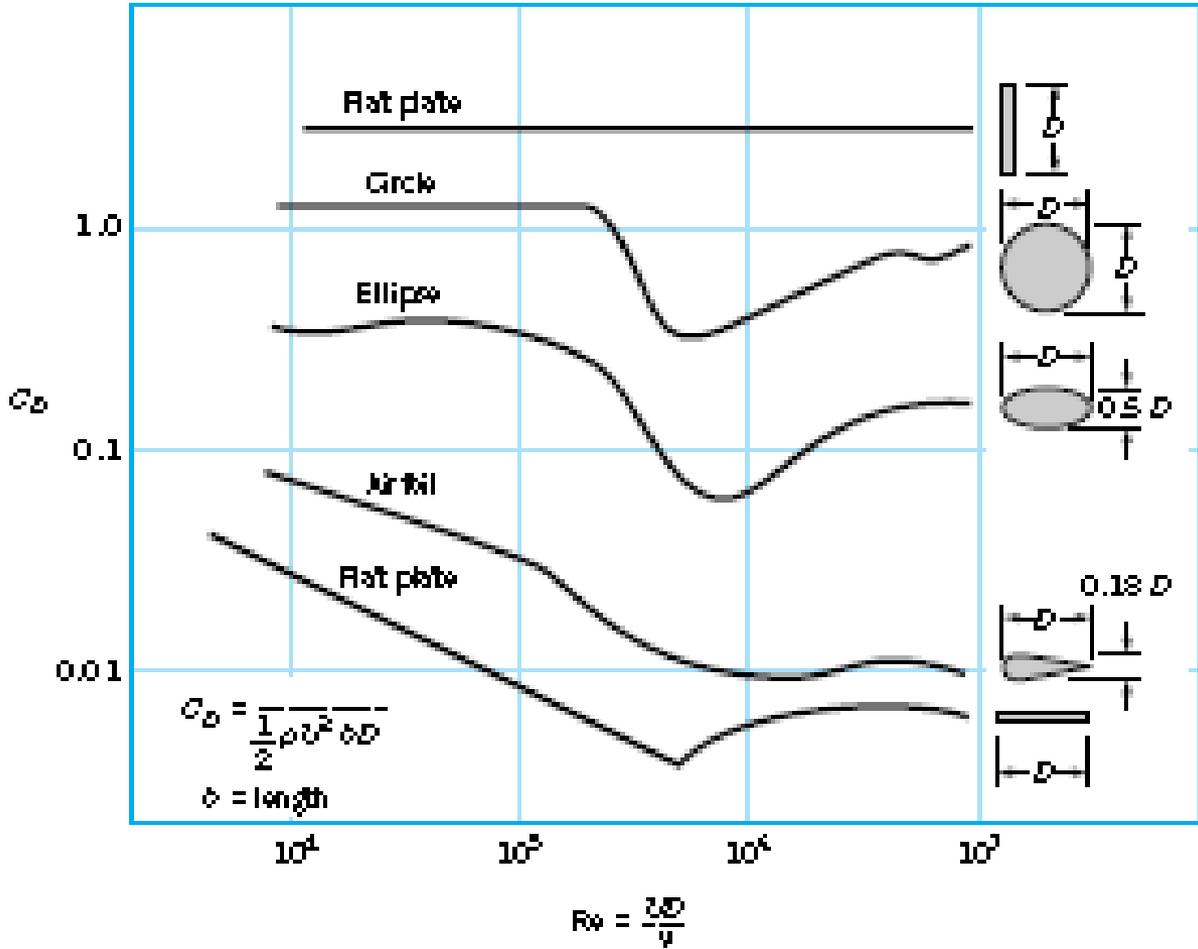
Se usarmos o mesmo fluido (ar): $v_m = v_p \Rightarrow \lambda_V = \frac{1}{\lambda_L}$

$$\therefore V_m = 5V_p = 450 \text{ km/h}$$

Nas condições normais de temperatura e pressão, $Ma=0,3$ significa $V=360 \text{ km/h}$, portanto os efeitos de compressibilidade são importantes

Solução: para corpos aerodinâmicos (sem separação da camada limite) ou para corpos onde a separação é fixa, C_A não varia muito com Re para Re muito alto

Escoamentos confinados



Escoamentos confinados

Para automóveis, o comprimento característico normalmente utilizado é o comprimento do automóvel, que para carros de passeio varia entre 3,8m e 4,3 m. Vamos considerar que o comprimento do protótipo seja de $L_p=4\text{m}$. Logo:

$$\text{Re}_p = \frac{V_p L_p}{\nu_p} = \frac{(90 / 3,6) \times 4}{1,5 \times 10^{-5}} = 6,7 \times 10^6$$

Re está na faixa onde a camada limite é turbulenta $\rightarrow C_A$ não varia mais com Re

Se $V_m=90 \text{ km/h} \rightarrow \text{Re}=1,3 \times 10^6 \rightarrow C_A$ não varia mais com Re e pode-se usar $V_m \rightarrow C_{A,m}=C_{A,p}$

$$C_{A,m} = C_{A,p} \Rightarrow \frac{F_{A,m}}{\cancel{\rho_m} \cancel{V_m^2} L_m^2} = \frac{F_{A,p}}{\cancel{\rho_p} \cancel{V_p^2} L_p^2} \quad \lambda_F = \frac{F_{A,m}}{F_{A,p}} = \frac{L_m^2}{L_p^2} = \frac{1}{25} = 0,04$$

Escoamentos confinados

Caso $C_A = f(\text{Re}, \text{Ma})$ (compressibilidade afeta o fenômeno):

$$\text{Re}_m = \text{Re}_p \Rightarrow \lambda_V = \frac{\lambda_v}{\lambda_L}$$

$$\text{Ma}_m = \text{Ma}_p \Rightarrow \frac{V_m}{c_m} = \frac{V_p}{c_p} \Rightarrow \lambda_V = \lambda_c$$

Utilizando o mesmo fluido e em condições de temperatura e pressão semelhantes \rightarrow impossível igualar Re e Ma

Solução: impor semelhança em Ma, pois Re é alto e suficiente para que C_A não dependa de Re

Escoamentos confinados

