

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

*Departamento de Estruturas e Fundações*

**PEF-2404**  
**PONTES E GRANDES**  
**ESTRUTURAS**

(NOTAS DE AULA)

*Prof. Dr. Fernando Rebouças Stucchi*

**São Paulo**  
**2006**

# SUMARIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Evolução histórica das pontes</b>	<b>2</b>
<b>1.2. Concepção de pontes</b>	<b>4</b>
<b>1.3. Princípios básicos da concepção</b>	<b>4</b>
<b>2. SUPERESTRUTURA DE PONTES</b>	<b>11</b>
<b>2.1. Classificação das pontes conforme o tipo estrutural da superestrutura</b>	<b>11</b>
2.1.1. Pontes em laje	11
2.1.2. Pontes em viga	12
2.1.2.1. Ponte em duas vigas Tê, biapoiadas	12
2.1.2.2. Ponte em grelha	14
2.1.2.3. Ponte celular	15
2.1.2.4. Sistemas longitudinais usuais	16
2.1.3. Pontes em treliça, pórtico, arco ou suspensas por cabos – uma abordagem comparativa	16
<b>2.2. Classificação das pontes conforme o método construtivo</b>	<b>23</b>
2.2.1. Pontes moldadas in loco sobre cimbramento fixo.	23
2.2.2. Pontes moldadas in loco sobre cimbramento móvel.	24
2.2.3. Consolos sucessivos moldados in loco	26
2.2.4. Consolos sucessivos pré-moldados	28
2.2.5. Vigas pré-moldadas	32
2.2.6. Lançamentos progressivos	33
2.2.7. Pontes estaiadas	37
2.2.8. Pontes pênses	38
2.2.9. Associação de dois ou mais métodos construtivos	39
<b>2.3. Classificação das pontes conforme os materiais utilizados nas suas construções</b>	<b>39</b>
2.3.1. Pontes de concreto	39
2.3.2. Pontes de aço e mista aço - concreto	40
2.3.3. Pontes de madeira	45
<b>2.4. Estudo de alguns tipos estruturais, comportamento estrutural e teorias de cálculo</b>	<b>46</b>
2.4.1. Estruturas de superfície, uma introdução	46
2.4.2. Lajes	47
2.4.2.1. Comportamento estrutural das lajes	48
2.4.2.1.1. Laje retangular simplesmente apoiada	48
2.4.2.1.2. Outros casos a considerar	56

2.4.3.	<i>Pontes em vigas – múltiplas (grelhas) ou celulares (caixões)</i>	63
2.4.3.1.	<i>Análise da torção</i>	63
2.4.3.1.1.	Barras de seção circular maciça ou vazada	63
2.4.3.1.2.	Barras de seção retangular maciça	65
2.4.3.1.3.	Analogia de membrana (Prandtl – 1903)	66
2.4.3.1.4.	Seções vazadas com dois eixos de simetria	67
2.4.3.1.5.	Torção não uniforme	68
2.4.3.1.6.	Centro de torção ou cisalhamento	74
2.4.3.2.	<i>Estruturas em viga T única</i>	76
2.4.3.3.	<i>Pontes em duas vigas</i>	77
2.4.3.4.	<i>Pontes em 3 ou mais vigas (Grelhas)</i>	77
2.4.3.4.1.	Processo de Courbon/Engesser	77
2.4.3.4.2.	Processo de Fauchart	83
2.4.3.5.	<i>Pontes celulares</i>	90
2.4.3.5.1.	Seções unicelulares	90
2.4.3.5.2.	Seções multicelulares	95

## **1. INTRODUÇÃO**

O projeto de uma ponte ou grande estrutura é o produto de um processo criativo constituído de uma seqüência de alternativas, onde cada uma procura melhorar a anterior, até que se atinja uma solução suficientemente boa para ser construída.

Esse processo parte das condições locais, onde a obra deve ser implantada (topografia, geologia, condições climáticas, tráfego, etc.) e considerando os materiais e as técnicas construtivas disponíveis, os tipos estruturais e as teorias conhecidas, procura criar uma obra que atenda às funções previamente definidas, com uma série de qualidades especificadas.

Assim, é preciso que a obra, além de atender às funções para que foi construída, seja suficientemente segura, econômica e estética. Atenção, não basta que a obra seja segura, ela deve ser econômica e estética!

Entende-se aqui por segura a obra que tem probabilidade aceitável de manter suas características ao longo da vida útil e que avisa quando precisa de manutenção.

Estética é a obra agradável de ser observada, bem inserida no local de implantação.

Econômica é a solução que satisfaz as funções, segurança e estética com um custo próximo do mínimo.

Na verdade, esse processo criativo não termina no projeto, mas estende-se à execução e inclusive à manutenção.

Em função desse processo criativo e da importância estética do produto final, as pontes e grandes estruturas são usualmente chamadas "Obras de Arte".

Esse curso tem por objetivo discutir não apenas os tipos estruturais e as teorias de cálculo conhecidas, mas também os materiais e as técnicas construtivas disponíveis.

De forma a dar uma idéia da evolução dos materiais e das técnicas aplicadas à construção das pontes, vai a seguir um pequeno histórico.

## 1.1. Evolução histórica das pontes

### I. Pré-história

- Estruturas de pedra:

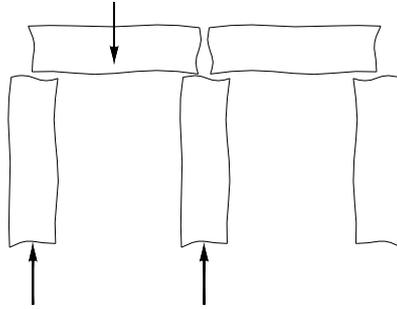


Figura 1 – Estrutura de pedra utilizada na pré-história.

- Estruturas de madeira:

Ficaram sem registro por problema de durabilidade.

### II. Idade antiga

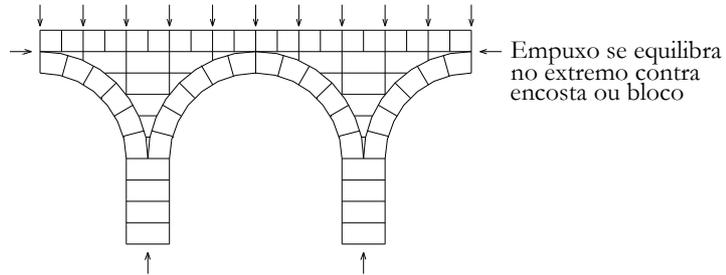


Figura 2 - Aquedutos romanos de pedra.

### III. Idade média

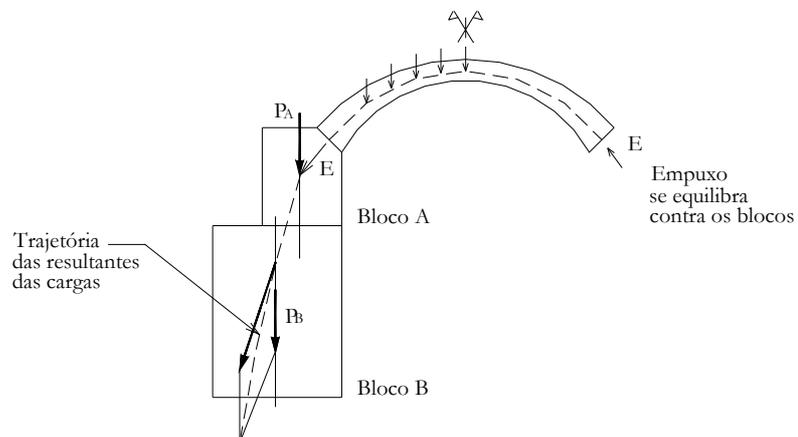


Figura 3 - Arcos góticos de pedra.

- IV. 1758 - Ponte de madeira sobre o Reno com 118m de vão. Grubenmann. Alemanha.
- V. 1779 - Ponte em arco treliçado de ferro fundido (liga ferro x carbono 2 a 5%) sobre o Severn na Inglaterra. Vão de 30m. Material frágil.
- VI. 1819 - Ponte Pênsil Menai, no País de Gales, com 175m de vão. Ferro laminado (liga ferro x carbono  $<0,2\% + 3\%$ ). Martelai mais maleável.
- VII. 1824 - Cimento Portland. J Aspdin, Inglaterra.
- VIII. 1860 - Inicia-se a produção de aço na Inglaterra.
- IX. 1861 - Primeiras idéias do Concreto Armado. Monier, Coignet na França.
- X. 1890 - Pontes ferroviárias sobre o Firth of Forth na Escócia. Treliça de aço (liga de ferro x carbono  $<1,5\%$ ) com 512m de vão. Material dúctil, mas mais sensível à corrosão.
- XI. 1900 - Teoria do Concreto Armado. Mörsch, Alemanha.
- XII. 1928 - Freyssinet consegue viabilizar o concreto protendido usando aço de alta resistência para contrabalancear a retração e deformação lenta do concreto.
- XIII. 1930 - E.Baumgart usa pela primeira vez o processo de construção por consolos sucessivos numa ponte em concreto armado sobre o rio Peixe. Vão de 68m.
- XIV. 1945 - Primeira obra em concreto protendido (protensão posterior). Luzancy, França. Vão de 55m. Freyssinet.
- XV. 1952 - Ponte sobre o canal Donzère, França. Vão de 81m. Primeira obra estaiada moderna.

Para fixar idéias vale relacionar alguns dos maiores vãos atualmente existentes:

Viga de concreto:	301m (Stolmasundet, Noruega, 1998)
Viga de aço:	300m (Rio-Niterói, Brasil, 1974)
Treliça de aço:	549m (Quebec, Canadá, 1917)
Arco de concreto:	390m (Krk, Croácia, 1980)
Arco de aço:	510m (New River Gorge, USA, 1977)
Estaiada de concreto:	530m (Skarnsund, Noruega, 1991)
Estaiada de aço:	404m (Saint Nazaire, França 1998)
Estaiada de aço/concreto:	890m (Tatara, Japão 1999)
Pênsil de aço:	1990m (Akashikaikyo, Japão 1998)

## 1.2. Concepção de pontes

O processo criativo, ou de concepção, acima descrito, exige do engenheiro boa informação ao nível dos materiais e técnicas construtivas, bem como dos tipos estruturais e suas teorias.

Isso, porém, não basta. É preciso boa formação, isto é, todos esses dados devem ser interiorizados, compreendidos na sua essência e interligados entre si de forma a dar ao engenheiro capacidade crítica e criativa.

Relativamente aos materiais e técnicas construtivas, são essenciais suas exigências, suas qualidades e limitações. O que seria essencial nos tipos estruturais? A forma geométrica não é certamente o essencial, mas sim o seu comportamento, isto é, a maneira como a estrutura trabalha. Dois aspectos desse comportamento devem ser ressaltados:

- Como a estrutura se deforma sob atuação de um determinado carregamento;
- Como essas cargas caminham ao longo dela. É fundamental visualizar o caminhamento das cargas desde a origem, seu ponto de aplicação, até o destino, a fundação. Atenção, qualquer parcela esquecida desse caminho pode representar o elo fraco!

Interiorizar esse comportamento corresponde a desenvolver o que usualmente se chama intuição ou sensibilidade estrutural.

Como a concepção estrutural é um processo criativo baseado nessa intuição, quanto mais desenvolvida e cultivada ela for, maiores são as chances de obter uma boa concepção, uma verdadeira "Obra de Arte".

## 1.3. Princípios básicos da concepção

De modo a facilitar o processo de concepção podem-se enunciar alguns princípios. Esses princípios, como o próprio nome diz, não são gerais, mas têm um campo de validade suficientemente grande para justificá-los.

1º) É fundamental visualizar o caminhamento das cargas; desde o ponto de aplicação até a fundação.

2º) É conveniente projetar a fundação sob as cargas a suportar; preferencialmente fazendo coincidir o centro de gravidade das cargas com o da fundação.

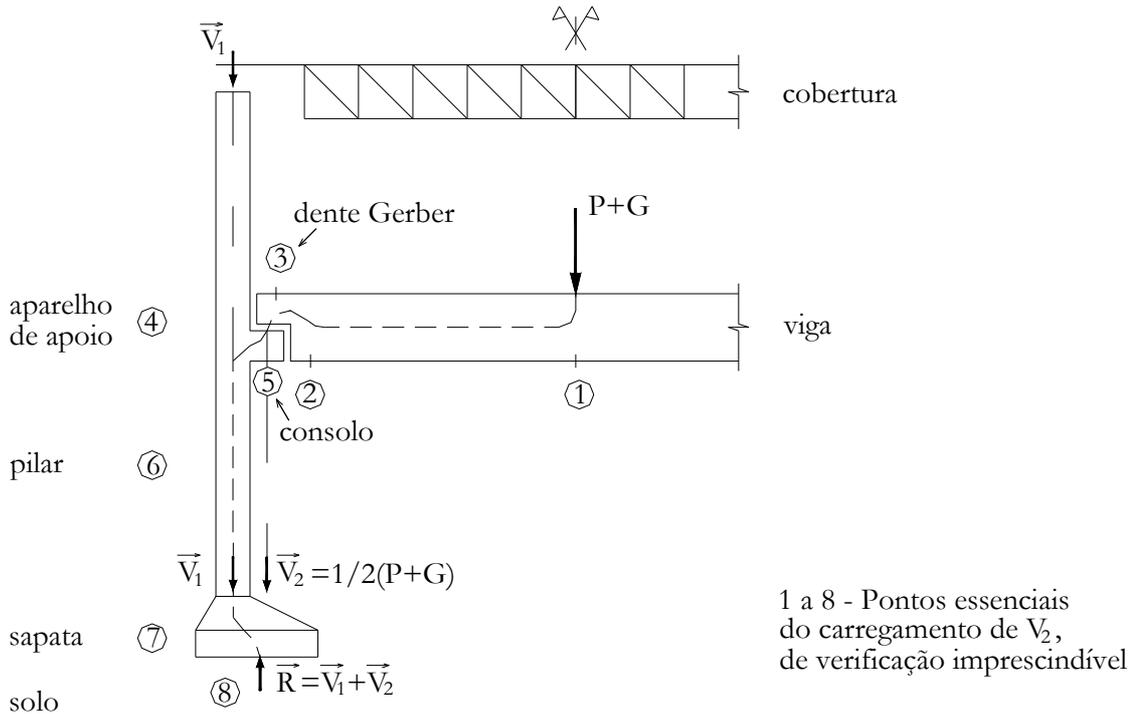


Figura 4 – Exemplo de transporte de carga desde o ponto de aplicação até a fundação.

3º) Princípio do caminho mais curto

"O arranjo estrutural mais eficiente é aquele que fornece às cargas o caminho mais curto desde seus pontos de aplicação até a fundação."

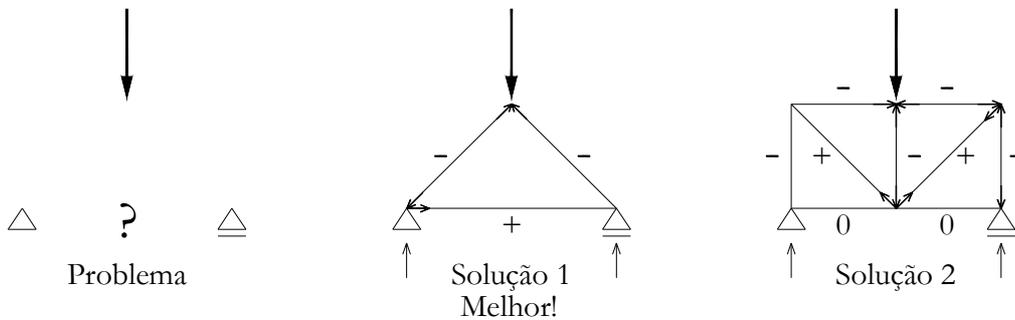
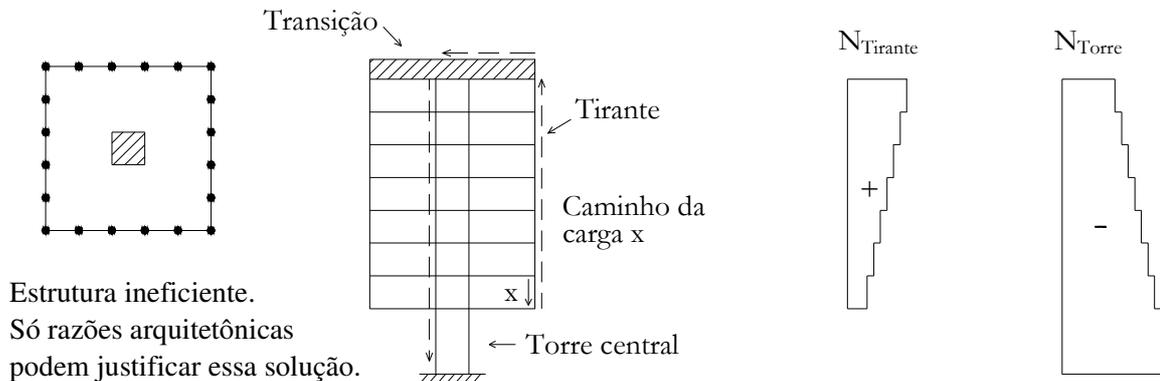


Figura 5 – Exemplos de solução estrutural.



Estrutura ineficiente. Só razões arquitetônicas podem justificar essa solução.

Figura 6 - Edifício Suspenso.

#### 4º) Princípio da rigidez

Nas estruturas isostáticas o caminhamento das cargas é definido pelas condições de equilíbrio, mas nas hiperestáticas ele sofre também influência da rigidez. "Entre dois caminhos alternativos a carga caminha predominantemente pelo mais rígido."

*Estrutura Isostática.* O equilíbrio determina o caminhamento das cargas.

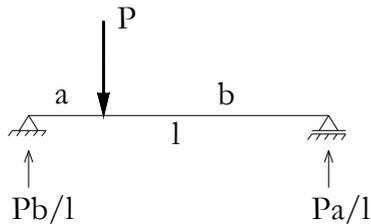


Figura 7 – Viga isostática.

*Estrutura Hiperestática*

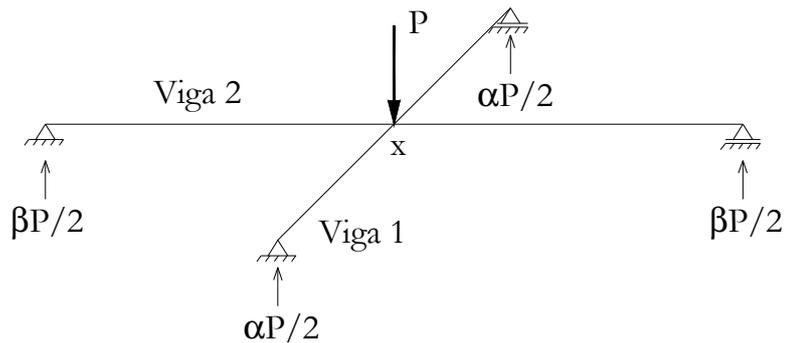


Figura 8 – Duas vigas ortogonais.

Sendo  $l_1 \ll l_2$  e  $I_1 = I_2 = I$ , a viga 1 é muito mais rígida transportando muito mais carga.

De fato:

- compatibilidade em x

$$\text{flecha } x = \frac{\alpha P l_1^3}{48EI} = \frac{\beta P l_2^3}{48EI}$$

$$\alpha l_1^3 = \beta l_2^3 \quad (1)$$

- equilíbrio vertical

$$\alpha P + \beta P = P$$

$$\alpha + \beta = 1 \quad (2)$$

Assim:

$$\alpha = \beta \frac{l_2^3}{l_1^3} \gg \beta.$$

$$\text{pois } l_2 \gg l_1$$

ou

$$\alpha = 1 \frac{k_1}{k_1 + k_2} \quad e \quad \beta = 1 \frac{k_2}{k_1 + k_2} \quad (\text{no caso geral quando } I_1 \neq I_2)$$

onde  $k = \frac{48EI}{l^3}$  é a rigidez de uma viga para carga no meio do vão.

A viga 1, por ser bem mais rígida, transporta bem mais carga. A proporção das cargas transportadas é a proporção das rigidezes:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{k_1}{k_2}$$

Se a viga 1 é 10x mais rígida, transporta 10x mais carga.

*Conclusão:* "A rigidez define o caminhamento das cargas".

*Nota:* Numa estrutura hiperestática de grau de hiperestaticidade  $n$ , existem  $n+1$  caminhos possíveis para as cargas. Verifique que isso vale para os 2 exemplos acima.

*Exemplo:* Uma outra maneira de ver a hiperestaticidade.

Grau de hiperestaticidade  $n = (n+1)$  caminhos alternativos para as cargas.

a) Viga isostática:  $gh=0$

Só existe 1 caminho para as cargas, que é aquele definido pelo equilíbrio.

b) Viga engastada-apoiada:  $gh=1$

Devem existir 2 caminhos.

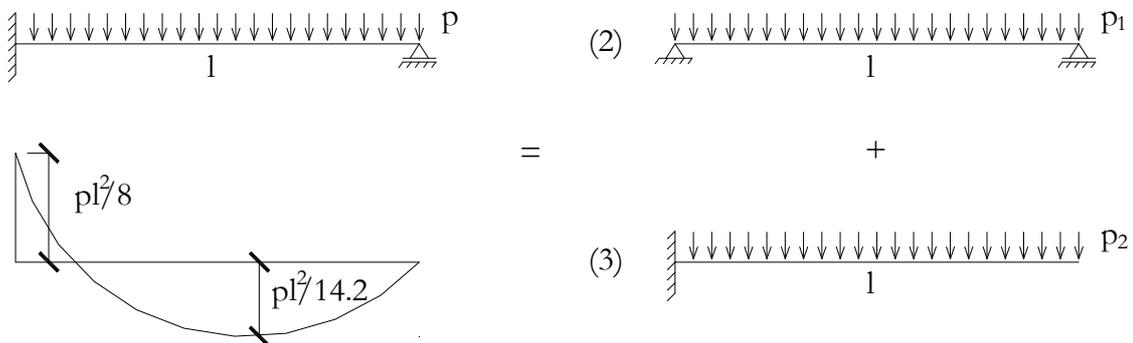


Figura 9 – Caminhos das cargas para a viga engastada-apoiada.

Como:  $M_{eng} \equiv M_{bal}$

$$\frac{pl^2}{8} = \frac{p_2 l^2}{2} \quad p_2 = \frac{p}{4} \quad e \quad p_1 = \frac{3p}{4}$$

Para esses valores de  $p_1$  e  $p_2$ , os efeitos de  $p$  em (1) são iguais à soma dos efeitos de  $p_1$  e  $p_2$  em (2) e (3) respectivamente.

(2) e (3) são os 2 caminhos alternativos.

### 5º) Princípio da distribuição

"O arranjo estrutural mais eficiente é aquele que distribui as cargas pelos seus elementos, convenientemente, evitando concentrações."

*Exemplo:* Vãos bem proporcionados.

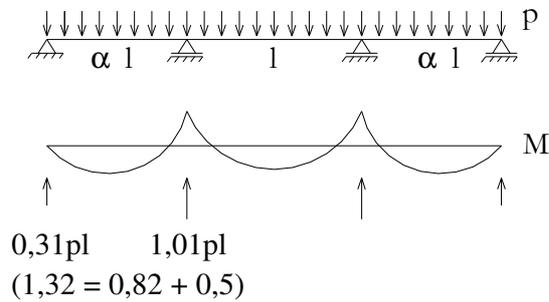


Figura 10 – Diagrama de momentos permanentes para  $l' = 0,82l$ .

$$l' = \alpha l$$

$$\frac{pl'^2}{8} = \frac{pl^2}{12}$$

$$l' = \sqrt{\frac{8}{12}} l = 0,82l$$

Boa proporção:  $\alpha=0,82$

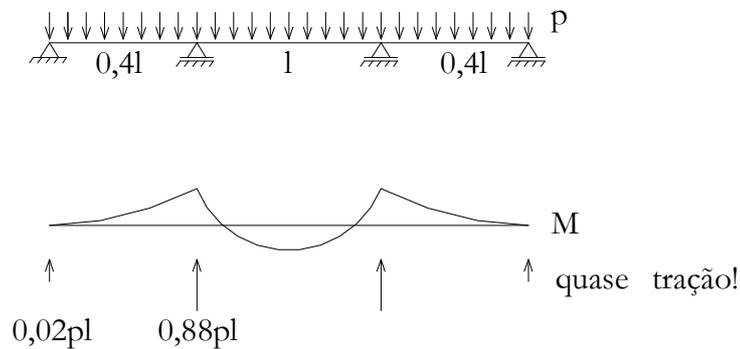


Figura 11 - Diagrama de momentos permanentes para  $l' = 0,4l$ .

Má proporção:  $\alpha=0,4$

6º) A eficiência das estruturas depende também da forma como elas são solicitadas.  
Considerando materiais adequados para cada caso, pode-se dizer que a eficiência varia como  
indica o quadro abaixo:

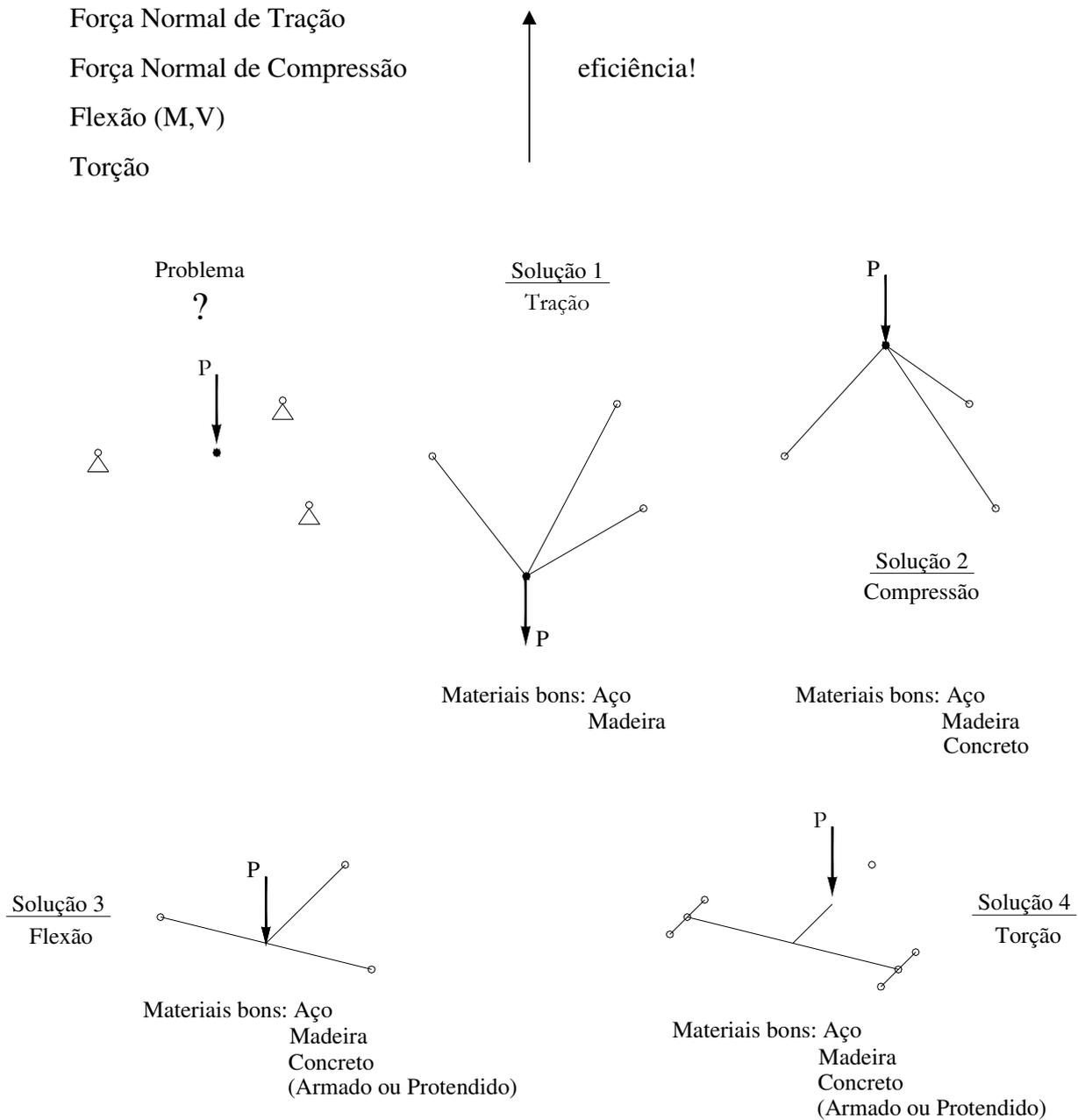


Figura 12 – Soluções estruturais, considerando os materiais adequados.

Do ponto de vista estritamente estrutural as soluções perdem qualidade de 1 para 4. Isso se justifica, pois:

Nas soluções 1 e 2, as barras trabalham à força normal usando toda a seção transversal das barras. (As tensões  $\sigma$  se distribuem uniformemente nas seções transversais). A solução 2 tem a desvantagem de gerar efeitos de 2ª. ordem (“flambagem”).

Na solução 3 a flexão não consegue usar integralmente a seção transversal. Sobretudo a região central fora mal utilizada. Seções I ou caixão melhoram o desempenho.

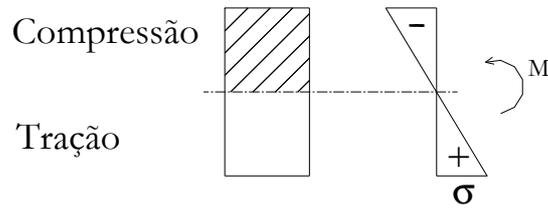


Figura 13 – Tensões de flexão ao longo da altura da seção.

Na solução 4, uma parcela importante do transporte da carga é feita por torção. A seção transversal da barra é solicitada ao cisalhamento desuniformemente. A região central é quase perdida. Seções caixão melhoram o desempenho.

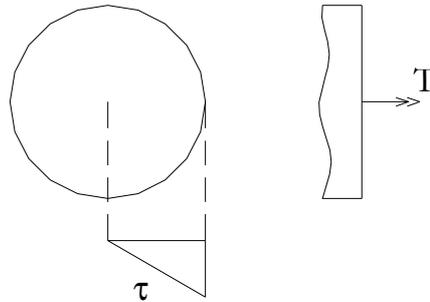


Figura 14 – Tensões de cisalhamento ao longo da seção.

## 2. SUPERESTRUTURA DE PONTES

### 2.1. Classificação das pontes conforme o tipo estrutural da superestrutura

#### 2.1.1. Pontes em laje

Sistema longitudinal: biapoiada ou contínua

Sistema transversal: maciça ou vazada (= nervurada)

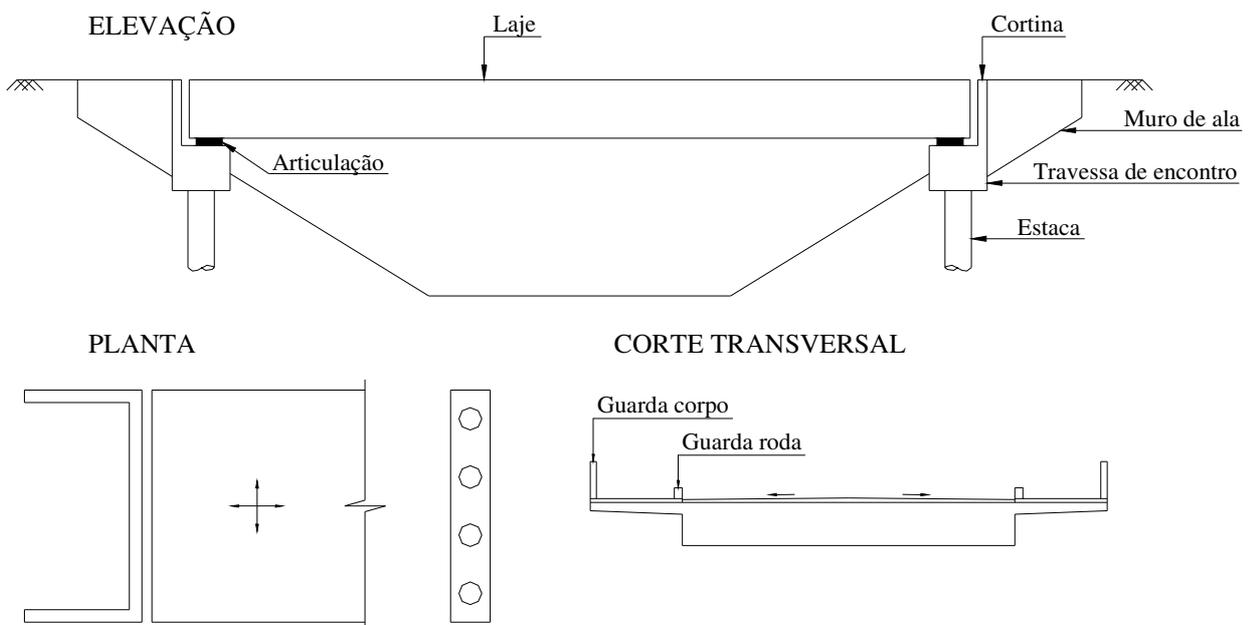


Figura 15 – Ponte em laje.

*Comportamento estrutural:* bidimensional, com boa capacidade de distribuição.

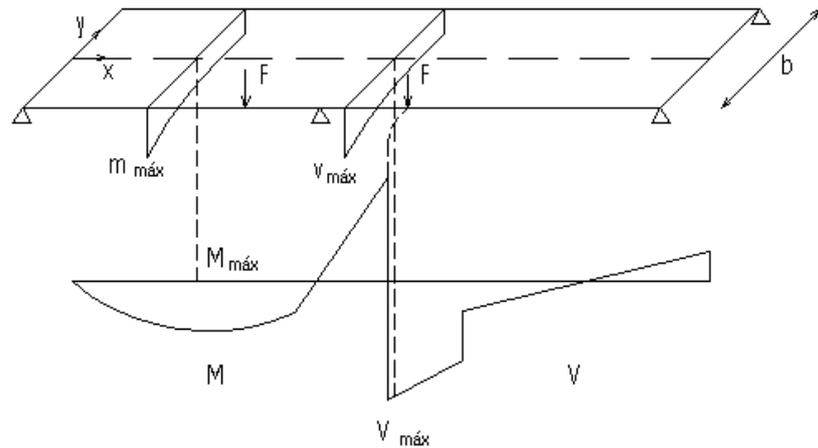


Figura 16 – Ponte em laje contínua

**M, V** - Diagramas de esforços solicitantes no tabuleiro como um todo ( $M = \text{kN.m}$ ;  $V = \text{kN}$ )

**m, v** - Diagrama de distribuição dos esforços solicitantes ao longo da largura do tabuleiro

( $m = \text{kN.m/m}$ ;  $v = \text{kN/m}$ )

Assim:

$$M_{\text{máx}} = \int_b m \, dy$$

$$V_{\text{máx}} = \int_b v \, dy$$

### 2.1.2. Pontes em viga

Sistema longitudinal: biapoiada ou contínua

Sistema transversal: 2 ou mais vigas (tê ou celular)

1 viga celular (caixão)

#### 2.1.2.1. Ponte em duas vigas Tê, biapoiadas

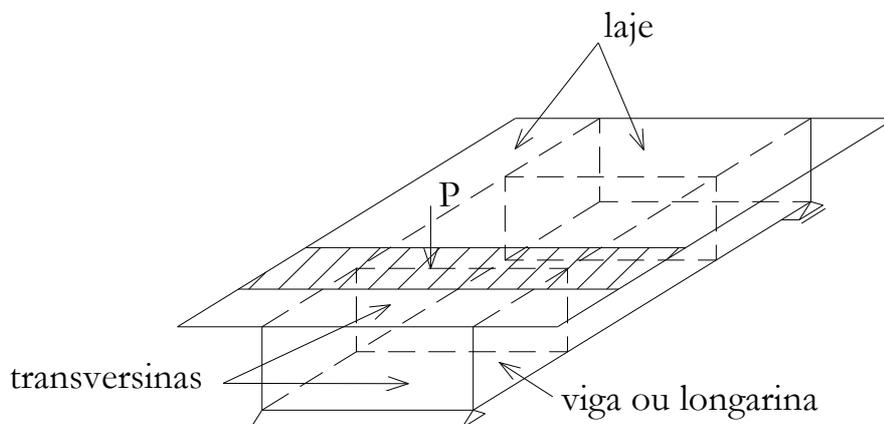


Figura 17 – Ponte em duas vigas biapoiadas.

Sistema Transversal:

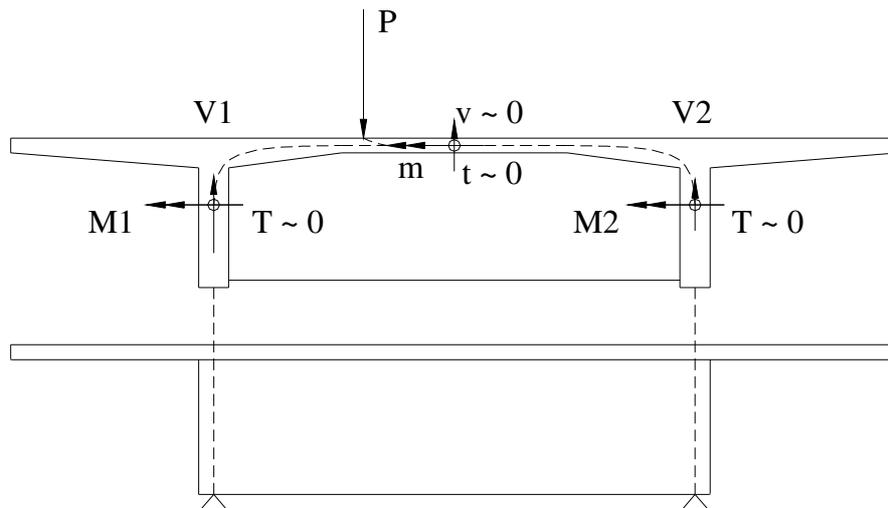


Figura 18 – Seção transversal e transporte de cargas.

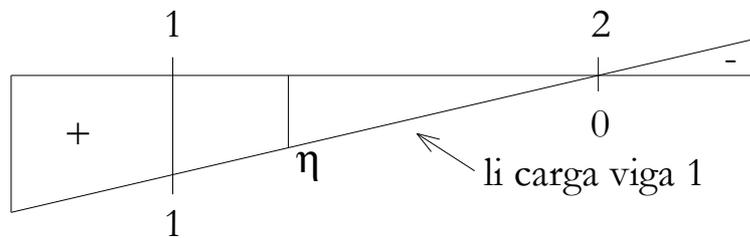


Figura 19 – Linha de influência de carga na viga 1.

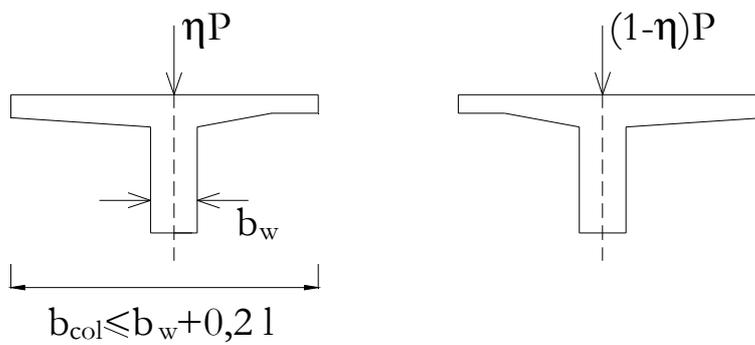


Figura 20 – Largura colaborante da laje.

Transporte de carga:

- Transversal pelo conjunto laje-transversina simulado por uma barra transversal apoiada nas longarinas<sup>1</sup>. A linha de influência para reação de apoio dessa barra equivale àquela para carga na longarina correspondente.
- Longitudinal pelas longarinas com a colaboração da laje na flexão.

Sistema longitudinal:

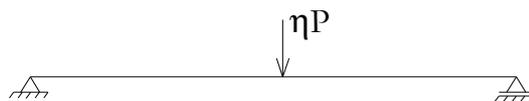


Figura 21 – Esquema estrutural da viga 1.

Comportamento estrutural: observar a figura e notar a pouca capacidade de distribuição.

2.1.2.2. Ponte em grelha

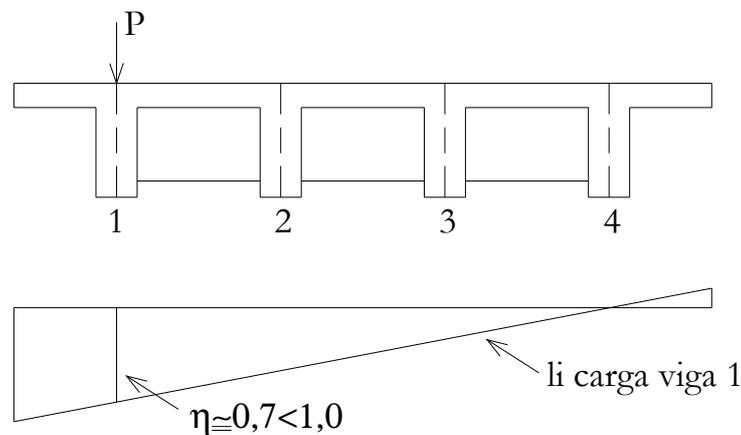


Figura 22 – Seção transversal de ponte em grelha e linha de influência de carga na viga 1.

Preferencialmente 4 vigas ou mais ligadas apenas pela laje ou com transversinas intermediárias.

Comportamento estrutural semelhante ao da ponte em 2 vigas com melhor capacidade de distribuição. Essa capacidade não se modifica muito ao se retirarem as transversinas intermediárias.

<sup>1</sup> Duas hipóteses justificam esse modelo:

1<sup>a</sup>) A rigidez à torção das viga é baixa.

2<sup>a</sup>) O trabalho longitudinal das lajes influi pouco na distribuição transversal.

As de apoio devem ser mantidas, admitindo-se a sua eliminação, apenas, em casos excepcionais, e mesmo assim, acompanhada de medidas especiais.

### 2.1.2.3. Ponte celular

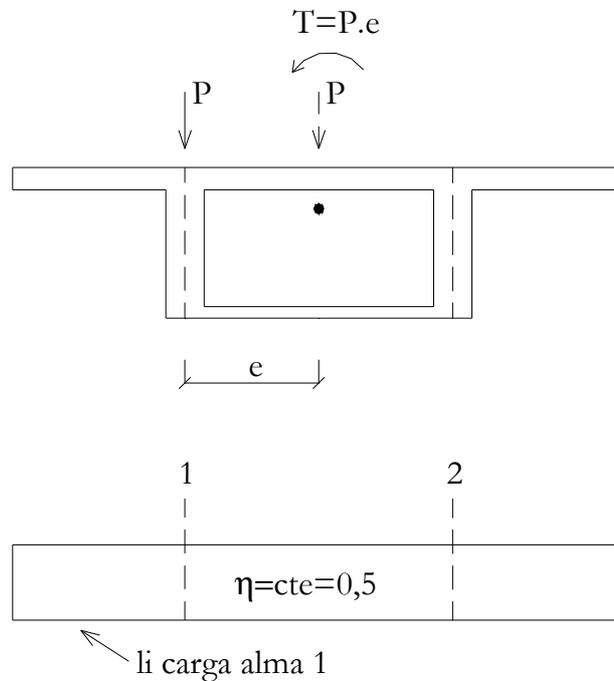


Figura 23 – Seção transversal e linha de influência de carga na alma 1 ou na alma 2.

P centrada provoca flexão igual das duas almas.

$T = Pe$  provoca torção. O acréscimo de flexão na alma 1 provocado pela excentricidade e é normalmente desprezível.

Comportamento estrutural excelente:

- Grande capacidade de distribuição em função da alta rigidez à torção (a torção, por ser mais rígida que a flexão diferenciada das almas, transporta praticamente todo o efeito de excentricidade).
- Grande resistência à torção.
- Grande resistência à flexão, seja para momentos positivos, seja para negativos (pois tem 2 mesas, superior e inferior).

2.1.2.4. Sistemas longitudinais usuais

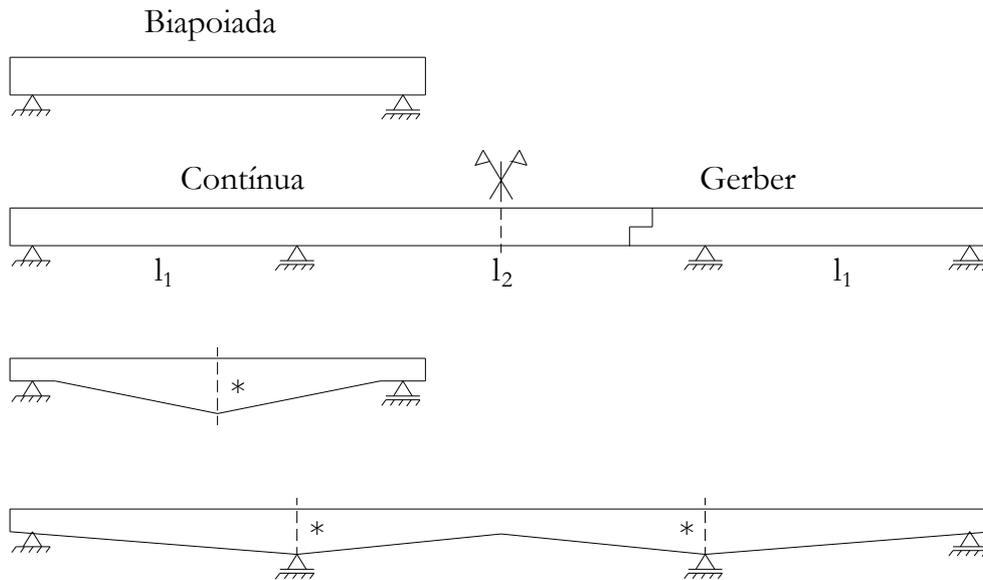


Figura 24 – Exemplos de sistemas longitudinais.

- Procurar vãos bem proporcionados:  $l_1 \approx 0,85 l_2$  (h variável de 0,65 a 1,0  $l_2$ ).
- Ao adotar h variável prever  $h_{m\acute{a}x}$  nas seções críticas \*.

2.1.3. **Pontes em treliça, pórtico, arco ou suspensas por cabos – uma abordagem comparativa**

Note-se que nos exemplos a seguir todas as estruturas executam o mesmo serviço, isto é, transportam toda a carga distribuída para os 2 apoios disponíveis. A diferença está na maneira de transportá-la, cada estrutura, da viga reta à ponte estaiada, o faz à sua maneira.

Tabela 1 – Análise comparativa entre diversos sistemas estruturais.

<p><u>Viga reta</u></p>	
<p><u>Viga poligonal</u></p>	

<p><u>Viga curva</u> Equilíbrio nó A:</p> $N = \frac{pl \operatorname{sen} \theta}{2}$ $V = \frac{pl \operatorname{cos} \theta}{2}$	
<p><u>Pórtico biarticulado</u> (H depende da rigidez relativa poste – travessão)</p>	
<p><u>Arco biarticulado</u> (Despreza-se a deformação por força normal) Equilíbrio nó A:</p> $N = \frac{pl}{2 \operatorname{sen} \theta}$ $H = \frac{pl}{2 \operatorname{tg} \theta} = \frac{pl^2}{8h}$	
<p><u>Treliça</u> Equilíbrio nó A:</p> $N = \frac{pl}{2 \operatorname{sen} \theta}$ $T = \frac{pl}{2 \operatorname{tg} \theta}$	
<p><u>Cabo – Ponte pênsil</u> (≡ arco de cabeça para baixo)</p>	
<p><u>Cabo – Ponte estaiada</u></p> $t = \frac{pe}{\operatorname{sen} \theta}$ $c = \frac{pe}{\operatorname{tg} \theta}$	

(Nas pontes pênsil e estaiada os cabos foram admitidos inextensíveis (indeformáveis)).



Ponte Estaiada

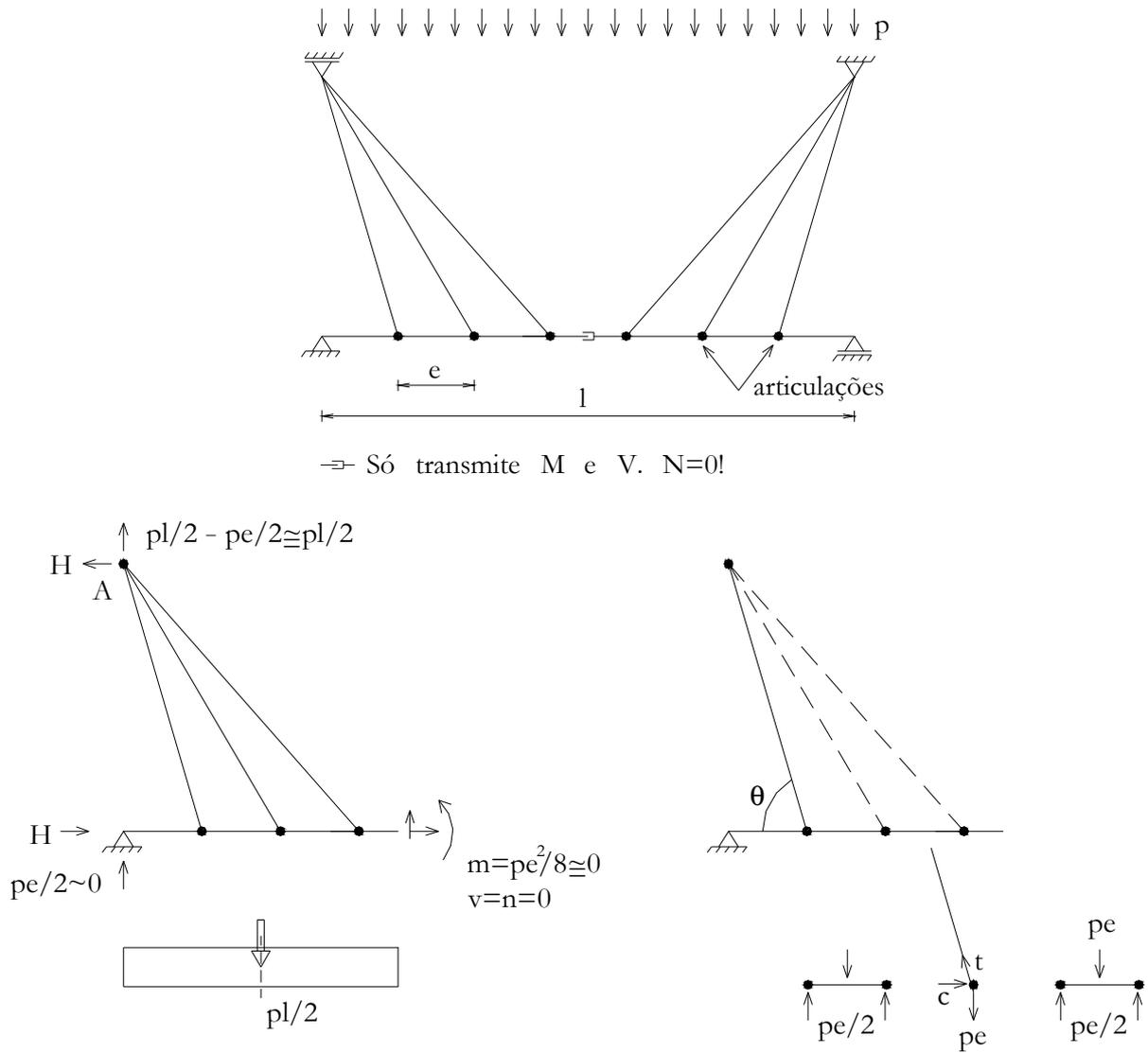


Figura 26 – Esquema estrutural de uma ponte estaiada.

$$M_A = \frac{pl}{2} \frac{l}{4} - \frac{pe^2}{8} - Hh = 0$$

$$t = \frac{pe}{\text{sen } \theta}$$

$$Hh = \frac{pl^2}{8} - \frac{pe^2}{8} \cong \frac{pl^2}{8}$$

$$c = \frac{pe}{\text{tg } \theta}$$

Como  $e \ll l$ :  $pe \ll pl$

$$pe^2 \llll pl^2$$

Logo:

$$H = \frac{pl^2}{8h}$$

Pontes Suspensas por Cabos, Pênseis ou Estaiadas

- *Ponte Pênsil*

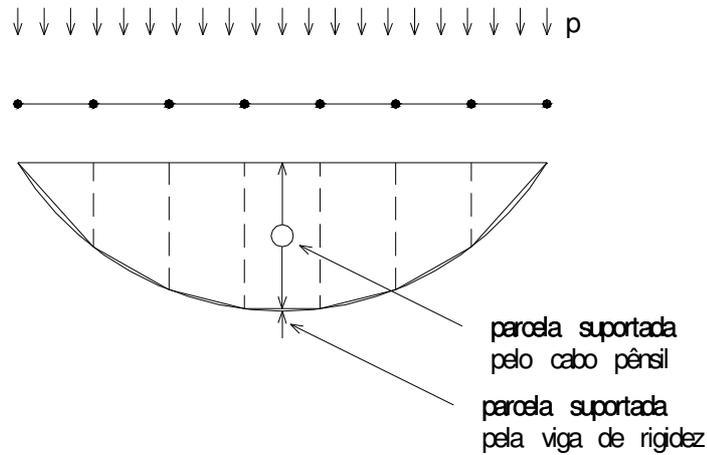


Figura 27 – falta legenda!

- *Ponte Estaiada*

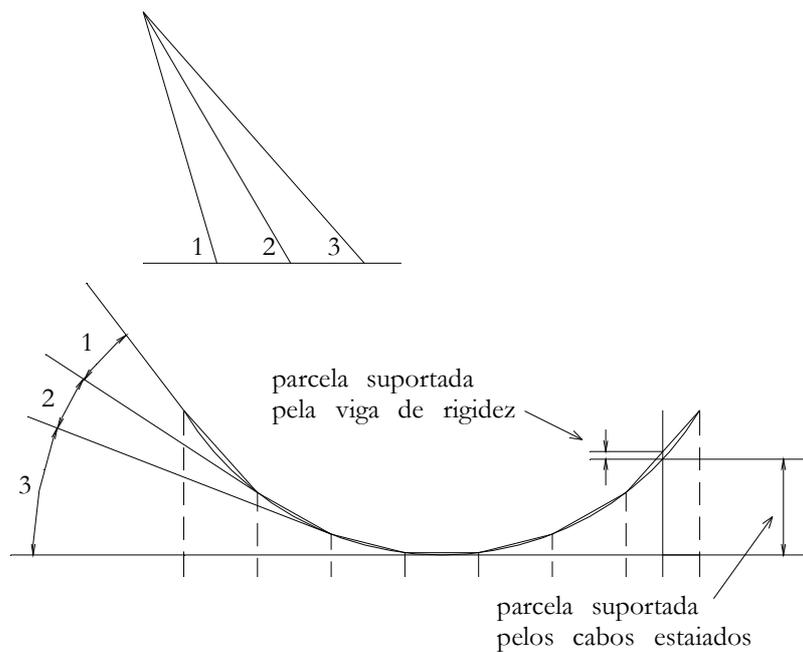


Figura 28 – Falta legenda!

Observações:

No projeto de pontes em arco, estaiadas ou pênseis, será necessário considerar a deformação por força normal e os efeitos de 2<sup>a</sup>. ordem, que não foram considerados aqui.

Esses efeitos são especialmente importantes nas pontes penseis, para cargas não uniformes, por exemplo, concentradas. Nesses casos o cabo muda de forma, até encontrar a forma funicular do carregamento. É nessa nova forma que as equações de equilíbrio devem ser escritas.

No entanto, os exemplos feitos são muito bons para explicar o comportamento fundamental dessas obras. Ele é sempre utilizado para um primeiro pré-dimensionamento.

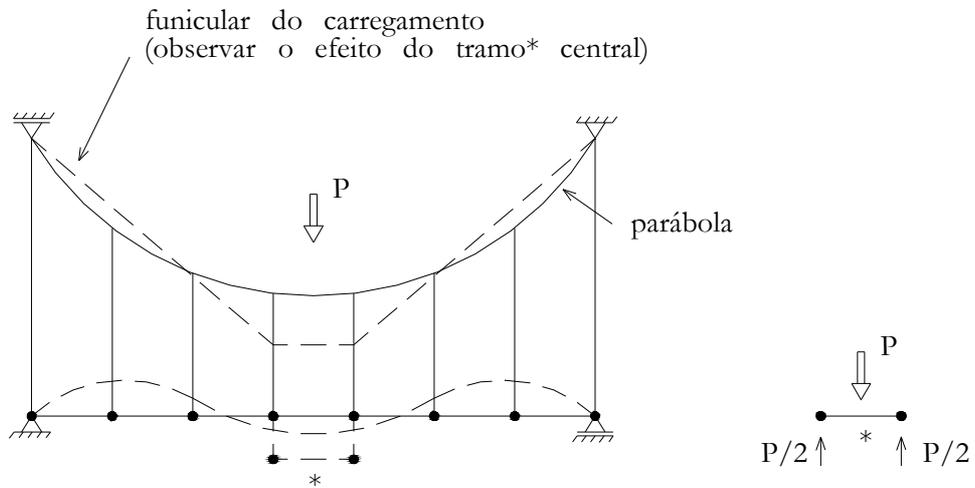


Figura 29 – Deformada do cabo na forma funicular.

Exemplos:

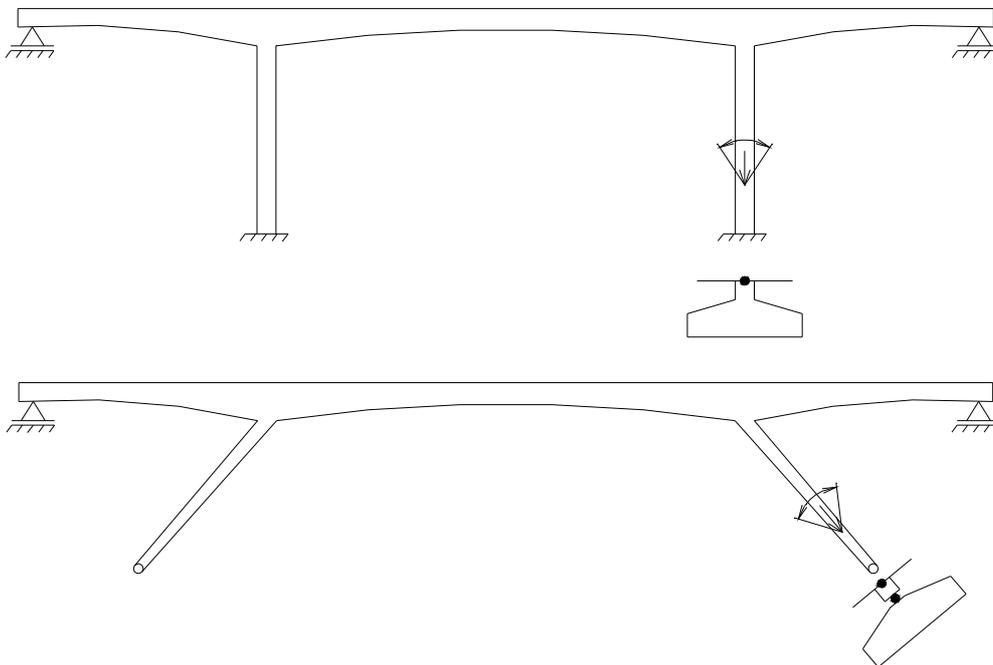


Figura 30 – Pontes em pórtico.

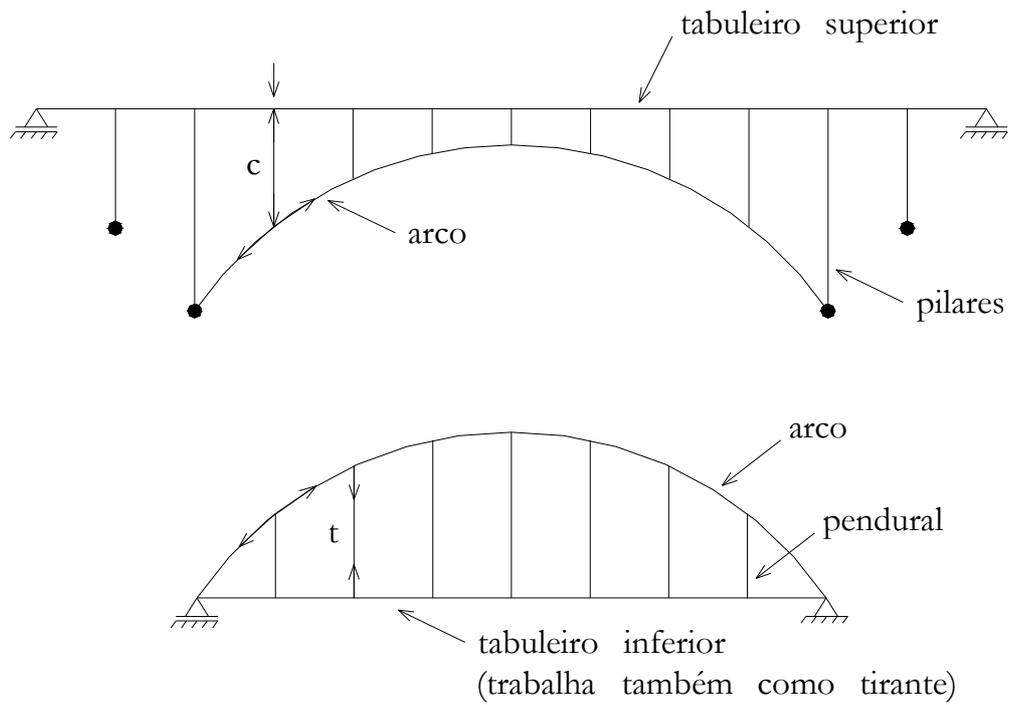


Figura 31 – Pontes em arco.

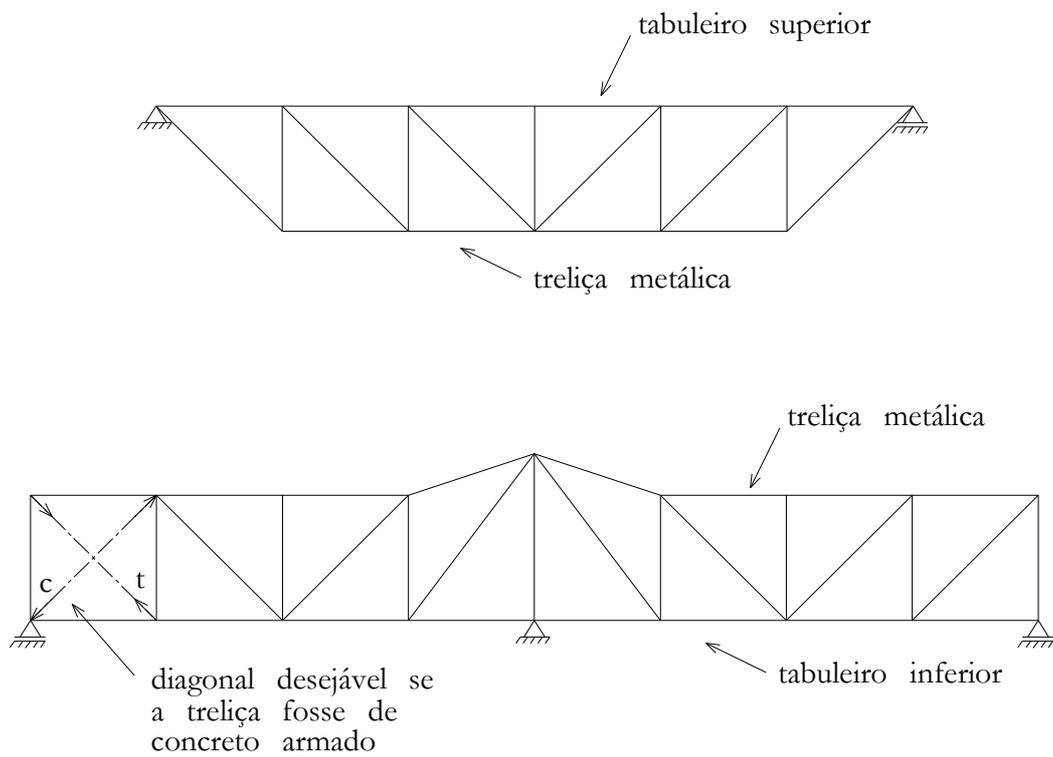


Figura 32 – Pontes em treliça.

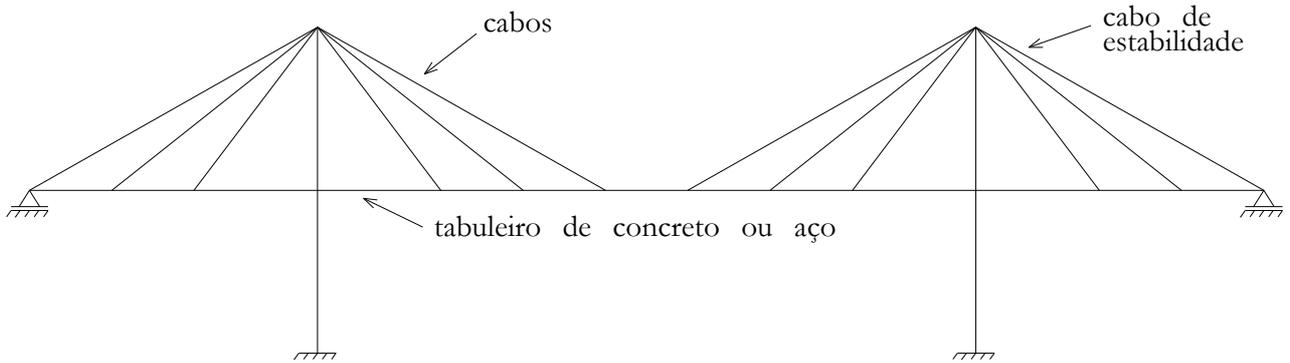


Figura 33 – Ponte estaiada.

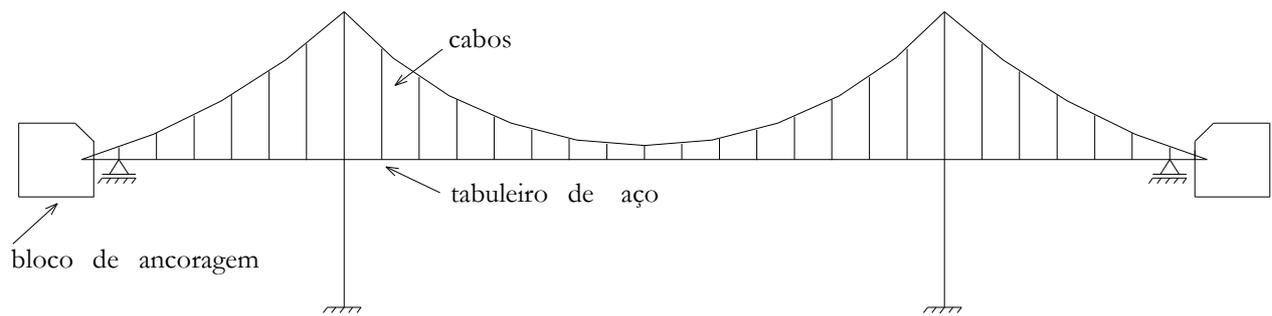


Figura 34 – Ponte pênsil.

Para mais exemplos ver Leonhardt (1979)<sup>2</sup>.

## 2.2. Classificação das pontes conforme o método construtivo

### 2.2.1. Pontes moldadas in loco sobre cimbramento fixo.

Os tipos mais comuns são três:

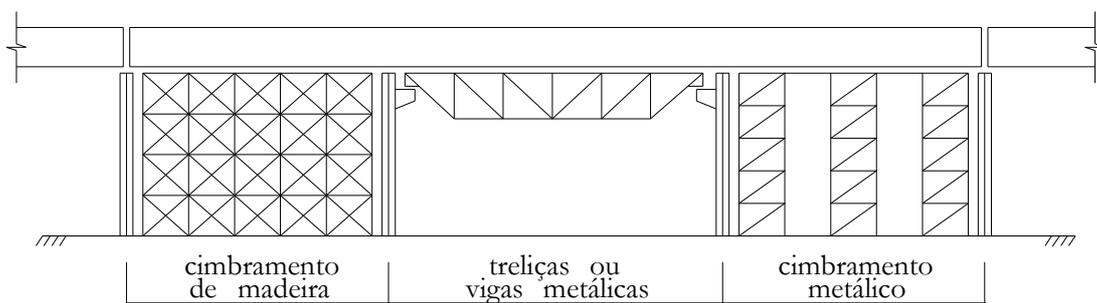


Figura 35 – Tipos comuns de cimbramento fixo.

<sup>2</sup> Construções de concreto: Princípios básicos da construção de pontes de concreto, vol. 6.

Cuidados:

1. Fundação e contraventamento do cimbramento;
2. Contra flechas para compensar recalques ou deformações de vigas e treliças;
3. Cuidados na concretagem - Recalques e deformações devem ocorrer antes do final da concretagem. Tratar juntas;
4. Cuidados na desforma - Desencunhar do centro para os apoios de cada vão e só após desmontar o cimbramento;
5. Vistoriar antes, durante e depois da concretagem.

### 2.2.2. Pontes moldadas *in loco* sobre cimbramento móvel.

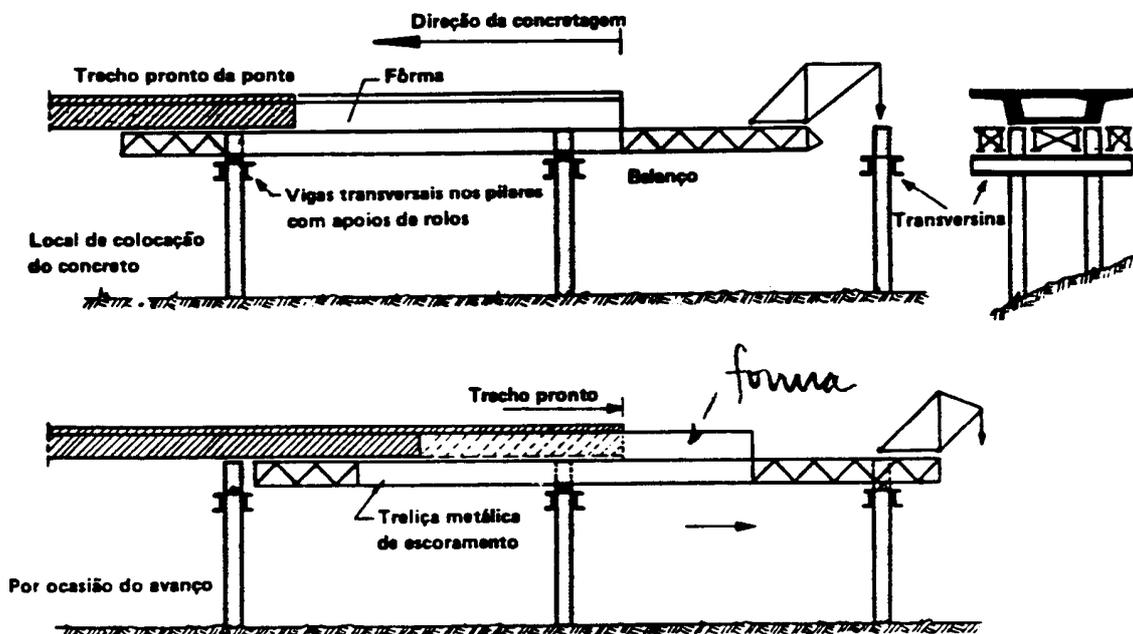


Figura 36 - Execução, vão por vão, por meio da treliza de escoramento deslizante sobre rolos dispostos em vigas transversais (Leonhardt, 1979).

Cuidados:

1. Escolher a posição da junta;
2. Influência do método construtivo no cálculo;
3. Cuidado com as interferências que podem impedir o movimento das formas ou da treliza (Transversinas);
4. Valem os 5 cuidados do item 2.2.1;
5. Tratamento da junta.

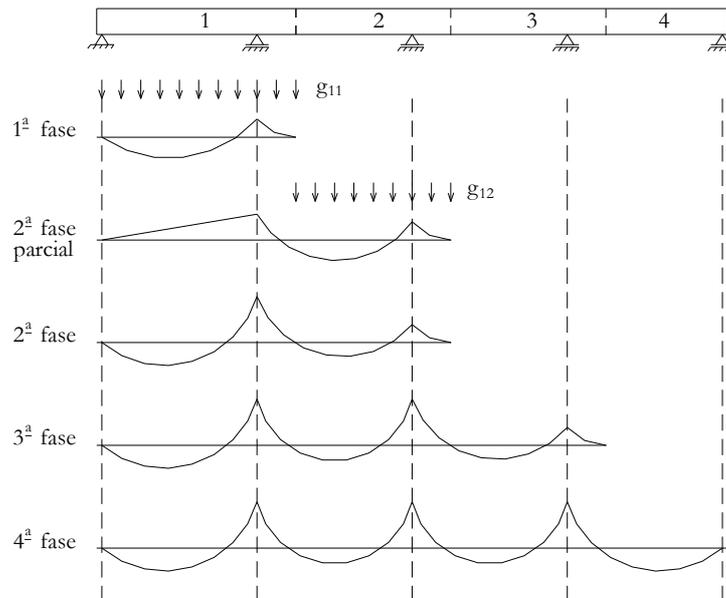


Figura 37 - Efeito do método construtivo sobre o diagrama M. (momentos fletores).

O diagrama M da quarta fase é, em princípio, diferente do da viga contínua. Ao longo do tempo, veremos futuramente, ele tende ao da viga contínua por efeito da fluência.

Verificar, portanto, cada fase construtiva, e a fase final para 2 situações:

- 1ª) Fase final definida pelo método construtivo. Situação observada no final da construção.
- 2ª) Fase final com adaptações por fluência. Situação que ocorre alguns anos após a inauguração.

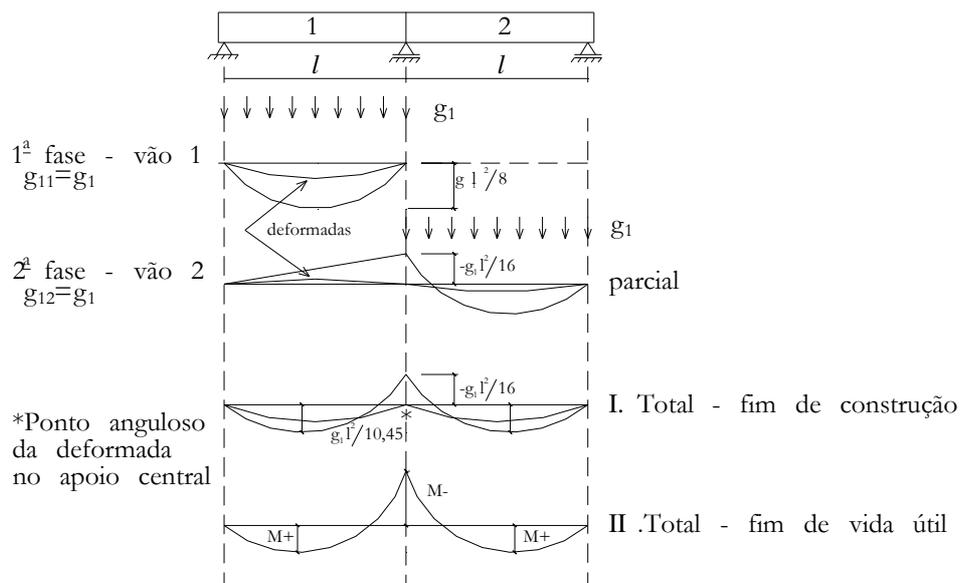


Figura 38 - Viga contínua com 2 vãos construída em 2 fases, com junta no apoio central.

O diagrama I (momento fletor), logo após o fim da construção, depende muito do método construtivo, enquanto que o diagrama II, ao fim da vida útil, depende bem menos do método construtivo, pois, devido ao efeito da fluência os esforços tendem aos de viga contínua.

Assim:

$$M_- \cong \frac{g_1 l^2}{8} \text{ e}$$

$$M_+ \cong \frac{g_1 l^2}{14,22}$$

Os carregamentos adicionais,  $g_2$  acabamento e  $q$  acidental, atuam na viga contínua de 2 vãos, sem interferência do método construtivo.

### 2.2.3. Consolos sucessivos moldados in loco

Aplicado pela primeira vez em 1930 no Brasil, para uma ponte de concreto armado (rio do Peixe, vão de 68m ). Muito usado para obras protendidas no mundo inteiro.

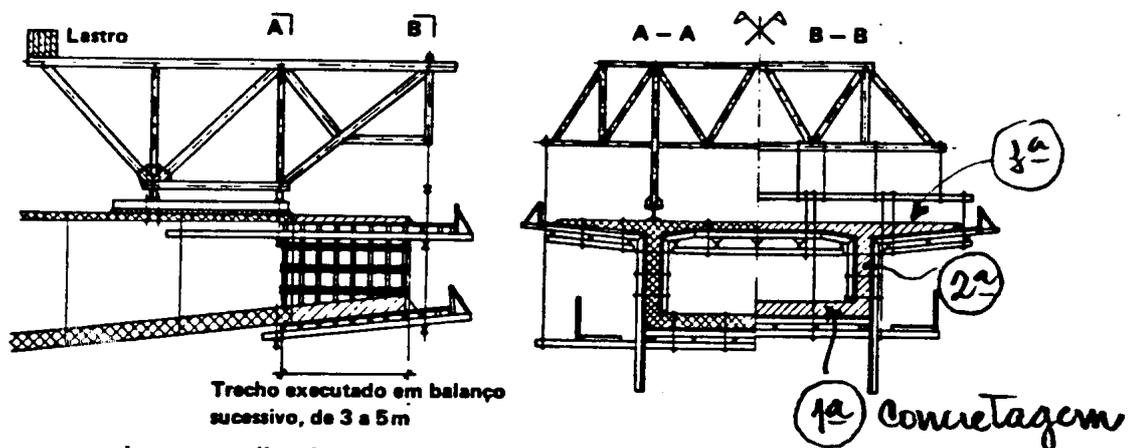


Figura 39 – Balanço sucessivo com treliça de escoramento e fôrmas em balanço deslocável = veículo de deslocamento de fôrma (Leonhardt, 1979).

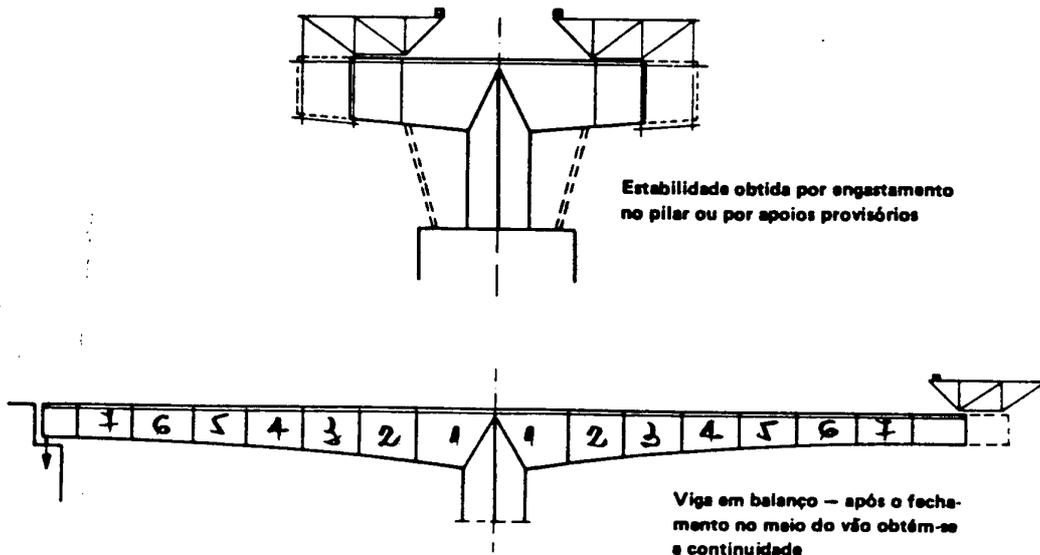


Figura 40 – Estabilização do balanço: em cima, por meio de engastamento no pilar ou por meio de apoios provisórios, embaixo, através de ancoragem, no paio extremo do vão adjacente mais curto.

Cuidados:

1. Contra Flecha - As previsões de projeto devem ser aferidas ao longo da obra. Cuidado: o concreto é solicitado muito novo, de modo que as deformações imediatas e sobretudo lentas são muito importantes .
2. Tratar juntas - Jatear com água o concreto verde e molhar abundantemente antes da concretagem seguinte.
3. Influência do método construtivo no cálculo.

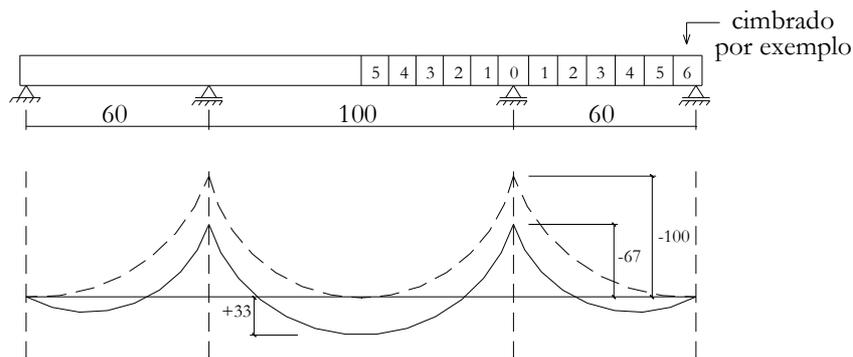


Diagrama M

- consolos sucessivos
- cimbramento fixo (viga contínua)

Figura 41 – Efeito da adaptação por fluência sobre o diagrama M (momentos fletores).

### 2.2.4. Consolos sucessivos pré-moldados

Aplicado pela primeira vez em 1952 na França (ponte Choisy-le-Roi sobre o Sena)

Cuidados:

1. Precisão na forma. Uma aduela deve ser a forma da vizinha, considerando as curvas em planta e em perfil, bem como a superelevação.
2. A junta nesse caso não é atravessada por armadura frouxa. Prover dentes para transmitir cortante, colar junta e usar protensão completa (isto é,  $\sigma$  sempre de compressão !).
3. Prever canteiro de pré moldados e transporte até o local.
4. Valem os 3 cuidados do item 2.2.3.

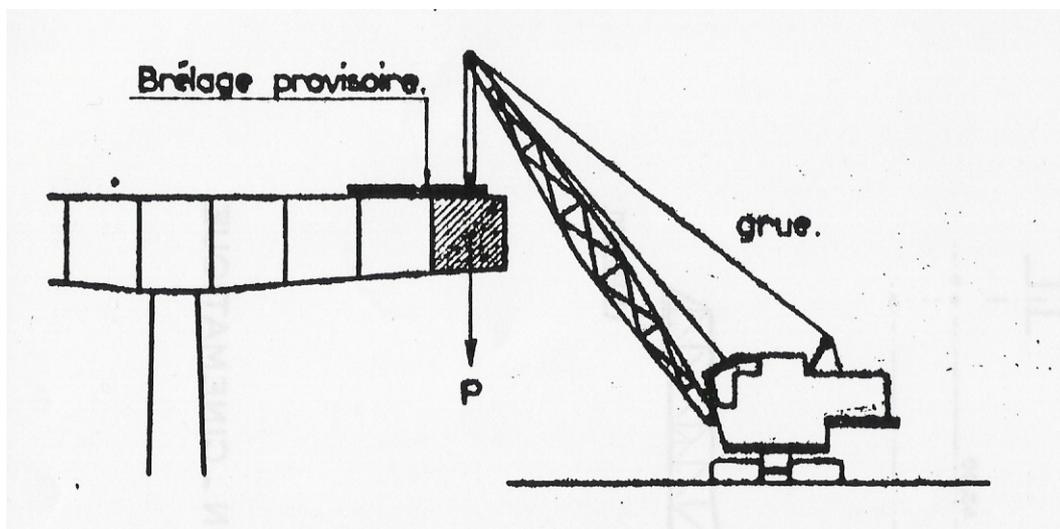


Figura 42 - Pont amont du boulevard périphérique.

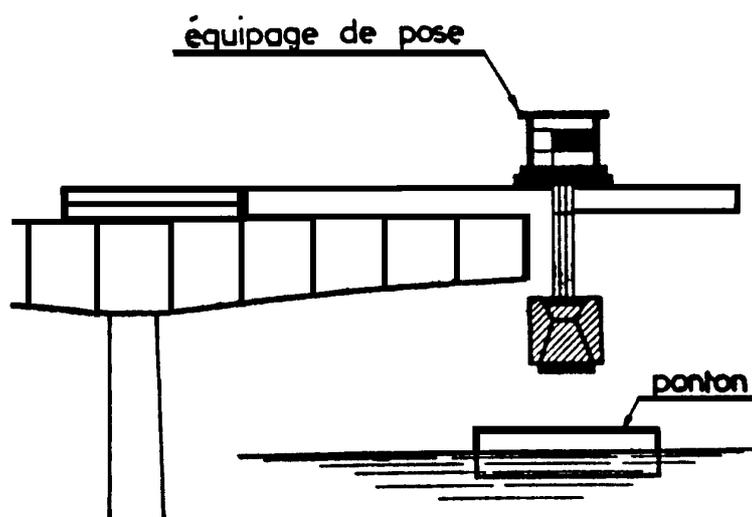


Figura 43 - Pont de Pierre Bénite.

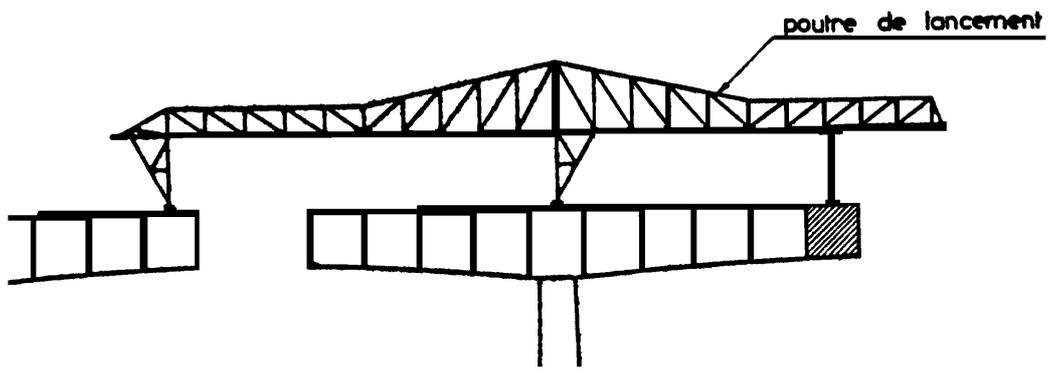


Figura 44 - Viaduct d'Oléron.

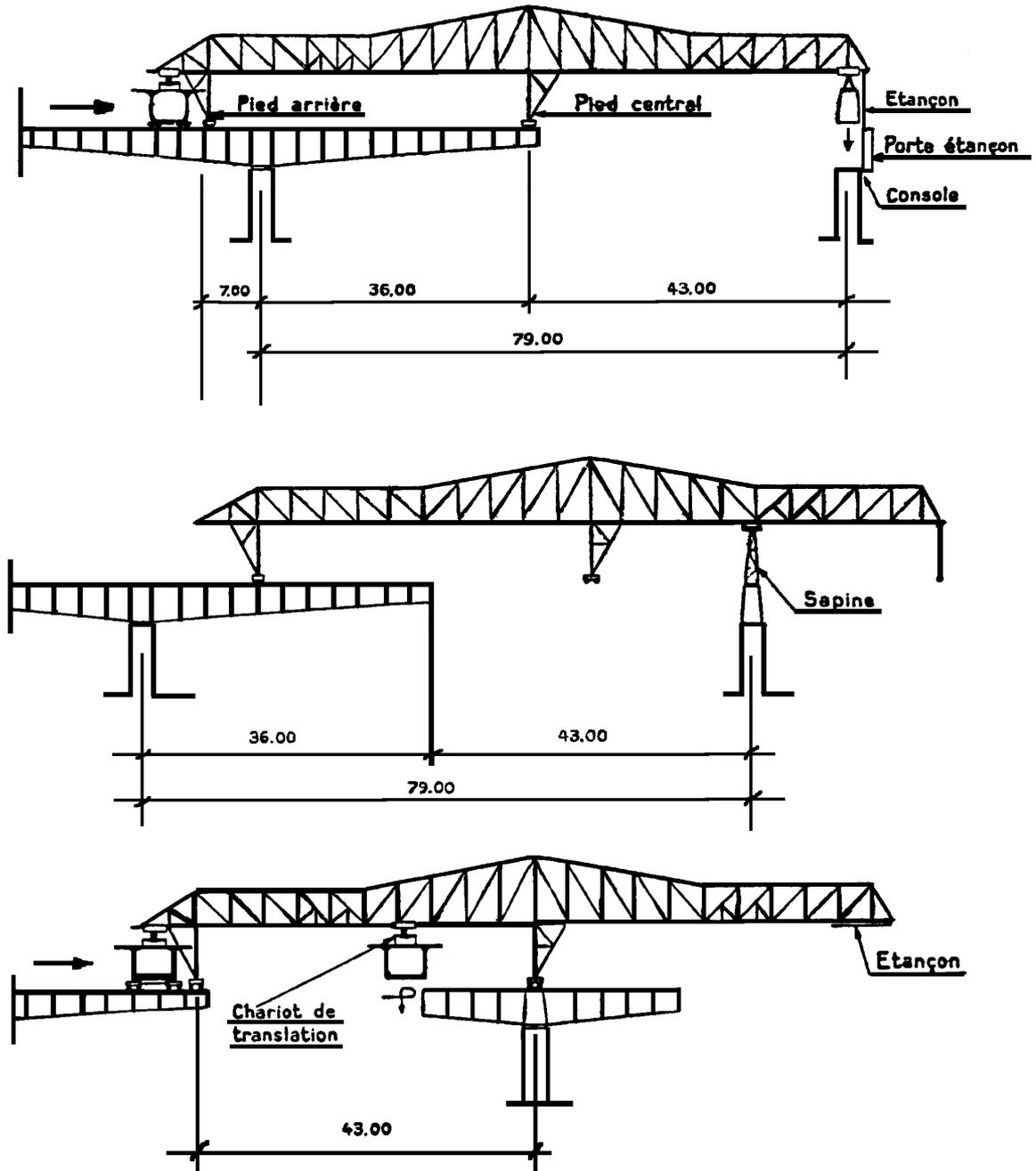


Figura 45 - Poutre du Viaduct D'Oléron – Cinématique.

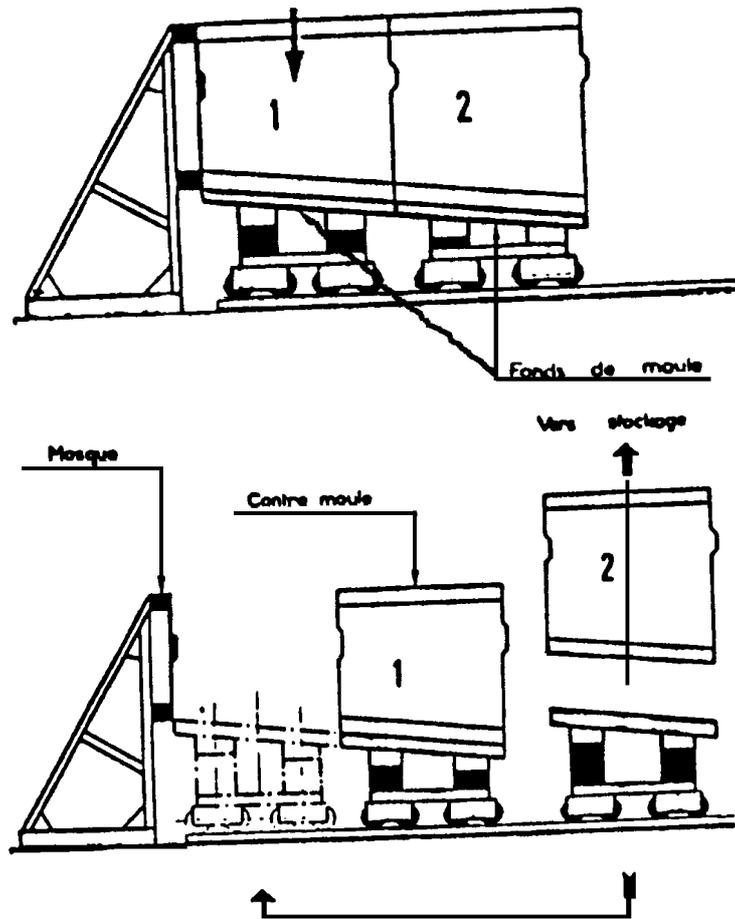


Figura 46 - Preparação das Células

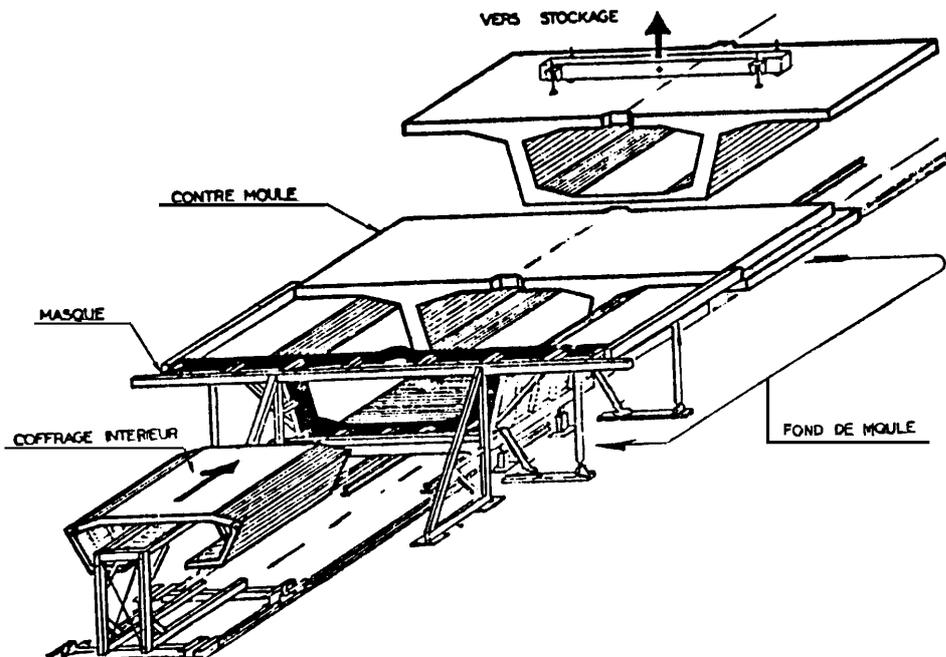


Figura 47 - Preparação das células horizontais por axonometria

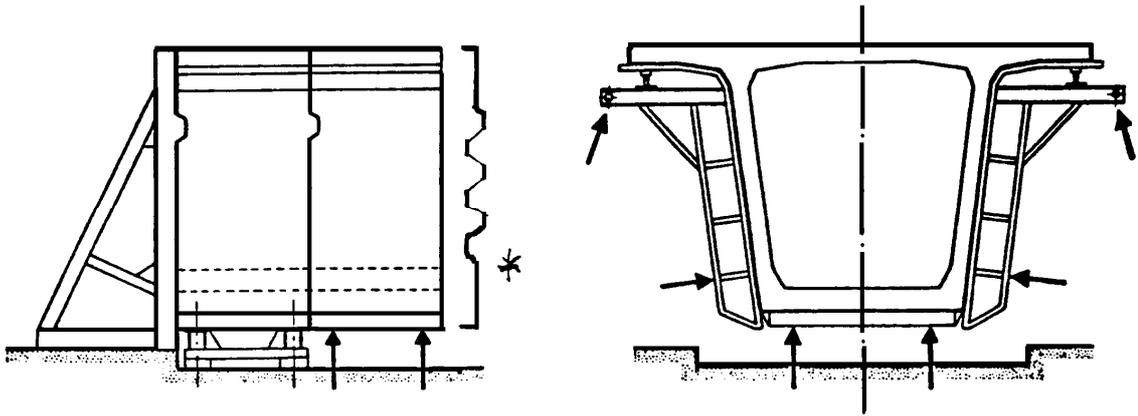


Figura 48 - Regale d'une cellule de prefabrication

- Modernamente se usam uma série de dentes.

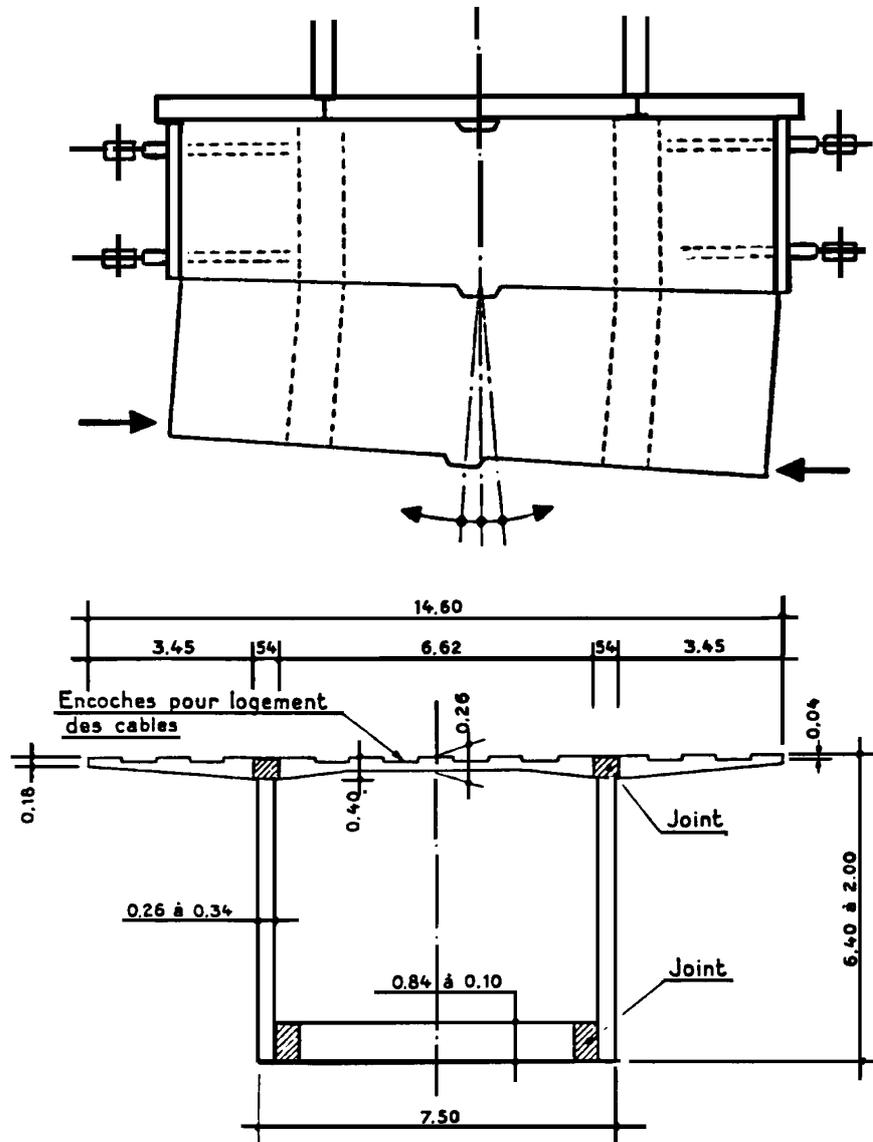


Figura 49 Pont de Chelepkhinsky – Coupe transversale d'un voussoir

### 2.2.5. Vigas pré-moldadas

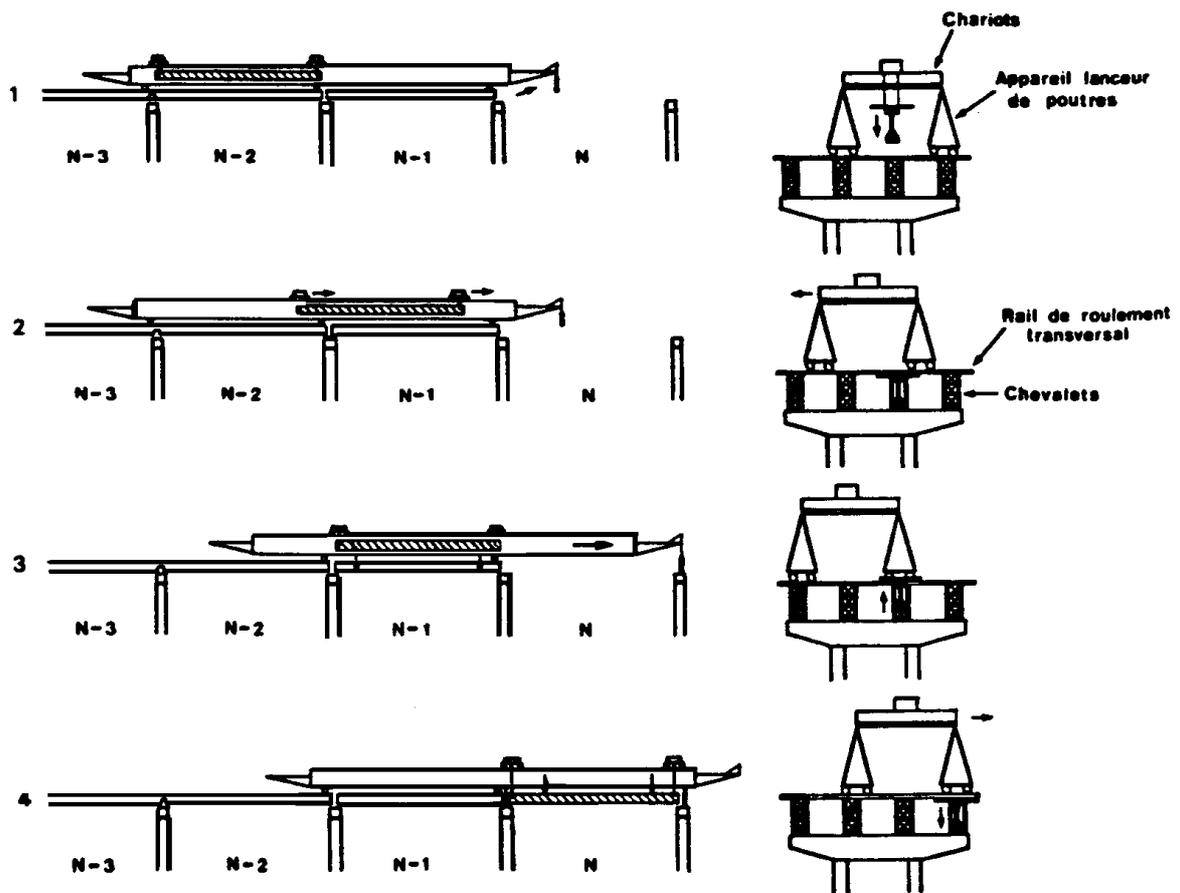


Figura 50 - Treliça de lançamento (Mathivat, ano).

Alternativas - Guindastes ou guinchos.

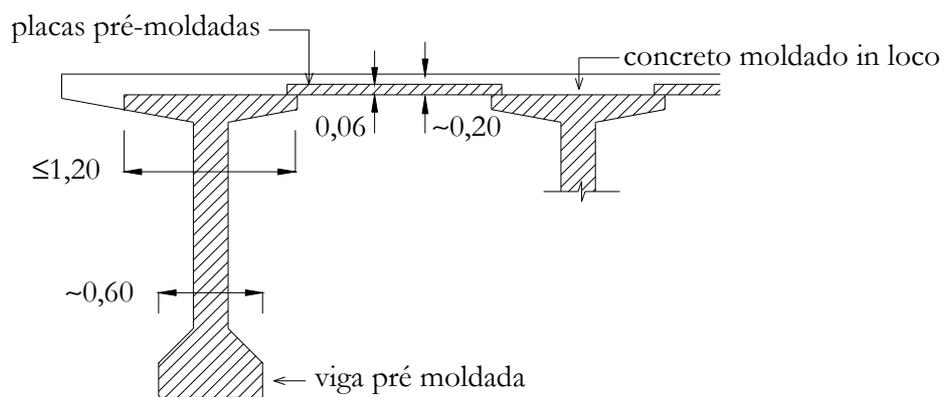


Figura 51 - Esquema moderno de seção transversal.

Cuidados:

1. Limitação dos equipamentos.

Por exemplo: Treliça Sictet (mais comum no Brasil)

$$P_{\text{máx}} \sim 120 \text{ tf } (\sim 42\text{m de vão})$$

largura máxima  $\sim 1,20\text{m}$

2. Prever canteiro de pré-moldados e transporte até o local.

3. Precisão de forma.

4. Influência do método construtivo no cálculo.

Por exemplo: Quando a laje é concretada, o peso próprio é suportado integralmente pelas vigas pré-moldadas, sem logicamente, a contribuição da laje.

5. Verificar a flexão lateral da viga causada por pequena inclinação (da ordem de  $5^\circ$ ) impossível de se evitar no transporte.

Os pontos de pega devem estar acima do C.G. da viga.

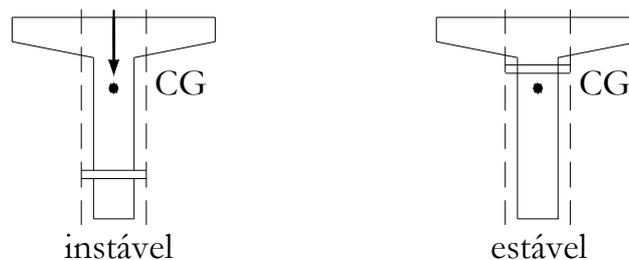


Figura 52 – Estabilidade em função do ponto de içamento.

Nota - Se a viga for excessivamente esbelta pode ser necessário verificar a “flambagem lateral”, melhor dizendo, a flexão lateral com efeito de segunda ordem.

6. Tratar as juntas como no item 2.2.3, especialmente aquelas entre concreto pré-moldado (viga ou placa) e concreto moldado in loco (complementação da laje)

### 2.2.6. Lançamentos progressivos

Aplicado pela primeira vez em 1962, na ponte sobre o rio Ager, na Áustria. A primeira aplicação no Brasil ocorreu em 1978, na passarela de Presidente Altino, sobre os trilhos da Fepasa.

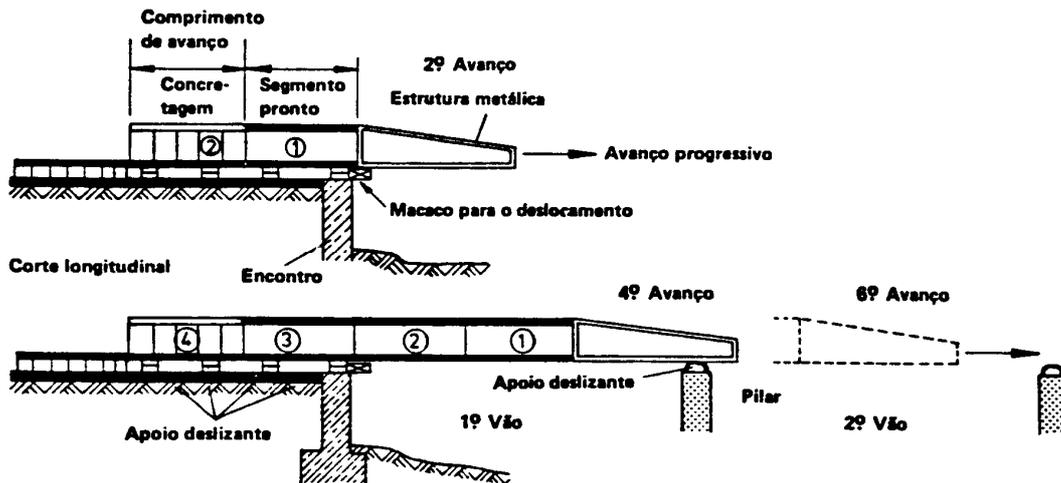
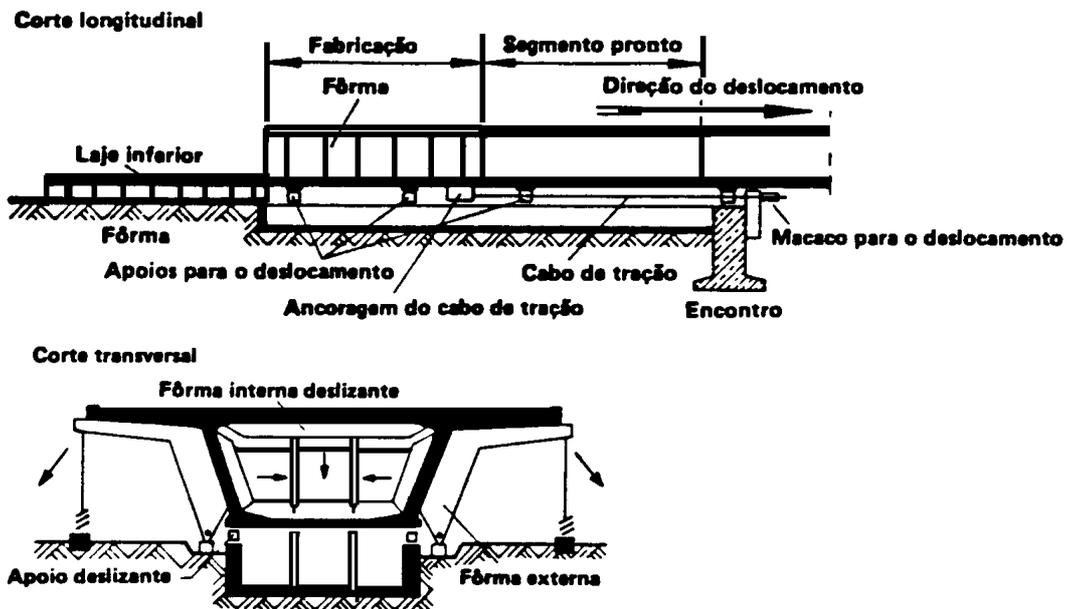
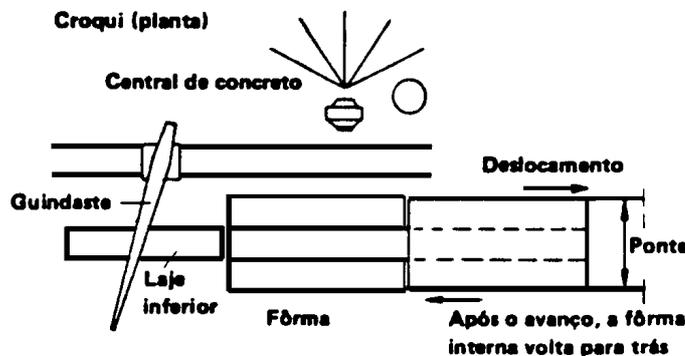


Figura 53 - O princípio do processo de execução por deslocamentos progressivos: a fabricação do segmento, com comprimento igual ao comprimento de avanço, é feita atrás do encontro; o avanço é feito progressivamente, sem apoio, de pilar a pilar.



Cortes longitudinal e transversal mostrando as instalações de fabricação dos segmentos



Croqui, em planta, das instalações no local da obra

Figura 54 – Cortes e croqui do processo de execução por lançamentos progressivos.

Cuidados:

1. Precisão de nivelamento e de forma de modo a evitar que erros de geometria provoquem esforços adicionais inaceitáveis (equivalentes aos gerados por recalques de apoio).
2. Influência do método construtivo no cálculo. Como a estrutura é autolancada inclusive com o “bico” em balanço, é essencial verificar as fases construtivas. Note-se que ao longo do lançamento uma mesma seção passa ora pelo  $M_{\text{máx}}$ , ora pelo  $M_{\text{mín}}$ , o que exige dela capacidade de suportá-los.
3. Tratar as juntas como no item 2.2.3.
4. Cuidado com as interferências que podem impedir o movimento das formas.

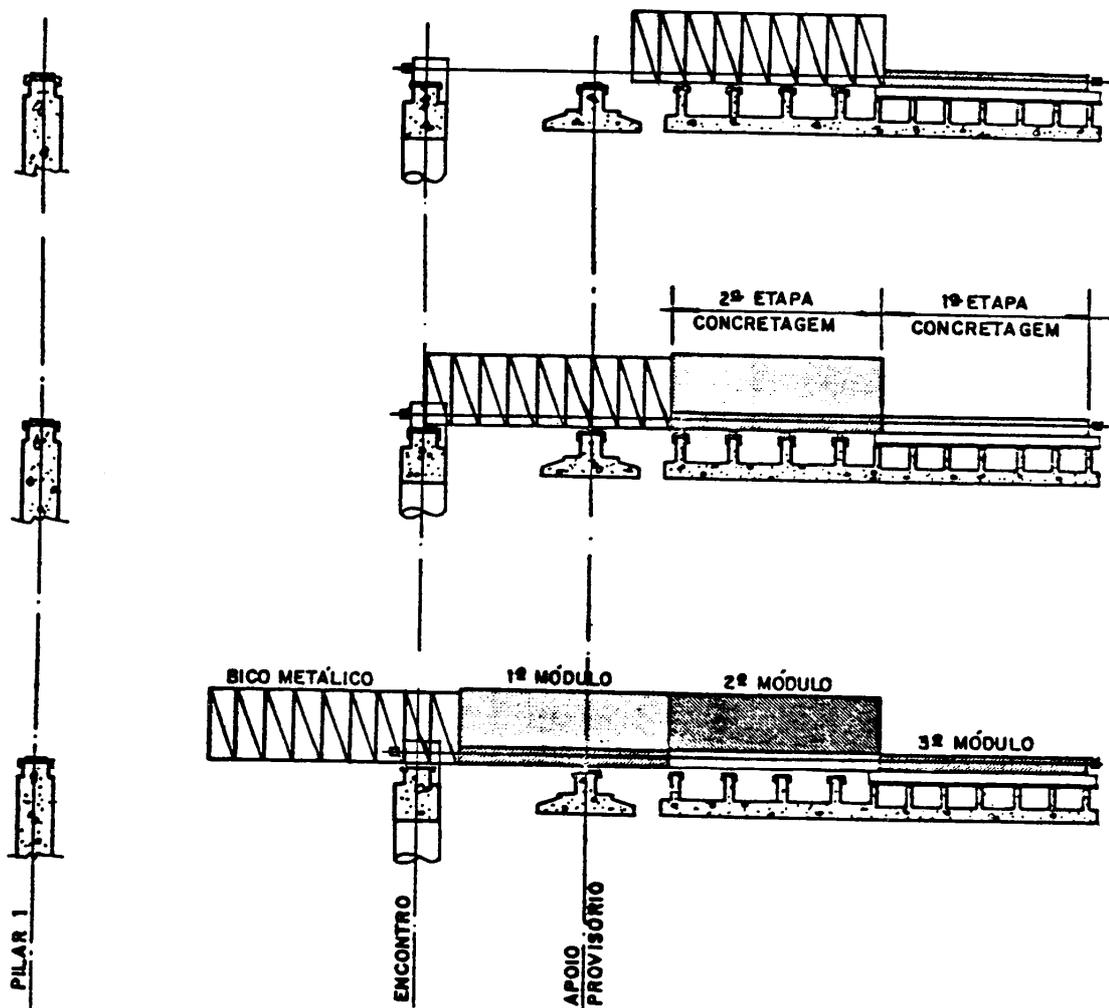


Figura 55 – Canteiro e Seção Típica para as Obras sobre a Represa de 3 Irmãos.

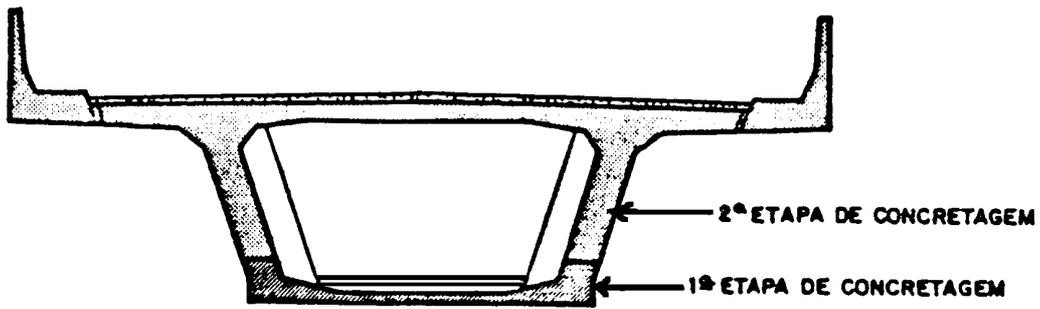


Figura 56 – Etapas de concretagem da seção celular.

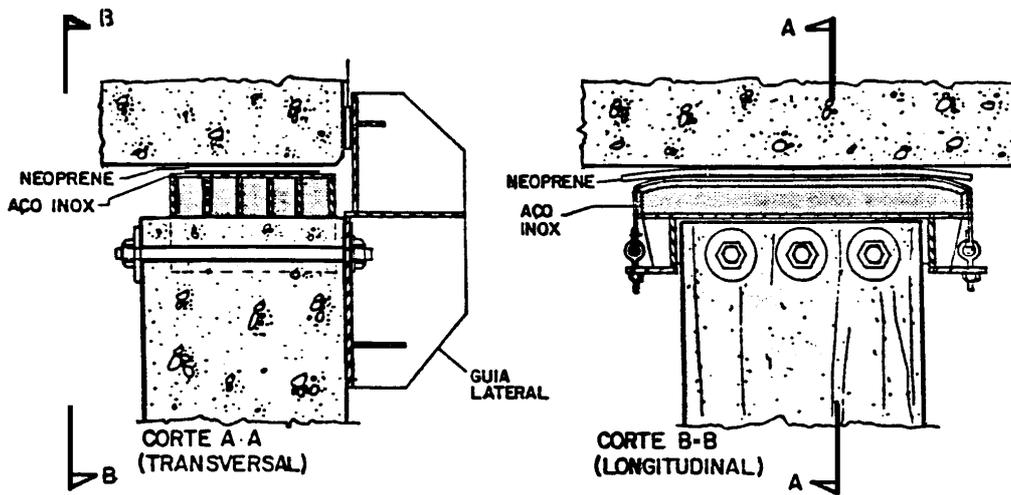


Figura 57 - Berço de Deslizamento (Telefone) e Guia Lateral

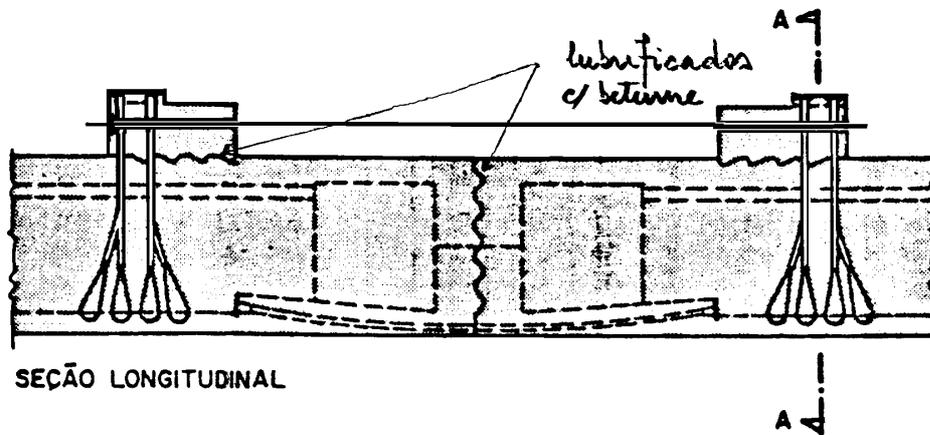


Figura 58 – Seção longitudinal.

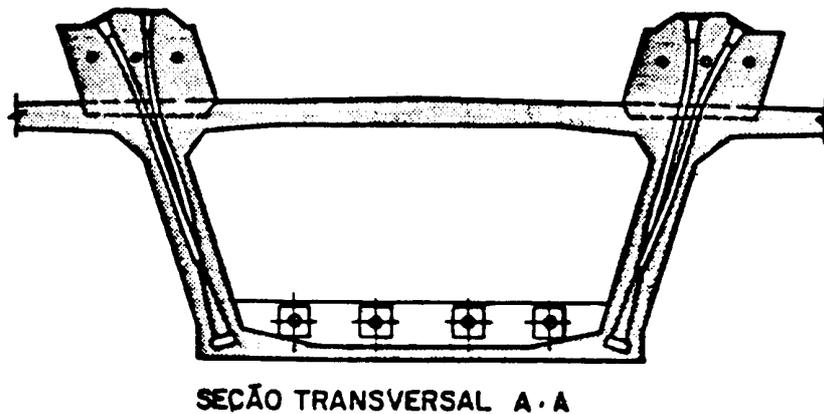


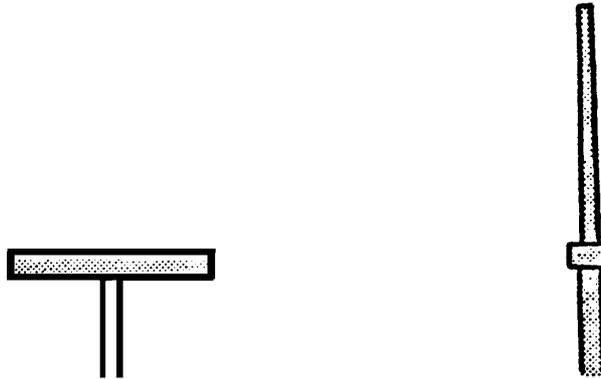
Figura 59 – Emenda Provisória – Junta de Dilatação Futura

### 2.2.7. Pontes estaiadas

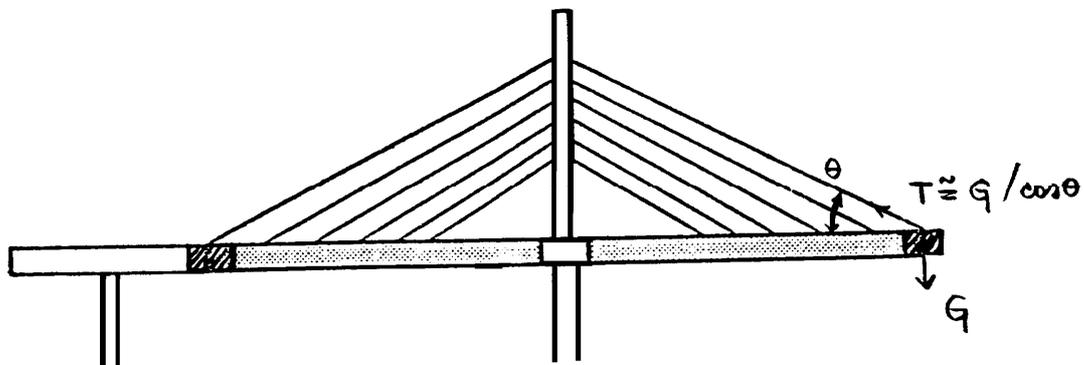
O método construtivo que melhor se adapta às obras estaiadas é o de consolos sucessivos (pré moldados ou não) e por isso é ele o método mais utilizado.

A cada nova aduela os estais correspondentes são protendidos de forma a suportar todo o seu peso. Assim, ao final da construção e sob as cargas permanentes, o tabuleiro fica quase exclusivamente submetido à compressão.

- 1) Construção do balanço lateral e do mastro



- 2) Construção do balanço principal até sua união com o lateral.



- 3) Prolongamento do consolo do vão principal.

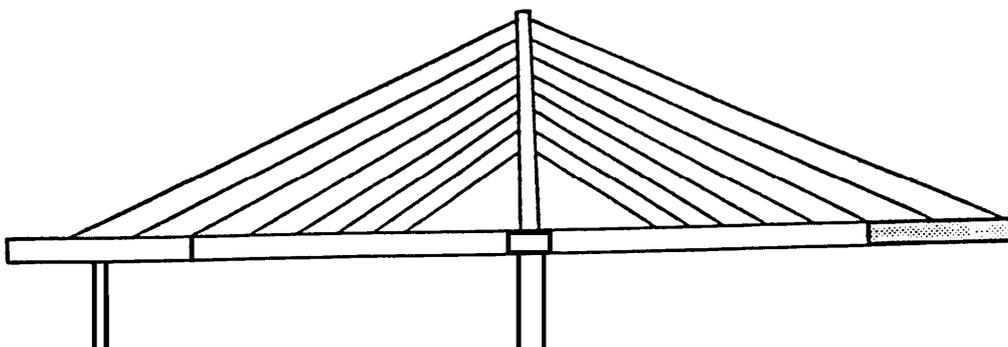


Figura 60 – Ponte Brotonne, fases de construção (Mathivat, 1979).

### 2.2.8. Pontes pênséis

As pontes pênséis são usualmente construídas a partir dos cabos que são usados para transporte de peças e equipamentos como um “Teleférico”. O Tabuleiro, construído em segmentos pré-moldados, é dependurado, segmento por segmento, nos cabos. A continuidade do Tabuleiro só é promovida após o lançamento de todos os segmentos.

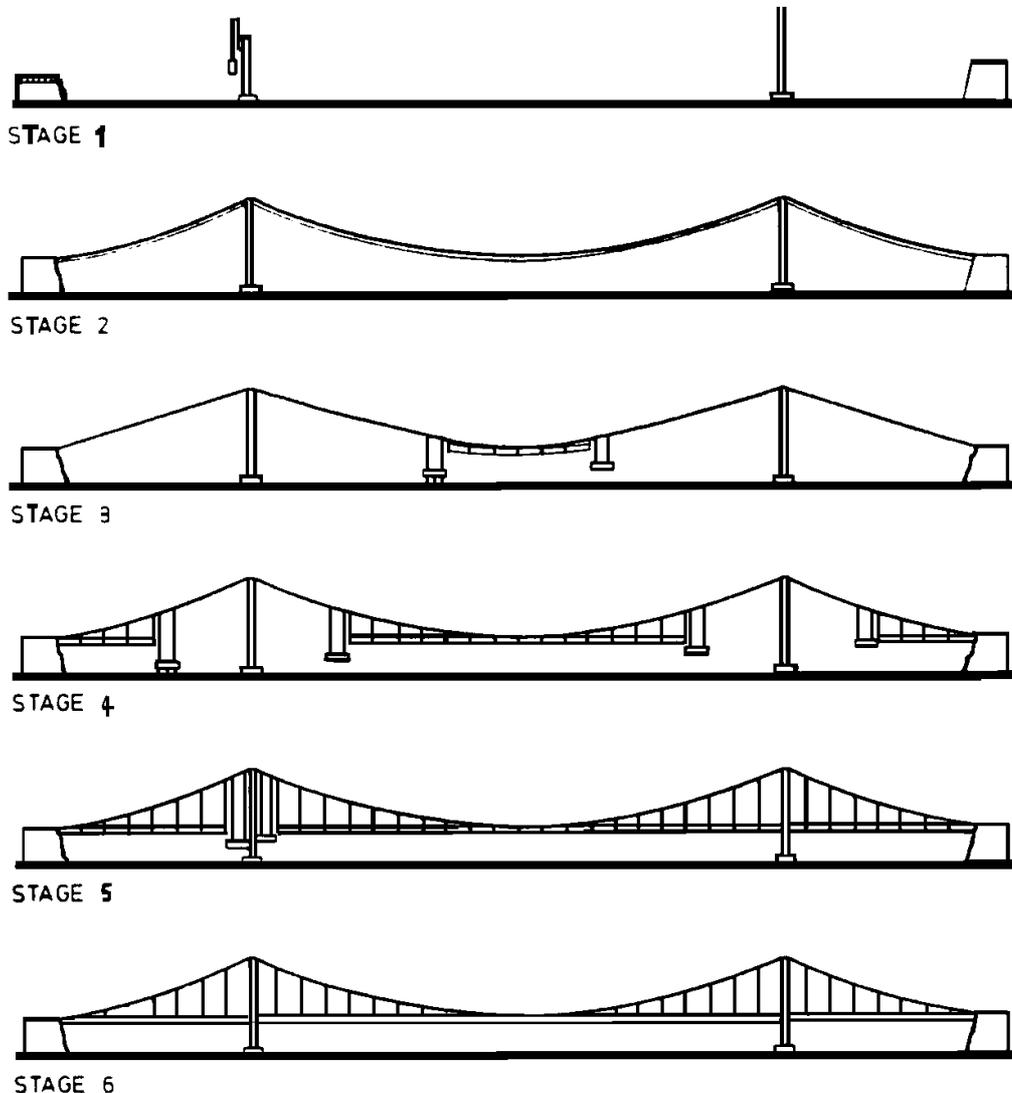


Figura 61 – Estágios de construção de uma ponte pênsil (Gimsing, 1983).

- 1ª etapa - Construção dos mastros, pilares principais e blocos de ancoragem.
- 2ª etapa - Instalação dos cabos principais.
- 3ª etapa - Início da instalação da viga enrijecedora do centro para o meio do vão. É quando o peso da viga é aplicado nos cabos principais ocasionando grandes deslocamentos e as juntas entre as seções da viga são, por esta razão, abertas para evitar momentos excessivos nas seções.
- 4ª etapa - Instalação das vigas enrijecedoras nos vãos laterais para reduzir os deslocamentos horizontais no topo dos mastros.

- 5ª etapa - Colocação das peças de fechamento das vigas como os mastros.
- 6ª etapa - Fechamento de todas as juntas nas vigas enrijecedoras. Atualmente, o fechamento dessas juntas normalmente começa nas etapas 4 e 5, quando são ligadas as seções e colocadas na sua posição correta.

### 2.2.9. Associação de dois ou mais métodos construtivos

Um exemplo é a ponte em arco representada na figura 62.

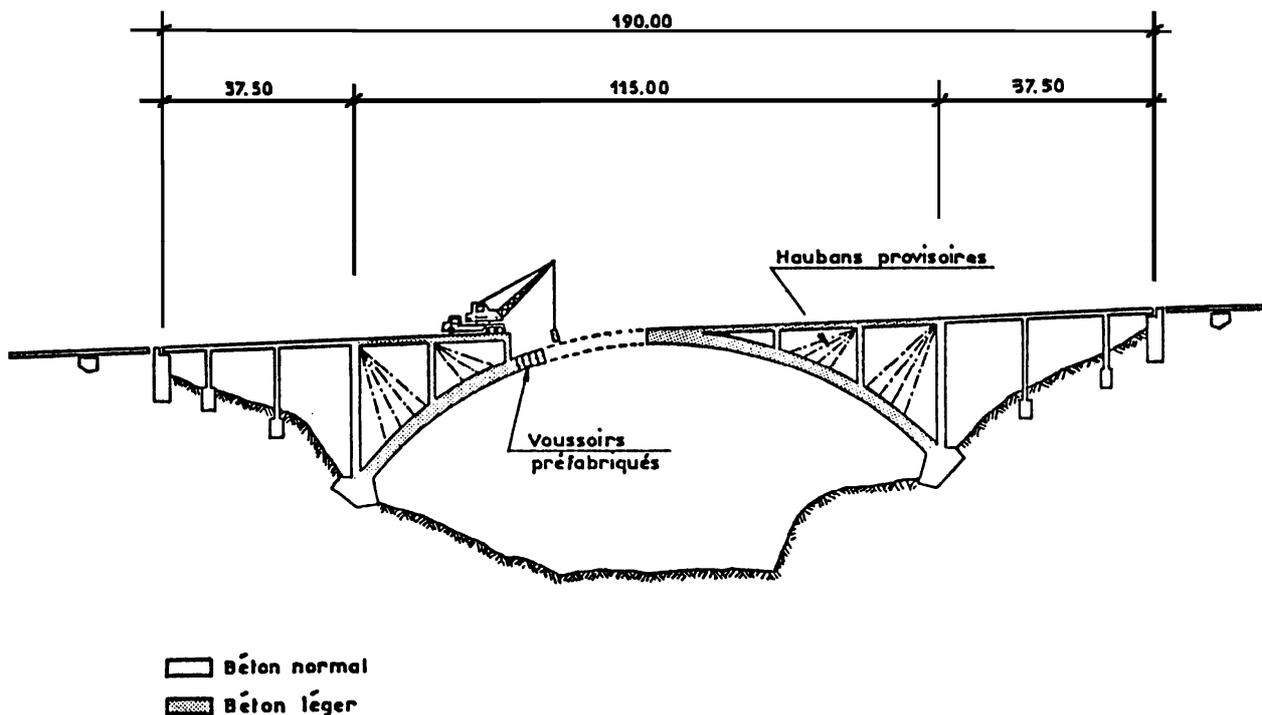


Figura 62 - Construção de Ponte em Arco associando consolos sussecivos e estais (Mathivat, 1979).

## 2.3. Classificação das pontes conforme os materiais utilizados nas suas construções

### 2.3.1. Pontes de concreto

- Concreto Armado ( $f_{ck}$  20 a 25 MPa);
- Concreto Protendido ( $f_{ck}$  25 a 40 MPa);
- Concreto Leve ( $\gamma \cong 1.5 \text{ tf/m}^3 \ll 2.5 \text{ tf/m}^3$ );
- Concreto de Alta Resistência ( $f_{ck}$  40 a 100MPa).

Todos os métodos construtivos se aplicam bem às obras de concreto. Ao nível dos tipos estruturais estão em desuso as treliças e raramente se usam as pontes pênses com tabuleiros de concreto, a não ser em passarelas.

As grandes vantagens do concreto são a durabilidade (alguma manutenção é sempre necessária), a resistência ao fogo, à compressão e a liberdade de escolha da forma.

As desvantagens são a falta de resistência à tração, a retração e a fluência.

As treliças estão começando a ser novamente utilizadas com o advento do CAD – concreto de alto desempenho.

### 2.3.2. Pontes de aço e mista aço - concreto

Aço-carbono	A36	}	$(f_{yk} \sim 250 \text{MPa})$
Aço de baixa liga	CORTEM		}
	SAC		
	COS-AR-COR		

**Nota:** Para efeito de comparação lembrar que:

- Aço CA -  $f_{yk}$  varia de 250 a 600 MPa;
- Aço CP -  $f_{yk}$  varia de 800 a 1700 MPa.

Todos os tipos estruturais se adaptam bem ao aço. Ao nível dos métodos construtivos, só não se aplicam aqueles que prevêm moldagem in loco, sobre cimbramento fixo ou móvel ou em consolos sucessivos. É interessante observar, na figura a seguir, o método construtivo adotado para o vão central da ponte Rio-Niteroi.

As grandes vantagens do aço ficam por sua grande resistência à compressão ou à tração e por conseqüência de sua leveza - o peso próprio resulta relativamente pequeno.

As desvantagens se reduzem às dificuldades com durabilidade, resistência ao fogo e aos problemas de estabilidade gerados pelas pequenas espessuras exigidas.

*Exemplos:*

*Treliças*

*Arcos*

*Vigas de alma cheias: Grelhas*

*Caixões*

*Pontes Pênseis e Estaiadas*

*Vigas mista aço-concreto: Grelhas*

## Caixões

Exemplos:

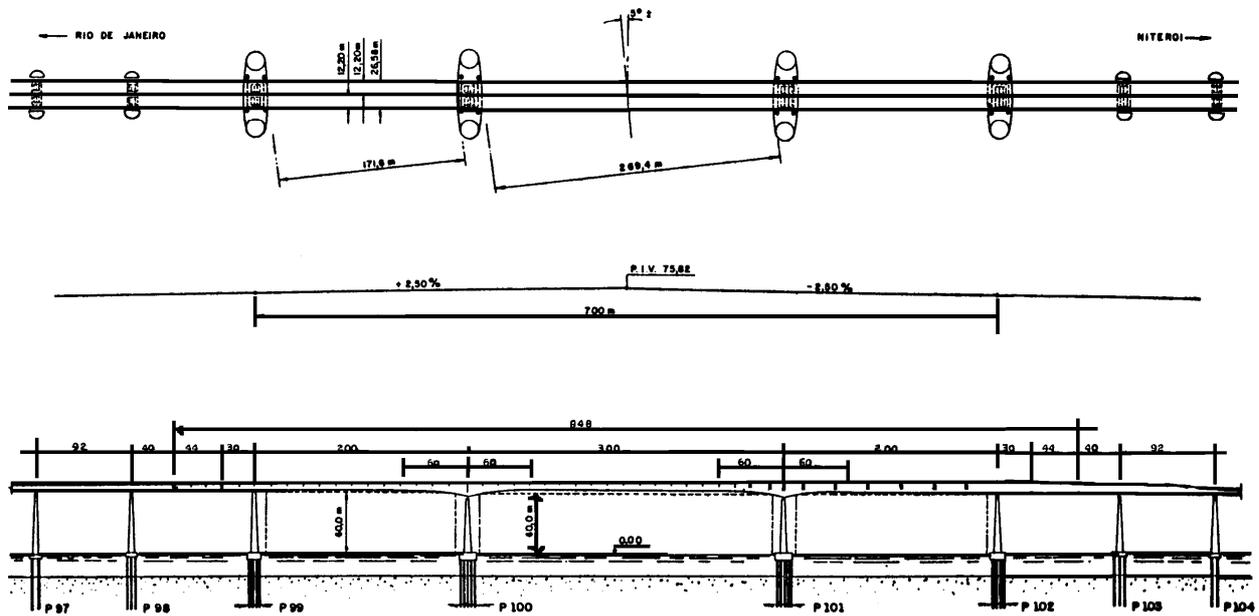
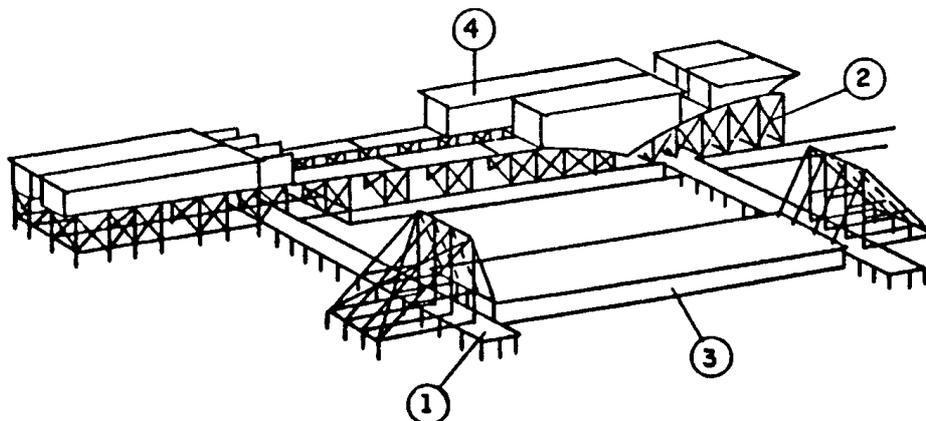


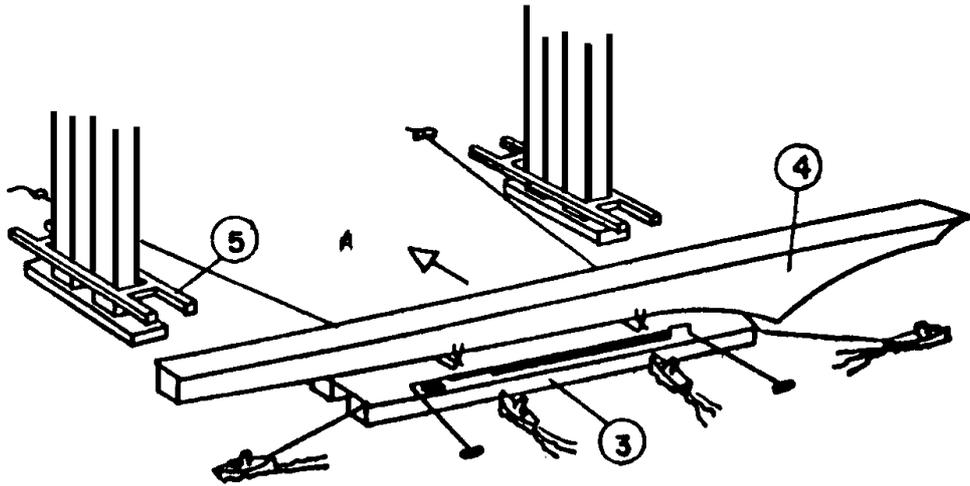
Figura 63 - Vãos principais centrais em estruturas metálicas e vãos adjacentes em concreto protendido (Pfeil, 1985).

A seguir será mostrado a seqüência de montagem dos elementos metálicos pré-fabricados:

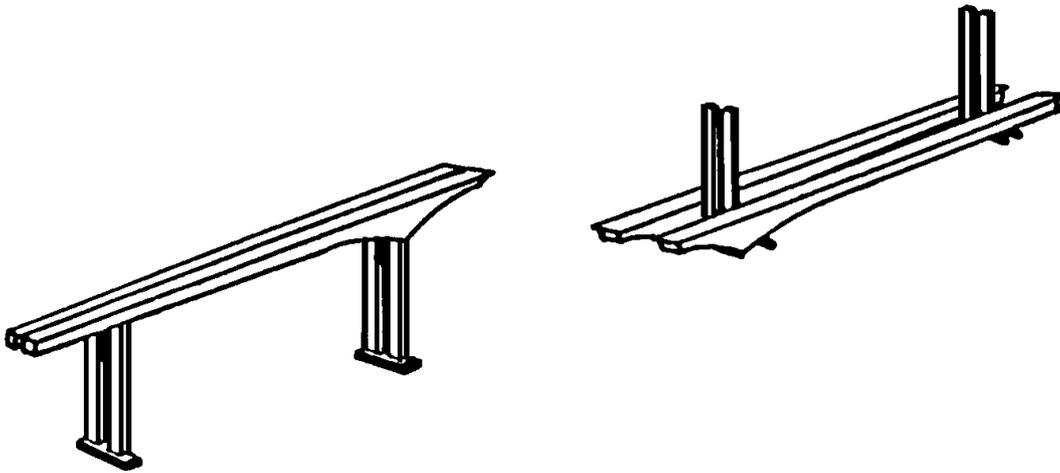
- a) Segmento central (3) lançado ao mar após ser deslizado sobre o pier (1). Segmentos laterais (4) fabricados sobre escoramento (2);



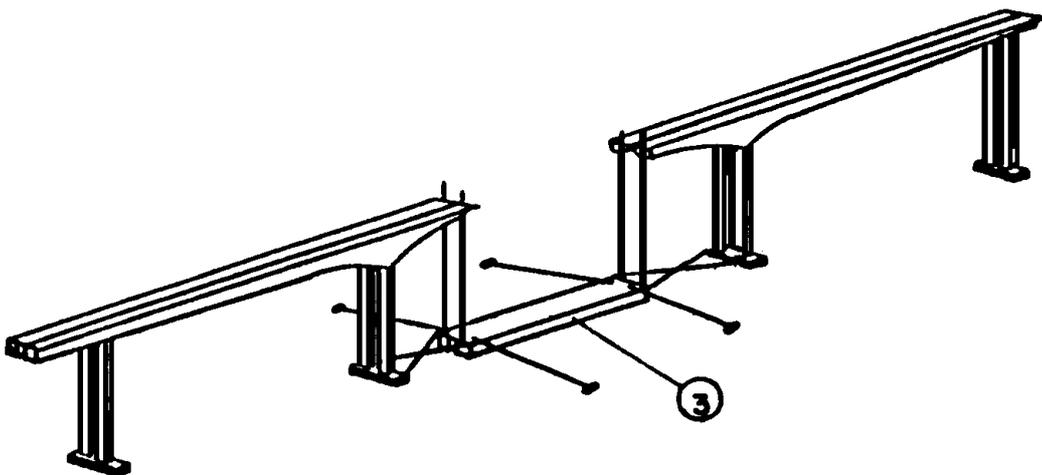
- b) Segmento lateral (4) apoiado no segmento central flutuante (3) se dirige para o anel de içamneto (5);



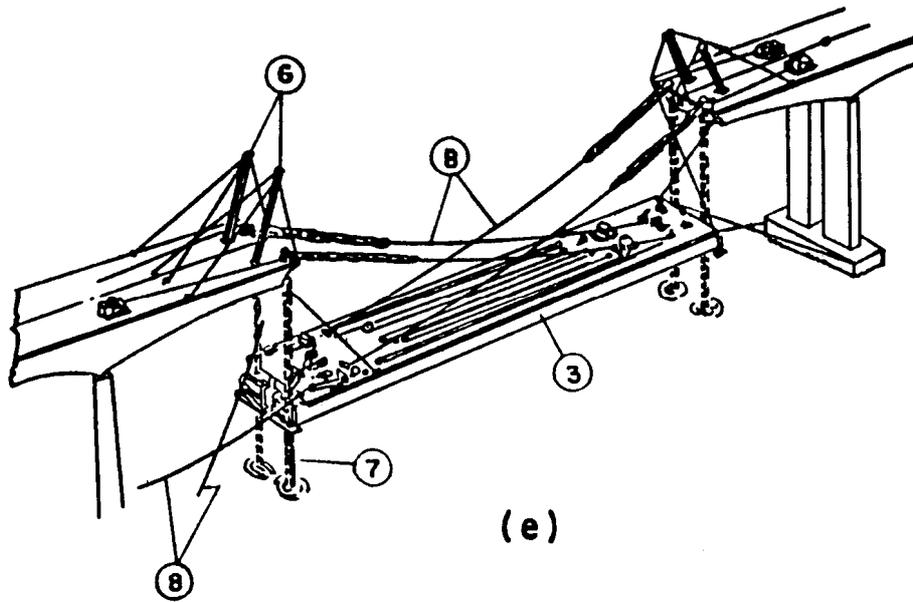
c) Içamento dos segmentos laterais;



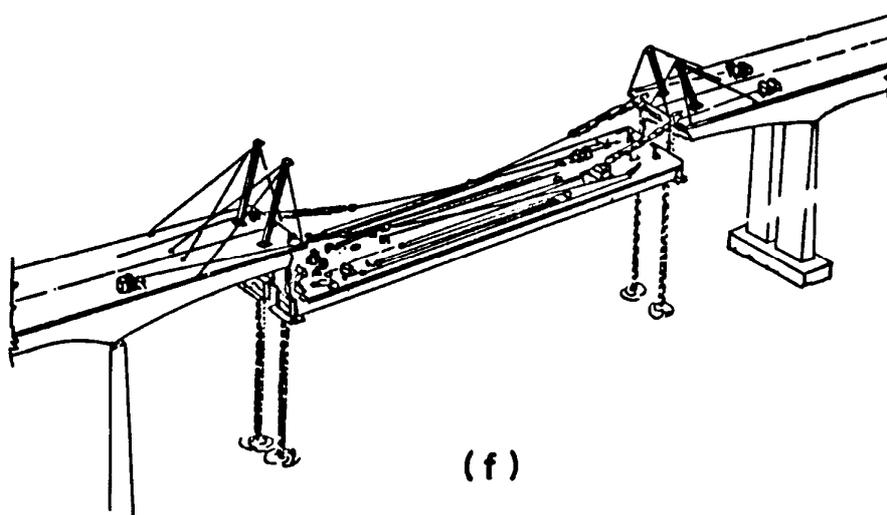
d) Início de içamento do segmento central (3);



e) O segmento central (3) apoiado nas colunas de içamento (7), as quais foram montadas pela torre (6). Notam-se os cabos de amarração reguláveis (8);



f) Segmento central na fase final de içamento;



g) Montagem dos vãos laterais de 44 m (9) com auxílio de torres triangulares (10);

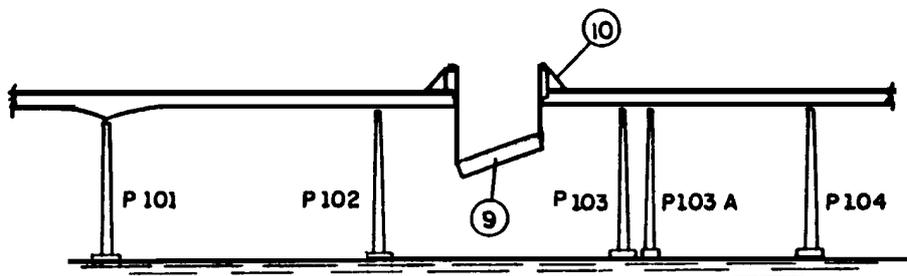


Figura 64 - Seqüência de montagem dos elementos metálicos pré-fabricados.

A figura 65 mostra seções transversais das estruturas metálicas e a figura 66 um exemplo de de ponte em grelha mista.

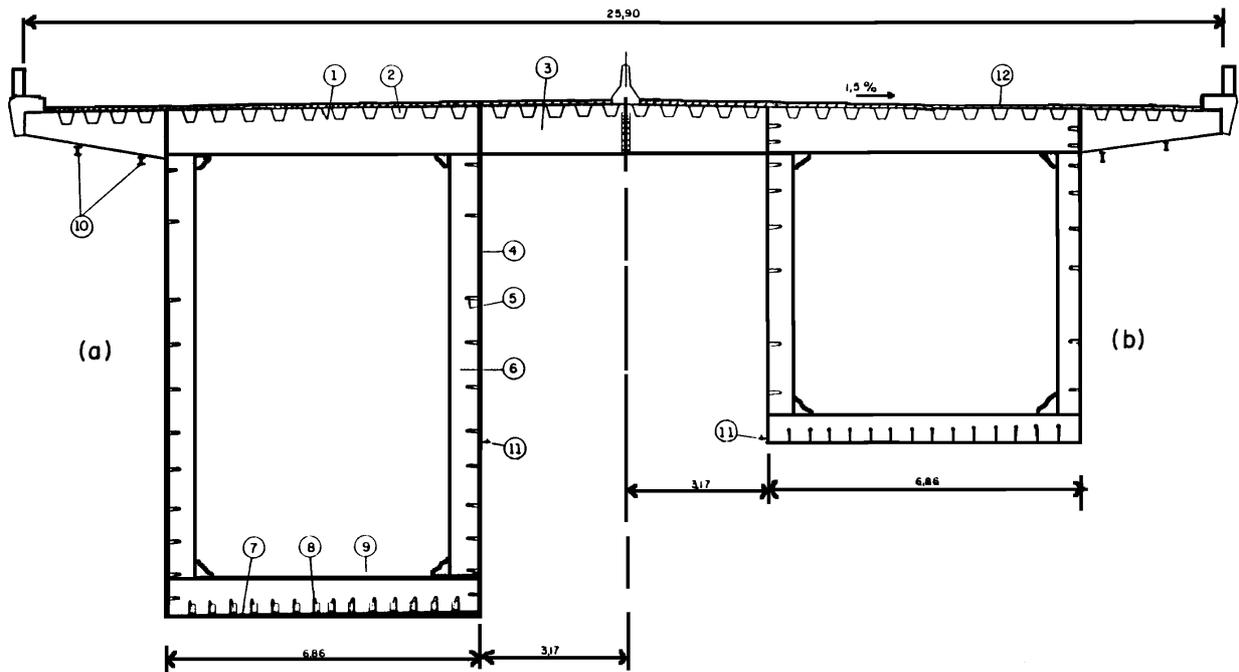
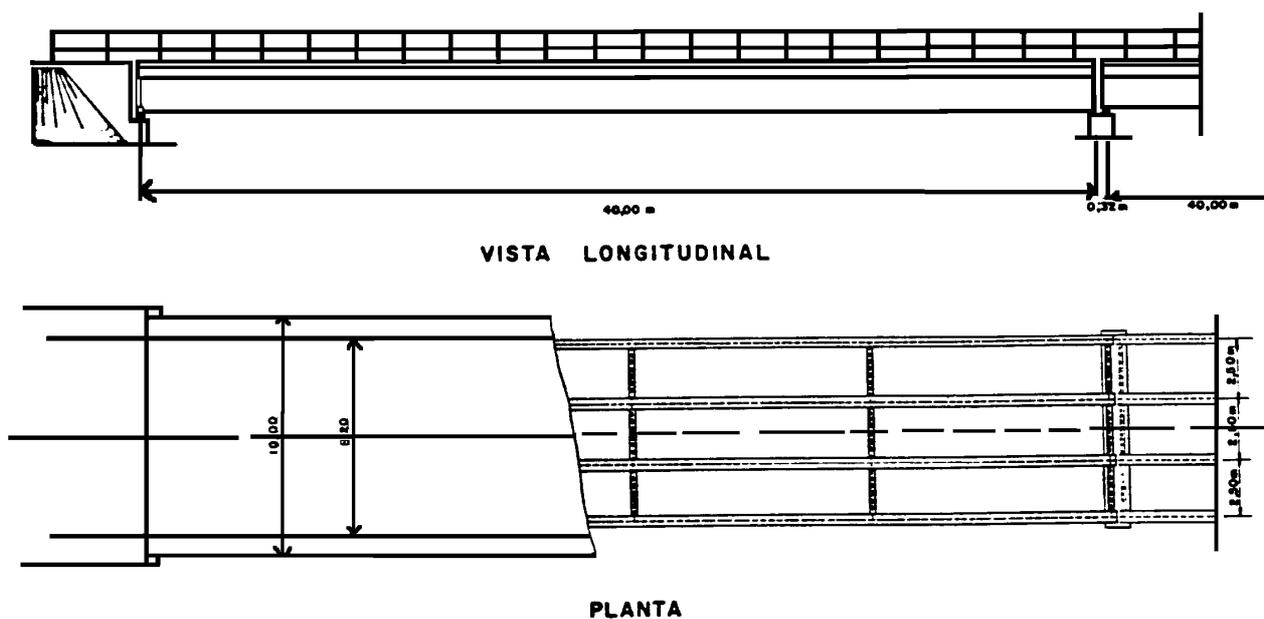
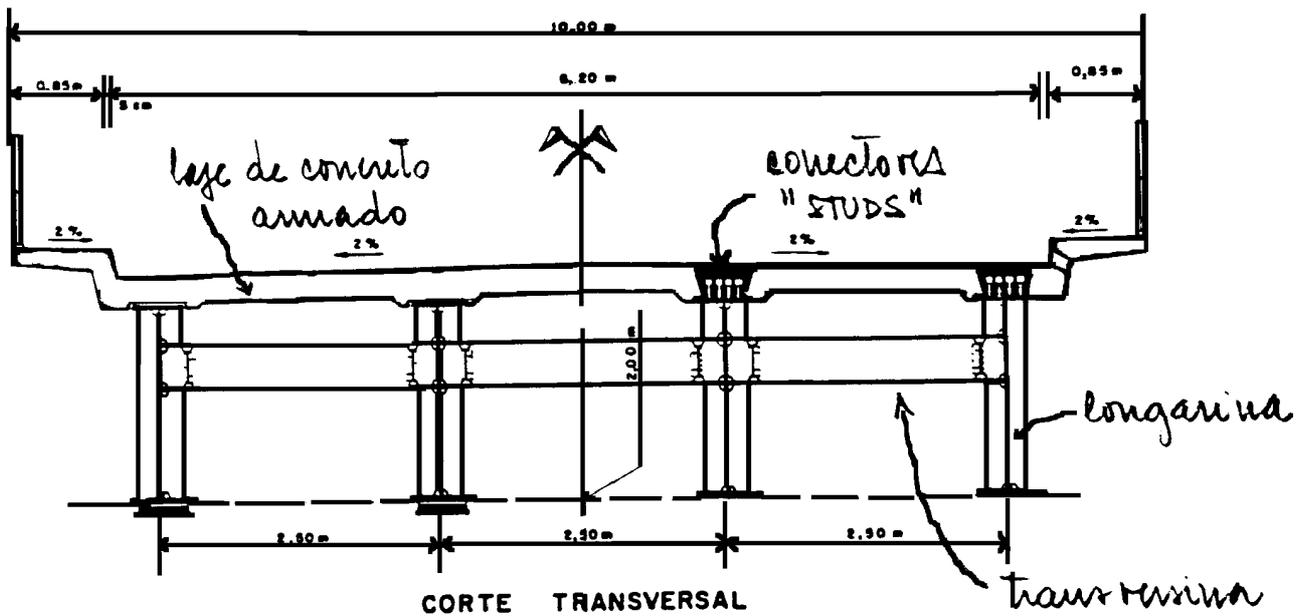


Figura 65 – Seções transversais das estruturas metálicas: a) seção nos trechos com mísulas; seção nos trechos centrais.

Legenda:

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| 1. palca superior;                   | 7. placa de fundo;                             |
| 2. enrijecedores longitudinais;      | 8. enrijecedor longitudinal da placa de fundo; |
| 3. transversina;                     | 9. enrijecedor transversal da placa de fundo;  |
| 4. chapa da alma das vigas;          | 10, 11. trilhos para carro de inspeção;        |
| 5. enrijecedor longitudinal da alma; | 12. revestimento de asfalt-epoxi.              |
| 6. enrijecedor transversal da alma;  |  |





Estrutura Metálica

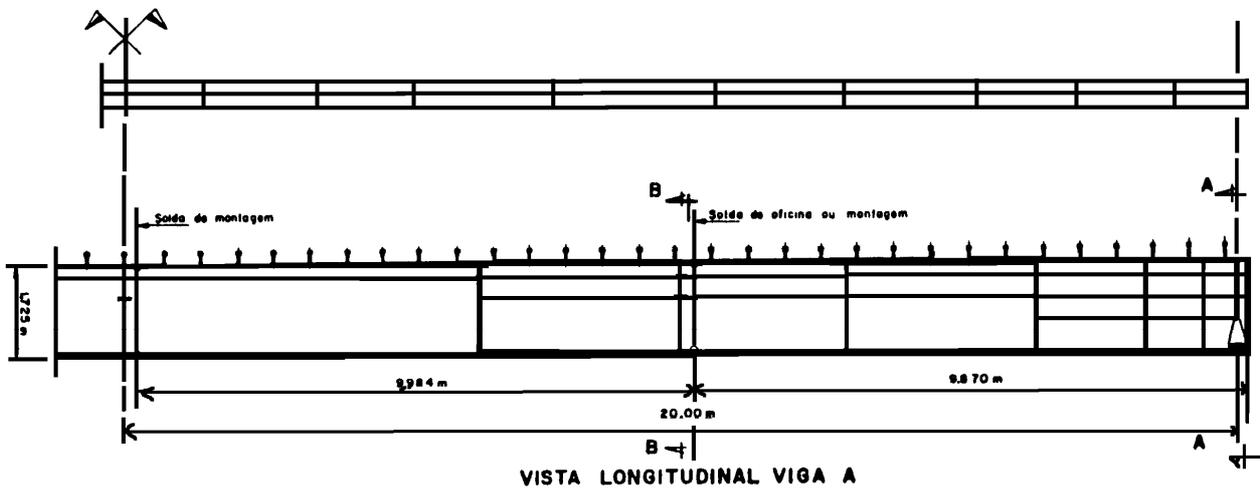


Figura 66 - Ponte em grelha. Conforme Usimec.

### 2.3.3. Pontes de madeira

Madeiras estruturais:

- Aroeira do Sertão  $f_{wc} \sim 75 \text{ MPa}$
- Jatobá  $f_{wc} \sim 80 \text{ MPa}$
- Gonçalves Alves  $f_{wc} \sim 65 \text{ MPa}$
- Ipê Roxo  $f_{wc} \sim 70 \text{ MPa}$

Em princípio todos os tipos estruturais discutidos se adaptam bem às pontes de madeira. Quanto aos métodos construtivos vale a mesma observação feita às pontes de aço.

A grande vantagem da madeira está na economia quando ela está disponível, próximo da obra, em qualidade e quantidade aceitáveis.

As desvantagens ficam por conta das dificuldades com durabilidade e resistência ao fogo (bastante diminuídas com os tratamentos modernos), da anisotropia e da grande variabilidade (reduzidas com as técnicas modernas de construção com pedaços pequenos e classificados de madeira).

A anisotropia e desuniformidade se caracterizam principalmente por:

- A diferença de resistência e rigidez da direção das fibras para a direção normal a elas (resistência ~ 5 vezes menor e rigidez ~10 vezes menor na normal às fibras);
- Variação das características do eixo para a periferia do tronco (o cerne, próximo do eixo, é muito melhor que o albume, próximo da casca);
- Os defeitos da madeira: nós, fendas, furos, curvatura das fibras, etc.

*Exemplos:*

- Treliças*
- Arcos*
- Vigas Armadas*
- Vigas Maciças: Lamelas coladas*
- Tábuas pregadas*
- Pontes Pênseis e Estaiadas*

## **2.4. Estudo de alguns tipos estruturais, comportamento estrutural e teorias de cálculo**

### **2.4.1. Estruturas de superfície, uma introdução**

São estruturas que têm uma de suas dimensões bem menor que as outras duas. Ela é chamada de espessura.

A superfície média é a definida a meia espessura, perpendicularmente à ela.

As estruturas de superfície são classificadas em:

- Placa: Estrutura de superfície média plana carregada perpendicularmente à ela. As placas de concreto armado são chamadas lajes.
- Chapa: Estruturas de superfície média plana carregada paralelamente a ela. As chapas de concreto armado são chamadas vigas parede.
- Casca: Estruturas de superfície média curva.

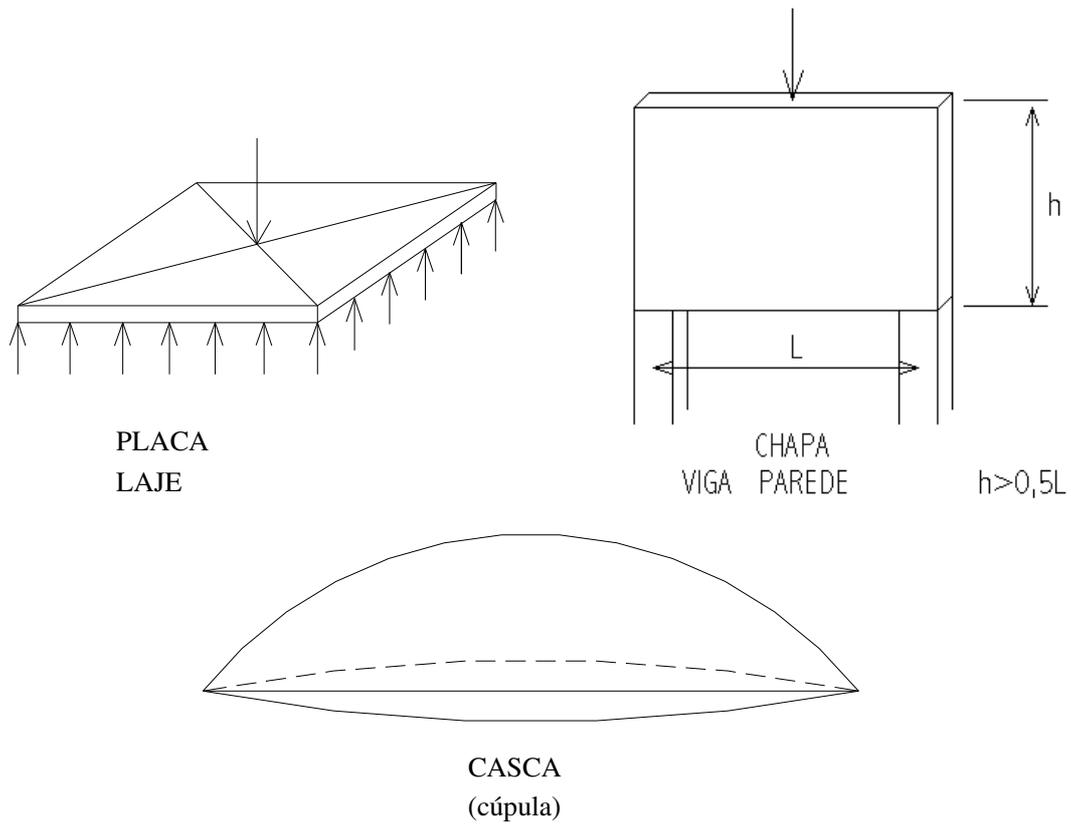


Figura 67 – Exemplos de estruturas de superfície.

#### 2.4.2. Lajes

As lajes são especialmente importantes porque aparecem em praticamente todas as pontes; não apenas nas pontes em laje, onde constituem toda a superestrutura, mas também nas pontes em viga, onde constituem o tabuleiro que interliga as vigas.

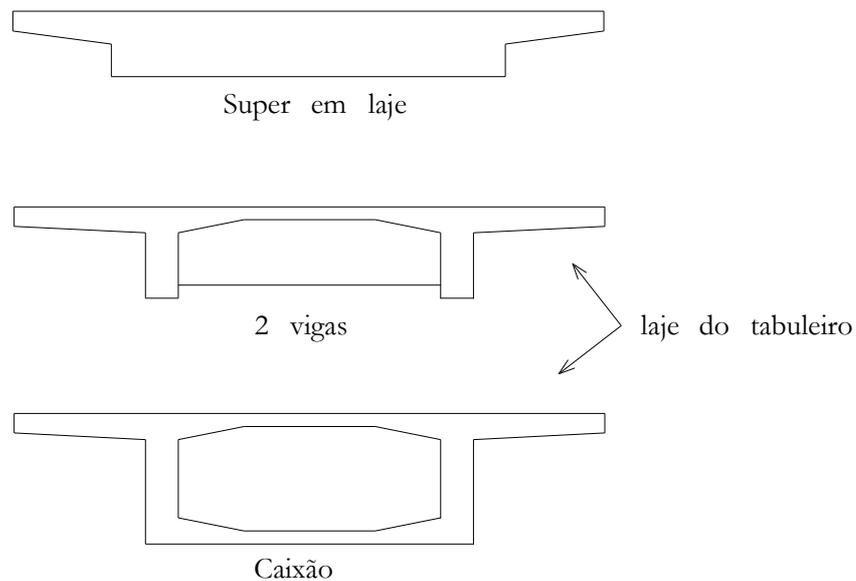


Figura 68 - Exemplos de Aplicação de Lajes.

### 2.4.2.1. Comportamento estrutural das lajes

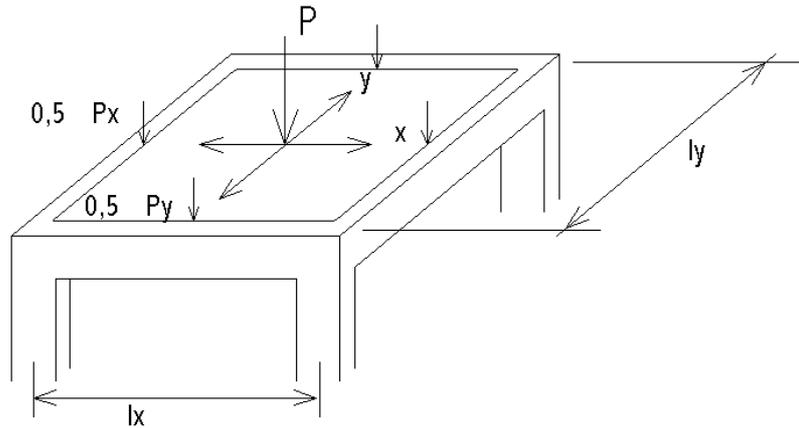


Figura 69 – Laje retangular solicitada por uma carga concentrada P.

Nas lajes retangulares em que  $1 \leq l_y/l_x < 2$  ( $l_x \leq l_y$ ) é importante o trabalho bidimensional.

A carga P pode caminhar para as vigas (pilares e fundações) através de dois caminhos, a direção x e a y. Para determinar as parcelas de P que caminham nas direções x e y ( $P_x$  e  $P_y$  respectivamente) é preciso resolver o problema hiperestático correspondente.

#### 2.4.2.1.1. Laje retangular simplesmente apoiada

##### A. Teoria das Grelhas

Considere-se uma laje simplesmente apoiada nos 4 lados, carregada uniformemente (p).

Uma solução aproximada desse problema pode ser obtida considerando a laje como 2 conjuntos de faixas entrelaçadas, de largura 1 m, nas direções x e y.

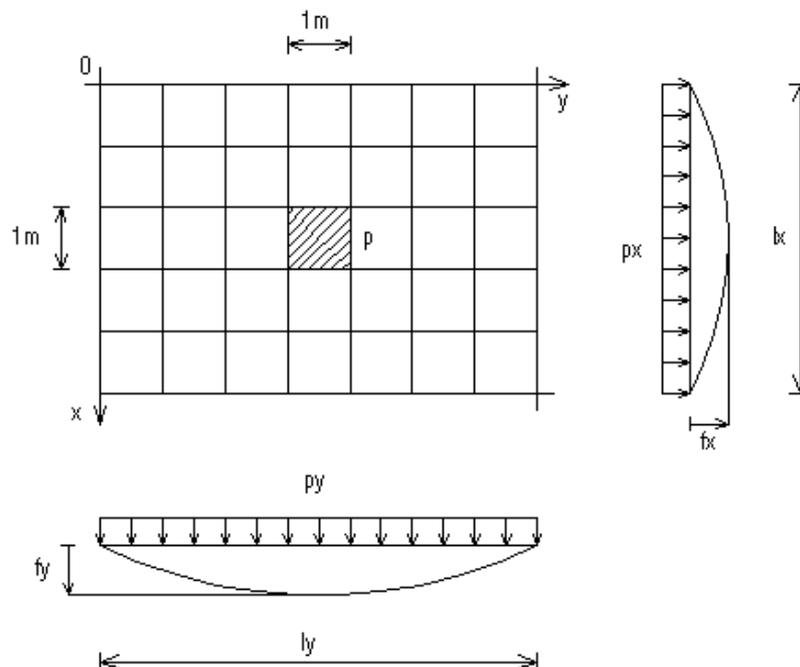


Figura 70 – Laje simplesmente apoiada nos 4 lados.

$$\begin{cases} I_x = I_y = I = \frac{h^3}{12} \\ h = \text{espessura} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = p_x + p_y & \text{equilíbrio} \\ f_x = \frac{5p_x l_x^4}{384EI} = f_y = \frac{5p_y l_y^4}{384EI} & \text{compatibilidade} \end{cases}$$

$$p_y = p_x \left( \frac{l_x^4}{l_y^4} \right) \longrightarrow p_x = \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} p \text{ e } p_y = \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} p$$

$$m_{xm} = \frac{p_x l_x^2}{8} = \left( \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \cdot p \right) \frac{l_x^2}{8} \text{ e } m_{ym} = \left( \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \cdot p \right) \frac{l_y^2}{8}$$

$m_x$  é o momento fletor no meio do vão da faixa central de direção x. Ele é medido em KNm/m (ou tfm/m ou kgfcm/cm), uma vez que a faixa tem 1 m de largura. Uma faixa de largura b é solicitada pelo momento  $bm_x = M_x$ .

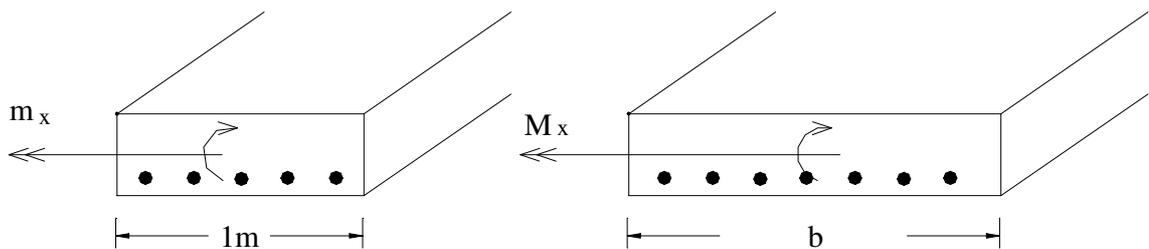


Figura 71 – Momento fletor em uma faixa.

A título de exemplo, considere-se o caso  $l_x=l_y=l$

$$p_x = p_y = 1/2p \Rightarrow m_{xm} = m_{ym} = pl^2/16$$

Nota1: Observando com atenção nota-se que a Teoria das Grelhas faz 2 hipóteses simplificadoras (em relação à Resistência dos Materiais) adicionais.

1ª. Desprezou-se a rigidez à torção das faixas.

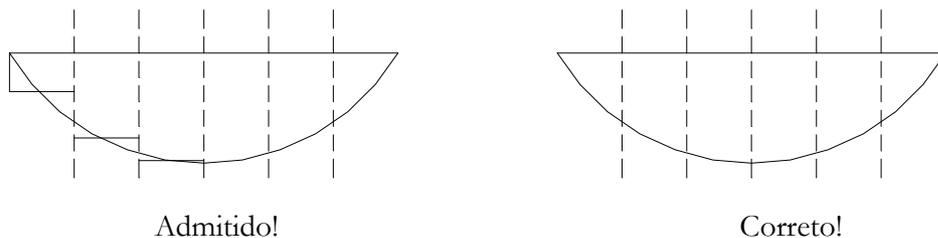


Figura 72 – Flechas admitidas pela teoria das grelhas e flechas reais.

Na realidade, a continuidade da laje impõe às faixas torção significativa, que foi desprezada.

2ª. Admitiu-se  $p_x$  e  $p_y$  uniformemente distribuídas, o que não é verdadeiro.

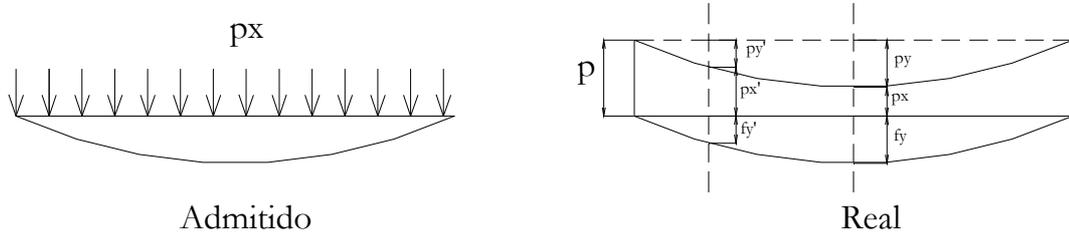


Figura 73 – Carregamento admitido e carregamento real.

Para que  $p_x$  seja uniforme é preciso que todas as faixas  $y$  ao longo do vão  $l_x$  suportem a parcela  $p_y$ .

Isso não é na realidade possível.

Embora seja possível para as faixas  $y$  centrais, não é para as laterais, próximas dos apoios da faixa  $x$ . Nessas faixas, a flecha  $f_y'$  fica limitada pela linha elástica da faixa  $x$ .

Como  $f_y' < f_y \Rightarrow p_y' < p_y$

No apoio  $f_y' = 0$  e  $p_y' = 0$  ou  $p_x' = p$

Nota2: A Teoria das Grelhas faz ainda uma terceira hipótese. Ao cortar a laje em uma série de faixas ela corta a continuidade transversal às mesmas, tratando-as como barras.

Embora para as barras o efeito do coeficiente de Poisson seja desprezível, para as placas não é. Considere-se, por exemplo, uma dessas faixas, uma faixa  $x$ .

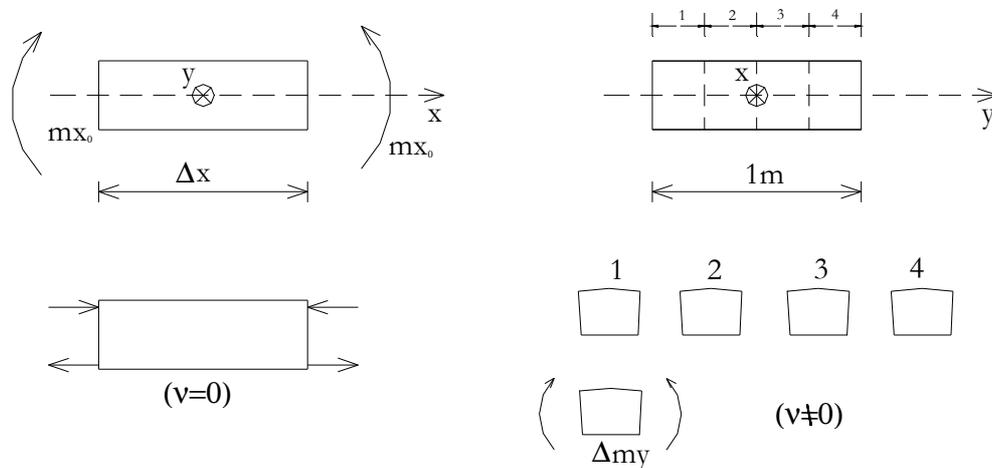


Figura 74 – Efeito do coeficiente de Poisson na faixa  $x$ .

Por definição de  $\nu$  :

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{y\nu} = -\nu\left(\frac{1}{r}\right)_x, \text{ pois } \epsilon_y = -\nu \cdot \epsilon_x$$

Como:

1.  $I_x' = I_y' = I'$  (alterados por  $\nu$ )
2. Nas placas apoiadas nos 4 lados as arestas  $y$  impedem a curvatura adicional  $(1/r)_{y\nu}$

Desenvolve-se então  $\Delta m_y$  tal que:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)_y = -\left[-\nu\left(\frac{1}{r}\right)_x\right]$$

$$\Leftrightarrow \Delta m_y = \nu \cdot m_x \cong \nu \cdot m_{x0}$$

$$\Leftrightarrow m_y \cong m_{y0} + \nu \cdot m_{x0}$$

ou:

$$m_x \cong m_{x0} + \nu \cdot m_{y0}$$

Como para o concreto o coeficiente de Poisson é da ordem de 0.2, seu efeito é considerável.

Observação: O coeficiente de Poisson também enrijece a placa de forma que:

$$I' = \frac{I}{(1-\nu^2)} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Para levar em conta esses 3 efeitos é conveniente uma nova teoria. Essa nova teoria é a Teoria das Placas.

## B. Teoria das Placas

Em essência a Teoria da Placas corresponde à extensão da R.M. ao comportamento bidimensional da placa, considerando a contribuição do coeficiente de Poisson.

Ela admite:

- Material homogêneo, isótropo e de comportamento linear ( Lei de Hooke)
- $h \ll l_x, l_y$
- Tensões normais à superfície média desprezíveis
- Retas perpendiculares à superfície média permanecem retas e normais à mesma após deformação (equivale à hipótese de Navier)
- Deslocamentos pequenos ( $\delta \ll h$ )
- A equação fundamental dessa teoria (equação de Lagrange) pode ser escrita como segue:

Considere-se o equilíbrio de um elemento de placa:

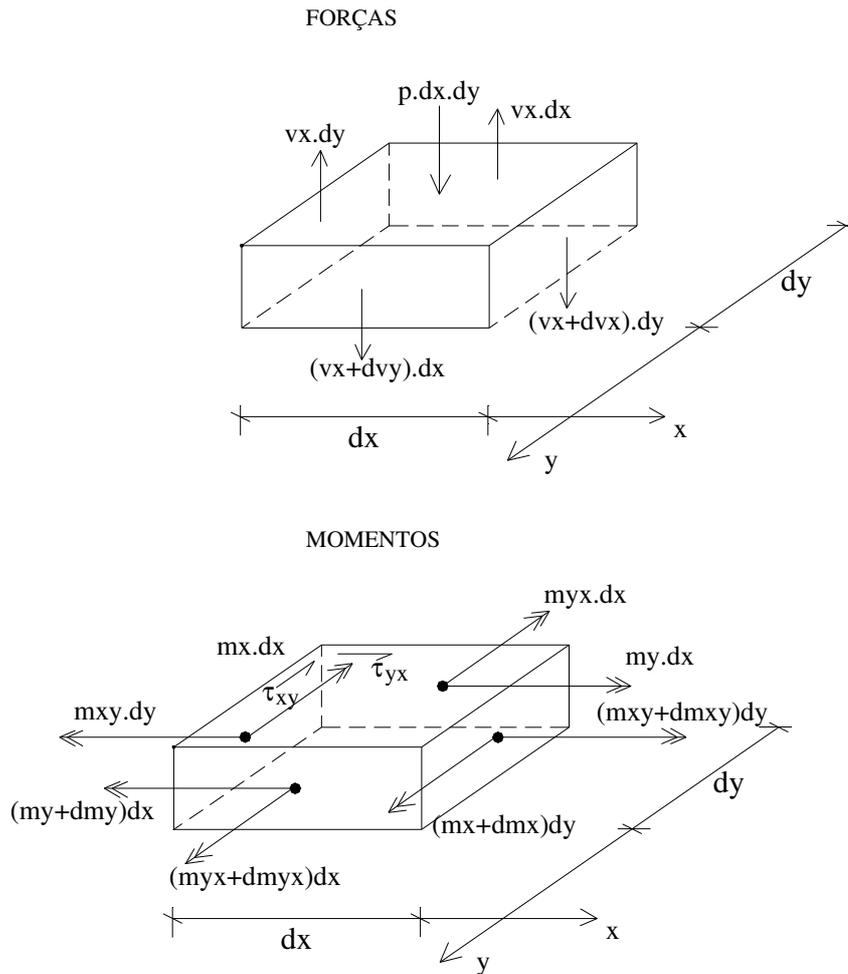


Figura 75 – Equilíbrio de um elemento de placa.

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} \Rightarrow m_{xy} = -m_{yx}!$$

Seja  $w(x,y)$  a função que descreve o deslocamento vertical de um ponto  $(x,y)$ .

Por analogia com a R.M., tem-se:

Viga	{	$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$	Placa	{	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{m_x}{D} \dots\dots\dots 1$ $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{m_y}{D} \dots\dots\dots 2$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{m_{xy}}{D(1-\nu)} \dots\dots\dots 3$
					$\Downarrow \quad \Downarrow$
					Rotação $D(1-\nu) \approx G I_t$ de Torção

Sendo que  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \equiv EI$

Do equilíbrio do elemento de placa, tem-se:

(Lembrando que:  $\frac{\partial m_x}{\partial x} dx = dm_x$ )

Momentos y:  $v_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \dots\dots\dots 4$

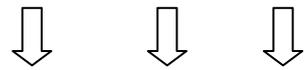
Momentos x:  $v_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \dots\dots\dots 5$

Forças verticais:  $\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} = -p \dots\dots\dots 6$

(também análogas à R.M.)

Substituindo-se 1 a 5 em 6 tem-se a equação de Lagrange:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D}$$



flexão x    torção    flexão y

A integração dessa equação diferencial é quase sempre impossível. Por isso a solução se obtém desenvolvendo w e p em séries de Fourier.

No caso considerado, de placa simplesmente apoiada nos quatro lados e uniformemente carregada, tem-se:

Condições de contorno:  $\left. \begin{array}{l} w = 0 \\ e \\ m = 0 \end{array} \right\} \text{ nos quatro lados}$

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16p}{\pi^2 \cdot m \cdot n} \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{l_x} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{l_y}$$

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16p}{\pi^6 \cdot D} \frac{\text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{l_x} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{l_y}}{m \cdot n \left( \frac{m^2}{l_x^2} + \frac{n^2}{l_y^2} \right)}$$

Como o uso dessa solução é pouco prática, prepararam-se tabelas em função da relação  $l_y/l_x$  e do coeficiente de Poisson (Ver tabelas de Czerny).

- Relação entre  $m_x$ ,  $m_y$  e  $m_{xy}$  - Analogia com o estado duplo de tensões. (Estado Duplo de Flexão).

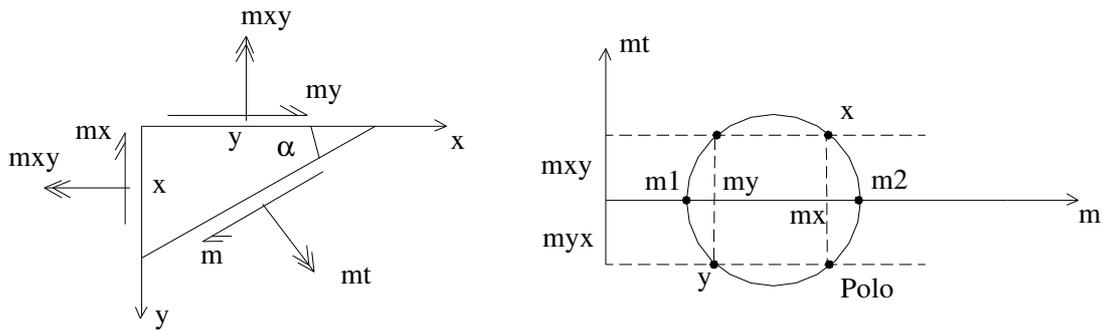


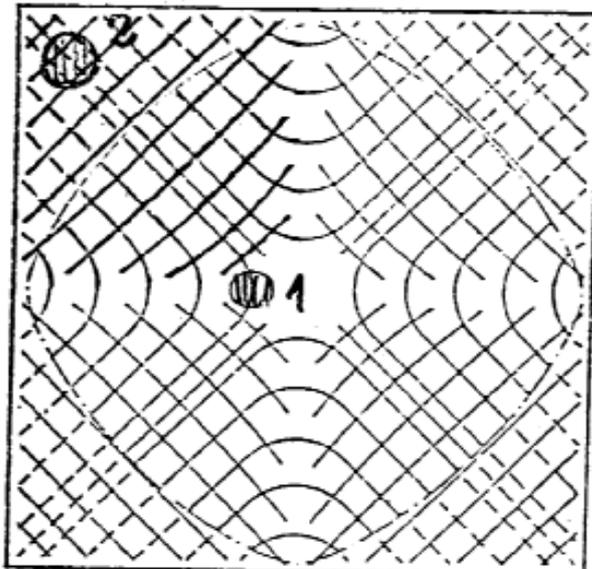
Figura 76 - Analogia com o estado duplo de tensões. (Estado Duplo de Flexão).

$m$  - análogo a  $\sigma$

$m_t$  - análogo a  $\tau$

$m_1$  e  $m_2$  - momentos fletores principais.

➤ Momentos principais em uma placa simplesmente apoiada e uniformemente carregada:



$l_y/l_x = 1$

1 - equivale a estado hidrostático

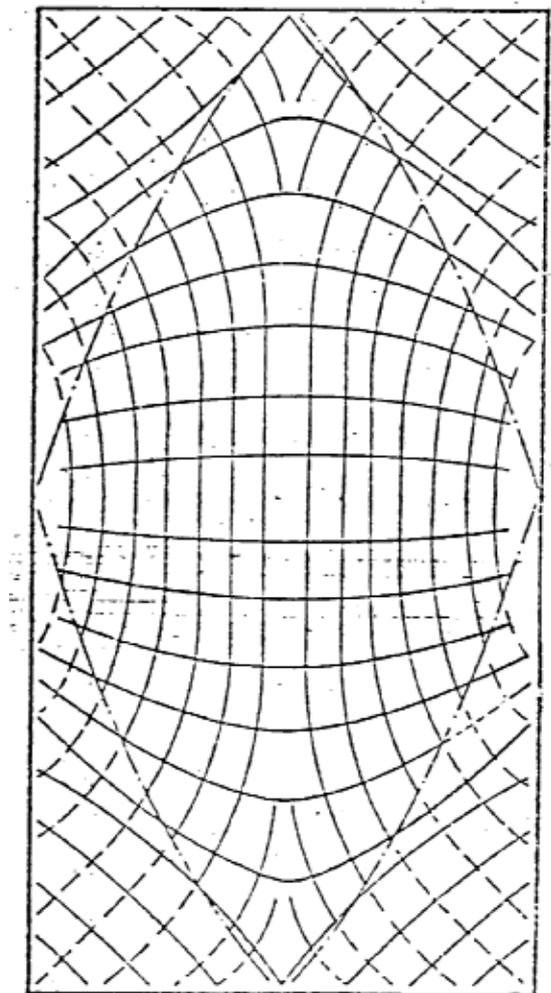
2 - equivale a cisalhamento puro

Trações por:

===== momentos principais positivos

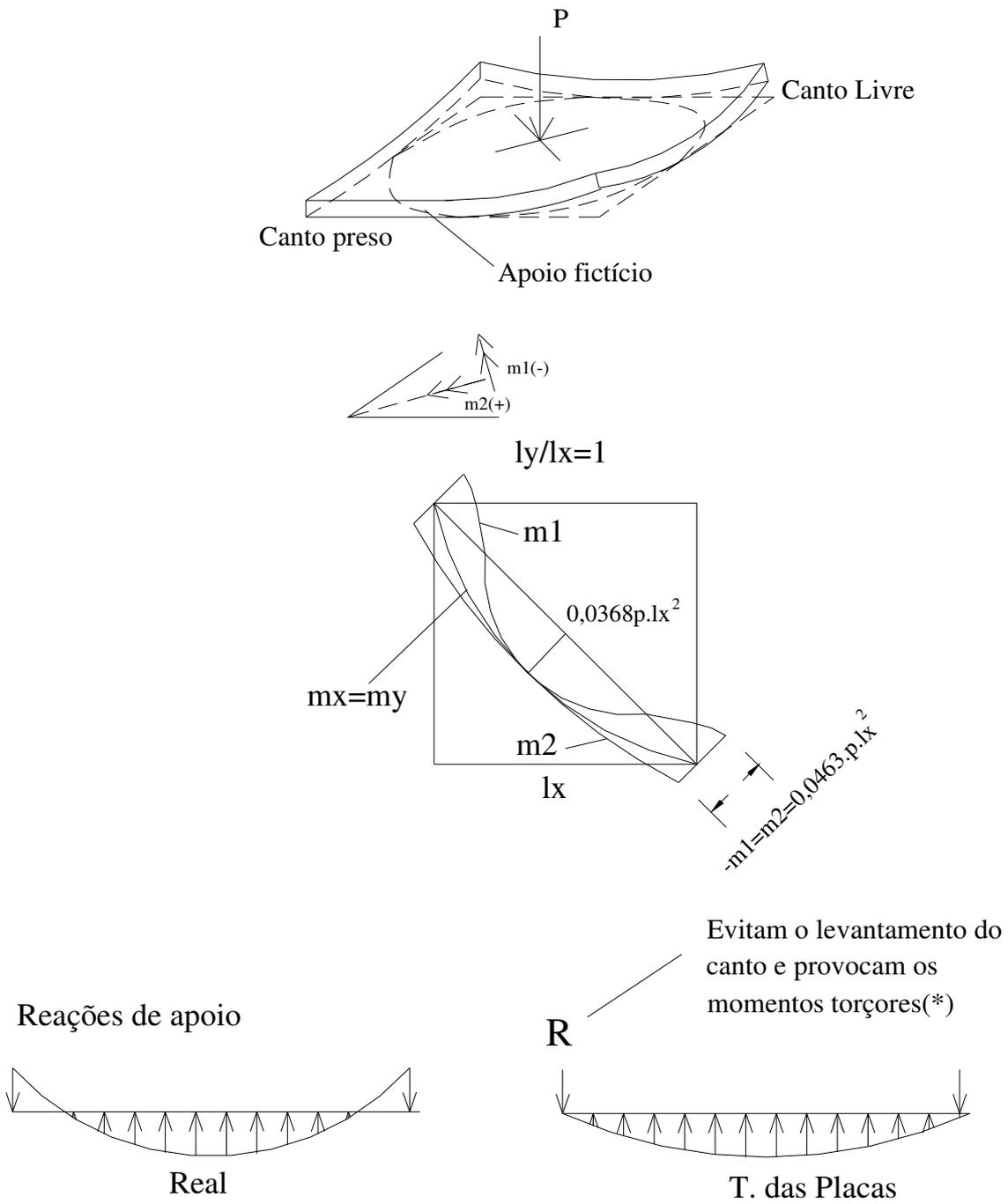
----- momentos principais negativos

-.-.-.-. mudança de sinal



$l_y/l_x = 2$

➤ Levantamento de canto – momentos volventes (torsores)



(\*) Desprezada a Torção, R resulta nula!

Figura 77 - Valores dos momentos principais  $m_1$  e  $m_2$  e dos momentos  $m_x$  e  $m_y$  na diagonal. E reações de apoio.

## C. Comparação dos resultados

Teoria	Torção	$\nu$	$I_y/I_x=1$		$I_y/I_x=2$	
			$\alpha_x$	$\alpha_y$	$\alpha_x$	$\alpha_y$
TG	não	0	16,0	16,0	8,50	34,0
TP1	não	0	13,1	13,1	7,10	44,80
TP2	sim	0	27,2	27,2	10,40	40,30
TP3	sim	0,2	22,7	22,7	9,90	23,50
TP4	sim	0,3	20,9	20,9	9,80	21,60

TG - Teoria das grelhas

TP - Teoria das placas

$$m_{xm} = p \cdot l_x^2 / \alpha_x$$

$$m_{ym} = p \cdot l_y^2 / \alpha_y$$

Note-se a importância da torção; ela transporta metade das cargas, reduzindo os momentos fletores à metade (no caso  $I_y/I_x = 1$ ). Note-se também a importância do coeficiente de Poisson.

#### 2.4.2.1.2. Outros casos a considerar

##### A. Lajes retangulares com outras condições de contorno

Tudo o que foi desenvolvido para a laje apoiada nos 4 lados pode ser estendido a outras condições de contorno.

##### B. Lajes sob Carga concentrada

Embora tenha sido possível resolver, através da Resistência dos Materiais, vigas sob cargas concentradas, não é possível fazê-lo no caso de placas; os esforços solicitantes locais seriam “infinitos”. Para evitar esses esforços locais as cargas “concentradas” devem ser distribuídas em superfícies suficientemente grandes. Na verdade, qualquer que seja a estrutura, inclusive nas vigas, as cargas “concentradas” devem ser distribuídas em superfícies tais que os esforços locais sejam aceitáveis.

Os esforços solicitantes em placas, decorrentes de cargas “concentradas” dependem essencialmente da pequena superfície onde se distribuem, referida à superfície média da placa. Ver figura a seguir.

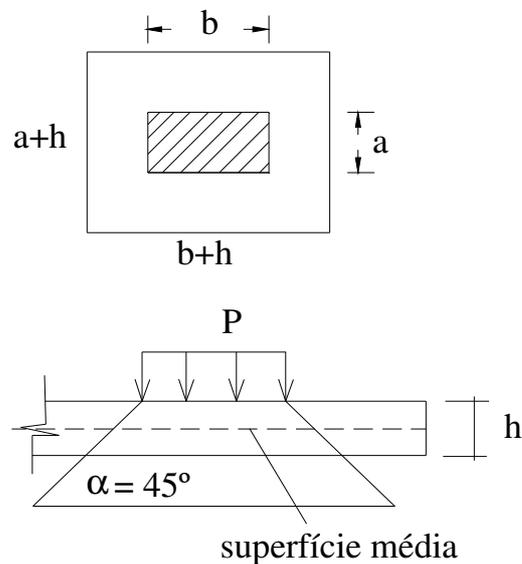


Figura 78 – Área de distribuição das cargas “concentradas”.

A carga  $P$  distribuída na superfície  $a \times b$  da face equivale à mesma carga distribuída em  $(a+h)(b+h)$  na superfície média.

Resolver a equação de Lagrange para esses casos é ainda mais difícil. É conveniente substituir as séries de Fouries pelo Método das Diferenças Finitas ou, mais modernamente o Métodos dos Elementos Finitos.

Para as aplicações práticas desenvolveram-se superfícies de influência como as de Rüsck ou de Homberg (ver cópia anexa).

No caso de lajes de pontes Rüsck transformou essas superfícies em tabelas muito práticas que serão discutidas nas aulas de projeto.

Tafel 64.  $m_y$ -Einflussfeld für die  
Feldmitte einer Rechteckplatte mit  
drei eingespannten Rändern  
( $b/a = 1,0, 8 \pi$ -fach)

Chart 64.  $m_y$ -Influence surface for  
the center of a rectangular plate  
with three edges restrained  
( $b/a = 1,0, 8 \pi$ -times)

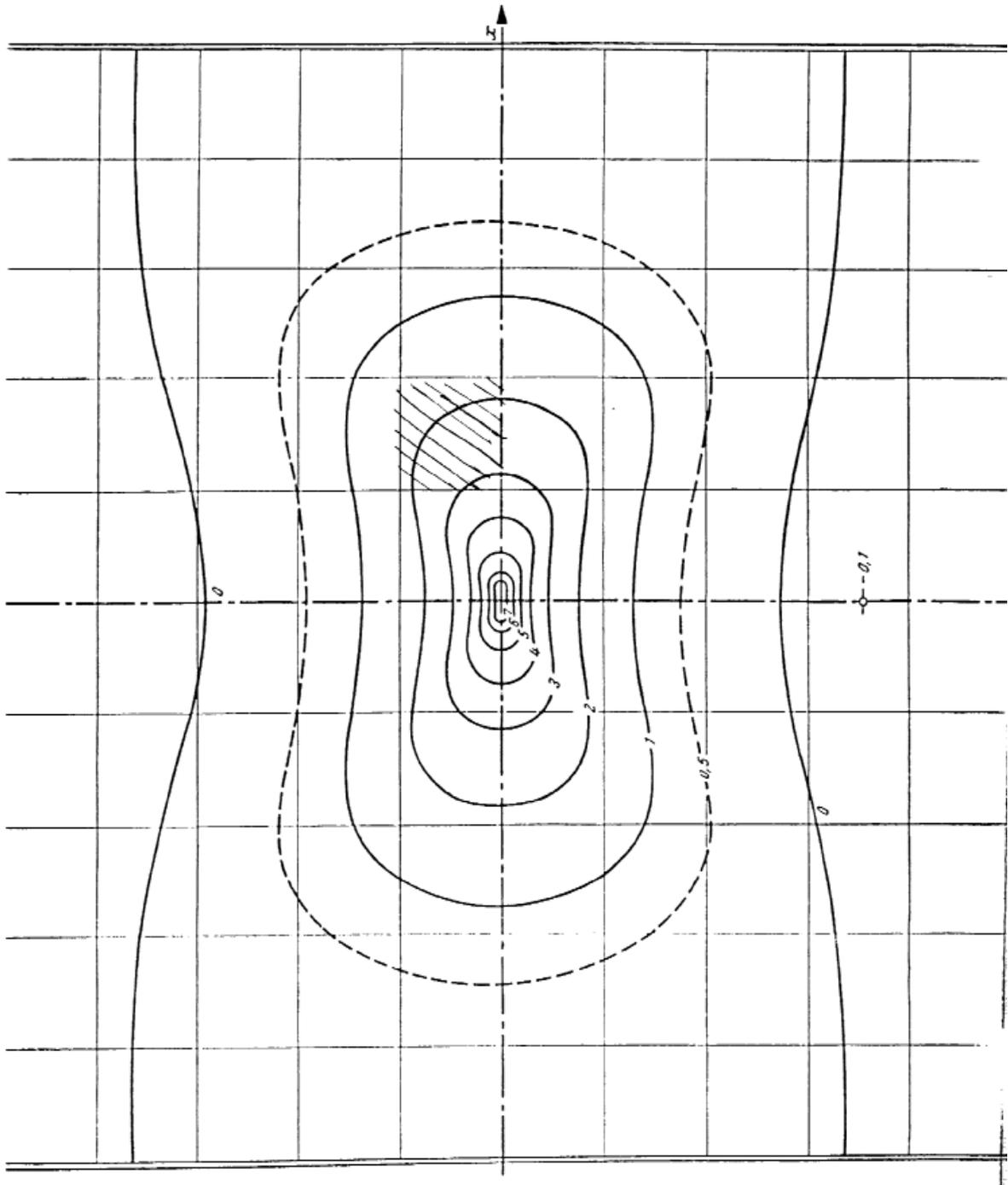


Figura 79 – Superfície de influência para momentos  $m_y$  no meio de uma placa retangular com três lados apoiados.

Tafel 65.  $m_x$ -Stützmoment-Einflussfeld für die Seitenmitte einer Rechteckplatte mit drei eingespannten Rändern  
( $b/a = 1,0$ ,  $8\pi$ -fach)

Chart 65.  $m_x$ -Support-moment influence surface for the edge center of a rectangular plate with three edges restrained  
( $b/a = 1,0$ ,  $8\pi$ -times)

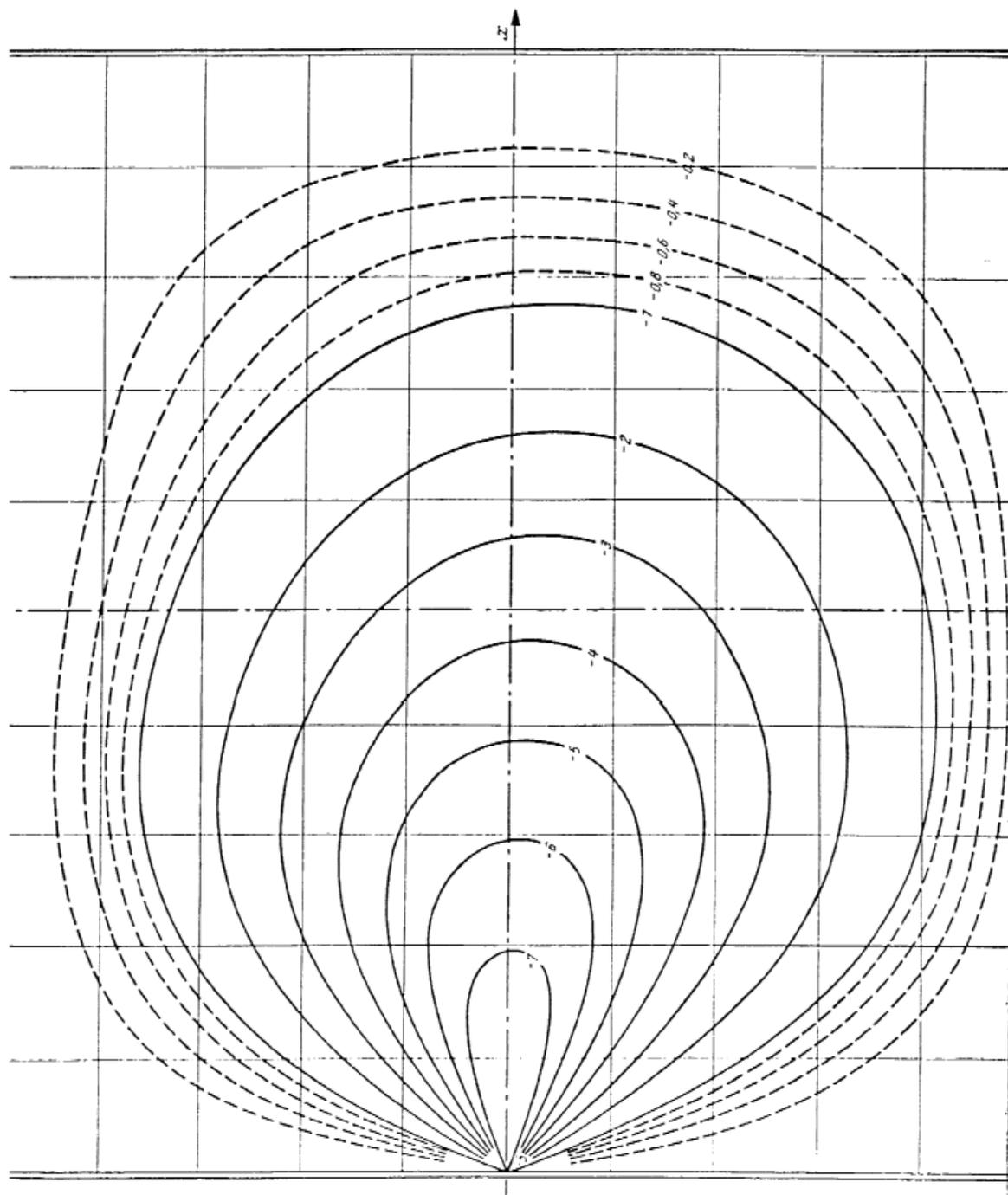
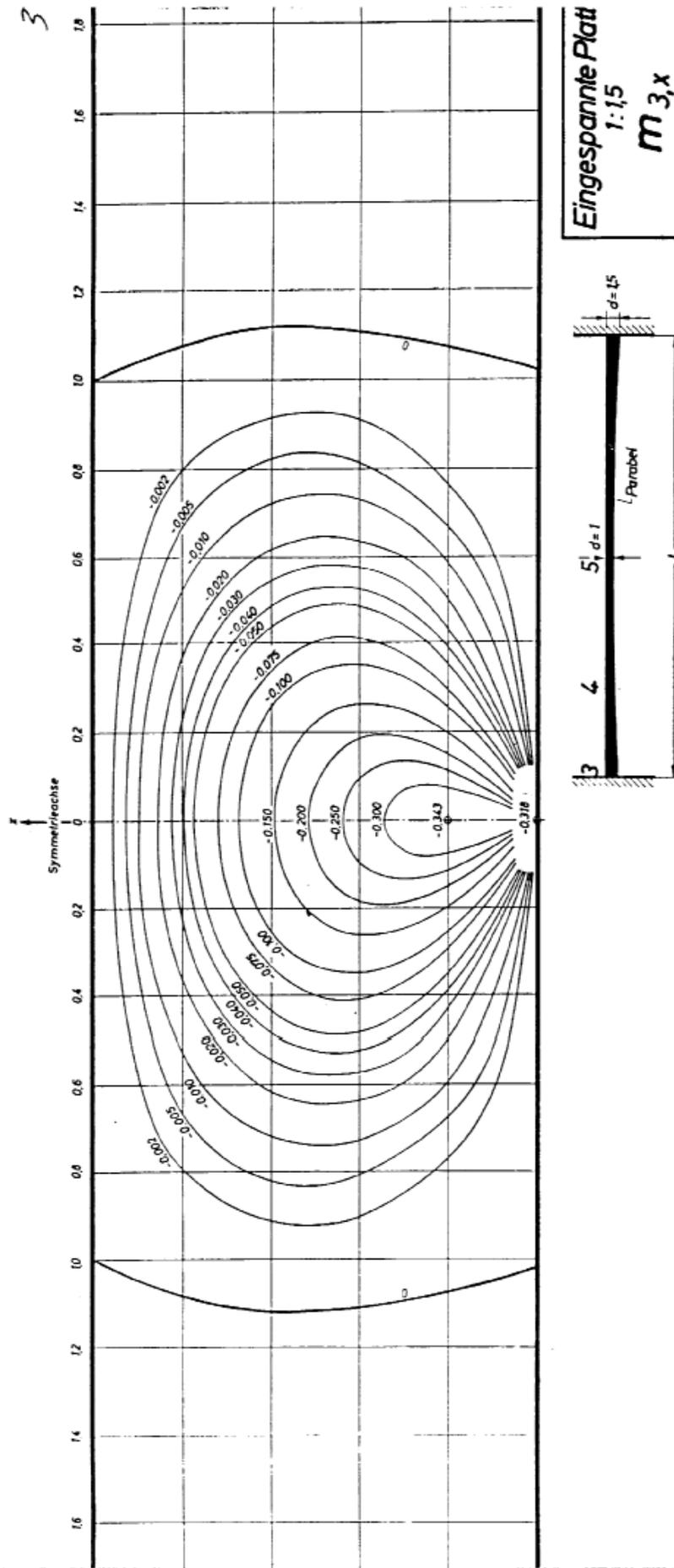


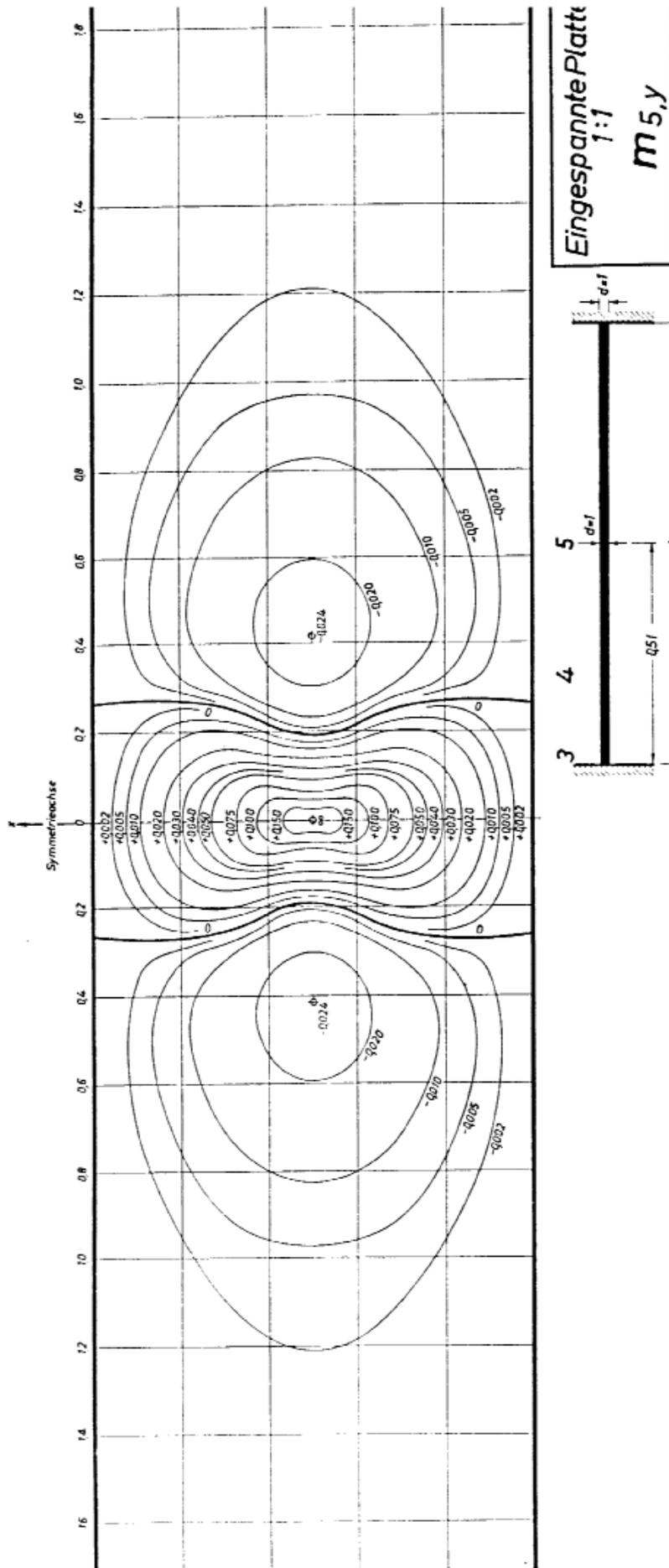
Figura 80 – Superfície de influência para momentos  $m_x$  no centro do apoio de uma placa retangular com três lados **apoiados**.





Superfícies de influência  
para momentos  $m_x$  no  
apóio.

Figura 82 – Superfícies de influência para momentos  $m_x$  no apoio.



Superfície de influência  
para momentos  $m_y$  no  
meio do vão.

Figura 83 – Superfície de influência para momentos  $m_y$  no meio do vão.

### 2.4.3. Pontes em vigas – múltiplas (grelhas) ou celulares (caixões)

#### 2.4.3.1. Análise da torção

##### 2.4.3.1.1. Barras de seção circular maciça ou vazada

###### A. Hipóteses básicas

1. A seção transversal permanece plana e perpendicular ao eixo da barra após deformação
2. A deformação angular ou distorção  $\gamma$  varia linearmente do eixo para a periferia da barra (ela é constante na superfície cilíndrica definida por  $r$ ).

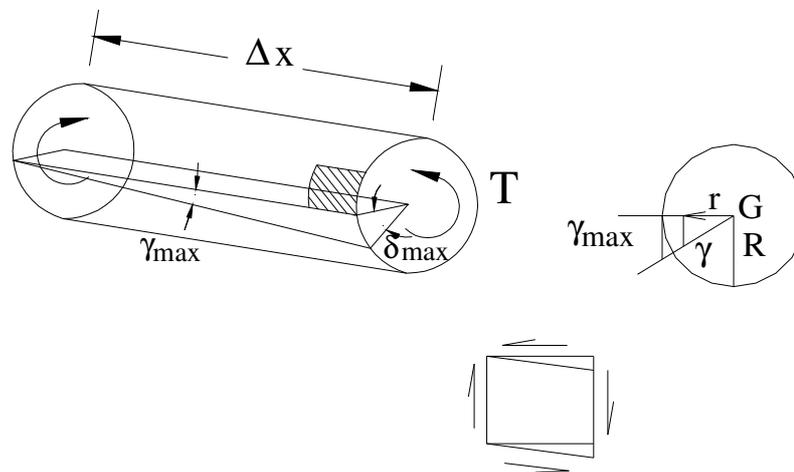


Figura 84 – Deformação angular.

$$\gamma = \frac{\delta}{\Delta x}$$

$$\gamma_{\max} = \frac{\delta_{\max}}{\Delta x}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_{\max}}{R} r$$

3. É válida a lei de Hooke :  $\tau = G\gamma$
4. Os deslocamentos são pequenos

###### B. Cálculo das tensões tangenciais de torção

Como  $\gamma$  varia linearmente, segundo a lei de Hooke o mesmo vale para  $\tau$ .

$$\gamma = \frac{\gamma_{\max}}{R} r$$

$$\tau = \frac{\tau_{\max}}{R} r \Rightarrow \tau = \tau(r)$$

Do equilíbrio:

$$T = \int_s \tau r ds = \int_s \frac{\tau_{\max}}{R} r^2 ds = \frac{\tau_{\max}}{R} \int_s r^2 ds = \frac{\tau_{\max}}{R} I_p$$

$I_p$  - momento polar de inércia

para seção circular maciça  $\frac{\pi R^4}{2}$

para seção circular vazada  $\frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{2}$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} R = \frac{T}{W_t}$$

$w_t$  - modulo de resistência à torção

$$w_t = I_p/R$$

### C. Deformação de torção

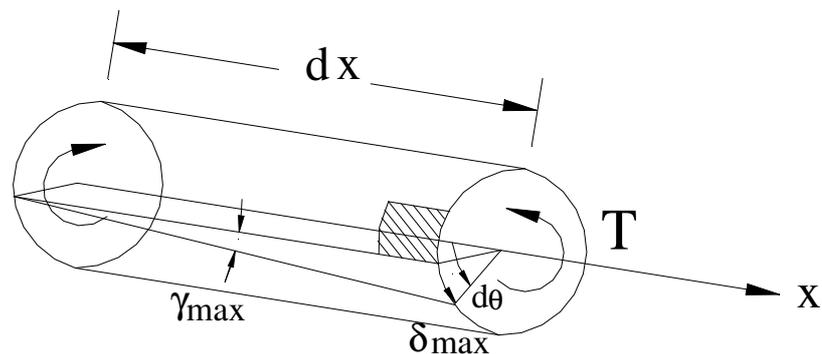


Figura 85 – Deformação de torção

$$\gamma_{\max} = \frac{\delta_{\max}}{dx}$$

$$d\theta = \frac{\delta_{\max}}{R}$$

↓

$$d\theta = \frac{\gamma_{\max}}{R} dx$$

como  $\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G}$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{G I_p}}$$

$$\theta(x) = \int \frac{T}{G \cdot I_p} \cdot dx$$

Caso T e  $I_p$  sejam constantes:

$$\theta(x) = \frac{T}{G \cdot I_p} \cdot x + c_1$$

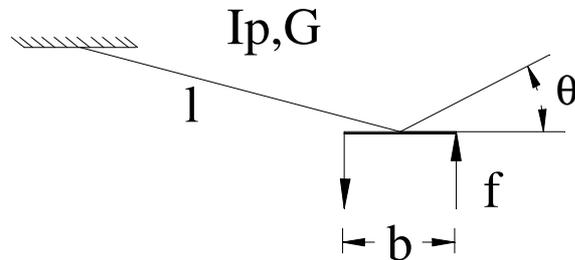


Figura 86 – Viga engastada a torção.

$$T = f \cdot b$$

$$\theta(0) = C_1 = 0$$

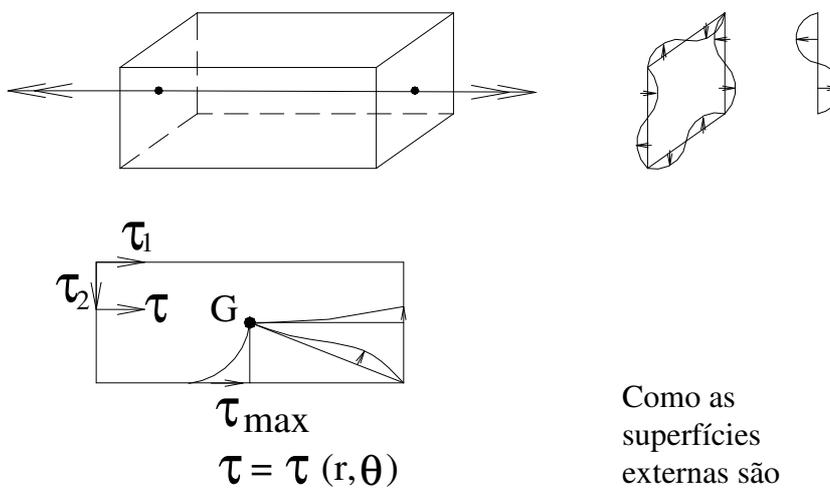
$$\theta(l) = \frac{T}{G \cdot I_p} \cdot l$$

#### 2.4.3.1.2. Barras de seção retangular maciça

Nesse caso as hipóteses 1 e 2 não são mais válidas.

As seções transversais empenam deixando de ser planas

A distribuição das distorções  $\gamma$  não é linear.



Como as superfícies externas são descarregadas:  
 $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$

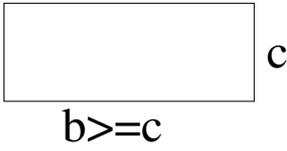
Figura 87 – Tensões de cisalhamento

Sem essas 2 hipóteses a RM não é capaz de resolver o problema de torção de seções retangulares. Saint Venant, 1853, usando a TE, encontrou a solução desse problema no caso de seção qualquer sob torção uniforme (T constante, sem restrição ao empenamento).

Os resultados para seção retangular são:

$$\tau_{\max} \text{ (meio lado maior)} = T/w_t$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{G.I_t}$$



$$w_t = \alpha \cdot bc^2 \qquad I_t = \beta \cdot bc^3$$

b/c	1,0	1,5	2,0	3,0	6,0	10,0	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,246	0,267	0,299	0,312	1/3
$\beta$	0,141	0,196	0,229	0,263	0,299	0,312	1/3

#### 2.4.3.1.3. Analogia de membrana (Prandtl – 1903)

A analogia formal das equações que regem a torção uniforme e a deformação de uma membrana sob pressão uniforme permite dizer que:

1. A tensão de cisalhamento em P é proporcional à inclinação na membrana em P.
2. A direção de  $\tau$  é definida pela normal à maior declive da membrana em P.
3. O momento de torção resistido pela peça é proporcional ao volume sob a membrana.

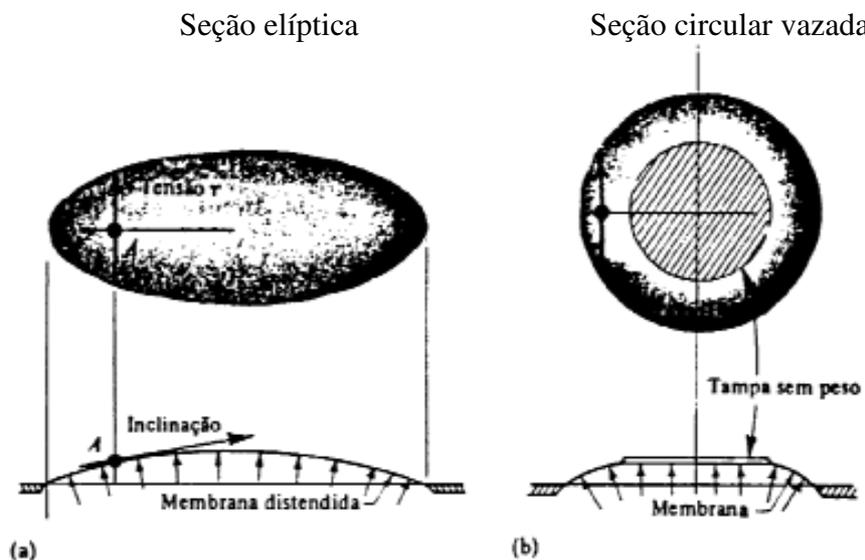


Figura 88 – Analogia de membrana.

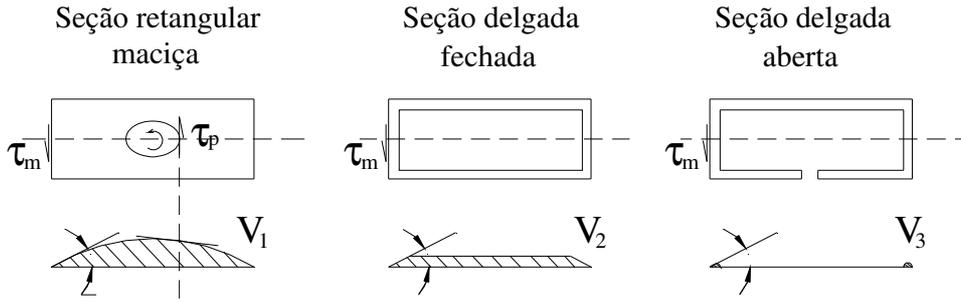


Figura 89 – Comparação dos momentos fletores resistidos por três tipos de seção.

$$V_1 > V_2 \gg V_3 \Rightarrow T_1 > T_2 \gg T_3$$

2.4.3.1.4. Seções vazadas com dois eixos de simetria

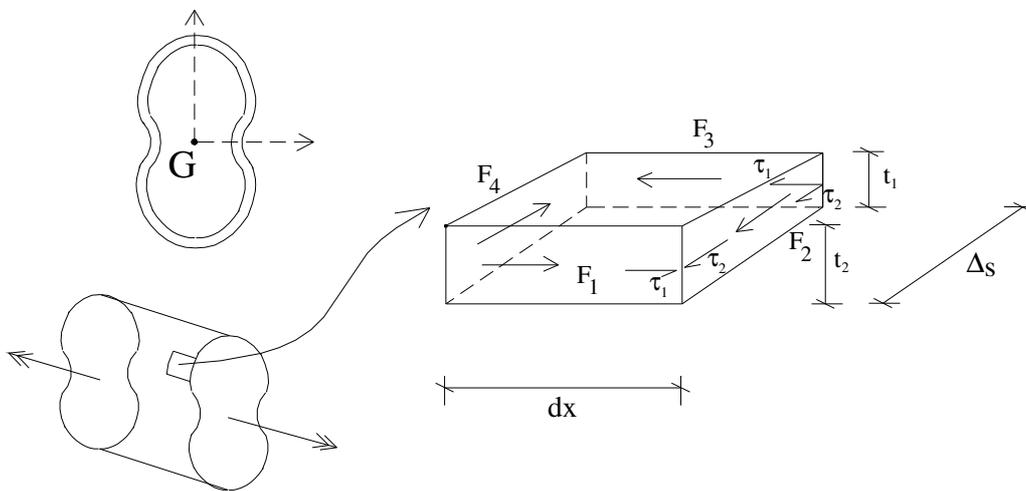


Figura 90 – Seção vazada com dois eixos de simetria submetidas a torção.

Fazendo o equilíbrio:  $F_1 = F_3$        $F_4 = F_2$

$$\tau_2 \cdot t_2 \cdot dx = \tau_1 \cdot t_1 \cdot dx$$

$$\tau_2 \cdot t_2 = \tau_1 \cdot t_1 = q$$

$q$  = fluxo de torção

$$T = \oint q \cdot ds \cdot b = q \underbrace{\oint b \cdot ds}_{2A} = q \cdot 2A \quad \therefore A - \text{área limitada pela linha média da seção:}$$

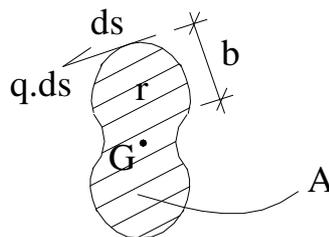


Figura 91 – Área limitada pela linha média

Conclusões:

➤ O fluxo de torção  $q = \tau \cdot t$  é constante ao longo de todo o contorno da seção;

$$\text{➤ } T = q \cdot 2A \therefore \tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2A \cdot t}$$

➤ Da Teoria da Elasticidade ou pelos Teoremas de Energia:

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} \qquad \frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{G \cdot I_t}$$

Essas expressões correspondem à chamada Torção de Bredt, aplicável a seções vazadas.

Elas admitem as seguintes hipóteses:

1. As tensões  $\tau$  não variam ao longo da espessura da parede da seção;
2. Lei de Hooke;
3. Deslocamento pequenos;
4. Torção uniforme, isto é,  $T$  constante ao longo da barra e empenamento livre.

Em função da hipótese 1, elas são uma boa solução para perfis delgados, mas não para perfis de parede espessa.

#### 2.4.3.1.5. Torção não uniforme

O que foi exposto nos itens 2.4.3.1.2 a 2.4.3.1.4 só vale, como foi dito, se a torção for uniforme, isto é, se  $T$  for constante ao longo da barra e o empenamento livre.

Caso isso não ocorra a torção é dita não uniforme e essas soluções não são, em princípio, válidas.

Na verdade, para seções maciças ou vazadas elas ainda podem se aplicadas sem que se façam erros importantes. Já para as seções abertas, sobretudo as de parede fina, isso não pode ser dito, é importante considerar a torção não uniforme.

Para visualizar melhor esse problema considere-se o perfil I da figura 92, solicitado à torção.

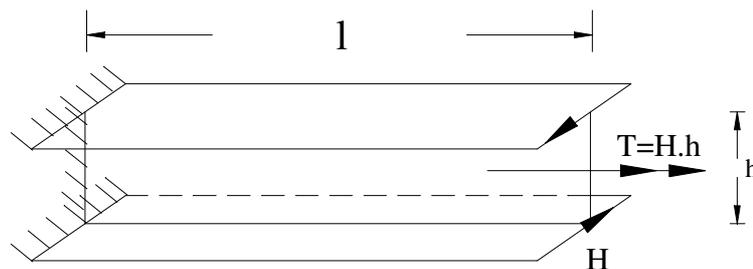


Figura 92 – Perfil I solicitado à torção.

A seção I facilita a visualização dos 2 sistemas estruturais capazes de transportar o momento  $T$ , da extremidade livre à extremidade engastada.

O primeiro desses sistemas corresponde à Torção Uniforme ou de Saint-Venant. Nele, a torção desenvolve na seção transversal apenas tensões tangenciais. As tensões normais são nulas uma vez que se admitem as seções livres para se empenarem.

O segundo desses sistemas corresponde à flexão diferenciada das mesas. Nele a torção desenvolve tensões normais e tangenciais na seção transversal. Para isso é essencial que existam restrições ao empenamento das seções.

Entende-se aqui por empenamento os deslocamentos que tendem a tornar a seção transversal não plana após o carregamento.

É interessante notar que é possível definir condições particulares onde só um desses sistemas trabalha. Se eliminarmos, por exemplo, os engastamentos da extremidade esquerda, o segundo sistema perde completamente a rigidez, fica hipostático, de modo que toda a torção é suportada pelo primeiro. Tem-se um problema de torção Uniforme.

Analogamente é possível eliminar a rigidez do primeiro sistema desligando as mesas das almas. Nessas circunstâncias nenhuma das partes da seção gira e, portanto, nenhuma Torção de Saint-Venant é gerada, de modo que toda torção é suportada por flexão diferenciada das mesas. Diz-se que se tem um problema de Flexo-Torção.

Num problema real, onde nenhuma das 2 condições extremas acima ocorre, tem-se um problema de Torção Mista. Nesse problema o momento total  $T$  se subdividirá pelos 2 sistemas segundo as suas rigidezes. O mais rígido transportará uma maior parcela de  $T$ .

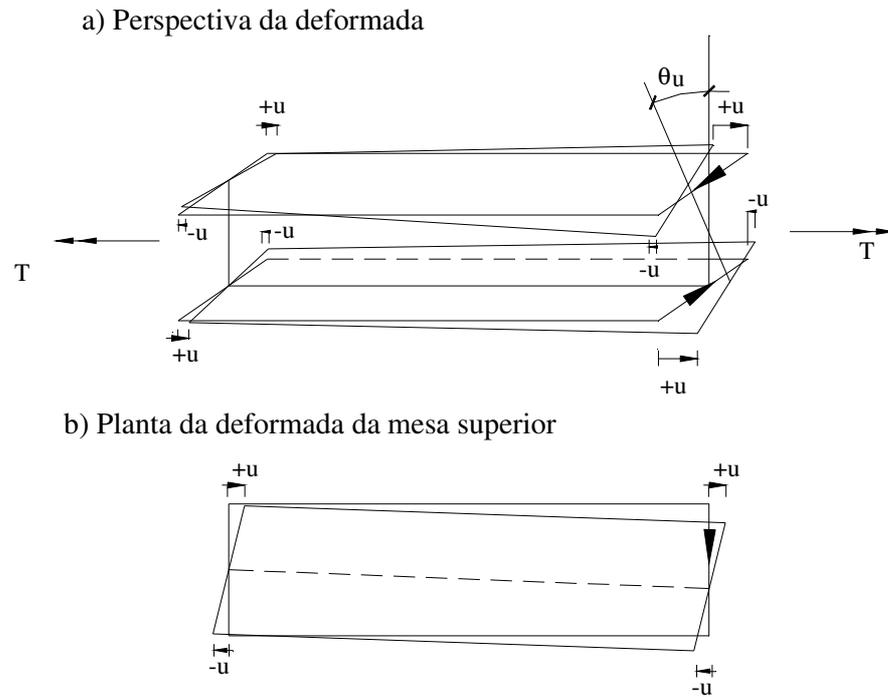
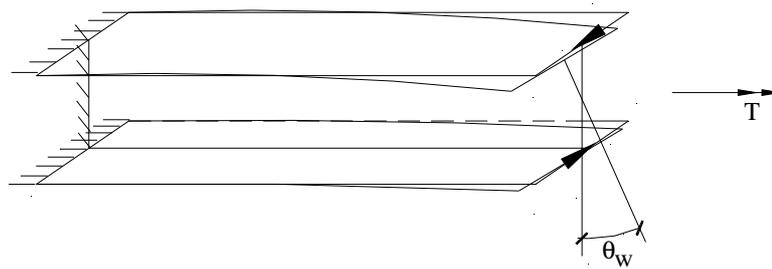


Figura 93 – Torção não uniforme do perfil I (eliminando o engastamento).

a) Perspectiva da deformada



b) Planta da deformada da mesa superior

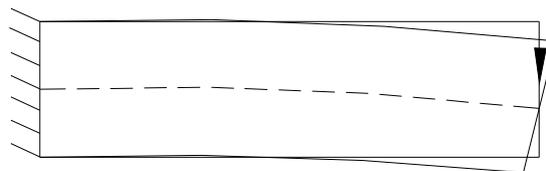
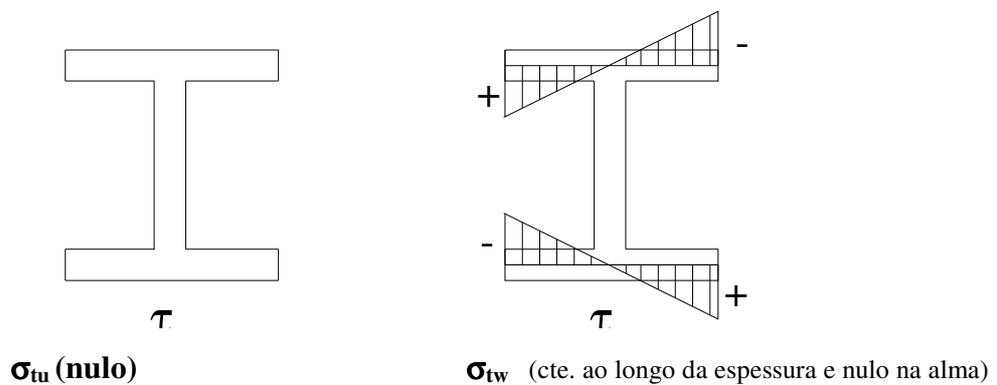
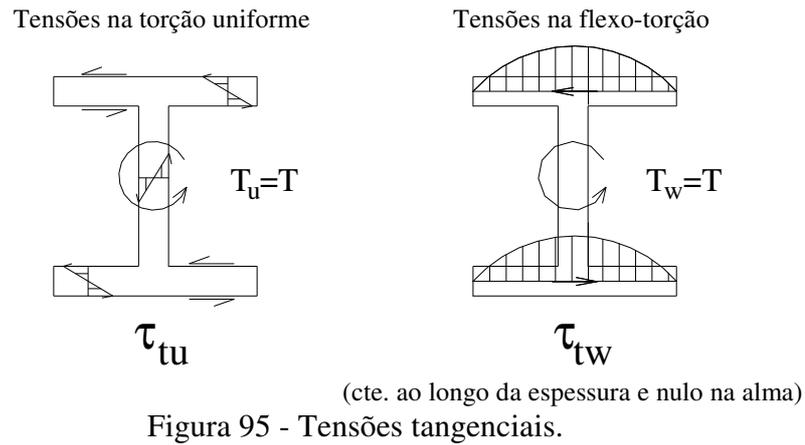


Figura 94 - Flexo-Torção do perfil I (eliminada a alma)



A solução desses problemas hiperestático exige que se escrevam 4 equações:

- Equações de equilíbrio:

$$T = T_u + T_w \quad \text{qualquer } (x) \quad (1)$$

Numa seção qualquer  $S(x)$  o momento de torção  $T$  é obtido pela soma dos momentos de torção uniforme  $T_u$  e de flexo-torção  $T_w$ .

- Equações de compatibilidade:

$$\theta = \theta_u = \theta_w \quad \text{qualquer } (x) \quad (2)$$

Numa seção  $S(x)$  a rotação  $\theta$  em torno de  $x$  é a mesma para os 2 sistemas estruturais.

- Equações derivadas das constitutivas:

$$\theta_u = f_u(T_u / G.I_t)$$

$$\theta_w = f_w(T_w / E.I_w)$$

Essas equações formam um sistema determinado de 4 equações a 4 incógnitas, que são:  $T_u$ ,  $T_w$ ,  $\theta_u$  e  $\theta_w$ .

$I_w$  é o momento de inércia à flexo-torção, cuja expressão para perfil I é dada a seguir.

A solução completa desse problema é difícil, mas é fácil obter uma solução aproximada que permite ter uma idéia de qual dos sistemas é mais importante, facilitando a visualização do problema físico.

Essa solução aproximada corresponde a escrever a equação de compatibilidade apenas na extremidade livre. Assim:

$$\theta_u(l) = \frac{T_u \cdot l}{G.I_t}$$

$$\theta_w(l) = \frac{\delta_w}{h/2}$$

$$\delta_w = \frac{H_w \cdot l^3}{3EI_m}$$

onde:

$$H_w = T_w / h$$

$$I_m = t_m \cdot b_m^3 / 12$$

$$\frac{T_u \cdot l}{G.I_t} = \frac{2T_w \cdot l^3}{3h^2 EI_m}$$

conforme Saint-Venant:  $I_t = \sum \frac{b_i \cdot t_i^3}{3}$

Por definição, o momento de inércia à flexo-torção de um perfil I com dois eixos de simetria é dado por:

$$I_w = \frac{I_m \cdot h^2}{2}$$

logo:

$$\alpha = \frac{T_u}{T_w} = \frac{G.I_t}{3EI_w} \cdot l^2$$

Quando  $\alpha > 10$ , a torção uniforme faz praticamente todo o serviço. A flexo-torção pode ser desprezada. É o caso das seções celulares.

Se  $\alpha < 0,1$ , a flexo-torção transporta praticamente toda a carga. A torção uniforme pode ser desprezada. É o caso dos perfis delgados abertos.

Se  $0,1 < \alpha < 10$ , é preciso considerar a torção mista, com a solução correta.

NOTA: essa visão de flexo-torção permite justificar com clareza os critérios usuais para cálculo das pontes em duas vigas.

Considere-se inicialmente o mesmo perfil I em balanço, mas recebendo agora cargas laterais. Despreze-se a torção uniforme

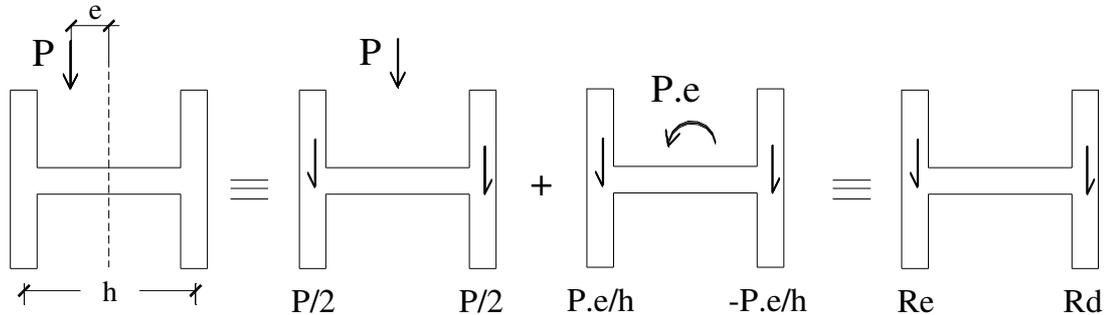


Figura 97 – Seção H submetida à carga excêntrica.

$$R_e = P\left(\frac{1}{2} + \frac{e}{h}\right)$$

$$R_d = P\left(\frac{1}{2} - \frac{e}{h}\right)$$

Note-se que esses dois valores correspondem exatamente às reações de apoio de uma viga isostática de vão h, recebendo a carga P excêntrica de e.

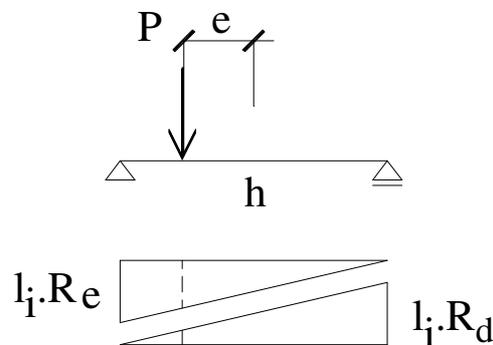


Figura 98 – Linha de influência de reação nas almas esquerda e direita.

$$R_e = \eta_e \cdot P = \frac{1}{h} \left( \frac{h}{2} + e \right) \cdot P = P \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e}{h} \right)$$

$$R_d = \eta_d \cdot P = \frac{1}{h} \left( \frac{h}{2} - e \right) \cdot P = P \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e}{h} \right)$$

Essa conclusão permite dizer que calcular pontes em duas vigas considerando para a linha de influência de distribuição transversal, a reta 0/1, corresponde apenas a desprezar a torção uniforme, coisa que é em geral aceitável, podendo inclusive ser verificada através do coeficiente  $\alpha$ .

(cuidado que a expressão de  $\alpha$  varia conforme as condições de contorno da barra: em balanço, biapoiada, contínua, etc.).

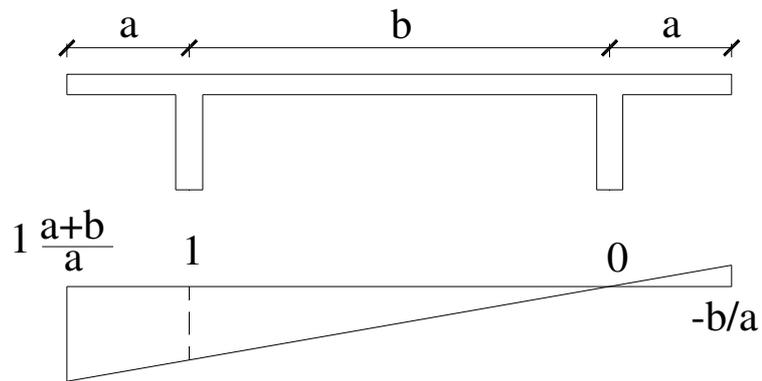


Figura 99 – Linha de influência transversal.

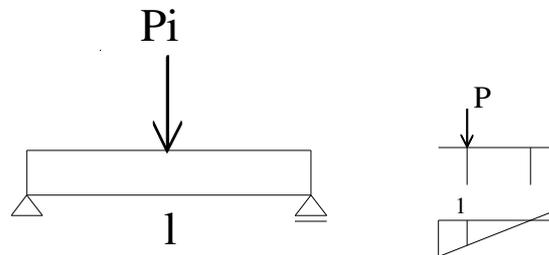


Figura 100 – Carga sobre a viga esquerda.

$$P_i \text{ (viga esquerda)} = P$$

$$P_i \text{ (viga direita)} = 0$$

$$M_{\max} \text{ (viga esquerda)} = P.l/4$$

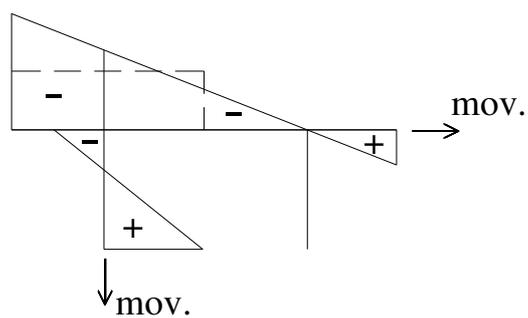
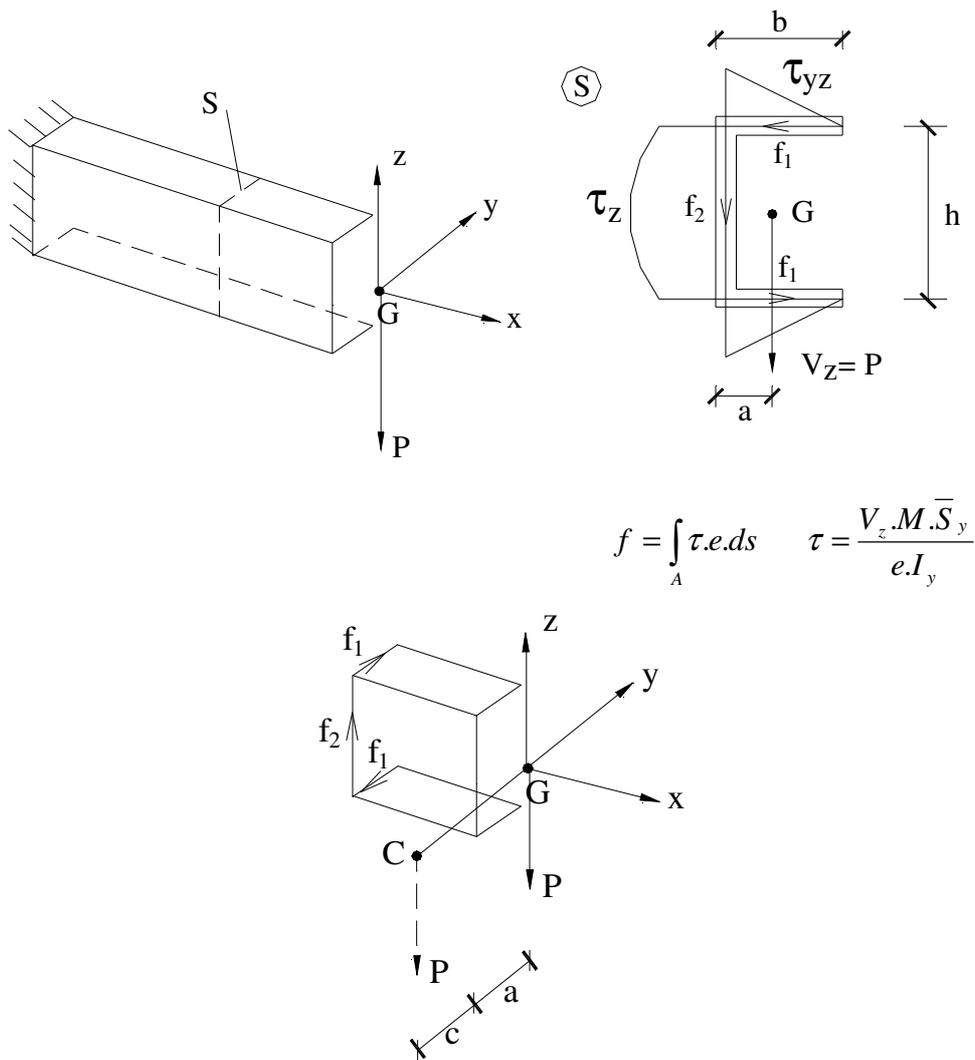


Figura 101 - Diagrama  $\sigma$  (meio do vão).

#### 2.4.3.1.6. Centro de torção ou cisalhamento



$$f = \int_A \tau \cdot e \cdot ds \quad \tau = \frac{V_z \cdot M \cdot \bar{S}_y}{e \cdot I_y}$$

Figura 102 – Exemplo do perfil C.

Do equilíbrio do elemento:

$$h: f_1 - f_1 = 0$$

$$v: P - f_2 = 0$$

$$M_{Gx} = P_{\text{zero}} - f_{1h} - f_2 \cdot a \neq 0 \quad ?$$

$$M_{Cx'} = P_{\text{zero}} - f_{1h} + f_2 \cdot c = 0 \Rightarrow \boxed{c = \frac{f_1 h}{f_2}}$$

Assim, as tensões  $\tau$  decorrentes da flexão simples, ou seja, a própria flexão simples, ocorre quando P é aplicada em C (Centro de cisalhamento) e não em G.

Como consequência, os momentos de torção devem ser calculados em relação a C, e não a G.

Caso P esteja excêntrica de d em relação a C, as tensões tangenciais resultarão da

composição  $\tau_{Vz} + \tau_T$  ( $T = P.d$ )

Por isso C também é chamado Centro de Torção.

Assim:

$$f_2 = P$$

$$f_1 = \int \tau.e.ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{P.M\bar{S}_y \times b \times e}{e.I_y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P.b.e.h/2}{e.I_y} e.b = \frac{P.e.b^2h}{4.I_y}$$

$$c = \frac{f_1 h}{f_2} = \frac{P.e.b^2.h^2}{4.I_y.P} = \frac{e.b^2h^2}{4.I_y}$$

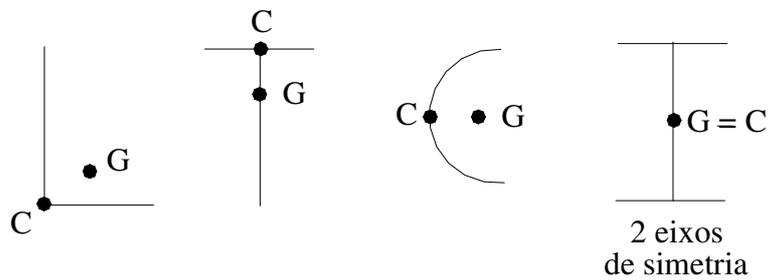


Figura 103 – Centro de torção de algumas seções.

#### 2.4.3.2. Estruturas em viga T única

Estas estruturas são muito comuns nas passarelas de pedestres.

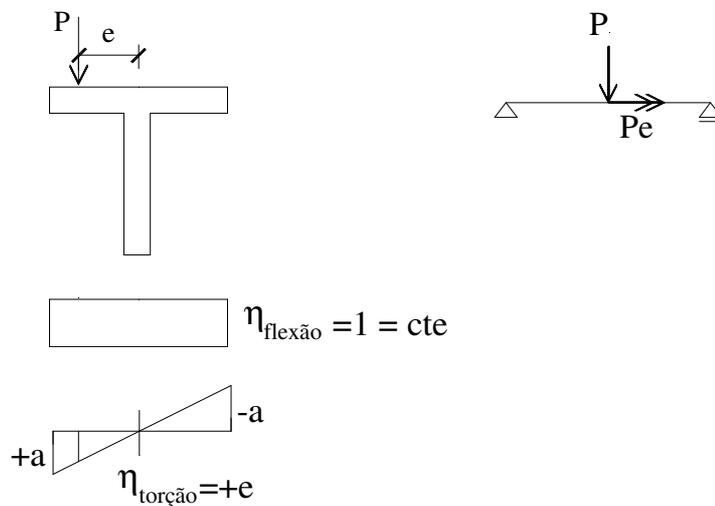


Figura 104 – Viga em seção T.

- A carga  $P$  centrada é transportada aos apoios por flexão.
- O momento  $P_e$  o é por torção uniforme. A flexo-torção nesse caso é usualmente desprezível.

#### 2.4.3.3. Pontes em duas vigas

- Já foram estudadas anteriormente

#### 2.4.3.4. Pontes em 3 ou mais vigas (Grelhas)

Existem muitas soluções para o problema das grelhas de ponte. A mais simples é aquela devida a Courbon/Engesser que será apresentada a seguir. Outras soluções devem ser lembradas, como, por exemplo, aquelas devidas a Leonhardt, Guyon/Massonet/Bares, ao prof. Ferraz, a Fauchart, etc. Dentre elas será apresentada apenas a última, que é ao mesmo tempo simples e precisa.

As pontes em vigas múltiplas foram inicialmente providas de transversinas bastante rígidas com o objetivo de bem distribuir as cargas pelas longarinas e se constituírem nas grelhas.

Posteriormente se verificou que as lajes usuais dessas pontes tinham rigidez suficiente para garantir uma boa distribuição transversal o que sugeriu a eliminação das transversinas intermediárias. Essa solução tem sido usada atualmente, especialmente quando as vigas são pré moldadas, mas, é claro, a armadura da laje deve ser reforçada, com atenção especial para os problemas de fadiga.

Para o cálculo das grelhas com transversinas muito rígidas propõe-se o processo de Courbon/ Engesser e para o caso em que elas são flexíveis ou mesmo não existem propõe-se o processo de Fauchart.

##### 2.4.3.4.1. Processo de Courbon/Engesser

Esse processo se aplica ao caso usual de grelhas de ponte onde são respeitadas as seguintes condições:

- A largura da obra é menor que metade do vão da mesma
- A altura das transversinas é da ordem de grandeza daquela das longarinas
- As espessuras das longarinas e das lajes são pequenas

Essas condições permitem formular as seguintes hipóteses:

1. As transversinas são infinitamente rígidas.
2. A torção uniforme é desprezível.
3. O trabalho longitudinal das lajes também é desprezível.
4. Admitem-se ainda válidas para as longarinas as hipóteses da Resistência dos Materiais:

- As longarinas são barras ( $b, h \ll l$ )
- O material é homogêneo e isótropo
- É válida a lei de Hooke
- É válida a hipótese de Navier
- Os deslocamentos são pequenos.

A Resistência dos Materiais permite dizer que as flechas das longarinas são inversamente proporcionais ao produto de rigidez  $EI$ . Assim, para uma viga biapoiada sob carga uniforme  $p$  ou concentrada  $P$  no meio do vão as flechas no meio do vão seriam respectivamente:

$$\frac{5pl^4}{384EI} \quad \text{e} \quad \frac{pl^3}{48EI}$$

## A. Distribuição transversal

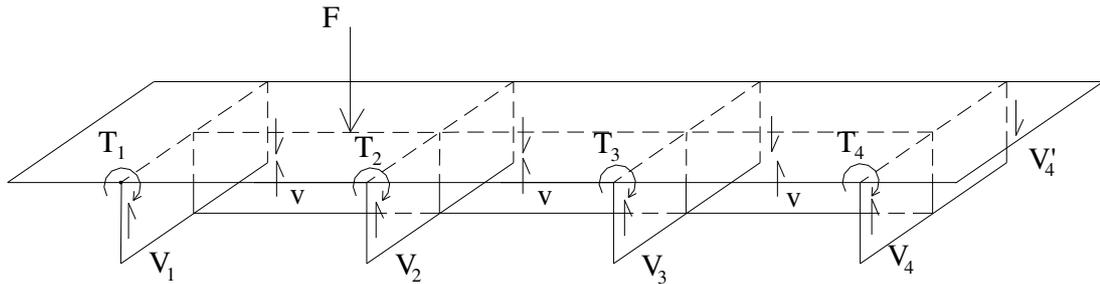


Figura 105 – Distribuição transversal de uma carga F.

$$T_i = v \approx 0 \text{ (desprezíveis)}$$

$$F_i = v_i - v_i'$$

Considere uma transversina e sua vizinhança como assim representado. Os momentos fletores não foram representados porque não interferem no equilíbrio de forças verticais que se pretende estudar.

As hipóteses feitas permitem reduzir o problema de distribuição da força externa F pelas vigas (forças  $F_i = \Delta V_i$ ) ao problema de uma viga infinitamente rígida sobre apoios elásticos.

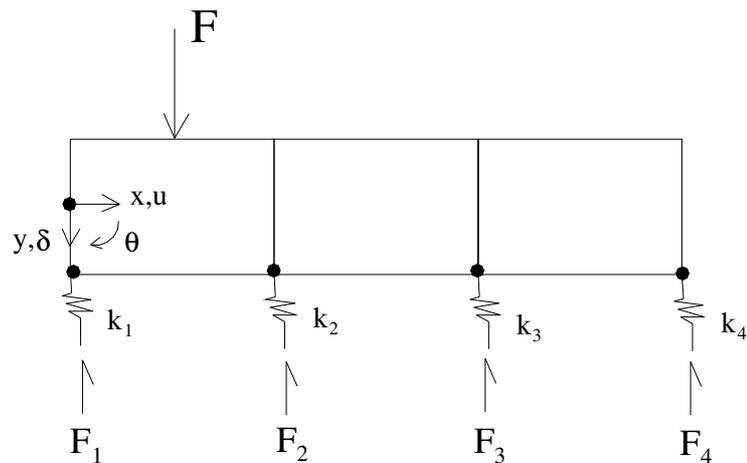


Figura 106 – Viga rígida sobre apoios elásticos.

Esse problema tem 3 graus de liberdade: deslocamentos  $u(//x)$ ,  $\delta(//y)$  e rotação  $\theta$ .

Como só temos cargas verticais podemos deixar de lado o deslocamento  $u(//x)$ .

Por outro lado as transversinas rígidas fazem com que as deformadas de todas as vigas sejam afins. Assim:

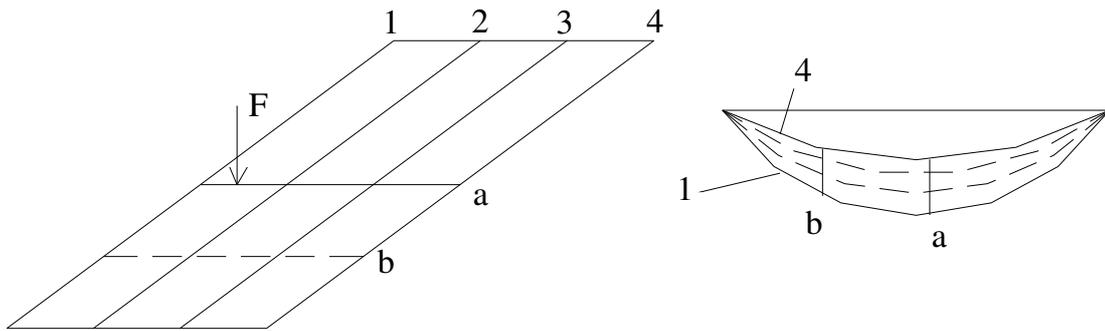


Figura 107 – Deformação das vigas 1 a 4.

$$\delta_{bi} = \frac{1}{\alpha} \delta_{ai} \quad \text{para qualquer viga } i.$$

Isso permite dizer que as rigidezes dos apoios elásticos  $k$  variam com a posição da transversina, mas é mantida a proporção entre elas. Como é essa proporção que define a distribuição transversal, ela será única qualquer que seja a posição da transversina.

Transversina a	$k_1, k_2, k_3, k_4$
Transversina b	$\alpha.k_1, \alpha.k_2, \alpha.k_3, \alpha.k_4$
Qualquer transversina	$\beta.I_1, \beta.I_2, \beta.I_3, \beta.I_4$

$\alpha$  e  $\beta$  variam com a posição da transversina e com o tipo de carregamento. "Para justificar essa conclusão, ver item 2.4.3.4.2."

A solução do problema de barra rígida sobre apoios elásticos se obtém facilmente como se segue.

Considere-se o caso particular  $\theta = 0$  e  $\delta = 1$  e procure-se determinar a posição da carga externa correspondente.

$$\left. \begin{aligned} F_i &= k_i \cdot \delta_i = k_i \\ M_A &= \sum F_i \cdot x_i = \sum x_i \cdot k_i \\ M_A &= F \cdot \bar{x} = \sum k_i \cdot \bar{x} \end{aligned} \right\} \bar{x} = \frac{\sum x_i k_i}{\sum k_i}$$

$\bar{x}$  define um ponto tal que se  $F$  for a ele aplicado teremos  $\theta = 0$  e  $\delta$  constante.

Esse ponto é chamado Centro Elástico por analogia com Centro de Gravidade.

Considere-se agora o caso geral.

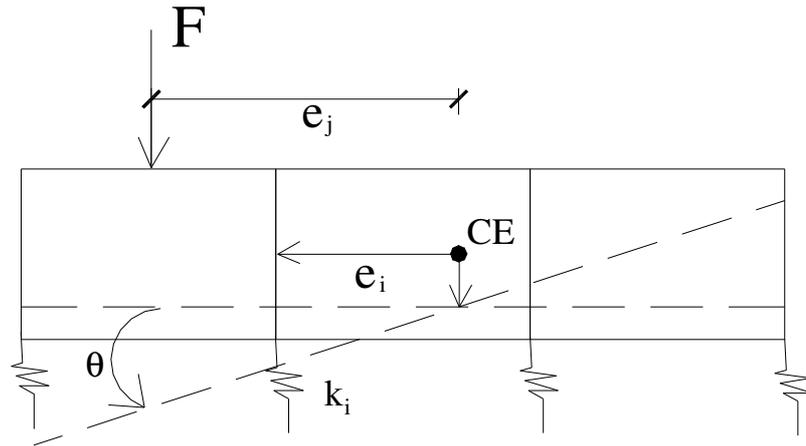


Figura 108 – Deformação de uma viga rígida sobre apoios elásticos devido à carga excêntrica em relação ao centro de rigidezes das molas.

$$\delta_i = \delta + \theta \cdot e_i \quad F_i = k_i \cdot \delta_i = k_i(\delta + \theta \cdot e_i)$$

As duas equações de equilíbrio necessárias são:

$$\begin{cases} F = \sum F_i = \sum k_i(\delta + \theta \cdot e_i) \\ F \cdot e_j = \sum F_i \cdot e_i = \sum k_i \cdot e_i(\delta + \theta \cdot e_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = \delta \sum k_i + \theta \sum k_i \cdot e_i = \delta \sum k_i \\ F \cdot e_j = \delta \sum k_i \cdot e_i + \theta \sum k_i \cdot e_i^2 = \theta \sum k_i \cdot e_i^2 \end{cases}$$

Pois  $\sum k_i \cdot e_i = 0$  por definição do CE.

Assim:

$$\delta = \frac{F}{\sum k_i} \quad e \quad \theta = \frac{F \cdot e_j}{\sum k_i \cdot e_i^2}$$

$$F_i = k_i \left( \frac{F}{\sum k_i} + \frac{F \cdot e_j}{\sum k_i \cdot e_i^2} \cdot e_i \right) = F \cdot \left[ k_i \left( \frac{1}{\sum k_i} + \frac{e_j \cdot e_i}{\sum k_i \cdot e_i^2} \right) \right] = F \cdot r_{ij}$$

como  $k_i = \beta \cdot I_i$

$$r_{ij} = I_i \left( \frac{1}{\sum I_i} + \frac{e_j \cdot e_i}{\sum I_i \cdot e_i^2} \right)$$

Quando as vigas são iguais: ( $I_i = I = \text{constante}$ )

$$r_{ij} = \left( \frac{1}{n} + \frac{e_i \cdot e_j}{\sum e_i^2} \right)$$

Note-se a semelhança entre essas expressões e aquela das tensões normais na flexão-composta:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \cdot e$$

$$N = F, \quad M = F \cdot e_j$$

$$A = \sum k_i, \quad I = \sum k_i \cdot e_i^2, \quad e = e_i$$

A semelhança não é apenas formal, é física: a transversina rígida faz o papel da hipótese de Navier e as molas de comportamento elástico linear reproduzem a Lei de Hooke.

### B. Esforços longitudinais

Quando a carga externa está sobre uma transversina, ela se distribui pelas longarinas conforme foi visto. A longarina  $i$  recebe força  $F_i$  e os esforços longitudinais nessa longarina são diretamente calculados a partir de  $F_i$ .

Quando, porém, a carga externa está fora da transversina, sobre uma longarina por exemplo, as coisas não são a princípio tão simples. De fato:

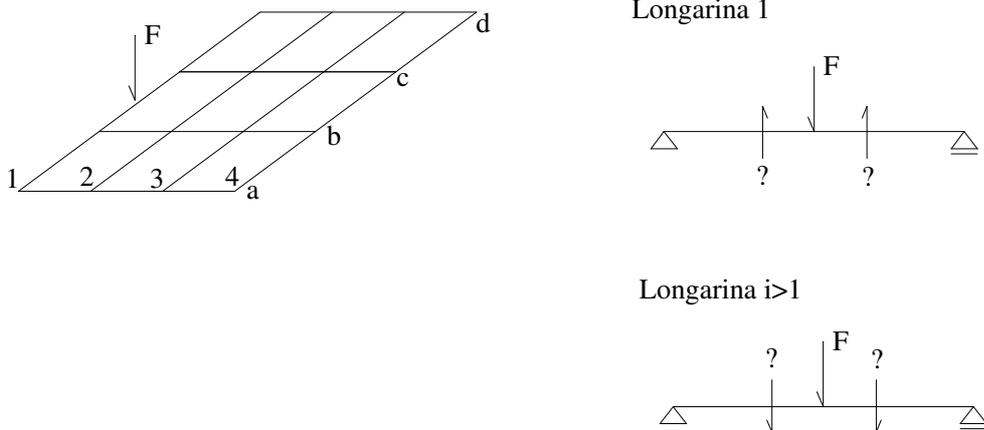
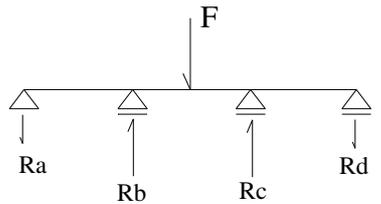


Figura 109 – Carga externa fora da transversina.

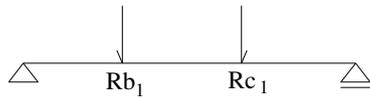
É preciso calcular os esforços que as transversinas aplicam nas longarinas.

Façamos isso por superposição.

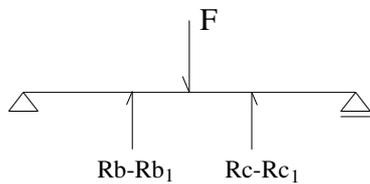
Longarina 1



+

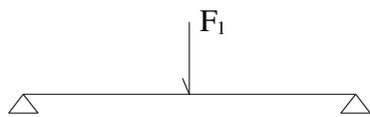


|||

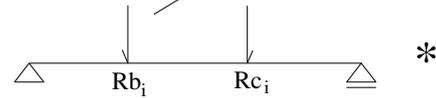


\*

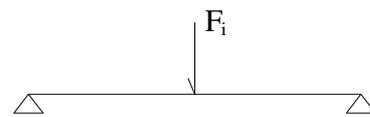
|||



\*\*

Longarina  $i > 1$ Distribuição de  $R_b$  e  $R_c$   
pelas longarinas

\*



\*\*

Figura 110 – Distribuição da carga  $F$  nas longarinas.

Verifica-se que as soluções aproximadas \*\*, embora muito mais simples, fornecem soluções bastante próximas das soluções corretas \*.

Aconselha-se, portanto, usar a solução aproximada que corresponde, fisicamente, a admitir uma transversina rígida sob cada carga externa.

Note-se que a distribuição transversal obtida por Courbon/Engesser é válida qualquer que seja o sistema estrutural longitudinal, viga biapoiada ou contínua.

#### 2.4.3.4.2. Processo de Fauchart

Considere-se o caso de uma ponte em vigas múltiplas sem transversinas intermediárias, só nos apoios.

Para tratamento desse problema adotam-se as seguintes hipóteses:

1. As longarinas trabalham conforme a Resistência dos Materiais.
2. As longarinas são biapoiadas e têm inércia constante.
3. O trabalho longitudinal das lajes é desprezado.

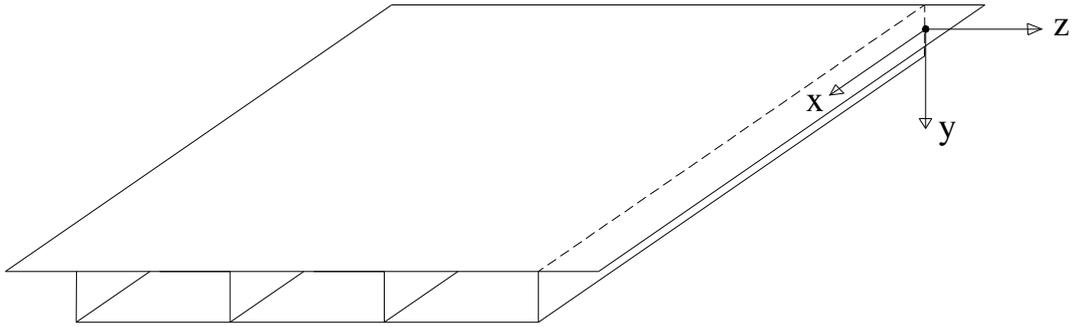


Figura 111 – Superestrutura em grelha.

Da super esquematicamente representada na figura 111 isole-se a viga i:

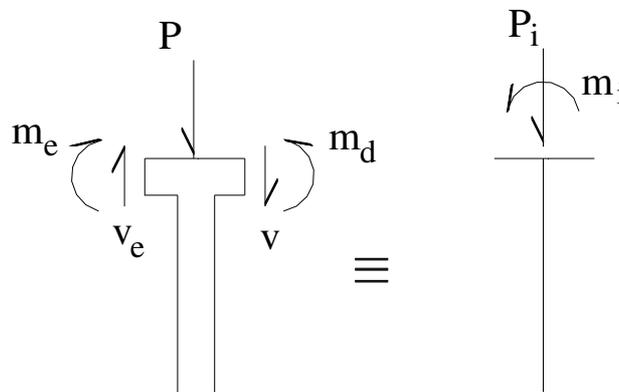


Figura 112 – Equilíbrio da viga i

$$p_i = p + v_d - v_e$$

$$m_i = m_d - m_e$$

Da Resistência dos Materiais tem-se:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad p = -\frac{d^2 M}{dx^2} \longrightarrow \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{P}{EI}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{GI_t}, \quad m = \frac{dT}{dx} \longrightarrow \frac{d^2 \theta}{dx^2} = -\frac{m}{GI_t}$$

Assim:

$$\frac{d^4 y_i}{dx^4} = \frac{p_i}{EI_t} \quad \text{e} \quad \frac{d^2 \theta_i}{dx^2} = -\frac{m_i}{GI_{ti}}$$

Desenvolvendo em série de Fourier as cargas  $p_i$  e  $m_i$  e os deslocamentos  $y_i$  e  $\theta_i$  é possível transformar essas duas equações diferenciais em equações algébricas o que permitirá transformar

nosso problema bidimensional (x, z) em unidimensional (z).

Como as vigas são biapoiadas e ainda engastadas à torção nos apoios a série escolhida deve respeitar as seguintes condições de contorno:

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = l \quad y_i = \theta_i = 0$$

( $\theta$  = rotação em torno de x)

A série adequada é portanto de senos do tipo:  $\text{sen} \frac{j\pi x}{l}$ , nula para  $x = 0$  e  $x = l$ .

Assim:

$$p_i = \sum_j p_{ij} \text{sen} \frac{j\pi x}{l} \quad m_i = \sum_j m_{ij} \text{sen} \frac{j\pi x}{l}$$

$$y_i = \sum_j y_{ij} \text{sen} \frac{j\pi x}{l} \quad \theta_i = \sum_j \theta_{ij} \text{sen} \frac{j\pi x}{l}$$

Introduzindo essas séries nas equações acima tem-se para cada termo j:

$$p_{ij} \cdot \text{sen} \frac{j\pi x}{l} = y_{ij} \cdot \text{sen} \frac{j\pi x}{l} \left( \frac{j\pi}{l} \right)^4 \cdot EI_i$$

e

$$m_{ij} \cdot \text{sen} \frac{j\pi x}{l} = \theta_{ij} \cdot \text{sen} \frac{j\pi x}{l} \left( \frac{j\pi}{l} \right)^2 \cdot GI_{ti}$$

ou

$$p_{ij} = k_{f_{ij}} \cdot y_{ij} \quad \text{e} \quad m_{ij} = k_{t_{ij}} \cdot \theta_{ij}$$

$$\text{com} \quad k_{f_{ij}} = \left( \frac{j\pi}{l} \right)^4 EI_i \quad \text{e} \quad k_{t_{ij}} = \left( \frac{j\pi}{l} \right)^2 GI_{ti}$$

Assim, para cada termo j da série, o problema de distribuição transversal se reduz a calcular a faixa unitária de laje esquematizada na figura 113.

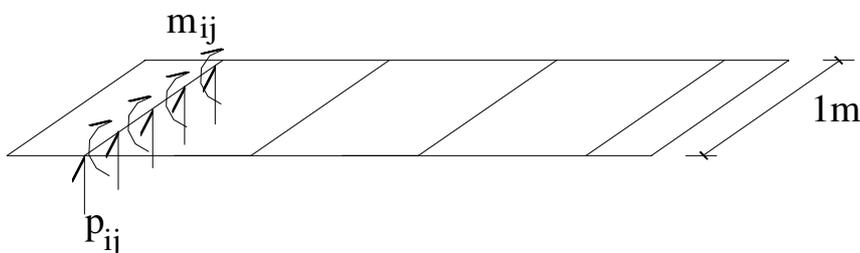


Figura 113 – Faixa unitária.

$$p_{ij} = k_{f_{ij}} \cdot y_{ij} \quad m_{ij} = k_{t_{ij}} \cdot \theta_{ij}$$

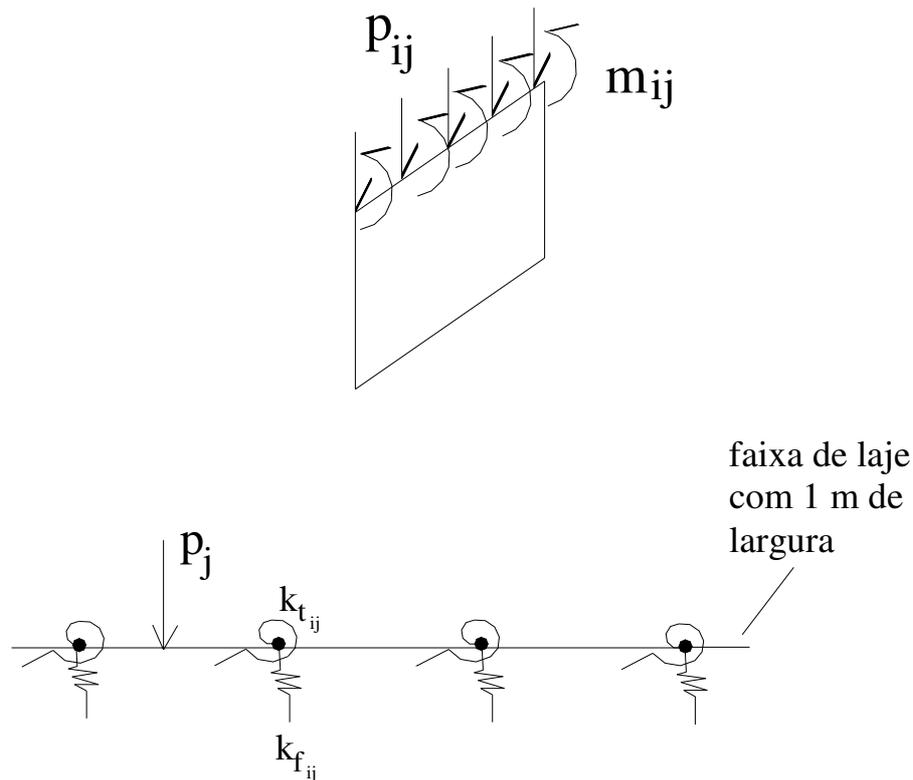


Figura 114 – Esquema estrutural transversal para uma faixa unitária.

Essa faixa deve ser carregada com o termo  $j$  do desenvolvimento da série Fourier da carga externa  $p$  ( $p_j$ ).

Transformamos assim nosso problema bidimensional em uma série de unidimensionais. Ocorre que usualmente o 1º termo da série já é suficiente e temos apenas um problema unidimensional como o acima, com  $j=1$ . Sua solução é obtida com facilidade pelo processo dos deslocamentos bastando dispor de uma calculadora programável (são 8 graus de liberdade, 4 vigas com um  $\theta$  e um  $\delta$  para cada uma).

Observações complementares:

1. Imaginando a ponte em questão como uma peça única de seção aberta com 4 nervuras a solução de Fauchart considera flexão do conjunto ( $\delta$  cte), a torção uniforme e a flexo-torção ( $\theta$  cte) e a deformação da seção transversal ou “distorção” representada por  $\theta$  não constante e  $\delta$  variável não linearmente. A figura 115 ilustra esses fatos.

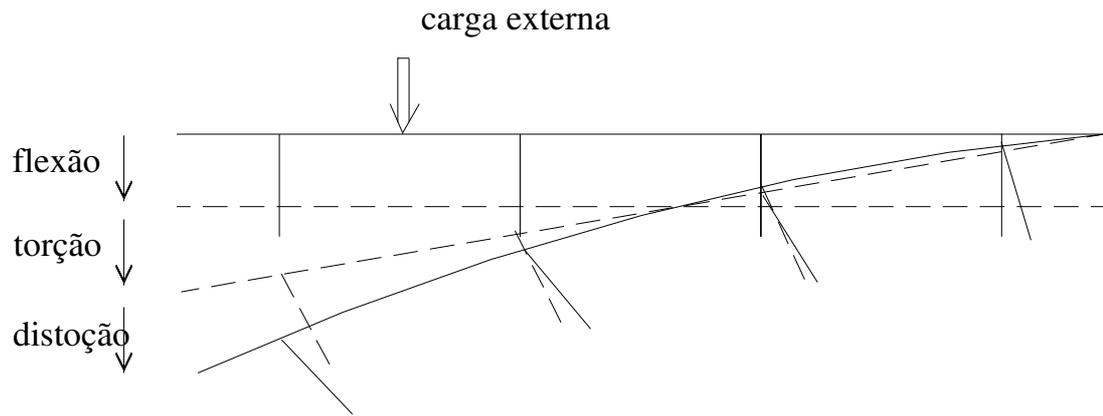


Figura 115 – Deformação de uma seção transversal pelo processo de Fauchart.

2. Para obter as linhas de influência que definem as cargas nas vigas ( $p_i$  - flexão da viga e  $m_i$  - torção da mesma) bem como as solicitações mais importantes na laje de ligação basta resolver a viga sobre apoios elásticos, num programa conveniente, para uma série de posições de uma carga unitária. É importante considerar pelo menos uma posição para cada viga e cada seção considerada relevante. Costuma-se dizer que basta “passear com a carga unitária sobre a estrutura” anotando para cada posição os esforços de interesse.

3. Para determinação dos trens tipo nas vigas (isto é do carregamento em cada viga) deveríamos carregar as linhas de influência para  $p_i$  e  $m_i$  com o primeiro termo do desenvolvimento em série das cargas externas. Verifica-se que é mais fácil e preciso carregá-las com as cargas reais. Isso equivale a dizer que:

$$p_{i1} = k_{f_{i1}} \cdot y_{i1} \quad \Rightarrow \quad p_i = k_{f_{i1}} \cdot y_i$$

$$m_{i1} = k_{t_{i1}} \cdot \theta_{i1} \quad \Rightarrow \quad m_i = k_{t_{i1}} \cdot \theta_i$$

Usamos assim as séries de Fourier apenas para definir a rigidez com que as vigas vinculam as lajes de ligação. Para carregamentos usamos a sua forma real.

4. É conveniente observar que se for desprezada a torção uniforme ( $It_i=0$ ) e for admitida infinita a rigidez da laje de ligação (simulando transversina rígida) o processo do Fauchart se reduz ao do Courbon. Assim Courbon é um caso particular do Fauchart.

## 5. Extensão da solução às grelhas com transversinas flexíveis.

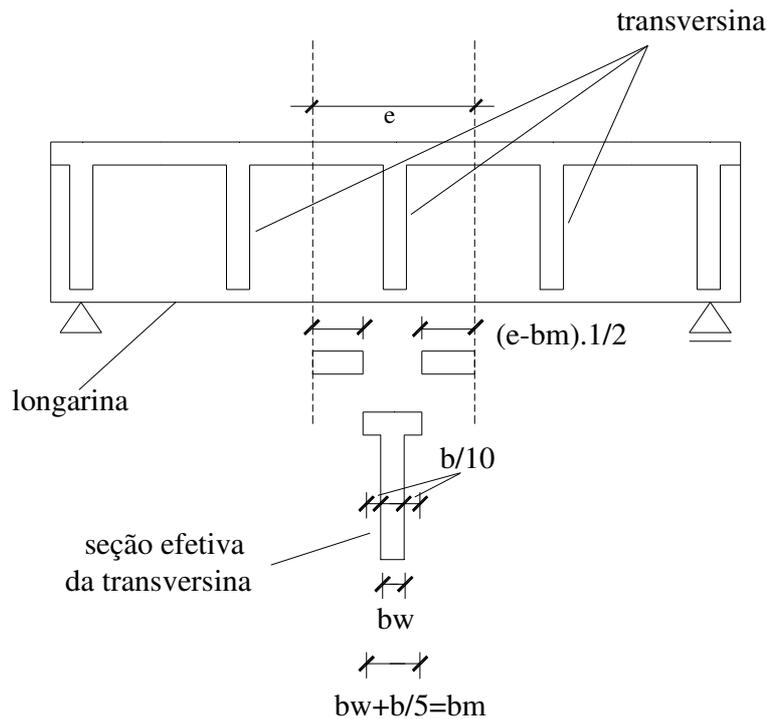


Figura 116 – Ponte em grelha com transversinas flexíveis.

Basta, para tal, definir uma laje de rigidez equivalente ao conjunto laje+transversinas:

$$I_{laje.equiv} = \frac{I_{transv} + I_{laje}(e - b_m)}{e}$$

## 6. Extensão da solução às grelhas contínuas.

Basta, para tal, adotar para  $l$  um vão biapoiado equivalente, isto é, que apresente a mesma flecha que um determinado vão da obra real, para um mesmo carregamento considerado representativo. A carga uniforme é considerada usualmente aceita para esse fim.

## 7. Esforços na laje do tabuleiro.

### 7.1. Caso em que existem transversinas.

Calculam-se as lajes como engastadas nas vigas. Um bom procedimento é usar as tabelas de Rüsç (ver aulas de projetos).

## 7.2. Caso em que não existem transversinas intermediárias.

Calculam-se as lajes por superposição de efeitos conforme sugere a figura 117:

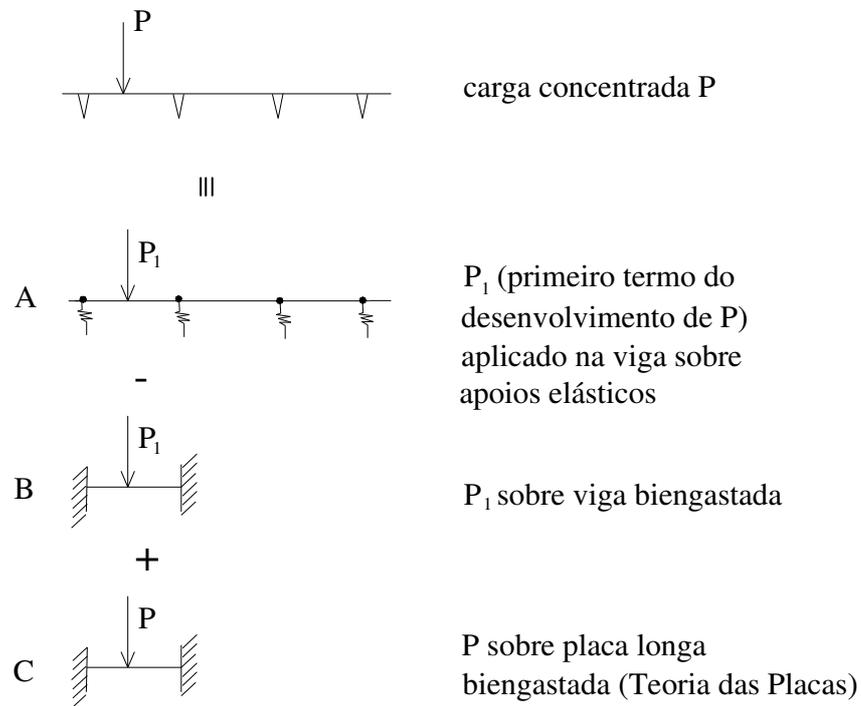


Figura 117 – Superposição de efeitos para cargas na laje.

Para melhor entender essa superposição é conveniente dividir as solicitações na laje em 2 partes:

- local - que decorre do trabalho do painel da laje carregado e engastado nas vigas que são admitidas indeslocáveis;
- global - que decorre apenas dos deslocamentos das vigas.

O primeiro termo da série ( $P_1$ ) pode representar bem  $P$  do ponto de vista global, mas não local.

Assim:

$$\begin{aligned} \text{Efeito } P &= \text{Efeito global} + \text{Efeito local} = \\ &= \text{Efeito } P_1 - \text{Efeito local } P_1 + \text{Efeito local } P = \\ &\quad \text{A} \quad \quad \quad \text{B} \quad \quad \quad \text{C} \end{aligned}$$

$$\text{Efeito Global } P_1 = P$$

O efeito local de  $P$  pode ser calculado com as superfícies de influência anteriormente apresentadas ou se  $P$  representar o trem tipo padrão, esse efeito pode ser em geral calculado com as tabelas de Rüsç.

#### 2.4.3.5. Pontes celulares

As pontes celulares têm sido cada vez mais utilizadas função das grandes qualidades estruturais das serves celulares (boa rigidez e resistência à torção e flexão, seja para momentos positivos, seja para negativos) e do progresso dos métodos construtivos. Essas seções são preferencialmente unicelulares por economia de materiais e de mão de obra. Só se justifica o uso de seções multicelulares em obras exageradamente largas, sobretudo aquelas em que a largura é bem superior à metade do vão.

Devido à essas qualidades estruturais essas pontes são calculadas como vigas únicas. Esse cálculo requer, no entanto, algumas complementações em relação à Resistência dos Materiais usual.

##### 2.4.3.5.1. Seções unicelulares

Considere-se uma ponte unicelular biapoiada sob carga excêntrica como representado na figura 118.

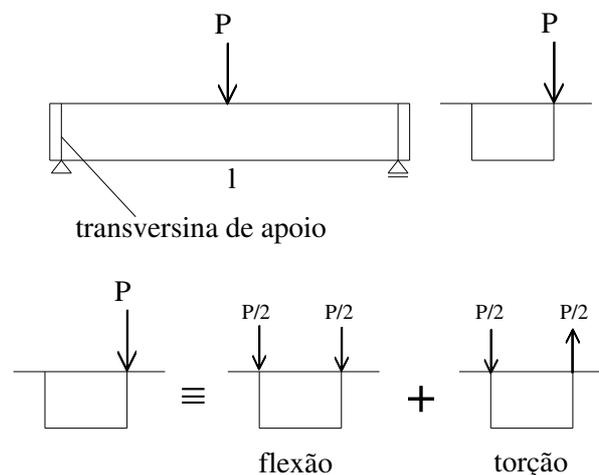


Figura 118 – Seção celular submetida à carga na alma direita.

#### A. Estudo da flexão

As tensões normais  $s$  podem ser calculadas pela expressão usual da Resistência dos Materiais exigindo-se, sem dúvida, a determinação dos eixos centrais de inércia. Como no caso

usual as seções são simétricas, essa determinação é imediata.

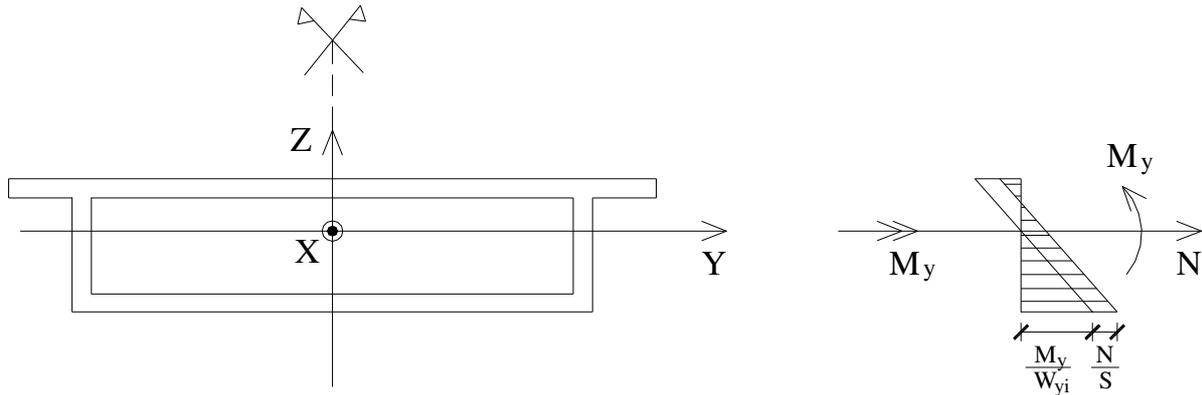


Figura 119 – Tensões normais ao longo da altura da seção celular.

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad \text{No caso acima, } N = 0.$$

O cálculo das tensões de cisalhamento requer alguma discussão. A expressão usual da Resistência dos Materiais vem do equilíbrio de um “naco” de viga na direção do eixo x. Ela só pode, no entanto, ser aplicada se for conhecido o valor de  $\tau$  em alguns pontos de partida.

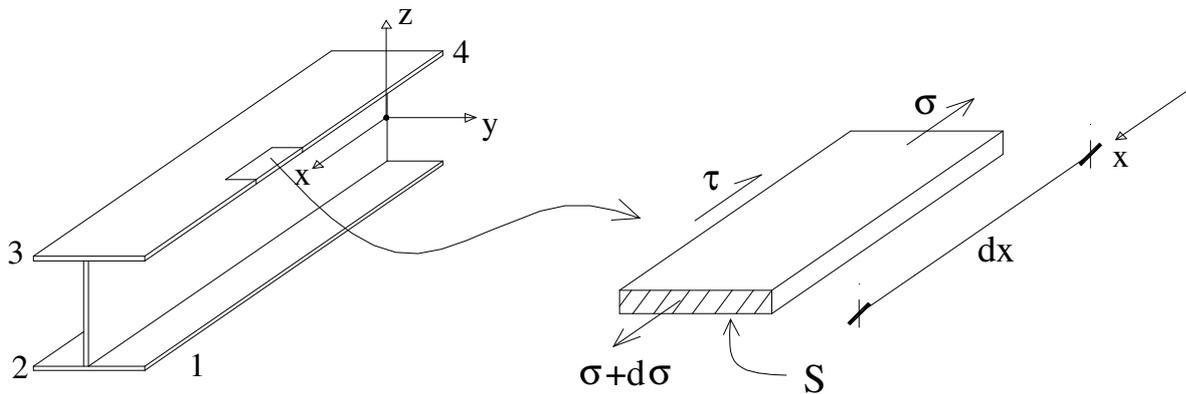


Figura 120 – Equilíbrio, na direção x, de um elemento infinitesimal.

$$\tau \cdot e \cdot dx = \int_{\bar{S}} d\sigma \cdot d\bar{S} = \int_{\bar{S}} \frac{dM_y}{I_y} \cdot z \cdot d\bar{S} = \frac{dM_y}{I_y} \cdot \int_{\bar{S}} z \cdot d\bar{S} = \frac{dM_y}{I_y} \cdot M_{\bar{S}}$$

$$\tau = \frac{V_z M_{\bar{S}}}{e \cdot I_y}$$

Nas seções abertas (como o perfil I acima) esse pontos são as extremidades da seção delgada onde  $\tau=0$  (faces laterais 1, 2, 3, 4). Nas seções fechadas a dificuldade está em determinar esses pontos.

Caso 1 - Seções Simétricas

Por necessidade da simetria das tensões de cisalhamento (bem como forças cortantes e momentos de torção) são nulas nos eixos de simetria. De fato:

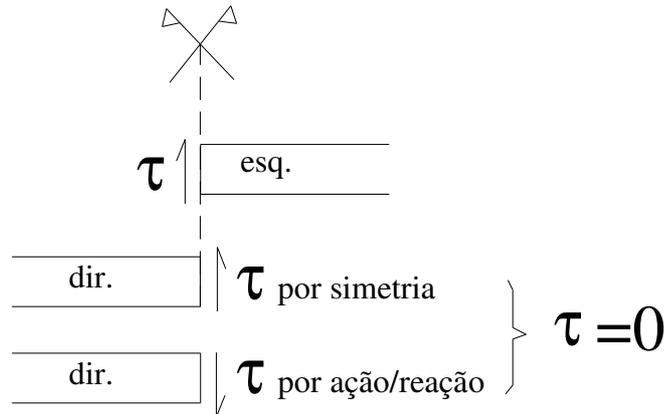


Figura 121 – Tensão de cisalhamento no eixo de simetria da seção celular.

Assim, nas seções simétricas os pontos de partida estão no eixo de simetria.

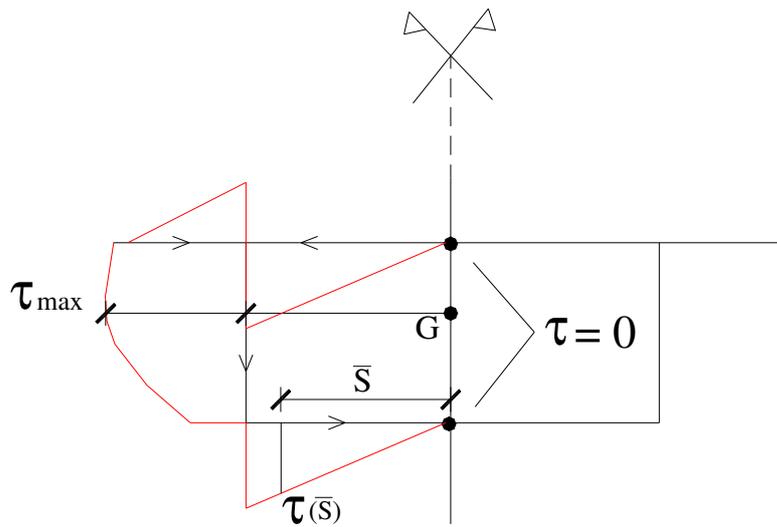


Figura 122 – Tensões de cisalhamento em uma seção celular simétrica.

Caso 2 - Seções Assimétricas

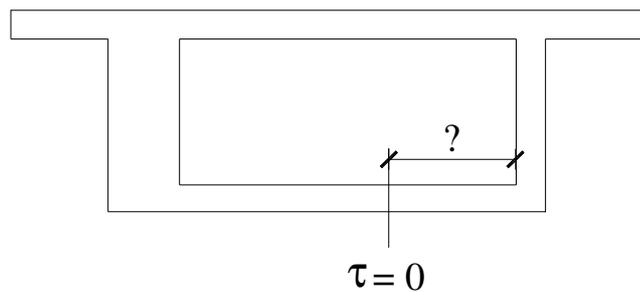


Figura 123 – Seção celular assimétrica.

Onde está o ponto de partida onde  $\tau = 0$  ? Não se sabe a priori!

Na verdade o problema de seções fechadas é internamente hiperestático. Seções unicelulares são uma vez hiperestáticas. Uma boa maneira de levantar essa indeterminação é usar o processo dos esforços. A estrutura fechada hiperestática é tornada aberta e isostática através de um corte longitudinal feito a priori. A essa estrutura aberta é possível aplicar a expressão anteriormente descrita.

A compatibilidade é somente recuperada se no corte forem introduzidos esforços hiperestáticos de valor conveniente. Assim:

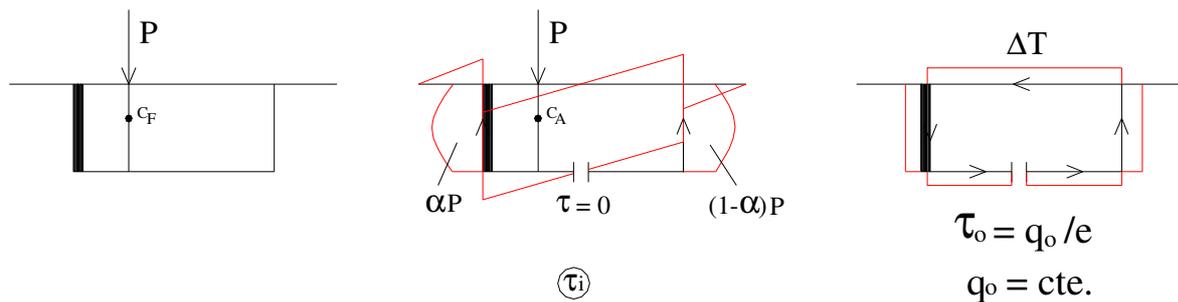


Figura 124 – Corte longitudinal arbitrário e introdução de esforços que mantêm a compatibilidade.

A solução da flexão da seção assimétrica sob carga  $P$  passando pelo seu centro de torção  $C_F$  é obtida pela superposição da solução da seção aberta (onde  $P$  passa pelo centro de torção da mesma  $C_A$  e provoca as tensões  $\tau_i$ ) e do fluxo de torção  $q_0$ , que provoca tensões  $\tau_0 = q_0/e$ , decorrente da torção  $\Delta T$  dada por  $P$  vezes a distância entre  $C_A$  e  $C_F$  na direção  $y$ . Assim:

$$\tau_i = \frac{V_z M_{\bar{S}}}{e I_y}$$

Mas como calcular  $\tau_0$ ?

É preciso obter uma equação de compatibilidade!

Observe-se a deformação da seção aberta.

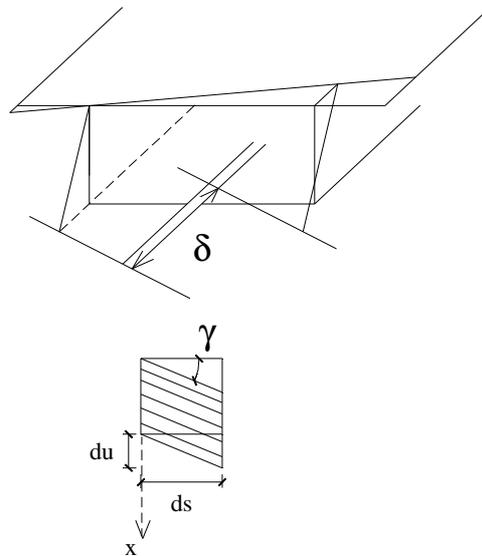


Figura 125 – Deformação da seção aberta.

As faces do corte se deslocariam de  $d$  uma em relação à outra função da deformação por cisalhamento  $\gamma$ .

$$\gamma \cong \operatorname{tg} \gamma = \frac{du}{ds} = \frac{\tau}{G}$$

$$\delta = \oint du = \oint \gamma \cdot ds$$

Deve-se calcular  $\tau_0$  tal que  $\delta = 0$

Como  $\gamma = \tau/G$  e  $G \neq 0$

$$\delta = \oint \gamma \cdot ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \tau ds = 0 \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\oint (\tau_i + \tau_0) \cdot ds = 0}$$

Essa equação permite calcular  $\tau_0$ .

Conhecida  $\tau_0$  conhece-se também a vertical que passa por CF. Para determinar a posição desse centro deveríamos estudar ainda o caso de uma força horizontal.

Convém lembrar que para as seções simétricas usuais, embora  $G$  não coincida com  $C_F$  é habitual e aceitável admitir  $C_F \equiv G$ .

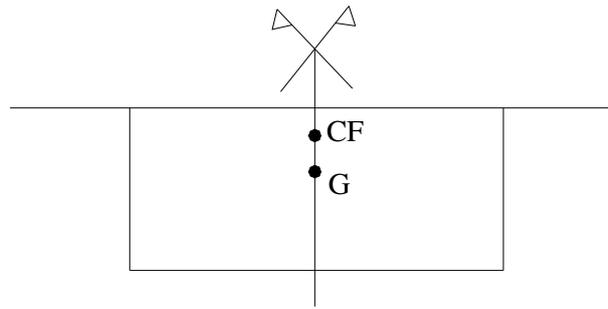


Figura 126 – Centro de gravidade e de torção de uma seção celular simétrica.

$C_F \neq G$  mas  $C_F \approx G$ .

B. Estudo da torção

Como visto anteriormente, a tração de seções unicelulares fica resolvida por:

$$T = 2.A.q \quad \text{onde:} \quad q = \tau.e = cte$$

$A =$  área interna à linha média da célula

$$I_t = \frac{4.A^4}{\oint \frac{ds}{e}} \quad \text{e} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{GI_t}$$

#### 2.4.3.5.2. Seções multicelulares

A análise dessas seções se faz analogamente às unicelulares. Seja a seção tri-celular da figura 127:

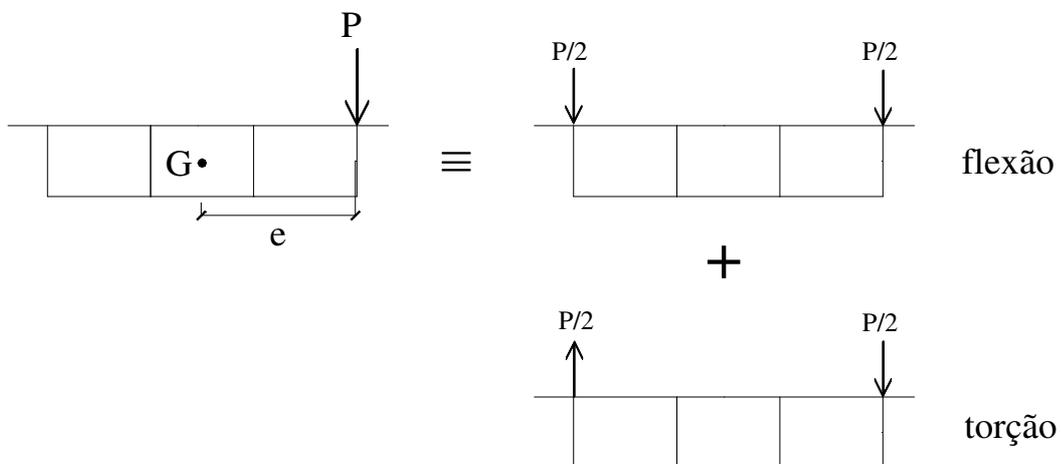


Figura 127 – Seção tri-celular submetida à carga na alma direita.

## A. Flexão

Só em relação às tensões  $\tau$  são necessários comentários adicionais. De fato, mesmo sendo a seção simétrica o problema permanece indeterminado estaticamente. São 3 células portanto 3 graus de indeterminação. Por simetria essas 3 incógnitas se transformam em apenas uma.

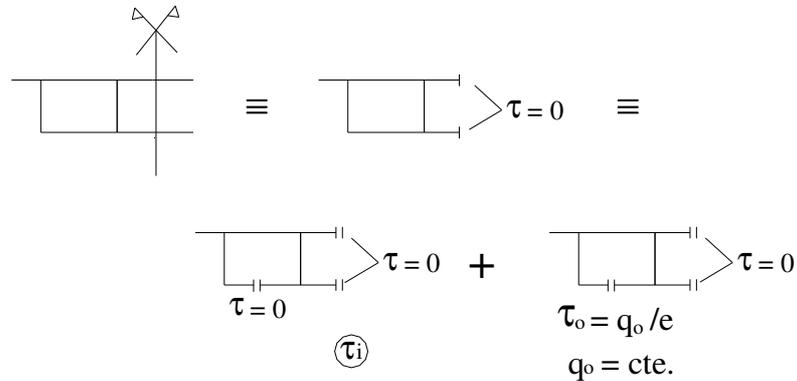


Figura 128 – Esquema estrutural transversal considerando a simetria.

A única incógnita hiperestática  $\tau_0$  se calcula através da equação de compatibilidade:

$$\oint (\tau_i + \tau_0).ds = 0$$

analogamente à seção unicelular assimétrica.

## B. Torção

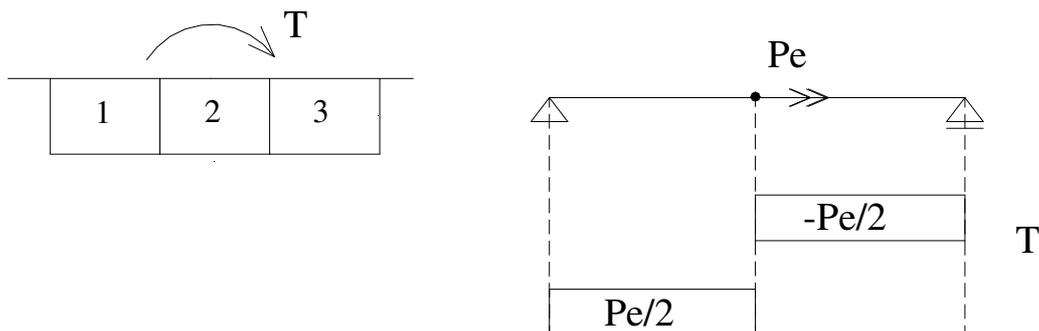


Figura 129 Viga tri-celular submetida à torção.

Aqui, também a torção corresponde a um problema hiperestático, só que com grau de indeterminação 2. De fato:

Da torção total  $T$ , cada célula suporta uma parcela Total que:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad - 3 \text{ incógnitas para 1 equação}$$

É preciso obter 2 equações de compatibilidade. Elas são:

$$\theta_1 = \theta_2 \quad \text{e} \quad \theta_1 = \theta_3$$

É importante, no entanto, tomar cuidado para calcular corretamente  $T_i$  e  $\theta_i$ .

Cada célula ficará submetida a um fluxo de torção  $q_i$  tal que:

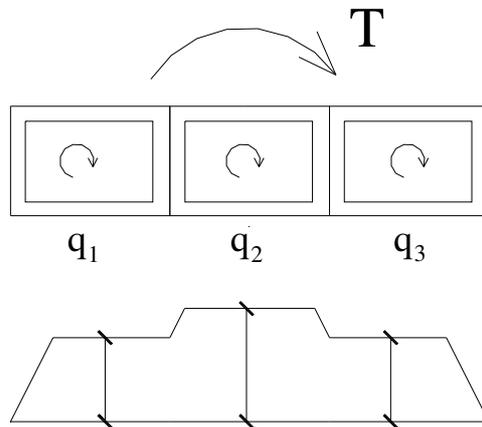


Figura 130 – Fluxo de torção.

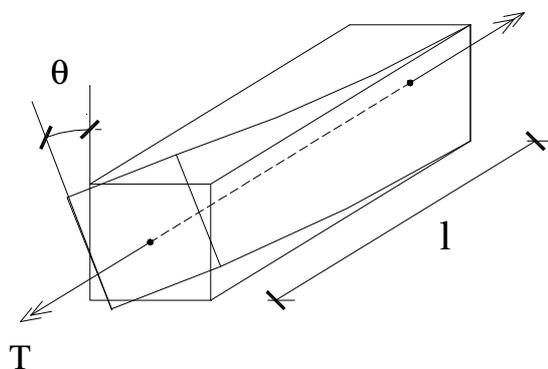
Do capítulo de torção tem-se que:

$$T = \sum q_i \oint b_i ds = \sum 2A_i q_i \quad (T_i = 2A_i q_i)$$

por superposição das solicitações nas três células.

Para calcular a rotação  $q_i$  é preciso considerar que o fluxo  $q_i$  não é constante em todo contorno. Para isso é preciso estudar com cuidado as deformações por torção de uma seção celular.

Seja uma barra de seção vazada solicitada à torção uniforme como mostra a figura 131.



Conciderando os Teoremas de energia de deformação temos que:

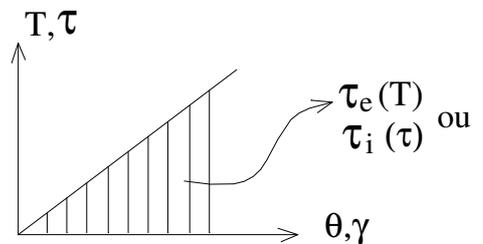


Figura 131 – Barra de seção vazada solicitada à torção uniforme.

$$\tau_e \text{ (trabalho externo)} = 1/2 T.\theta$$

$\tau_i$  (trabalho interno) =  $1/2 \tau \cdot \gamma$  (elementar!)

$$\tau_e = \int \tau_i dv$$

$$\frac{1}{2} T \theta = \oint \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma \cdot e \cdot l \cdot ds$$

$$\frac{1}{2} T \frac{\theta}{l} = A \cdot q \cdot \theta'$$

$$\oint \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma \cdot e \cdot ds = \frac{1}{2G} \oint \tau^2 e \cdot ds = \frac{q}{2G} \oint \tau \cdot ds$$

$$A \cdot q \cdot \theta' = \frac{q}{2G} \oint \tau \cdot ds \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot A \cdot G \cdot \theta' = \oint \tau \cdot ds$$

Essa expressão permite calcular as rotações elementares  $\theta'$  considerando que  $q$  não é constante em todo contorno.

Voltando ao problema da seção tricelular, considerando a simetria temos que  $q_1 = q_3$  e  $\theta_1' = \theta_3'$  o que reduz o número de incógnitas a 2. Assim:

$$\begin{cases} T = 4 \cdot A_1 \cdot q_1 + 2 \cdot A_2 \cdot q_2 \\ \theta_1' = \theta_2' = \frac{\oint \tau_1 \cdot ds}{2 \cdot A_1 \cdot G} = \frac{\oint \tau_2 \cdot ds}{2 \cdot A_2 \cdot G} \end{cases}$$

Notar que  $\tau_1 = q_1/e$  apenas em 3 lados da célula 1. No 4º lado  $\tau_1 = (q_1 - q_2)/e$ .

Analogamente para a célula 2.

Observação: A expressão acima indicada para cálculo de  $\theta'$  permite demonstrar a expressão do momento de inércia de uma seção unicelular. De fato:

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{G \cdot I_t} = \frac{\oint \tau \cdot ds}{2 \cdot A \cdot G} = \frac{q \oint \frac{ds}{e}}{2 \cdot A \cdot G} =$$

$$= \frac{2 \cdot A \cdot q}{G \cdot \frac{4 \cdot A^2}{\oint \frac{ds}{e}}} = \frac{T}{G \cdot \frac{4 \cdot A^2}{\oint \frac{ds}{e}}}$$

$$\therefore \boxed{I_t = \frac{4 \cdot A^2}{\oint \frac{ds}{e}}}$$

### 5.3. Problemas de deformação da seção transversal - Distorção

Tudo o que foi descrito até aqui prevê que as seções celulares tenham seção transversal indeformável. Isso nem sempre é verdade.

Para que a seção seja efetivamente indeformável é preciso prever transversinas não muito espaçadas. Para as obras usuais esse espaçamento deve ser da ordem de 10m.

De forma a melhor visualizar essa questão retomemos a ponte unicelular sob carga excêntrica apresentada no item 2.4.3.5.1., reanalisando os esquemas de carregamento em seção transversal. Merece reconsideração especial o carregamento de torção.

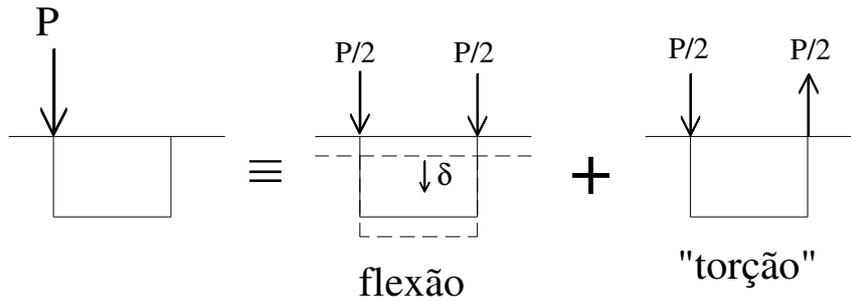


Figura 132 – Seção unicelular submetida à carga excêntrica.

O carregamento indicado como sendo de “torção” não é, na verdade, da forma em que a seção unicelular suporta a seção, isto é, através de esforços na direção de suas 4 paredes. Assim o carregamento de “torção” contém além de torção, mais algum efeito, vejamos qual é:

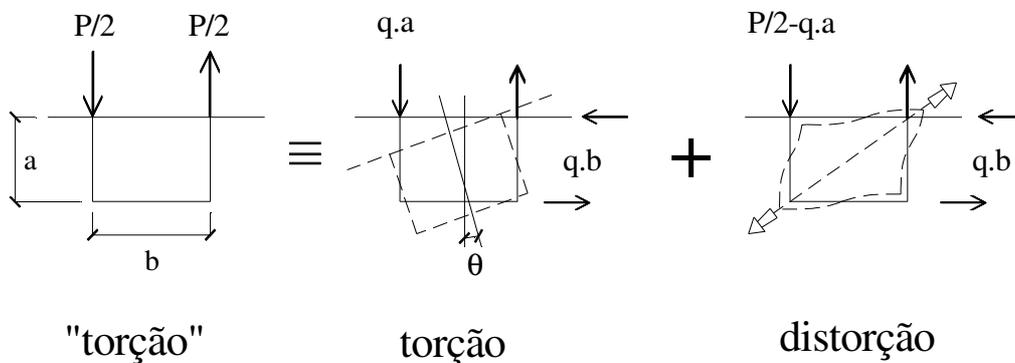
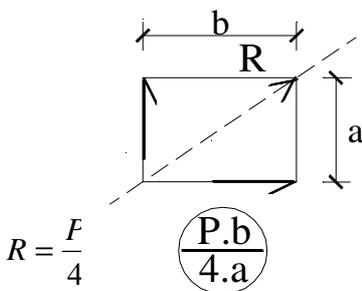


Figura 133 – Carregamento de “torção” decomposto em duas parcelas: torção e distorção.



$$q = \frac{T}{2.A} = \frac{P.b/2}{2.a.b} = \frac{P}{4.a}$$

$$\frac{P}{2} - \frac{P.a}{4.a} = \frac{P}{4}$$

Assim, aquele carregamento que parecia de torção contém além disso um carregamento equilibrado (de resultante nula) chamado de carregamento de distorção.

Esse carregamento corresponde a duas forças de mesmo módulo e direção, mas sentidos inversos, que tendem a afastar dois vértices opostos da célula, isto é, tendem a distorcê-las.

A transversina é um elemento especialmente imaginado para impedir essa distorção. Se as transversinas forem convenientemente espaçadas, a região entre elas fica protegida pelas próprias paredes da seção função de sua grande rigidez à flexão no seu plano.

Se a obra não dispuser de transversinas esse carregamento deve ser suportado pelo quadro transversal, onde as paredes da seção fletam como placas.

Em qualquer um dos casos é importante, no entanto calcular esse quadro transversal.

Esquema para cálculo do quadro transversal.

Consideremos um quadro correspondente a um pedaço da ponte com 1m de comprimento.

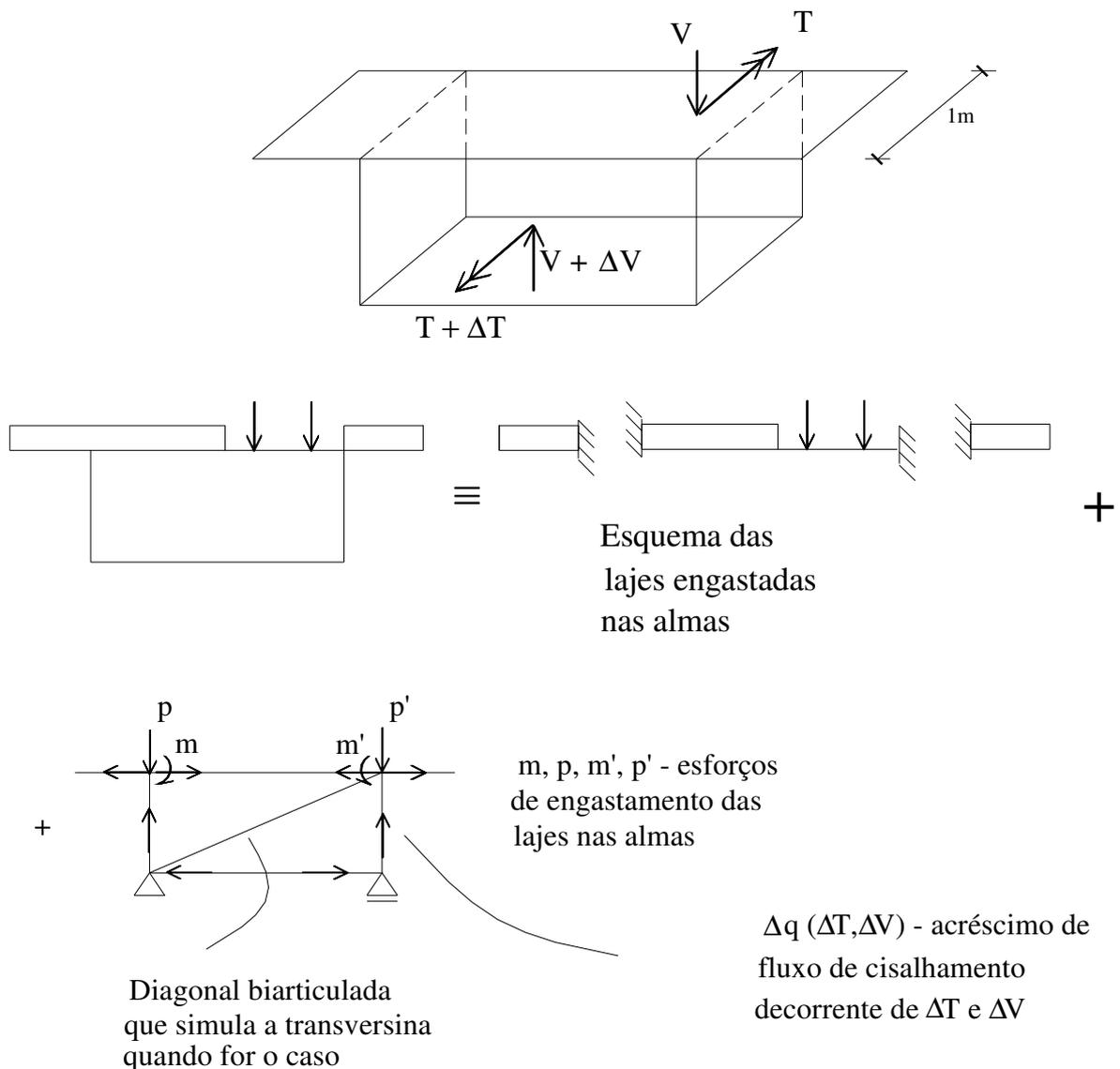


Figura 134 – Esquema para cálculo do quadro transversal.