1^a) Lista de Exercícios, Introdução à teoria dos números. Revisão de Àlgebra 1.

1. Questão:

   Em cada um dos ítens abaixo diga se a afirmação é verdadeira ou dê um contra exemplo se for falsa.

   1. Se a e b são números inteiros e d é maior que zero e além disso existem x e y inteiros tais que $xa + yb = d$ então $d = mdc(a, b)$
   2. O sistema de equações
      $x \equiv a\ (b_1)$
      $x \equiv c\ (b_2)$
      tem solução sempre, que é única módulo $b_1 \times b_2$.
   3. Sejam a, b dois números inteiros vale a seguinte igualdade de conjuntos.
      $\{c \in \mathbf{Z} : c = ax + by,$ para algum par de números inteiros $(x, y)\} = \{c \in Z : \mathbf{mdc}(a, b)$ divide $c\}$
   4. 107 divide $59^{106} - 1$
   5. Todo conjunto de números racionais positivos tem um menor elemento.

2. Questão:

   A Teoria do Biorritmo diz que os estados físicos, mental e emocional de uma pessoa oscilam periodicamente, a partir do dia do nascimento, em ciclos de 23 dias, 29 dias e 33 dias, respectivamente. . Dado que os dias mais positivos dos ciclos físico, mental e emocional são, respectivamente, o sexto, o sétimo e o oitavo de cada ciclo, nos primeiros dez anos de vida de uma pessoa, quantas vezes esses três ciclos estão simultaneamente no ponto máximo?

3. Quuestão

   Chamamos ideal de $\mathbf{Z}$ a um subconjunto I de $\mathbf{Z}$ tal que:

   (a) $0 \in I$
   (b) I é fechado para a soma.
   (c) Se $x \in I$ e $y \in \mathbf{Z}$ então $xy \in I$

   Mostre que para todo ideal I de $\mathbf{Z}$ existe um número a em I tal que $I = \{ta : t \in \mathbf{Z}\}$.
   Sugestão:Se $I \neq \{0\}$ considere o menor elemento positivo de I.

4. Questão:

   Mostre que o conjunto dos inteiros que são primos é infinito.

5. Questão:

   Mostre que todo número racional tem exatamente um representante, (isto é um elemento na classe de equivalência que o define), da forma $\frac{a}{b}$ tal que $b > 0$ com a e b primos entre si.

6. a) Questão:

   Seja $\phi : \mathbf{N}*to\mathbf{N}?*$ a função de Euler. (Lembre que esta função associa a cada inteiro positivo n o número de inteiros positivos primos com n e menores que n)

   (a) Seja p un número primo , $r > 0$ inteiro mostre que $\phi(p^r) = p^{r-1}(p - 1)$.
   (b) Mostre que se m e n são inteiros maiores que zero que são primos entre si, então $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.
   (c) Prove que se $m = p_1^{r_1} \ldots . p_t^{r_t}$ é a decomposição de m em fatores primos então $\phi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1}) \ldots . (1 - \frac{1}{p_r})$

7. a) Questão:

   Seja b um inteiro maior que 1, cuja expressão na base 10 é

   $$b = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + r_1 10 + r_0$$

   Prove que:

(a) $3|b$ se e só se $3|(r_0 + r_1 + \cdots r_n)$.

(b) $5|b$ se e só se $5|r_0$.

(c) $6|b$ se e só se $3|(r_0 + r_1 + \cdots r_n)$ e $2|r_0$.

8. a) Questão:

- Determinar todos os inteiros tais que $\frac{n+17}{n-4}$ seja o quadrado de um número racional.
- Determinar os restos da divisão de :

  i) $2^{44} - 1$ por 89.

  ii) 2^{11} por 23.