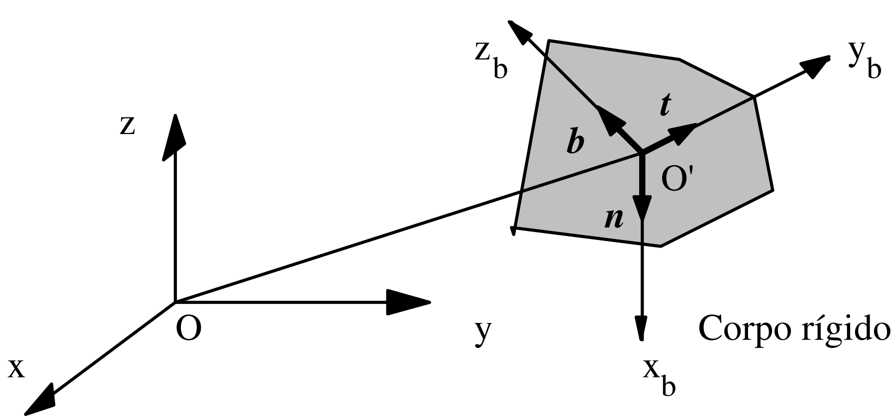
TRANSFORMAÇÃO HOMOGÊNEA

1) INTRODUÇÃO

TRANSFORMAÇÃO HOMOGÊNEA: MÉTODO PRÁTICO E COMPACTO DE SE DEFINIR UMA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

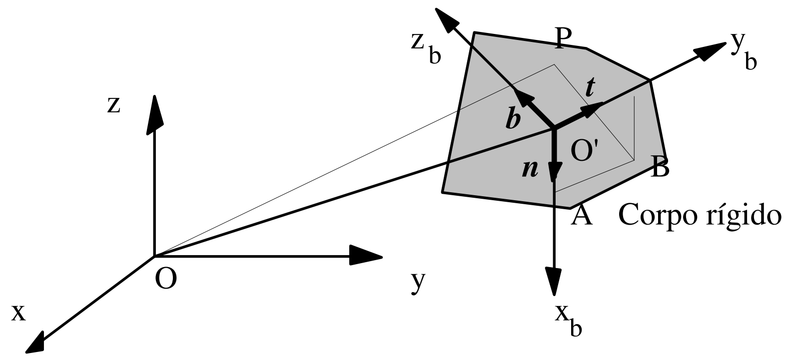
POSIÇÃO E ORIENTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO:

O MANIPULADOR PODE SER MODELADO COMO UM SISTEMA DE CORPOS RÍGIDOS CUJA LOCALIZAÇÃO É COMPLETAMENTE DESCRITA POR SUAS POSIÇÕES E ORIENTAÇÕES



$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \ \ e \ \ \vec{n}, \vec{t}, \vec{b} \ \ \textit{são sistemas ortonormais e positivos}$$

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS



$$\vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} x^P \\ y^P \\ z^P \end{bmatrix}, \mathbf{O\text{-}x, y, z} \qquad \vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} x_b^P \\ y_b^P \\ z_b^P \end{bmatrix}, \mathbf{O - x_b, y_b, z_b},$$

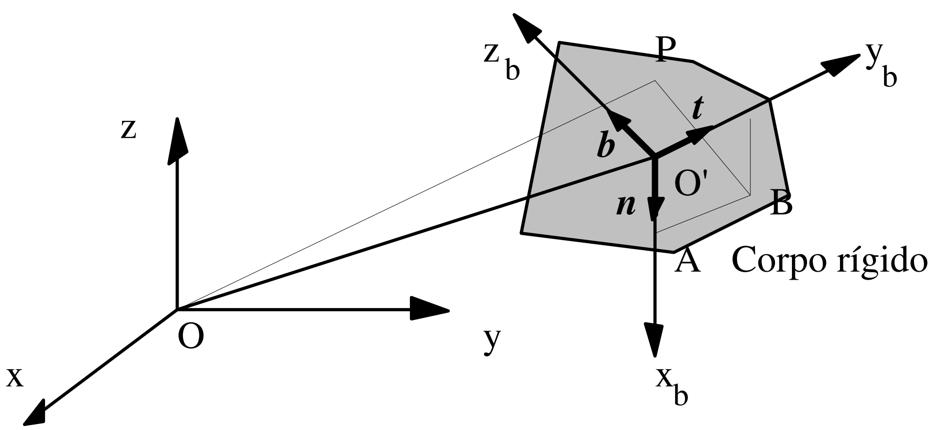
$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OO'}} + \overrightarrow{\mathbf{O'A}} + \overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BP}} = \vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{O'}} + x_b\vec{\mathbf{n}} + y_b\vec{\mathbf{t}} + z_b\vec{\mathbf{b}}$$

$$\vec{\mathbf{n}} = cos(\vec{\mathbf{n}}, x)\vec{\mathbf{i}} + cos(\vec{\mathbf{n}}, y)\vec{\mathbf{j}} + cos(\vec{\mathbf{n}}, z)\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{t}} = cos(\vec{\mathbf{t}}, x)\vec{\mathbf{i}} + cos(\vec{\mathbf{t}}, y)\vec{\mathbf{j}} + cos(\vec{\mathbf{t}}, z)\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{b}} = cos(\vec{\mathbf{b}}, x)\vec{\mathbf{i}} + cos(\vec{\mathbf{b}}, y)\vec{\mathbf{j}} + cos(\vec{\mathbf{b}}, z)\vec{\mathbf{k}}$$

$$\textbf{ou seja,}\ \vec{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} cos(\vec{\mathbf{n}}, x) \\ cos(\vec{\mathbf{n}}, y) \\ cos(\vec{\mathbf{n}}, z) \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} cos(\vec{\mathbf{t}}, x) \\ cos(\vec{\mathbf{t}}, y) \\ cos(\vec{\mathbf{t}}, z) \end{bmatrix} \mathbf{e}\ \vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} cos(\vec{\mathbf{b}}, x) \\ cos(\vec{\mathbf{b}}, y) \\ cos(\vec{\mathbf{b}}, z) \end{bmatrix}$$



DEFINIMOS:

$$\mathbf{R} = \left[\vec{\mathbf{n}}, \quad \vec{\mathbf{t}}, \quad \vec{\mathbf{b}}\right] \text{ -----> } \textbf{MATRIZ DE ROTAÇÃO}$$

PORTANTO:

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{O'}} + x_b\vec{\mathbf{n}} + y_b\vec{\mathbf{t}} + z_b\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{O'}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{b}}$$

NOTE QUE:

$$\text{SENDO} \quad \vec{X}_P = \vec{X}_{O'} + R\vec{X}_P^b$$

$$\Rightarrow \vec{X}_P^b = -R^{-1}\vec{X}_{O'} + R^{-1}\vec{X}_P$$

OU:

$$\vec{X}_P^b = -R^T\vec{X}_{O'} + R^T\vec{X}_P$$

POIS, R é ORTOGONAL

JÁ QUE:

$$RR^T = \begin{bmatrix} cos(\vec{n},x) & cos(\vec{t},x) & cos(\vec{b},x) \\ cos(\vec{n},y) & cos(\vec{t},y) & cos(\vec{b},y) \\ cos(\vec{n},z) & cos(\vec{t},z) & cos(\vec{b},z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\vec{n},x) & cos(\vec{n},y) & cos(\vec{n},z) \\ cos(\vec{t},x) & cos(\vec{t},y) & cos(\vec{t},z) \\ cos(\vec{b},x) & cos(\vec{b},y) & cos(\vec{b},z) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{i}.\vec{n} & \vec{i}.\vec{t} & \vec{i}.\vec{b} \\ \vec{j}.\vec{n} & \vec{j}.\vec{t} & \vec{j}.\vec{b} \\ \vec{k}.\vec{n} & \vec{k}.\vec{t} & \vec{k}.\vec{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}.\vec{n} & \vec{j}.\vec{n} & \vec{k}.\vec{n} \\ \vec{i}.\vec{t} & \vec{j}.\vec{t} & \vec{k}.\vec{t} \\ \vec{i}.\vec{b} & \vec{j}.\vec{b} & \vec{k}.\vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) IDÉIA:

$$\vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{O'}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{b}} \quad \textbf{(1)}$$

REPRESENTAR O MOVIMENTO DE UM CORPO RÍGIDO (TRANSLAÇÃO + ROTAÇÃO) EM 3D NO $\mathbf{R}^4$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) DEFINIÇÃO:

ESCREVENDO (1) NA FORMA MATRICIAL:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{X_{O'}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \\ 1 \end{bmatrix}$$

OU SEJA:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r_{11}} & \boldsymbol{r_{12}} & \boldsymbol{r_{13}} & x_{\boldsymbol{O'}} \\ \boldsymbol{r_{21}} & \boldsymbol{r_{22}} & \boldsymbol{r_{23}} & y_{\boldsymbol{O'}} \\ \boldsymbol{r_{31}} & \boldsymbol{r_{32}} & \boldsymbol{r_{33}} & z_{\boldsymbol{O'}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \\ 1 \end{bmatrix}$$

4) COMPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS

$$O\text{ - }x, y, z \rightarrow O'\text{-}x_b\,, y_b\,, z_b \rightarrow O''\text{ - }x_c\,, y_c\,, z_c$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x_{O'} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y_{O'} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z_{O'} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} & x_{O''} \\ r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} & y_{O''} \\ r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} & z_{O''} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^c \\ y^c \\ z^c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}_P = A_0^1 \vec{X}_P^b \qquad \vec{X}_P^b = A_1^2 \vec{X}_P^c$$

$$\Rightarrow \vec{X}_P = A_0^1 A_1^2 \vec{X}_P^c$$

GENERALIZANDO:

$$\vec{X}_P = A_0^1 A_1^2 A_2^3 \ldots\ldots A_{n-1}^n \vec{X}_P^n$$

5) TRANSFORMAÇÃO INVERSA

USANDO O RESULTADO

$$\vec{X}_P^b = -R^T\vec{X}_{O'} + R^T\vec{X}_P$$

TEMOS:

$$\vec{X}_P^b = (A_0^1)^{-1}\vec{X}_P = A_1^0\vec{X}_P$$

ONDE:

$$(A_0^1)^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T X_{O'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$