2-TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS: PARÂMETROS DE REPRESENTAÇÃO

2.1 Cossenos Diretores e a Matriz de Rotação

Sejam dois sistemas cartesianos, um de referência, e outro fixo num corpo rígido, definidos pelos sistemas $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ e $(\vec{n},\vec{t},\vec{b})$, respectivamente, que são sistemas ortonormais positivos. Interessa-nos exprimir as coordenadas a relação entre os dois sistemas de coordenadas correspondentes (Fig. 2.1), ou seja, (x, y, z) e (x_b, y_b, z_b).

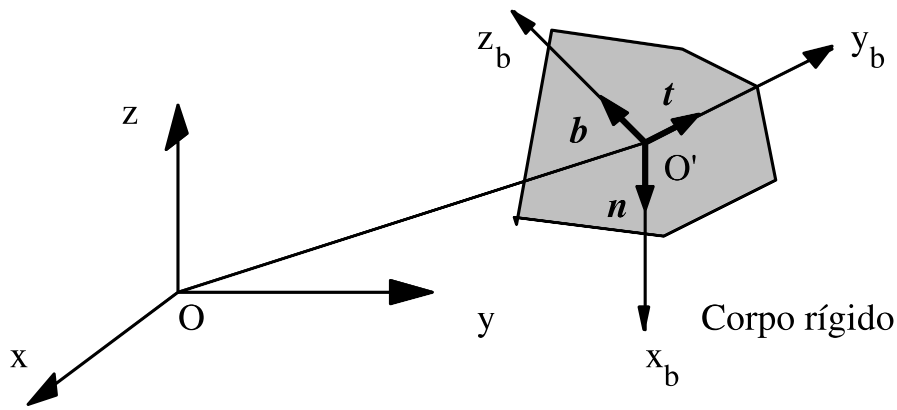


Figura 2.1. Relação entre 2 os sistemas "inercial" e fixo no corpo rígido.

Podemos expressar os versores do sistema fixo no corpo em função dos versores do sistema inercial:

$$\vec{\mathbf{n}} = \cos(\vec{\mathbf{n}}, x)\vec{\mathbf{i}} + \cos(\vec{\mathbf{n}}, y)\vec{\mathbf{j}} + \cos(\vec{\mathbf{n}}, z)\vec{\mathbf{k}}$$
$$\vec{\mathbf{t}} = \cos(\vec{\mathbf{t}}, x)\vec{\mathbf{i}} + \cos(\vec{\mathbf{t}}, y)\vec{\mathbf{j}} + \cos(\vec{\mathbf{t}}, z)\vec{\mathbf{k}}$$
$$\vec{\mathbf{b}} = \cos(\vec{\mathbf{b}}, x)\vec{\mathbf{i}} + \cos(\vec{\mathbf{b}}, y)\vec{\mathbf{j}} + \cos(\vec{\mathbf{b}}, z)\vec{\mathbf{k}}$$

Ou seja, na forma matricial, temos:

$$\vec{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{\mathbf{n}}, x) \\ \cos(\vec{\mathbf{n}}, y) \\ \cos(\vec{\mathbf{n}}, z) \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{\mathbf{t}}, x) \\ \cos(\vec{\mathbf{t}}, y) \\ \cos(\vec{\mathbf{t}}, z) \end{bmatrix} \text{ e } \vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{\mathbf{b}}, x) \\ \cos(\vec{\mathbf{b}}, y) \\ \cos(\vec{\mathbf{b}}, z) \end{bmatrix}$$

Cada um desses vetores é uma das colunas da matriz de rotação, que transforma as coordenadas medidas no sistema fixo no corpo, nas coordenadas do sistema de referência:

$$\mathbf{R} = \left[\vec{\mathbf{n}}, \quad \vec{\mathbf{t}}, \quad \vec{\mathbf{b}}\right]$$

Ou seja,

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\vec{\mathbf{n}}, x) & \cos(\vec{\mathbf{t}}, x) & \cos(\vec{\mathbf{b}}, x) \\ \cos(\vec{\mathbf{n}}, y) & \cos(\vec{\mathbf{t}}, y) & \cos(\vec{\mathbf{b}}, y) \\ \cos(\vec{\mathbf{n}}, z) & \cos(\vec{\mathbf{t}}, z) & \cos(\vec{\mathbf{b}}, z) \end{bmatrix}$$

Uma propriedade importante é a ortogonalidade da matriz de rotação:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{\mathbf{n}}, x) & \cos(\vec{\mathbf{t}}, x) & \cos(\vec{\mathbf{b}}, x) \\ \cos(\vec{\mathbf{n}}, y) & \cos(\vec{\mathbf{t}}, y) & \cos(\vec{\mathbf{b}}, y) \\ \cos(\vec{\mathbf{n}}, z) & \cos(\vec{\mathbf{t}}, z) & \cos(\vec{\mathbf{b}}, z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\vec{\mathbf{n}}, x) & \cos(\vec{\mathbf{n}}, y) & \cos(\vec{\mathbf{n}}, z) \\ \cos(\vec{\mathbf{t}}, x) & \cos(\vec{\mathbf{t}}, y) & \cos(\vec{\mathbf{t}}, z) \\ \cos(\vec{\mathbf{b}}, x) & \cos(\vec{\mathbf{b}}, y) & \cos(\vec{\mathbf{b}}, z) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}}.\vec{\mathbf{n}} & \vec{\mathbf{i}}.\vec{\mathbf{t}} & \vec{\mathbf{i}}.\vec{\mathbf{b}} \\ \vec{\mathbf{j}}.\vec{\mathbf{n}} & \vec{\mathbf{j}}.\vec{\mathbf{t}} & \vec{\mathbf{j}}.\vec{\mathbf{b}} \\ \vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{n}} & \vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{t}} & \vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}}.\vec{\mathbf{n}} & \vec{\mathbf{j}}.\vec{\mathbf{n}} & \vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{n}} \\ \vec{\mathbf{i}}.\vec{\mathbf{t}} & \vec{\mathbf{j}}.\vec{\mathbf{t}} & \vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{t}} \\ \vec{\mathbf{i}}.\vec{\mathbf{b}} & \vec{\mathbf{j}}.\vec{\mathbf{b}} & \vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Esse resultado nos mostra que, apesar de 9 parâmetros serem usados para relacionar os 2 sistemas de coordenadas, a ortogonalidade da matriz de rotação implica em 6 relações necessárias entre os versores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{b})$, correspondente aos produtos escalares entre os mesmos. Isto sugere que somente 3 parâmetros independentes poderiam ser suficientes para definir a matriz de rotação, o que é uma das motivações para as outras representações de transformação entre sistemas de coordenadas apresentadas nas próximas seções.

Sendo conhecida a velocidade angular do corpo rígido em relação ao sistema de referência, a variação da matriz de cossenos diretores com o tempo pode ser facilmente calculada. Para justificar tal afirmação, basta considerar a derivada de um vetor arbitrário, que, de antemão impomos que seja constante:

$$X' = RX$$

$$X' \textbf{ é constante} \quad \Rightarrow \dot{\mathbf{X}}' = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$$

Por outro lado, um resultado conhecido da mecânica, o qual relaciona a derivada absoluta de um vetor com a sua variação num sistema móvel, implica em:

$$\frac{dX'}{dt} = \dot{X} + \vec{\Omega} \times X = 0 \Rightarrow \dot{X} = -\vec{\Omega} \times X$$

Onde, $\vec{\Omega}$ representa o vetor velocidade angular do referencial móvel (velocidade angular de "arrastamento") expresso no sistema solidário ao corpo rígido:

$$\vec{\Omega} = \omega_{x_b}\vec{i} + \omega_{y_b}\vec{j} + \omega_{z_b}\vec{k}$$

Das 2 relações anteriores, temos:

$$\dot{R}X - R\vec{\Omega} \times \vec{X} = 0 \Rightarrow \dot{R}X = R\Omega X$$

Note que, na última passagem, para representar o produto vetorial do vetor velocidade angular por outro vetor qualquer, definimos Ω na forma matricial:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zb} & \omega_{yb} \\ \omega_{yb} & 0 & -\omega_{xb} \\ -\omega_{yb} & \omega_{xb} & 0 \end{bmatrix}$$

Como o vetor "X" é arbitrário, chegamos ao resultado:

$$\dot{R} = R\Omega$$

2.2- Ângulos de Euler

Na representação utilizando os cossenos diretores, as 6 equações originárias das condições de ortonormalidade, nos dizem que os 9 elementos da matriz de rotação não são independentes. A utilização dos 3 ângulos de Euler, que também podem servir como coordenadas generalizadas na formulação Lagrangeana, fornece a representação mínima.

Uma determinada configuração de eixos cartesianos pode ser obtida a partir de uma seqüência de 3 rotações aplicada na configuração original. Cada rotação é realizada em torno de um dos eixos do sistema cartesiano. Duas rotações seguidas não podem ser realizadas em torno do mesmo eixo. Com esta limitação, temos 12 possibilidades para a seqüência de rotações: "xyx", "xzx", "xyz", "xzy", "yxy", "yxz", "yzy", "yzx", "zxz", "zxy", "zyx", "zyz".

Escolheremos uma dessas seqüências para construir a matriz de rotação, "zyx". Esta é utilizada na aeronáutica, onde os ângulos de Euler definem os movimentos de "Yaw", "Pitch" e "Roll". Consideramos positivas as rotações no sentido anti-horário.

Partindo-se do sistema X, Y, Z, fixo na terra, e orientado conforme a figura 1, o sistema móvel realiza a seqüência:

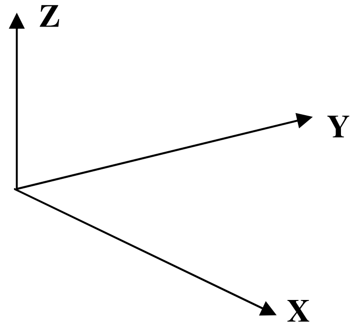
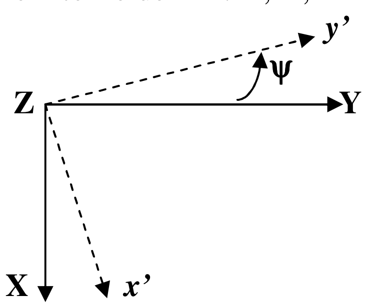


Figura 2.2. Sistema de Referência, fixo na terra (considerado inercial).

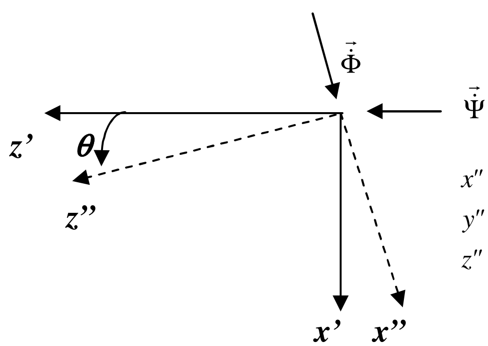
1) Rotação em torno de “Z”: X, Y, Z $\Rightarrow$ x’, y’, z’ (= Z)



$$x' = X\cos\psi + Y sen\psi$$
$$y' = -X sen\psi + Y\cos\psi$$
$$z' = Z$$

Figura 2.3 Movimento de “Yaw”.

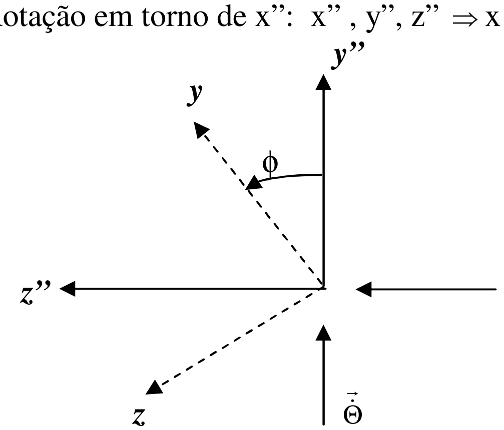
2) Rotação em torno de y’: x’,y’, z’ $\Rightarrow$ x”, y” (=y’), z”.



$$x'' = x'\cos\theta - z'\,sen\theta$$
$$y'' = y'$$
$$z'' = x'\,sen\theta + z'\cos\theta$$

Figura 2.4. Movimento de “Pitch”.

3) Rotação em torno de x”: x” , y”, z” $\Rightarrow$ x (= x”), y, z.



$$x = x''$$
$$y = y''\cos\phi + z''\,sen\phi$$
$$z = -y''\,sen\phi + z''\cos\phi$$

Figura 2.5. Movimento de “Roll”.

As relações entre os sistemas de coordenada sucessivos, expostas nas figuras 2, 3 e 4, na forma matricial ficam:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & sen\psi & 0 \\ -sen\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & sen\phi \\ 0 & -sen\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

Utilizando a composição de rotações, a matriz de rotação que relaciona o sistema original e o atual fica:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_x^{x''} R_{x''}^{x'} R_{x'}^{0} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_x^{0} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

em termos dos ângulos de Euler, a matriz final de rotação, que é obtida pela multiplicação das anteriores. Ou seja, relação entre as coordenadas do sistema original (fixo) e o sistema de coordenadas solidário ao corpo rígido (móvel) resulta do produto entre as matrizes na ordem correspondente à seqüência de rotações definidas acima:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\psi\, cos\theta & sen\psi\, cos\theta & -sen\theta \\ (cos\psi sen\theta sen\phi - sen\psi\, cos\phi\ ) & (cos\psi\, cos\phi + sen\phi sen\psi sen\theta\ ) & cos\theta sen\phi \\ (sen\psi sen\phi + cos\psi sen\theta\, cos\phi) & (\ sen\psi\ sen\ \ cos\varphi - sen\phi\, cos\psi\ ) & cos\phi\, cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Note que esta, sendo a matriz de rotação, possui a propriedade de ortogonalidade demonstrada anteriormente, o que facilita o cálculo de sua inversa. Uma vez conhecida a matriz de rotação num instante qualquer, sua evolução no tempo pode ser determinada conhecendo-se a velocidade angular do referencial móvel.

As derivadas dos ângulos de Euler são representadas nos diagramas anteriores , através dos vetores $\vec{\dot{\Psi}}, \vec{\dot{\Theta}}$ e $\vec{\dot{\Phi}}$. Podemos determinar estes vetores a cada instante, a partir dos valores da velocidade de arrastamento do referencial móvel expressa nos eixos deste mesmo referencial. Ou seja, suponha conhecidos (através de sensores inerciais, por exemplo) os valores de ω_x, ω_y e ω_z, que são as componentes da velocidade angular do referencial móvel nos eixos *x, y* e *z* deste mesmo referencial. As relações entre estas e as derivadas dos ângulos de Euler podem ser deduzidas a partir das figuras 2.3, 2.4 e 2.5, onde os vetores $\vec{\dot{\Psi}}, \vec{\dot{\Theta}}$ e $\vec{\dot{\Phi}}$ são representados. Podemos escrever, portanto:

$$\begin{aligned}
\omega_X &= \dot{\Phi} - \dot{\Psi} sen\theta \\
\omega_y &= \dot{\Theta} \cos\phi + \dot{\Psi} \cos\theta sen\phi \\
\omega_z &= -\dot{\Theta} sen\phi + \dot{\Psi} \cos\theta \cos\phi
\end{aligned}$$

Isolando-se $\vec{\dot{\Psi}}, \vec{\dot{\Theta}}$ e $\vec{\dot{\Phi}}$, e colocando na forma matricial , temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{sen}\phi \, \mathrm{tg}\theta & \cos\phi \, \mathrm{tg}\theta \\ 0 & \cos\phi & -\mathrm{sen}\phi \\ 0 & \mathrm{sen}\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Integrando-se estas relações, podemos determinar a evolução dos ângulos de Euler com o tempo, e assim determinar a evolução da atitude do corpo rígido.