MAE-229 - Introdução à Probabilidade e à Estatística II

1ª Lista de Exercícios - 2º Sem./2018 - FEA – Diurno

1) A seção de assistência técnica da Cia. Milsa tem 5 funcionários: A, B, C, D e E, cujos tempos de serviço na Cia. são, respectivamente, 1, 3, 5, 5 e 7 anos.

(a) Faça um gráfico representando a distribuição de probabilidades dos tempos de serviço X.

(b) Calcule a média E(X), a variância Var(X) e a mediana Md(X).

Duas novas firmas, a Verde e a Azul, solicitaram o serviço de assistência técnica da Milsa. Um mesmo funcionário pode ser designado para atender a ambos os pedidos, ou dois funcionários podem fazê-lo. Assim, o par (A,B) significa que o funcionário A atenderá a firma Verde e o funcionário B, à firma Azul.

(c) Escreva os 25 possíveis pares de funcionários para atender a ambos os pedidos.

(d) Para cada par, calcule o tempo médio de serviço $\overline{X}$, faça a distribuição de probabilidade e uma representação gráfica. Compare com o resultado de (a).

(e) Calcule para os 25 valores de $\overline{X}$ os parâmetros E ($\overline{X}$), Var ($\overline{X}$) e Md ($\overline{X}$). Compare com os resultados obtidos em (b). Que tipo de conclusão você poderia tirar?

(f) Para cada par obtido em (c), calcule a variância do par e indique-a por S^2. Faça a representação gráfica da distribuição dos valores de S^2.

(g) Calcule E (S^2) e Var (S^2).

(h) Indicando por X_1 a variável que expressa o tempo de serviço do funcionário que irá atender à firma Verde e X_2 o que irá atender à firma Azul, faça a distribuição conjunta da variável bidimensional (X_1 , X_2)

(i) As duas variáveis X_1 e X_2 são independentes?

(j) O que você pode falar sobre as distribuições "marginais" de X_1 e X_2?

(k) Suponha agora que três firmas solicitem o serviço de assistência técnica. Quantas triplas podem ser formadas?

(l) Sem calcular todas as possibilidades, como você acha que ficaria o histograma de $\overline{X}$? E E ($\overline{X}$)? E Var($\overline{X}$)?

(m) E sobre a variável S^2?

(n) A variável tridimensional (X_1, X_2, X_3) teria alguma propriedade especial para as suas "marginais"?

2) Uma variável aleatória X tem distribuição normal, com média 100 e desvio padrão 10.

(a) Qual a $P(90<X<110)$?

(b) Se $\overline{X}$ é a média de uma amostra de 16 elementos retirados dessa população, calcule $P(90<\overline{X}<110)$.

(c) Desenhe, num único gráfico, as distribuições de X e $\overline{X}$.

(d) Que tamanho deveria ter a amostra para que $P(90<\overline{X}<110)=95\%$?

3) Sabe-se que 20% das peças de um lote são defeituosas. Sorteiam-se 8 peças, com reposição, e calcula-se a proporção $\hat{p}$ de peças defeituosas na amostra.

(a) Construa a distribuição exata de $\hat{p}$ (use a tábua da distribuição binomial).

(b) Construa a aproximação normal à binomial.

(c) Você acha que a segunda distribuição é uma boa aproximação da primeira?

(d) Já sabemos que, para dado p fixo, a aproximação melhora à medida que n aumenta. Agora, se n é fixo, para qual valor de p a aproximação é melhor?

4) No quadro abaixo tem-se a distribuição dos salários da Secretaria A.

Classe de Salários	Frequência Relativa
4,5 ├── 7,5	0,10
7,5 ├── 10,5	0,20
10,5 ├── 13,5	0,40
13,5 ├── 16,5	0,20
16,5 ├── 19,5	0,10

(a) Calcule a média μ, a variância σ^2 e a mediana Md dos salários na população (Secretaria A).
(b) Construa a distribuição amostral da média e da mediana para amostras de tamanho 2, retiradas dessa população.
(c) Mostre que a média $\overline{X}$ e a mediana md da amostra são estimadores não viesados da mediana Md da população, no sentido que E($\overline{X}$) = E(md)=Md.
(d) Qual dos dois estimadores não viesados você usaria para estimar Md neste caso? Por quê?
(e) Baseado na distribuição amostral da média, encontre a distribuição amostral da estatística $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$ para $n = 2$.
(f) Quais os valores de E(Z) e Var(Z)?
(g) Construa a distribuição amostral da estatística $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$, e faça o histograma.
(h) Calcule E(S^2) e Var(S^2).
(i) Baseando-se nas distribuições amostrais anteriores, determine a distribuição amostral da estatística $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$, e construa seu o histograma.

5) Uma variável X tem distribuição normal, com média 10 e desvio padrão 4. Aos participantes de um jogo é permitido observar uma amostra de qualquer tamanho e calcular a média amostral. Ganha um prêmio aquele cuja média amostral for maior que 12.
(a) Se um participante escolher uma amostra de tamanho 16, qual a probabilidade de ele ganhar um prêmio?
(b) Escolha um tamanho de amostra diferente de 16 para participar do jogo. Qual a probabilidade de você ganhar um prêmio?
(c) Baseado nos resultados acima, qual o melhor tamanho da amostra para participar do jogo?

6) Definimos a variável e = $\overline{X}$-μ como sendo o erro amostral da média. Suponha que a variância dos salários de uma certa região seja 400 unidades ao quadrado.
(a) Determine E(e) e Var(e).
(b) Que proporção das amostras de tamanho 25 terão erro amostral absoluto maior do que 2 unidades?
(c) E que proporção das amostras de tamanho 100?
(d) Neste último caso, qual o valor de d, tal que P(| e | > d)=1%?
(e) Qual deve ser o tamanho da amostra para que 95% dos erros amostrais absolutos sejam inferiores a uma unidade?

7) Uma empresa fabrica cilindros com 50 mm de diâmetro. O desvio padrão dos diâmetros dos cilindros é 2,5 mm. Os diâmetros de uma amostra de 4 cilindros são medidos a cada hora. A média da amostra é usada para decidir se o processo de fabricação está operando satisfatoriamente. Aplica-se a seguinte regra de decisão: se o diâmetro médio da amostra de 4 cilindros é igual a 53,7 mm ou mais, ou igual a 46,3 mm ou menos, deve-se parar o processo. Se o diâmetro estiver entre 46,3 e 53,7 mm, o processo deve continuar.
(a) Qual a probabilidade de se parar o processo se a média do processo μ continuar em 50 mm?
(b) Qual a probabilidade do processo continuar se a média do processo se deslocar para 53,7 mm?