Probabilidade

Prof. Fernando Pigeard de Almeida Prado

USP

Literatura

1. ROSS, S. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações.** 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.
2. CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. de O.; FERNANDEZ, P.; PITOMBEIRA, J. B. **Análise combinatória e probabilidade**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

O número de modos de ordenar n objetos distintos é

$$n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$$

Exemplo. Quantos são os anagramas da palavra PEPPER?

Solução. Seja N o número de anagramas, então $6! = N * 3!2!1!$

PEPPER $(P_1E_1P_2P_3E_2R,\ P_2E_1P_1P_3E_2R,\ \ldots)$

REPPEP $(RE_1P_1P_2E_2P_3,\ RE_2P_1P_2E_1P_3,\ \ldots)$

...

Portanto,

$$N = \frac{6!}{3!2!1!}$$

Em geral, existem

$$N = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

permutações de n objetos em que n_1 objetos são iguais, n_2 objetos são iguais, ... n_r objetos são iguais, onde $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$.

Combinações. Quantos subconjuntos de 3 elementos possui o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Solução. Seja N o número de subconjuntos de 3 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Existem $5 \cdot 4 \cdot 3$ vetores (x, y, z) de 3 componentes diferentes que pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Esses vetores podem ser listados e agrupados como segue:

$\{1, 2, 3\} \Rightarrow \{(1, 2, 3), (2, 1, 3), \dots\}$
$\{2, 4, 5\} \Rightarrow \{(2, 4, 5), (4, 2, 5), \dots\}$
$\dots$

Como N é o número de subconjuntos de 3 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos: $N \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3$.

Logo,

$$N = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{5!}{(5-3)!3!}$$

De forma geral, o número de subconjuntos de r elementos de um conjunto de n elementos é

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \quad \text{onde} \quad 0 \leq r \leq n \tag{1}$$

sendo $0! = 1$. Se não valer $0 \leq r \leq n$, então $\binom{n}{r} = 0$.

Exemplo. Quantas sequências de r 0s e n 1s existem em que dois 0s não estejam justapostos?

Solução. Considere uma sequência de n 1s. Existem $n+1$ posições que poderão ser ocupadas por no máximo um 0 cada.

$$\Big|_1 \;\; 1 \;\; \Big|_2 \;\; 1 \;\; \Big|_3 \ldots\ldots \Big|_n \;\; 1 \;\; \Big|_{n+1}$$

A cada escolha de r posições (entre $n+1$ possíveis) corresponde uma sequência de r 0s e n 1s em que dois 0s não estão justapostos. Portanto, a resposta é

$$\binom{n+1}{r}$$

Note que $\binom{n+1}{r} = 0$ se $r > n+1$.

A seguinte igualdade é útil:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}, \quad \text{onde} \quad n, r \in \mathbb{Z} \qquad (2)$$

Demonstração de (2). Considere o conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Há $\binom{n-1}{r-1}$ subconjuntos de A de r elementos contendo o número 1 (pois cada subconjunto é formado selecionando-se $r-1$ dos $n-1$ elementos restantes). Além disso, há $\binom{n-1}{r}$ subconjuntos de A de r elementos que não contêm o número 1. Como há um total de $\binom{n}{r}$ subconjuntos de A de r elementos, tem-se como resultado a Equação (2). $\square$

Coeficientes multinomiais. Se $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$, $n_i \in \mathbb{N}$, definimos

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} \tag{3}$$

Assim, $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ é o número de divisões possíveis de n objetos diferentes em r caixas distintas, onde a caixa 1 possui n_1 objetos, a caixa 2 possui n_2 objetos, e assim por diante.

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1} \,\Big|\, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2} \,\Big|\, \ldots \,\Big|\, x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn_r} \,\Big|$$

Demonstração. Note que

$$n! = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} \cdot n_1! n_2! \cdots n_r! \quad \square$$

Proposição

Existem $\binom{n-1}{r-1}$ *vetores distintos com valores inteiros positivos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *satisfazendo a equação*

$$x_1 + x_2 + \ldots x_r = n \quad (x_i \geq 1) \tag{4}$$

Demonstração. Imagine que tenhamos n objetos idênticos alinhados e que queiramos dividi-los em r grupos não vazios. Para fazer isso, podemos selecionar $r-1$ espaços dos $n-1$ espaços entre objetos adjacentes como pontos divisórios (veja figura abaixo). Por exemplo, se tivermos $n = 8$ e $r = 3$, e escolhemos os dois divisores de forma a obter

$$ooo|ooo|oo$$

então o vetor resultante é $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$. Como há $\binom{n-1}{r-1}$ seleções possíveis, temos o mesmo número de soluções de (4). □

Proposição

Existem $\binom{n+R-1}{r-1}$ *vetores distintos com valores inteiros não negativos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *satisfazendo a equação*

$$x_1 + x_2 + \ldots x_r = n \quad (x_i \geq 0) \tag{5}$$

Demonstração. Note que o número de soluções não negativas (em vez de positivas) de $x_1 + x_2 + \ldots x_r = n$ é igual ao número de soluções positivas de $y_1 + y_2 + \ldots y_r = n + r$ (o que se vê ao fazer $y_i = x_i + 1$). $\square$

Exercícios

S. Ross (2010), p. 32-33: 1.11, 1.12, 1.21, 1.31, 1.32.