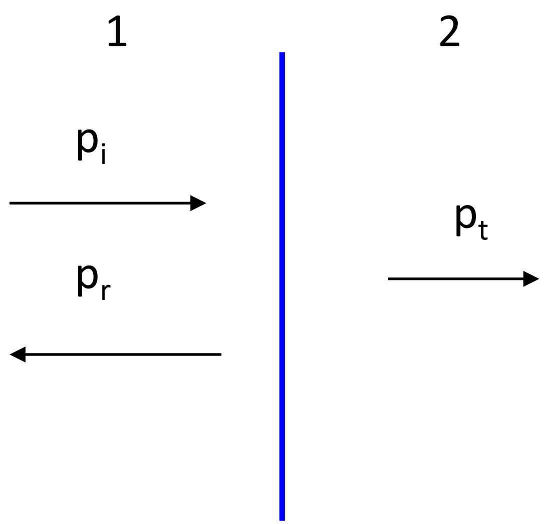
Reflexão e Transmissão

Theo Z. Pavan
Universidade de São Paulo, FFCLRP, Departamento de Física

Reflexão e transmissão

Quando uma onda acústica encontra a divisão entre dois meios parte da onda é refletida ao meio pela qual viajava e parte é transmitida para o outro meio.

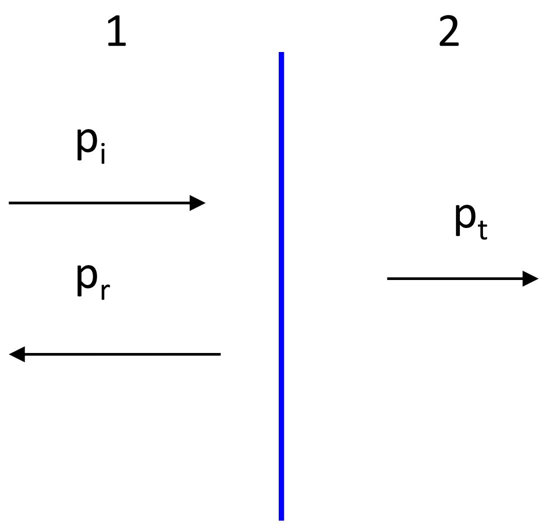


$$p_+ = Ae^{j(\omega t - kx)}$$

$$p_- = Be^{j(\omega t + kx)}$$

Coeficientes

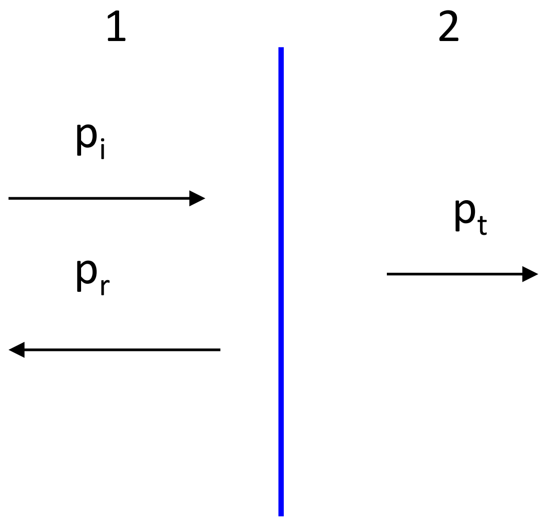
- p_i → Pressão da onda incidente;
- p_r → Pressão da onda refletida;
- p_t → Pressão da onda transmitida;
- R → Coef. Reflexão da pressão;
- T → Coef. Transmissão da pressão;
- R_I → Coef. Reflexão da intensidade acústica;
- T_I → Coef. Transmissão da intensidade acústica;
- R_π → Coef. Reflexão da potência acústica;
- T_π → Coef. Transmissão da potência acústica.



Reflexão

- Coef.Reflexão da pressão:

$$R = \frac{P_r}{P_i}$$



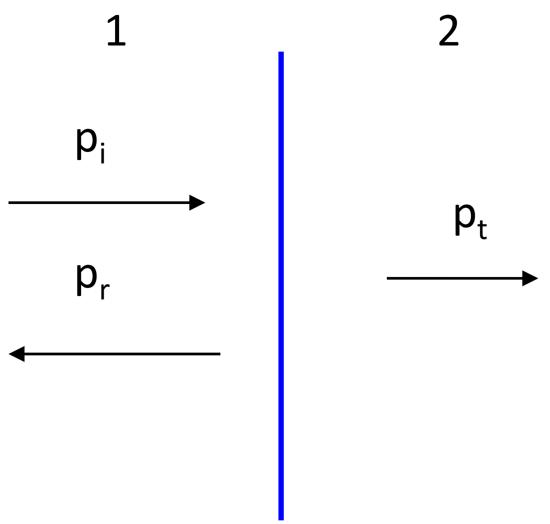
Reflexão

- Coef.Reflexão da pressão:

$$R = \frac{P_r}{P_i}$$

- Coef.Reflexão da intensidade acústica:

$$R_I = \frac{I_r}{I_i} = \frac{P_r^{\,2} / \rho_1 c_1}{P_i^2 / \rho_1 c_1} = \frac{P_r^{\,2}}{P_i^2} = R^2$$



Reflexão

- Coef.Reflexão da pressão:

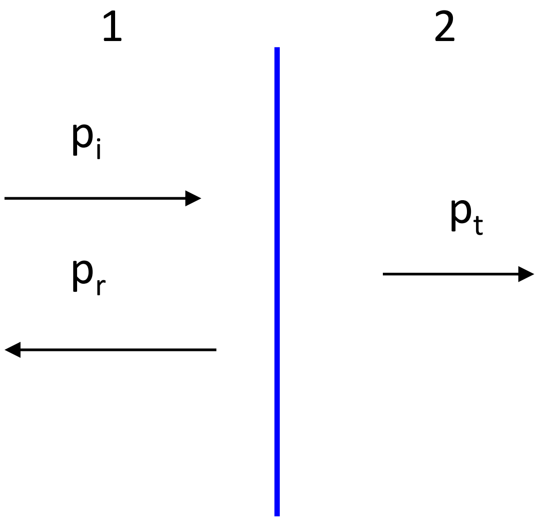
$$R = \frac{P_r}{P_i}$$

- Coef.Reflexão da intensidade acústica:

$$R_I = \frac{I_r}{I_i} = \frac{P_r^{\,2} / \rho_1 c_1}{P_i^2 / \rho_1 c_1} = \frac{P_r^{\,2}}{P_i^2} = R^2$$

- Coef.Reflexão da potência acústica:

$$R_\pi = \frac{\Pi_r}{\Pi_i} = \frac{I_r A_1}{I_i A_1} = R_I$$



Transmissão

- Coef.Transmissão da pressão:

$$T = \frac{P_t}{P_i}$$

Transmissão

- Coef.Transmissão da pressão:

$$T = \frac{P_t}{P_i}$$

- Coef. Transmissão da intensidade acústica:

$$T_I = \frac{I_t}{I_i} = \frac{P_t^2 / \rho_2 c_2}{P_i^2 / \rho_1 c_1} = T^2 \frac{Z_1}{Z_2}$$

Impedância acústica Z = ρ_0c

Transmissão

- Coef.Transmissão da pressão:

$$T = \frac{P_t}{P_i}$$

- Coef. Transmissão da intensidade acústica:

$$I_I = \frac{I_t}{I_i} = \frac{P_t^2 / \rho_2 c_2}{P_i^2 / \rho_1 c_1} = T^2 \frac{Z_1}{Z_2}$$

Impedância acústica Z = ρ_0 c

- Coef. Transmissão da potência acústica:

$$T_\pi = \frac{\Pi_t}{\Pi_i} = \frac{I_t A_2}{I_i A_1} = T_I$$

Para: $A_2 = A_1$

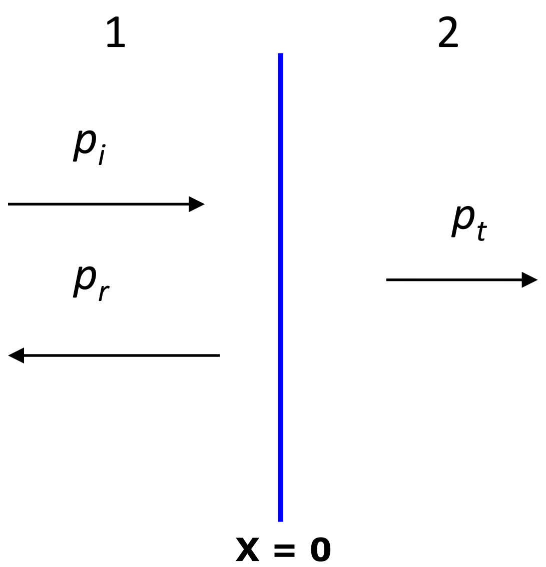
Incidência normal

- Como a fonte é comum todas as ondas têm a mesma frequência, mas as velocidades (c_1 e c_2) dependem do meio.

$$p_i = P_i \cdot e^{i(\omega t - k_1 x)}$$

$$p_r = P_r \cdot e^{i(\omega t + k_1 x)}$$

$$p_t = P_t \cdot e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

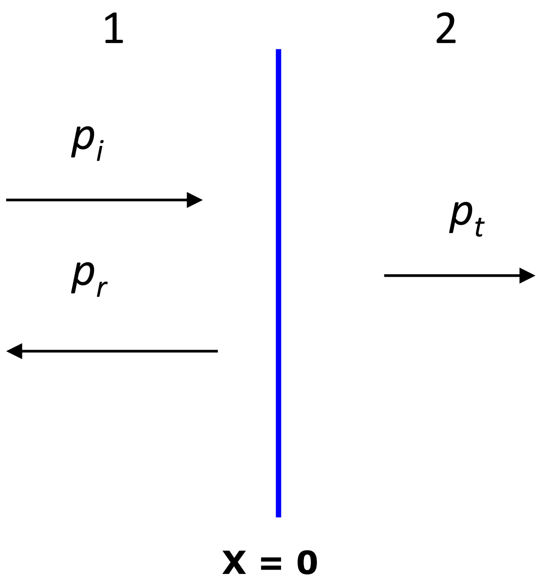


Número de ondas:

$$k_1 = \omega / c_1 \neq k_2 = \omega / c_2$$

Incidência normal

- Condições de contorno:
  - Pressões acústicas nos dois lados da interface devem ser iguais;
  - Componente normal das velocidades devem ser iguais.



- Em x = 0

$$p_i + p_r = p_t \qquad (1)$$

$$u_i + u_r = u_t \qquad (2)$$

u→ velocidade da partícula

Incidência normal

- De acordo com Kinsler – Fundamentals of acoustics. Cap. 6 pág. 151

- The first condition, continuity of pressure, means that there can be no net force on the (massless) plane separating the fluids.

- The second condition, continuity of the normal component of velocity, requires that the fluids remain in contact.

“Analogia” com cordas

Incidência normal

Em x = 0

$$\frac{p_i + p_r}{u_i + u_r} = \frac{p_t}{u_t}$$

$$\frac{p_i}{u_i} = Z_1 \qquad \frac{p_r}{u_r} = -Z_1 \qquad \frac{p_t}{u_t} = Z_2$$

$$\frac{p_i + p_r}{\frac{p_i}{Z_1} - \frac{p_r}{Z_1}} = Z_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_r}{P_i} = R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

Incidência normal

$$p_i + p_r = p_t$$

Incidência normal

$$p_i + p_r = p_t$$

$$\frac{p_i}{p_i} + \frac{p_r}{p_i} = \frac{p_t}{p_i} \longrightarrow 1 + R = T$$

Incidência normal

$p_i + p_r = p_t$

$$\frac{p_i}{p_i} + \frac{p_r}{p_i} = \frac{p_t}{p_i} \longrightarrow 1 + R = T$$

$$\Downarrow$$

$$T = 1 + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Algumas análises

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{p_r}{p_i} \qquad T = 1 + R = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{p_t}{p_i}$$

Se $Z_2 > Z_1$ (por exemplo ar-água) P_i está em fase com P_r

Em cordas acorre o oposto

$$Z = \sqrt{\rho_\ell T}.$$

$Z_2 < Z_1$

$$\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}, \qquad \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}.$$

Avaliação de ondas em cordas ver:

http://physics.usask.ca/~hirose/ep225/animation/reflection/anim-reflection.htm

Algumas análises

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{p_i}{p_r} \qquad T = 1 + R = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Se $Z_2 < Z_1$ (por exemplo água-ar) P_i está fora de fase com P_r

Em cordas acorre o oposto

$Z_2 > Z_1$

$$Z = \sqrt{\rho_\ell T}.$$

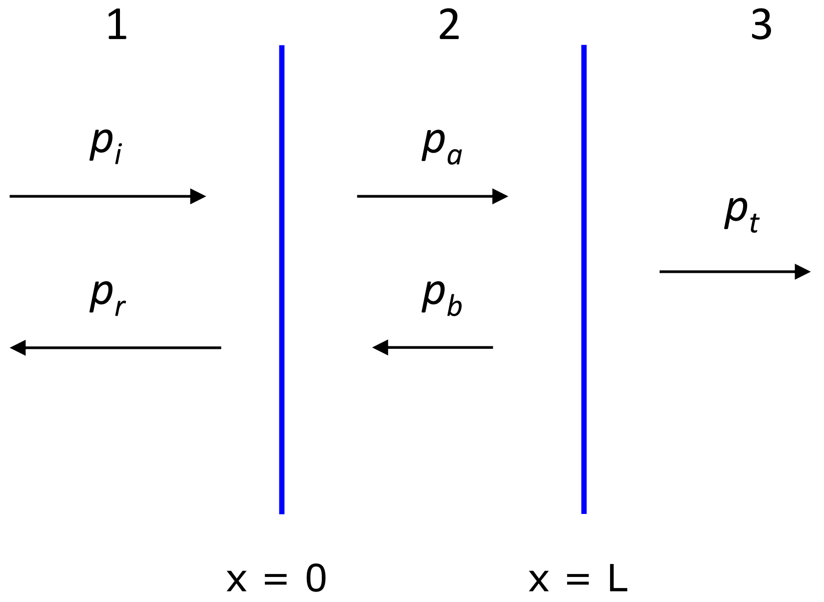
$$\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}, \qquad \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}.$$

Algumas análises

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{p_i}{p_r} \qquad T = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- A pressão transmitida está sempre em fase com a incidente.
- Se $z_2 >> z_1$ a onda é refletida sem diminuição na amplitude
  - Amplitude de pressão transmitida é o dobro do da onda incidente.
  - $T \rightarrow 2$
- Se $z_2 << z_1$ a onda é refletida sem diminuição na amplitude mas fora de fase.
  - $T \rightarrow 0$

Transmissão através de uma fina camada

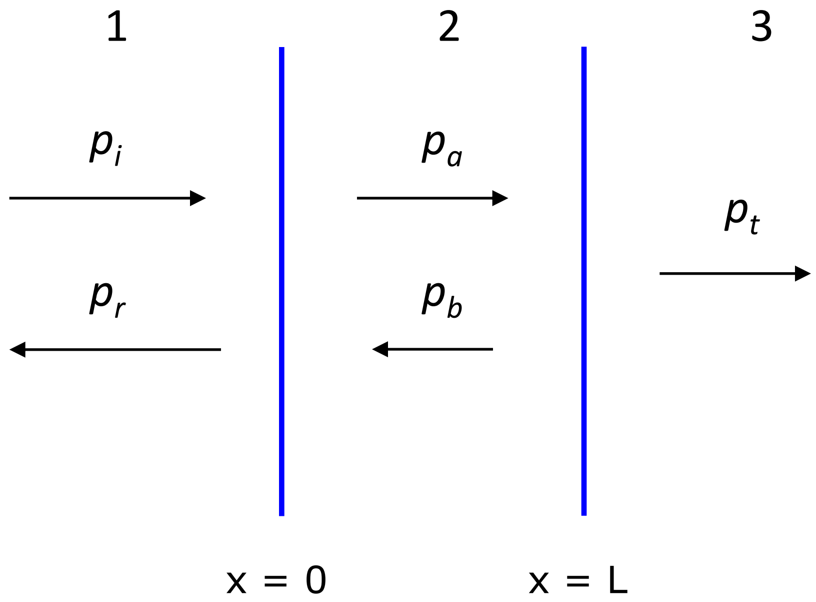


Camada fina

- Para x = 0

$$p_i + p_r = p_a + p_b$$

$$u_i + u_r = u_a + u_b$$



Camada fina

- Para x = 0

$$p_i + p_r = p_a + p_b$$

$$u_i + u_r = u_a + u_b$$

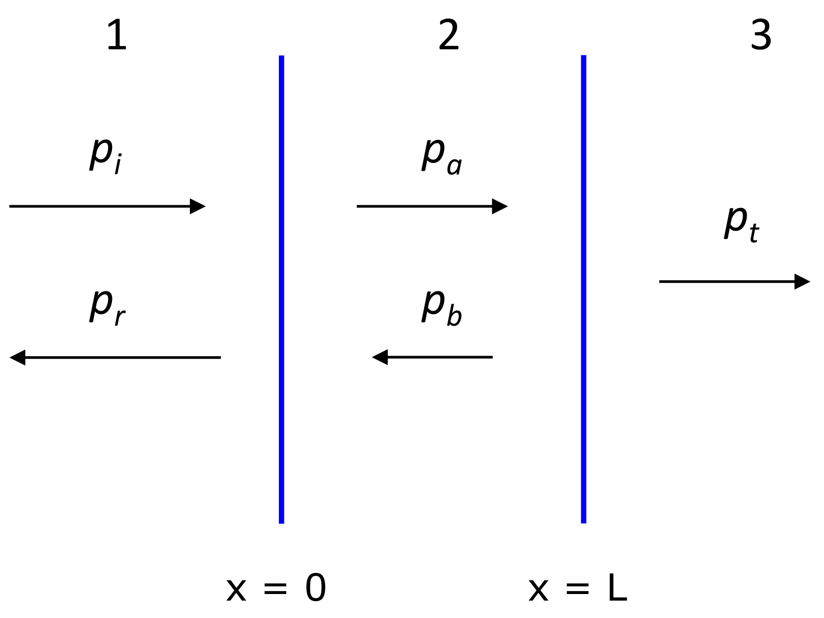
$$\downarrow$$

$$\frac{p_i + p_r}{u_i + u_r} = \frac{p_a + p_b}{u_a + u_b}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{p_i}{u_i} = Z_1 \qquad \frac{p_r}{u_r} = -Z_1$$

$$\frac{p_a}{u_a} = Z_2 \qquad \frac{p_b}{u_b} = -Z_2$$



Camada fina

- Para x = 0

$$p_i + p_r = p_a + p_b$$

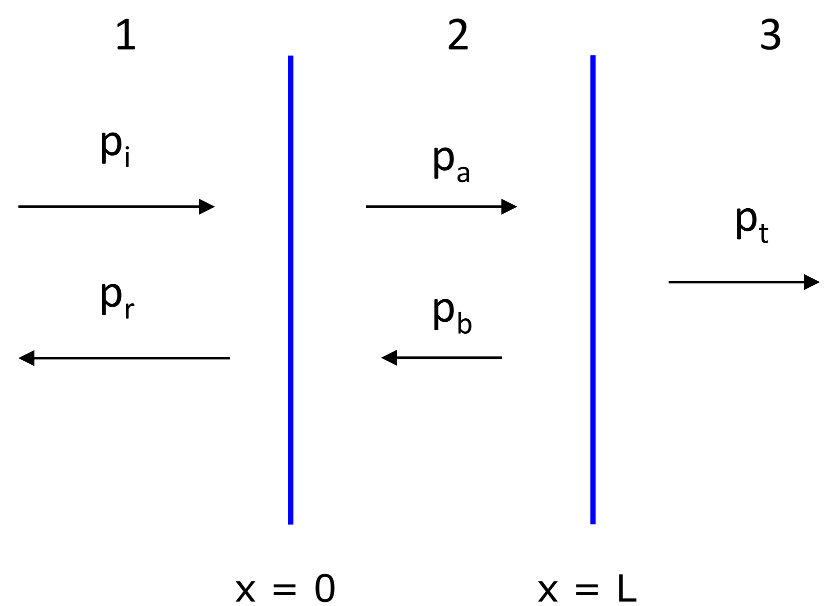
$$u_i + u_r = u_a + u_b$$

$$\frac{p_i + p_r}{u_i + u_r} = \frac{p_a + p_b}{u_a + u_b}$$

$$\frac{p_i}{u_i} = Z_1 \qquad \frac{p_r}{u_r} = -Z_1$$

$$\frac{p_a}{u_a} = Z_2 \qquad \frac{p_b}{u_b} = -Z_2$$

$$\frac{p_i + p_r}{\frac{p_i}{Z_1} - \frac{p_r}{Z_1}} = \frac{p_a + p_b}{\frac{p_a}{Z_2} - \frac{p_b}{Z_2}}$$

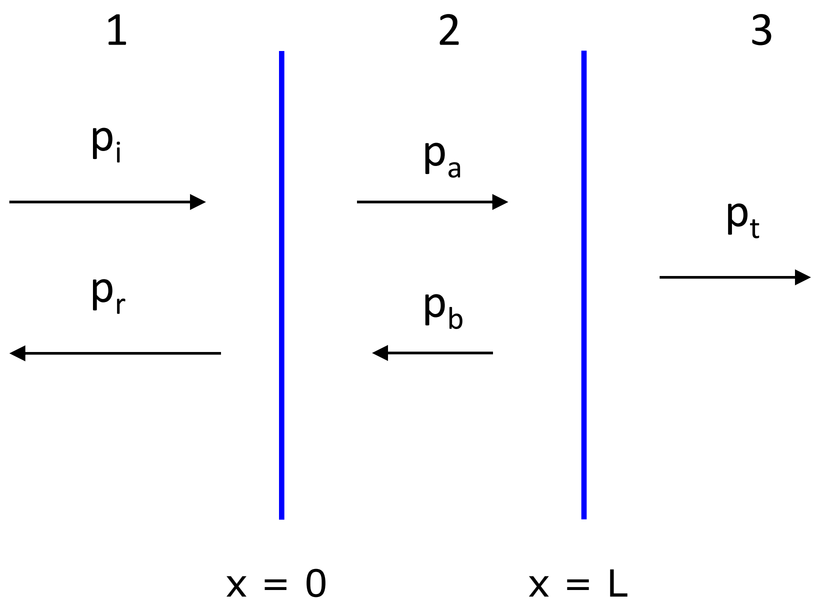


Camada fina

$$\frac{p_i + p_r}{\dfrac{p_i}{Z_1} - \dfrac{p_r}{Z_1}} = \frac{p_a + p_b}{\dfrac{p_a}{Z_2} - \dfrac{p_b}{Z_2}}$$

$$\downarrow$$

$$Z_1\left(\frac{P_i + P_r}{P_i - P_r}\right) = Z_2\left(\frac{P_a + P_b}{P_a - P_b}\right)$$

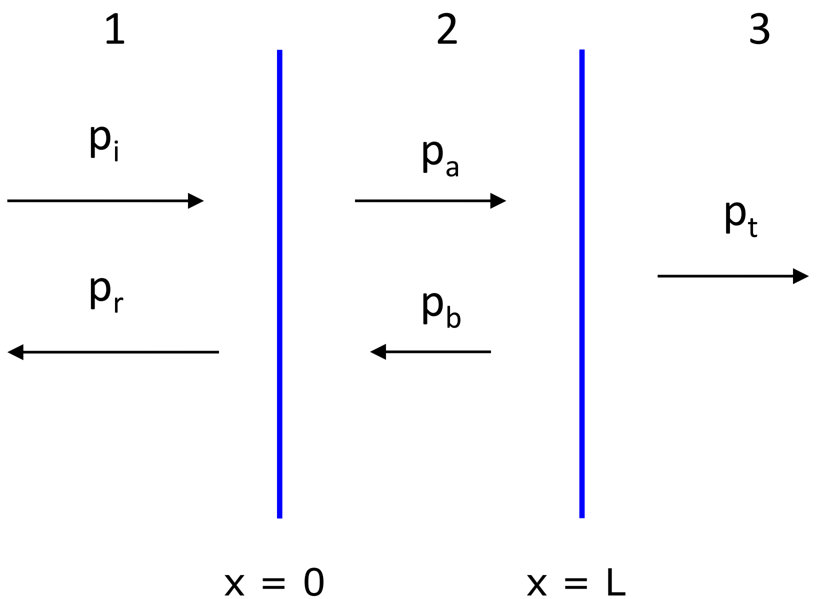


$$p = P \cdot e^{i(\omega t - kx)}$$

- Para x = L

$$\frac{P_a \cdot e^{-ik_2 L} + P_b \cdot e^{+ik_2 L}}{\dfrac{P_a \cdot e^{-ik_2 L}}{Z_2} - \dfrac{P_b \cdot e^{+ik_2 L}}{Z_2}} = \frac{p_t}{u_t}$$

$$\frac{P_a \cdot e^{-ik_2 L} + P_b \cdot e^{+ik_2 L}}{P_a \cdot e^{-ik_2 L} - P_b \cdot e^{+ik_2 L}} = \frac{Z_3}{Z_2}$$



Camada fina

$$Z_1\left(\frac{P_i+P_r}{P_i-P_r}\right)=Z_2\left(\frac{P_a+P_b}{P_a-P_b}\right)$$

$$\frac{P_a\cdot e^{-ik_2L}+P_b\cdot e^{+ik_2L}}{P_a\cdot e^{-ik_2L}-P_b\cdot e^{+ik_2L}}=\frac{Z_3}{Z_2}$$

Coeficiente de reflexão

$$R=\frac{P_r}{P_i} \Rightarrow R=\frac{\left(1-Z_1/Z_3\right)\cos(k_2L)+i\left(Z_2/Z_3-Z_1/Z_2\right)\sin(k_2L)}{\left(1+Z_1/Z_3\right)\cos(k_2L)+i\left(Z_2/Z_3+Z_1/Z_2\right)\sin(k_2L)}$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Camada fina

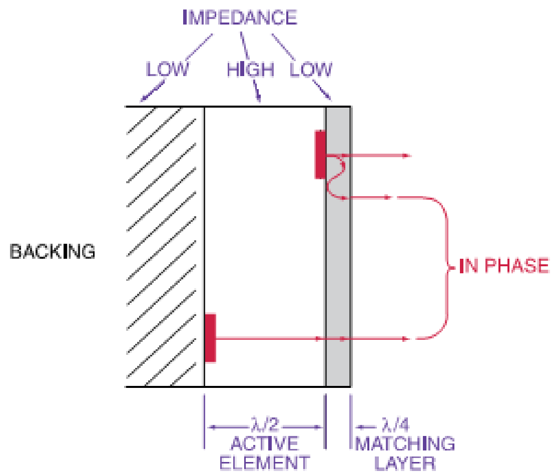
Para calcular o coeficiente de transmissão da intensidade é preciso lembrar que:

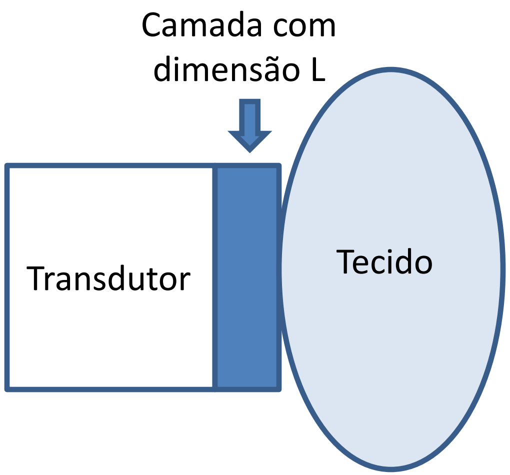
$$R_I = R^2 \qquad\qquad T_I = T^2 \frac{Z_1}{Z_2}$$

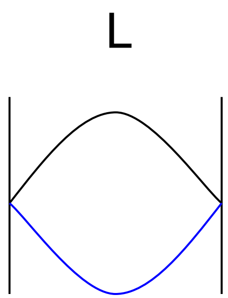
$$T = 1 + R$$

$$T_I = \frac{4}{2 + \left(Z_3 / Z_1 + Z_1 / Z_3 \right) \cos^2(k_2 L) + \left(Z_2^2 / (Z_1 Z_3) + (Z_1 Z_3) / Z_2^2 \right) \sin^2(k_2 L)}$$

Caso especial

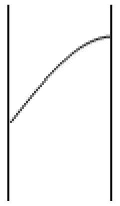






Na ressonância

$L = \lambda/2$



$L = \lambda/4$

Caso especial

$$k_2L = \frac{2\pi}{\lambda_2}L = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$$

Para n = 1 → L = $\lambda_2/4$

$$\cos k_2L \approx 0 \qquad \sin k_2L \approx 1$$

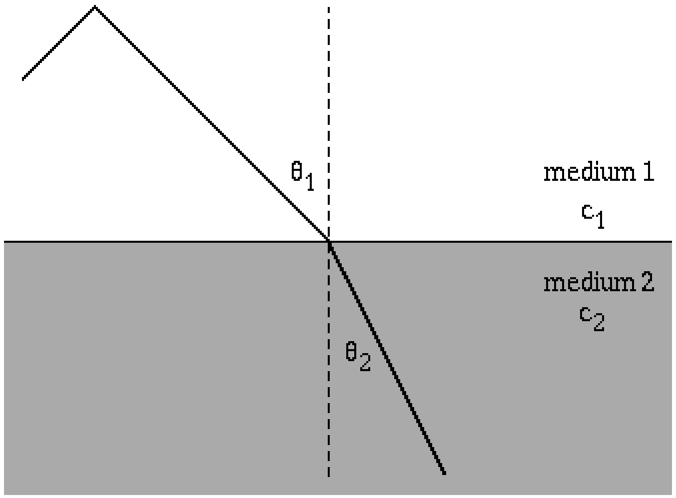
$$T_I = \frac{4}{2 + \left({Z_3}/{Z_1} + {Z_1}/{Z_3}\right)\cos^2(k_2L) + \left({Z_2^2}/{(Z_1Z_3)} + {(Z_1Z_3)}/{Z_2^2}\right)\sin^2(k_2L)}$$

$$T_I = \frac{4Z_1Z_3}{\left(Z_2 + {Z_1Z_3}/{Z_2}\right)^2}$$

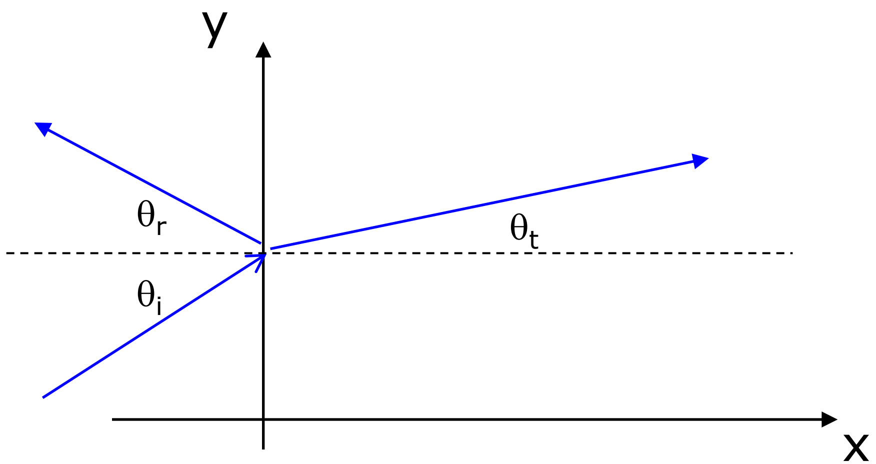
Para $T_I = 1$

$$Z_2 = \sqrt{Z_1Z_3}$$

Incidência oblíqua



Incidência oblíqua



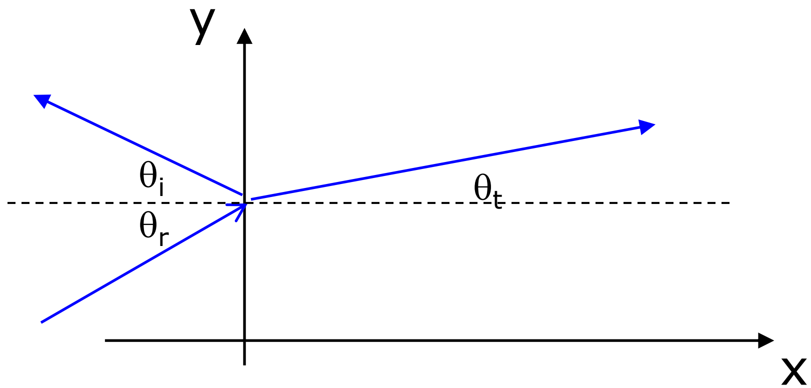
$$p_i = P_i \cdot e^{i(\omega t - k_1 x \cos\theta_i - k_1 y \sin\theta_i)}$$

$$p_r = P_r \cdot e^{i(\omega t + k_1 x \cos\theta_r - k_1 y \sin\theta_r)}$$

$$p_t = P_t \cdot e^{i(\omega t - k_2 x \cos\theta_t - k_2 y \sin\theta_t)}$$

Incidência oblíqua

Em x = 0



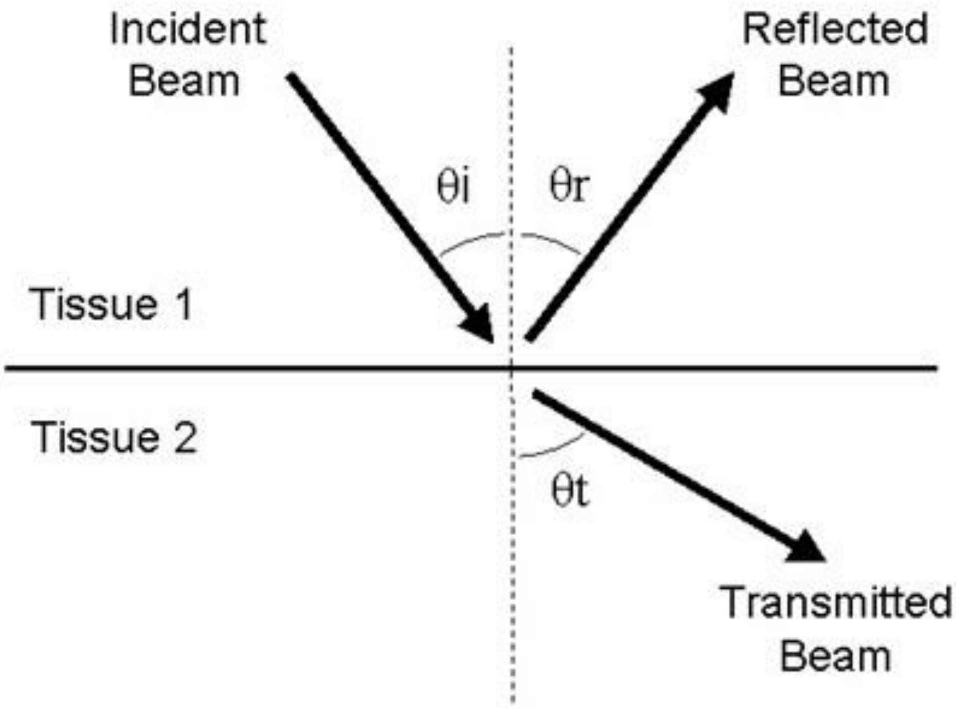
$$P_i \cdot e^{-ik_1 y \sin\theta_i} + P_r \cdot e^{-ik_1 y \sin\theta_r} = P_t \cdot e^{-ik_2 y \sin\theta_t}$$

Essa igualdade deve ser satisfeita em qualquer *y*, portanto os expoentes devem ser todos iguais

$$k_1 \sin\theta_i = k_1 \sin\theta_r = k_2 \sin\theta_t \qquad \therefore \theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\omega}{c_1}\sin\theta_i = \frac{\omega}{c_2}\sin\theta_t \longrightarrow \sin\theta_i = \frac{c_1}{c_2}\sin\theta_t$$

Incidência não perpendicular



$$R = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2 \cos\theta_i - Z_1 \cos\theta_t}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t}$$

$$T = \frac{p_t}{p_i} = \frac{2 Z_2 \cos\theta_t}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t}$$

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{Z_2 \cos\theta_i - Z_1 \cos\theta_t}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t} \right)^2$$

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{4 Z_2 Z_1 \cos\theta_i}{(Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t)^2}$$