Onda Acústica

Theo Z. Pavan

Universidade de São Paulo, FFCLRP, Departamento de Física

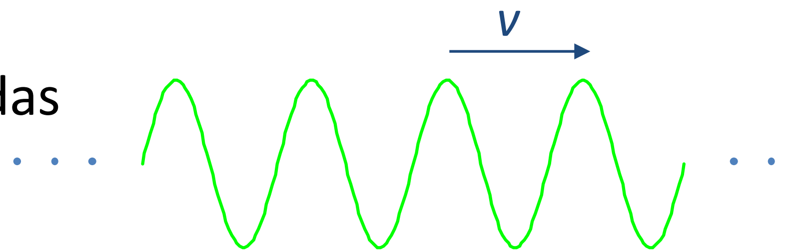
Bibliografia

- Curso de Física Básica 2 – H. Moysés Nussenzveig. Cap. 6.

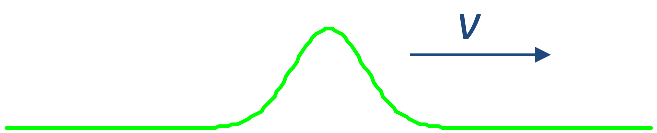
- KINSLER, L. et al, Fundamentals of Acoustics. John Willey and Sons, Monterey, 1982. Cap. 5.

Forma de onda

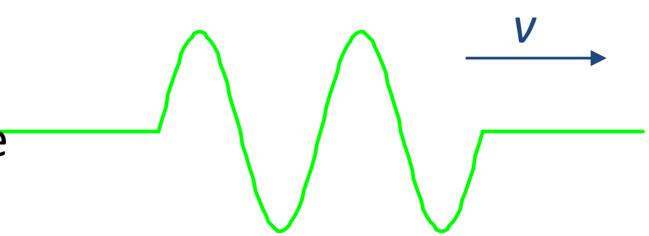
"ondas contínuas" podem ser entenddas como infinitas em ambas direções!



Podemos ter também "pulsos" causados por um breve distúrbio do meio



E podemos ter também "trens de pulsos" que são algo intermediário.

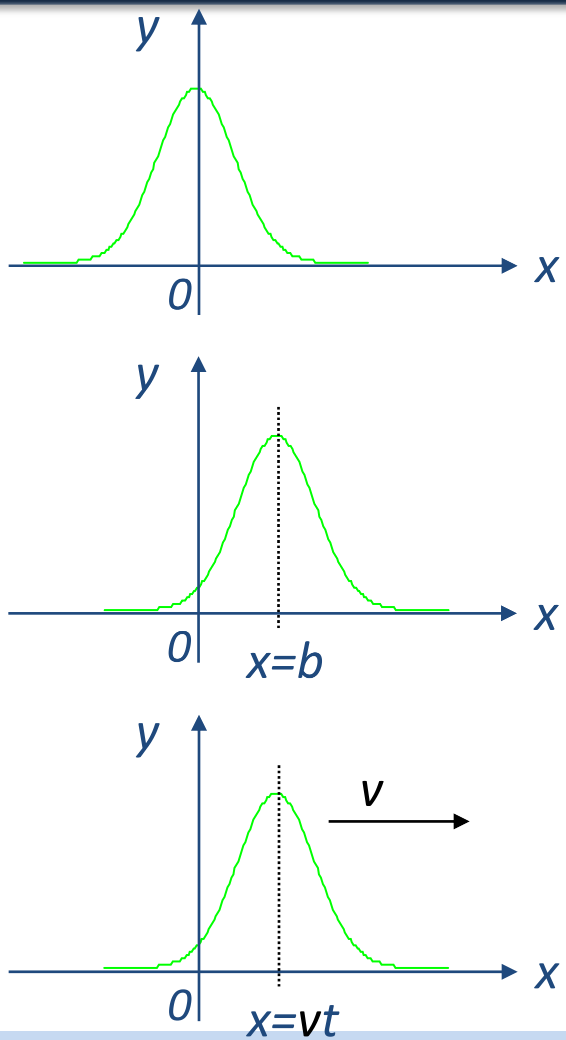


Onda

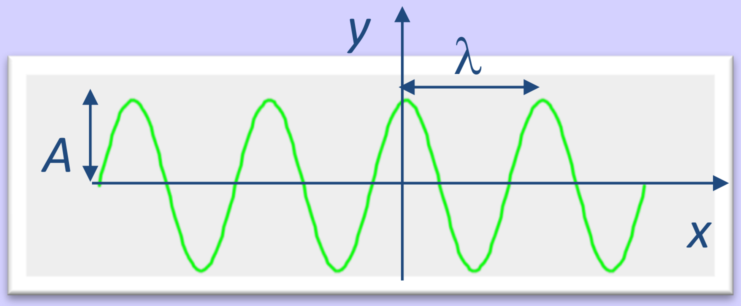
- Supor que temos alguma função $y = f(x)$:

$f(x-b)$ tem a mesma forma, só que deslocada uma distância b à direita:

Seja $b = vt$ então $f(x-vt)$ será descrita pela mesma forma, se movendo à direita com velocidade v.



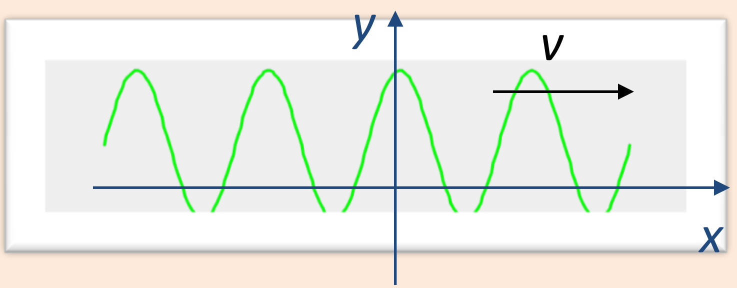
Considere uma onda harmônica em x com comprimento de onda λ.



Se a amplitude for máxima em $x=0$ essa onda tem a forma:

$$y(x) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

Mas, se ela está se movendo para a direita com velocidade v ela será descrita por:



$$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$

Solução equação da onda

Uma simples onda harmônica se movendo com velocidade *v* na direção *x* é descrita pela equação:

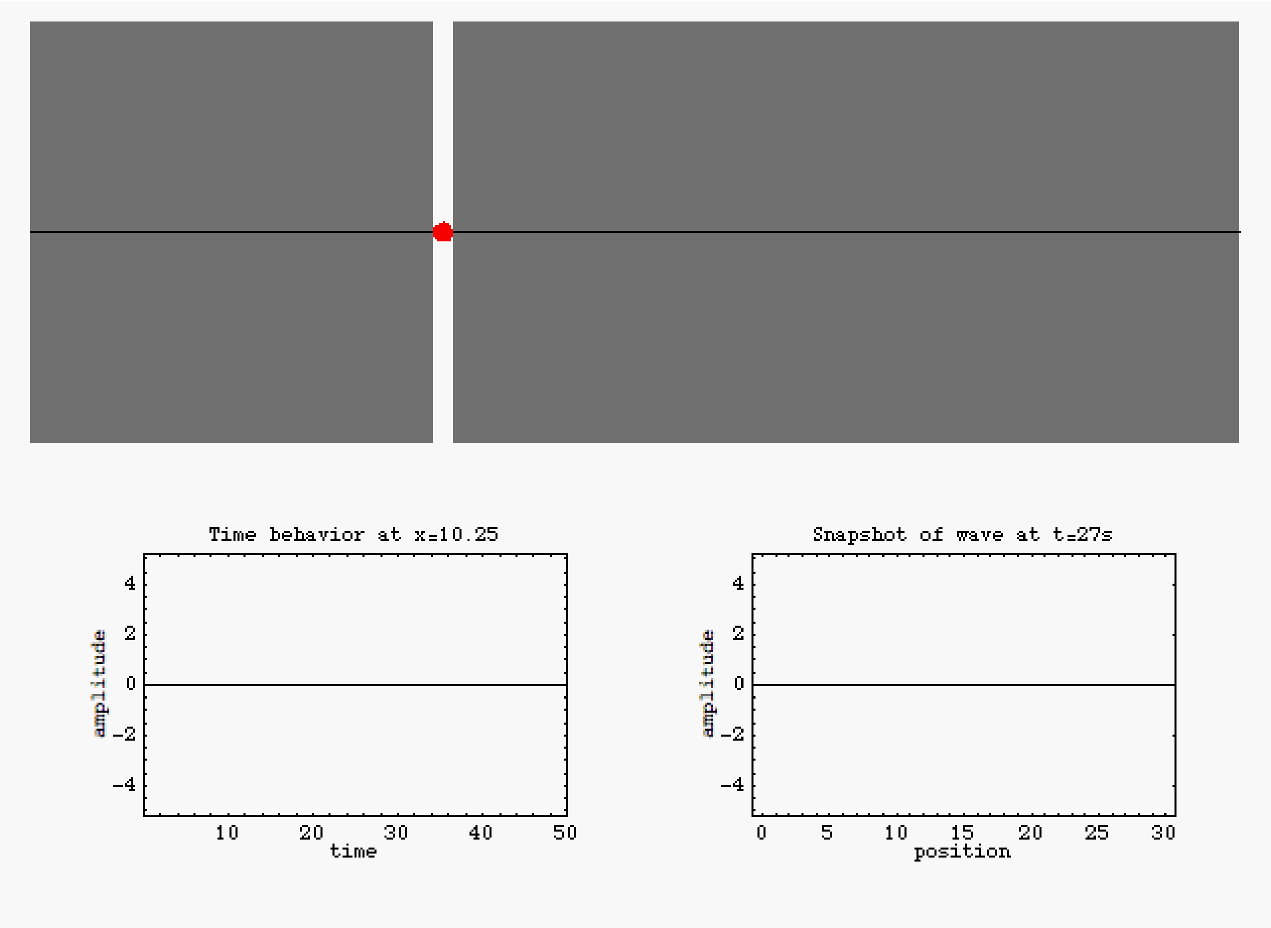
$$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$

Usando $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$ vista anteriormente, e definindo $\boxed{k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}}$

Podemos escrever a equação como:

$$\boxed{y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)}$$

(e como descrever uma onda se movendo na direção -*x* ?)



http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/wave-x-t/wave-x-t.html

Equação da onda

f(x-vt)

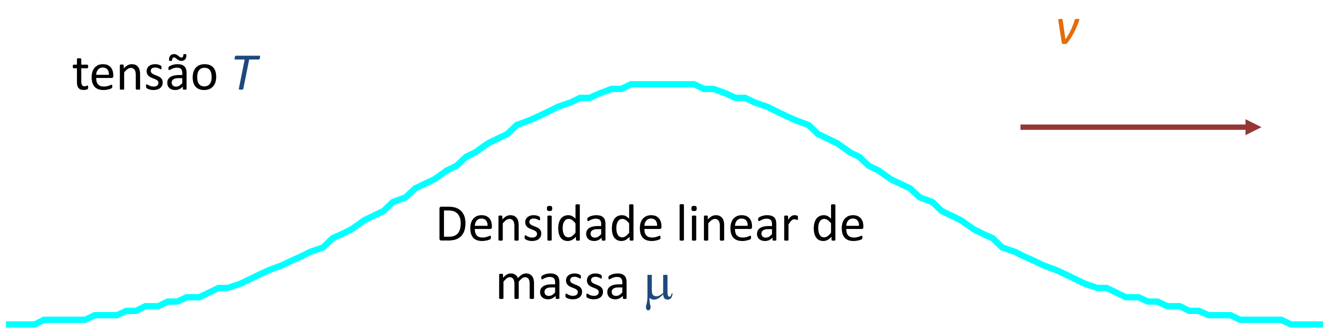
$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Onda em corda

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

Ondas em cordas...

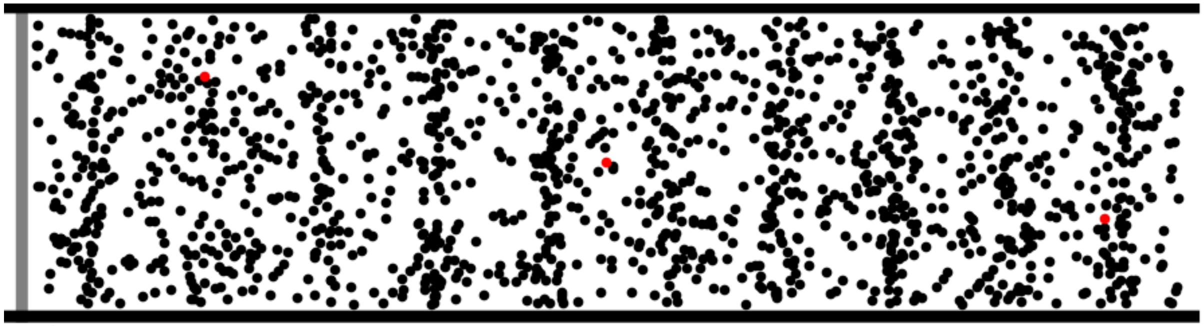
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$



- Aumentando a tensão, aumenta-se a velocidade.
- Aumentando a massa da corda, diminui-se a velocidade.
- **Estes fatos dependem apenas na natureza do meio, e não na amplitude, frequência, etc da onda.**

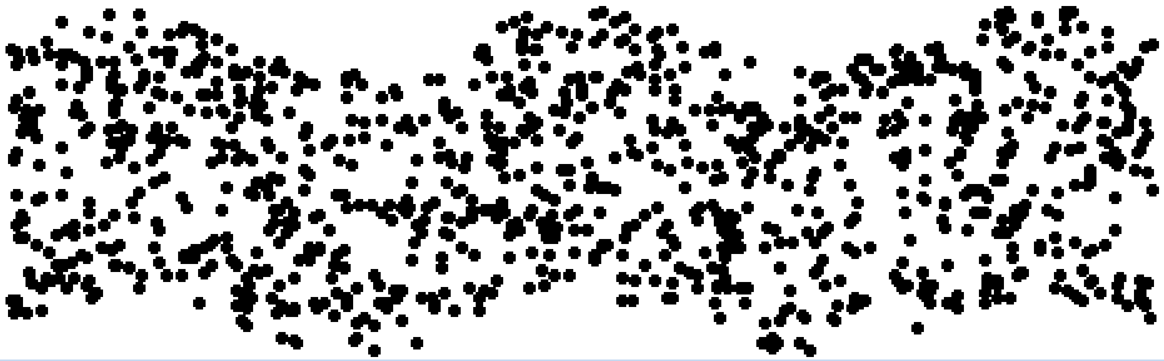
Definições

Longitudinal



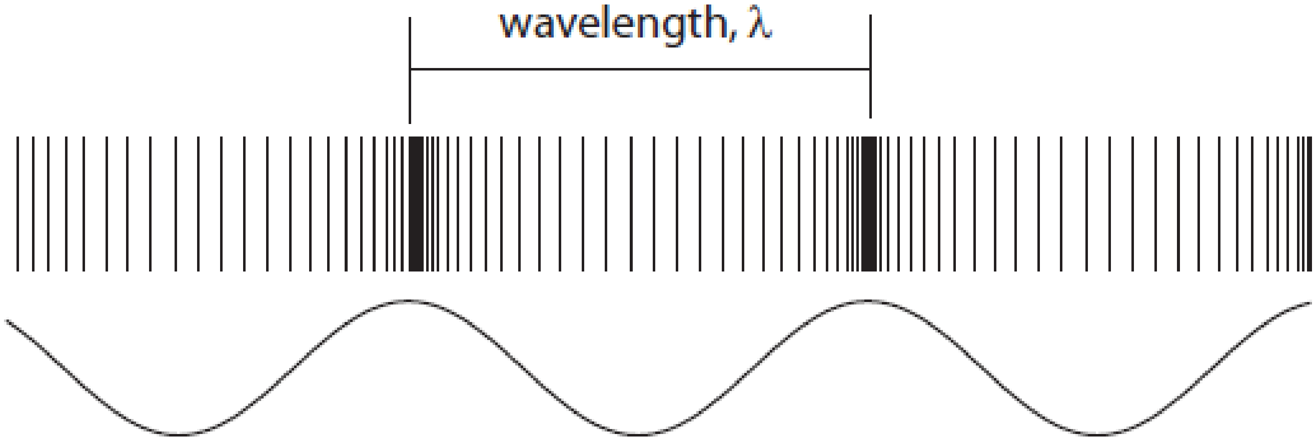
©2011. Dan Russell

Transversal



Deslocamento de partículas pela onda

Deslocamento das partículas relativas à posição de equilíbrio



Para dedução da equação

1- O meio (tecido, água, ar, etc...) é compressível, ou seja, a densidade pode mudar. Isso se reflete na conservação de massa ou equação da continuidade.

2- O meio apresenta inércia, o que é traduzido em uma equação de conservação de momento. Nada mais que a segunda lei de Newton (F = ma).

3 – Aplicar algumas das relações da termodinâmica, o que é expresso pela equação da estado que diz a relação entre pressão e densidade.

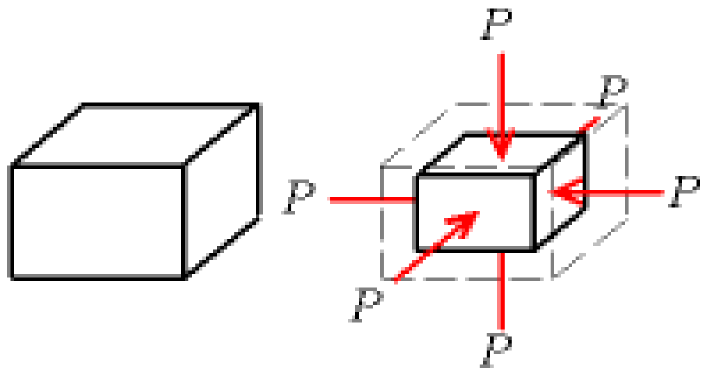
Para dedução da equação

Deslocamento de fluído muda densidade

Mudança de densidade gera mudança de pressão

Variação de pressão produz deslocamento

Módulo de elasticidade volumétrico

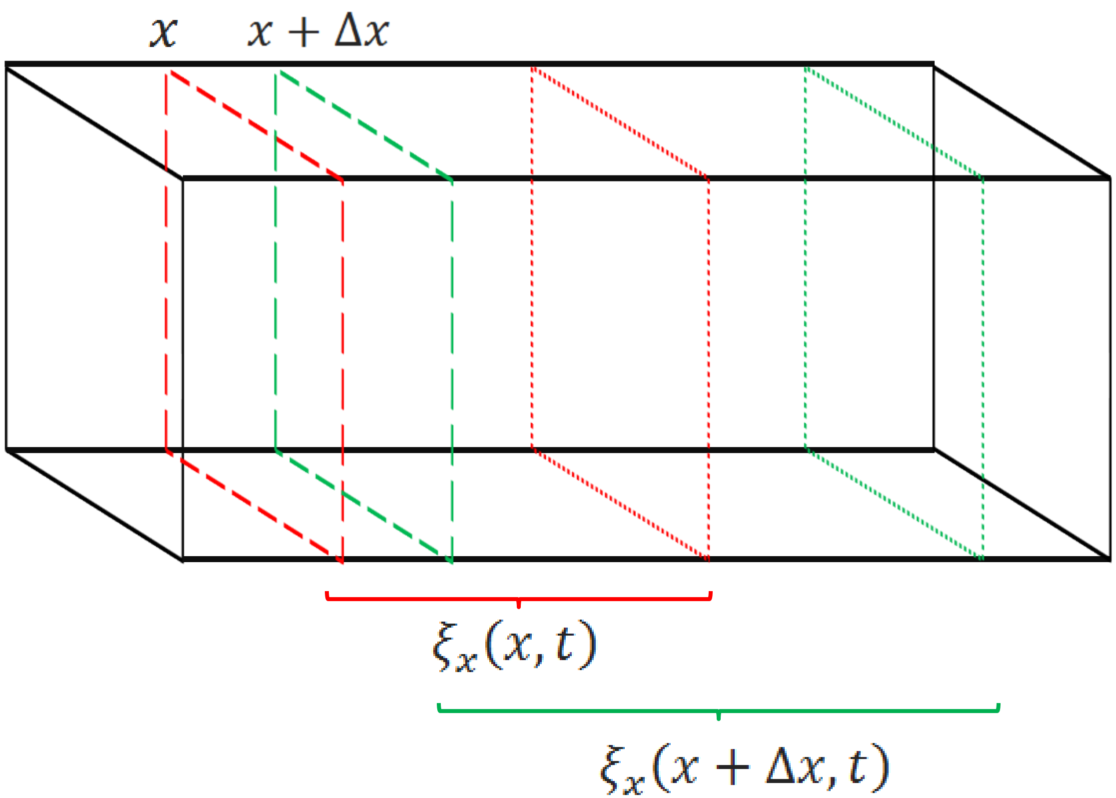


$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V}$$

$$B = \rho \frac{\Delta P}{\Delta \rho}$$

O inverso do módulo volumétrico é conhecido como módulo de compressibilidade do meio.

Deslocamento - Velocidade



$$V = A[(x+\Delta x) - x] \qquad V + \Delta V = A\{\Delta x + [\xi_x(x+\Delta x,t) - \xi_x(x,t)]\}$$

Deslocamento velocidade

$$V + \Delta V = A\{\Delta x + [\xi_x(x + \Delta x, t) - \xi_x(x, t)]\}$$

$$V + \Delta V \approx A\Delta x\left(1 + \frac{\partial \xi_x}{\partial x}\right)$$

$$\Delta V = A\Delta x \frac{\partial \xi_x}{\partial x}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\partial \xi_x}{\partial x}$$

Assumindo que $\rho \gg \Delta\rho$, podemos admitir para algumas situações que $\rho \approx \rho_0$.

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial \xi_x}{\partial x}$$

Deslocamento velocidade

Velocidade das partículas pode ser escrita:

$$\partial \xi_x / \partial t = u_x$$

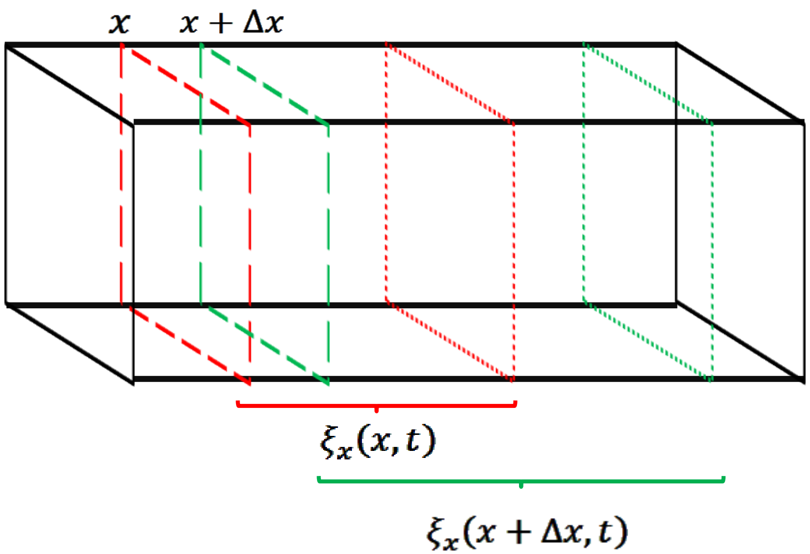
Para facilitar a notação

$$\delta = \Delta \rho$$

$$\Delta \rho = -\rho_0 \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \delta}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Equação da continuidade

Pressão - Deslocamento



A pressão sobre as faces do cubo exerce forças com direção oposta

$$F_e = P(x,t)A \qquad F_d = -P(x+\Delta x\,,t)A$$

$$F = F_e + F_d = [P(x,t) - P(x+\Delta x,t)]A$$

$$P = p + p_0$$

$$F = -A\Delta x \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = -A\Delta x \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

p_0 → pressão para o meio não perturbado

p → acréscimo devido a presença da onda

Pressão - Deslocamento

- Aplicando a segunda lei de Newton ao elemento de volume sendo deslocado devido à passagem da onda

$$F = -A\Delta x \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = -A\Delta x \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

Equação de Euler

Equação da onda

$$\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

Equação da onda

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \qquad B = \rho \frac{\Delta P}{\Delta \rho}$$

Concluímos assim que as variações de pressão obedecem a equação da onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{c}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \mathrm{t}^2}}$$

Com a velocidade do som $\Rightarrow$ $\boxed{c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}.}$

Exercício

- Mostrar que as variações de densidade e deslocamento também obedecem à equação da onda.

Velocidade do som

$$B = \rho \frac{\Delta P}{\Delta \rho} \qquad c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)$$

Assumindo que o meio seja isotérmico, ou seja pressão proporcional à densidade do meio sendo

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \Leftarrow P = \rho \frac{R}{M_m} T$$

$$c = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}$$

Velocidade do som no ar

Em condições normais de temperatura e pressão com T= 0 ºC

$$P_0 = 1{,}013\text{x}10^5\ \text{Nm}^{-2} \qquad \rho_0 = 1{,}293\ \text{kgm}^{-3}$$

$$c = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}} \Rightarrow c_0 = 280\ \text{m/s}$$

Processo adiabático

Condutividade térmica e gradientes de temperatura devido a distúrbios causados pela onda acústica são muito baixos e sob essas condições o comportamento de um gás ideal pode ser descrito por um processo adiabático.

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

γ ➡ Razão entre os calores específicos a pressão constante e volume constante

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{adiabático} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

➡ **$\gamma = 1{,}4$**

$c_0 = 331{,}5$ m/s

Velocidade vs. temperatura

Podemos escrever a equação da velocidade como:

$$c^2 = \gamma \frac{R}{M_m} T = \gamma \frac{P}{\rho}$$

Relação entre a velocidade do som no ar relativa à velocidade c_0

$$\boxed{c = c_0 \sqrt{\frac{T}{273}}}$$

Velocidade do som na água

A compressibilidade e a densidade da água são dependentes da temperatura e pressão

Em temperatura ambiente → ***B* = 2,2 GPa** (Valor aproximado)

$$\rho_{H_20} \approx 10^3 kg/m^3$$

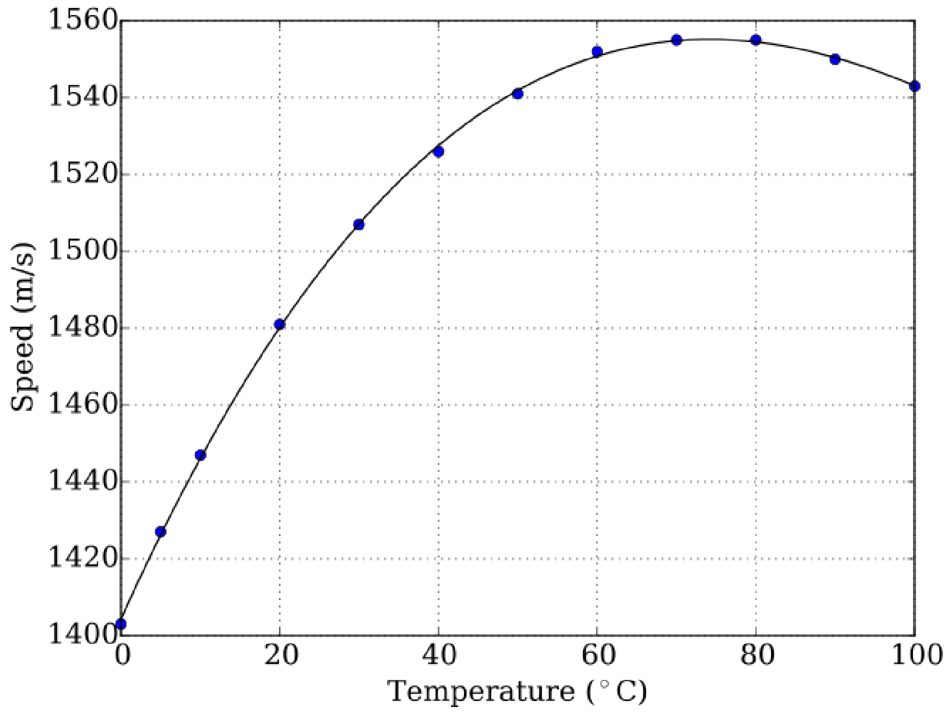
$$\boxed{c_{H_20} \approx 1483\, m/s}$$

Não existe uma teoria simples para prever as variações da velocidade com a temperatura

Velocidade do som na água

$$C_{H20}\,(T) = 1{,}402385 \times 10^{3} + 5{,}038813\,T - 5{,}799136 \times 10^{-2}\,T^{2} + 3{,}287156 \times 10^{-4}\,T^{3} - 1{,}398845 \times 10^{6}\,T^{4} + 2{,}787860 \times 10^{-9}\,T^{5}$$

W. Marczak (1997), Water as a standard in the measurements of speed of sound in liquids J. Acoust. Soc. Am. 102(5) pp 2776-2779



https://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound

Solução da equação da onda

Duas ondas planas infinitas viajando em direções opostas

$$p(x,t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)}$$

$$p_+ = Ae^{j(\omega t - kx)} \qquad p_- = Be^{j(\omega t + kx)}$$

Velocidade das partículas

Aplicando $\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$

$$\vec{u} = u\hat{x} = \frac{A}{\rho_0 c} e^{j(\omega t - kx)} - \frac{B}{\rho_0 c} e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\boxed{u_\pm = \pm \frac{p_\pm}{\rho_0 c}}$$

Impedância acústica (*Z*)

- Grandeza análoga à resistência elétrica.

- Sendo a diferença de pressão **(*p*)** devido a passagem da onda análoga à diferença de potencial elétrico.

- Velocidade adquirida pelas partículas **(*u*)** no meio é análoga a corrente elétrica.

$$\boxed{z = \frac{p}{u}}$$

- **Para uma onda plana:**

$$z = \frac{p}{u} \qquad u_{\pm} = \pm \frac{p_{\pm}}{\rho_0 c}$$

$$\boxed{z_{\pm} = \pm \rho_0 c}$$

Impedância acústica

Body Tissue	Acoustic Impedance (10^6 Rayls)
Air	0.0004
Lung	0.18
Fat	1.34
Liver	1.65
Blood	1.65
Kidney	1.63
Muscle	1.71
Bone	7.8

Rayl → kg/(m².s)

Homenagem a Lord Rayleigh

Intensidade

Intensidade instantânea de uma onda acústica

$$I(t) = p(t)u(t)$$

Intensidade média temporal

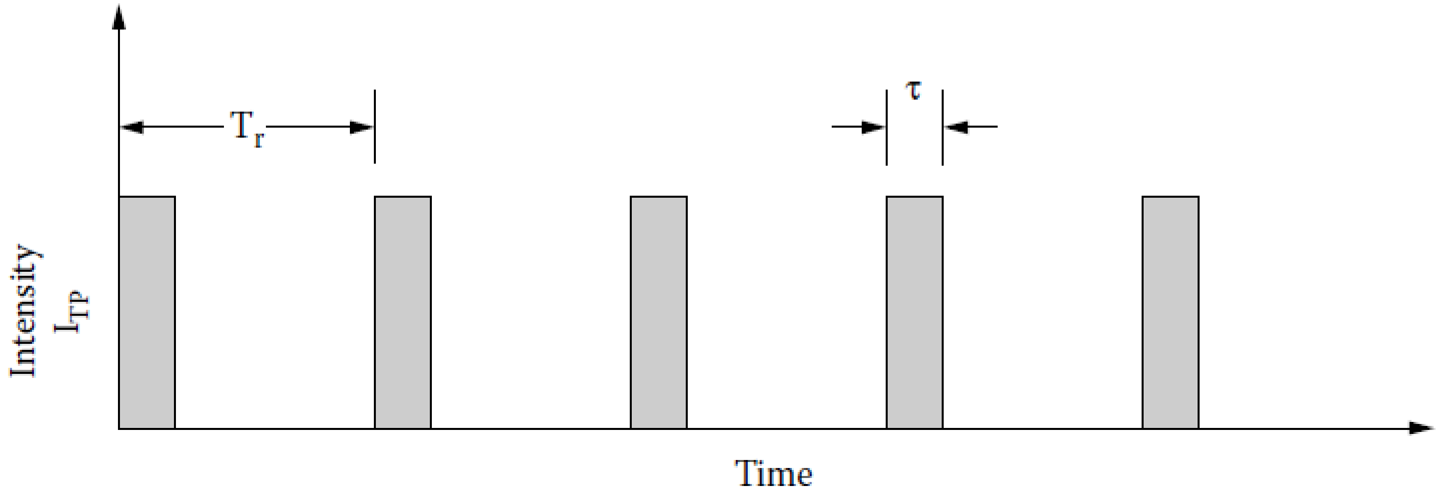
$$I = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{sen}(\omega t)u\,\mathrm{sen}(\omega t)dt = \frac{1}{2}pu$$

$$u_\pm = \pm\frac{p_\pm}{\rho_0 c}$$

$$\boxed{I = \frac{p^2}{2\rho_0 c}}$$

Bioefeitos e intensidade

Grande parte dos equipamentos de ultrassom são pulsados do tipo pulso-eco.



τ/T_r = pulse duration/pulse repetition period
= duty cycle

I_{TP} = temporal peak intensity,
I_{TA} = temporal averaged intensity = $(\tau/T_r)\ I_{TP}$

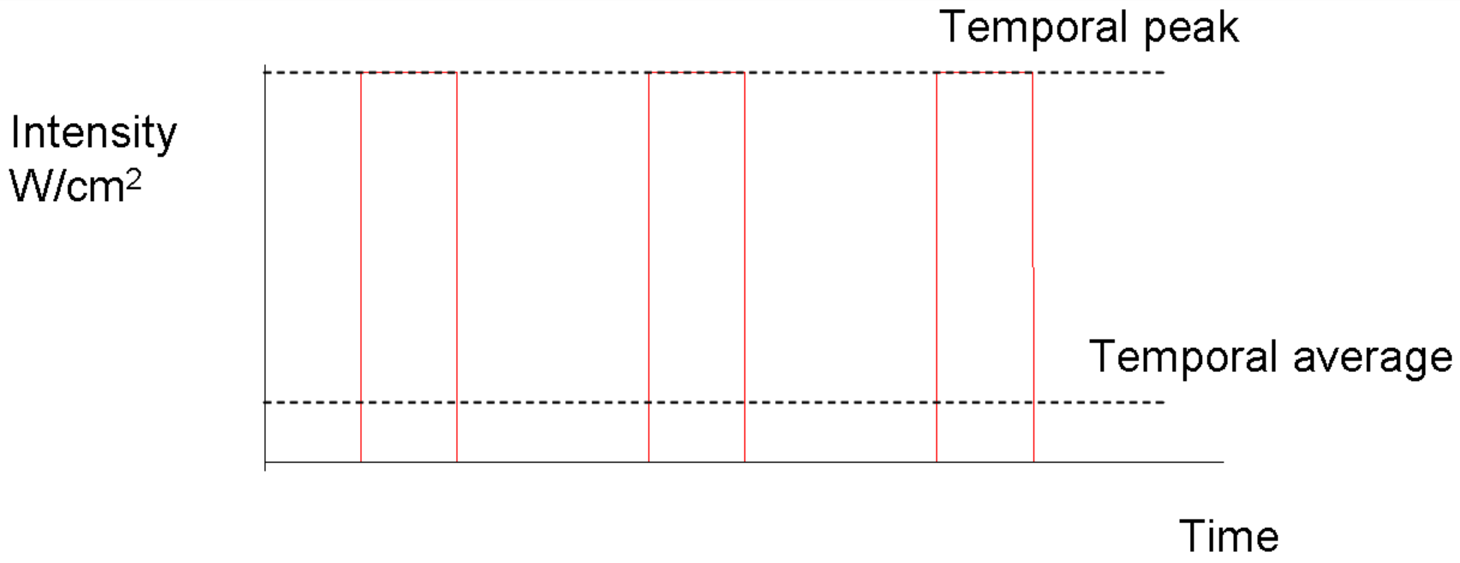
Bioefeitos e intensidade

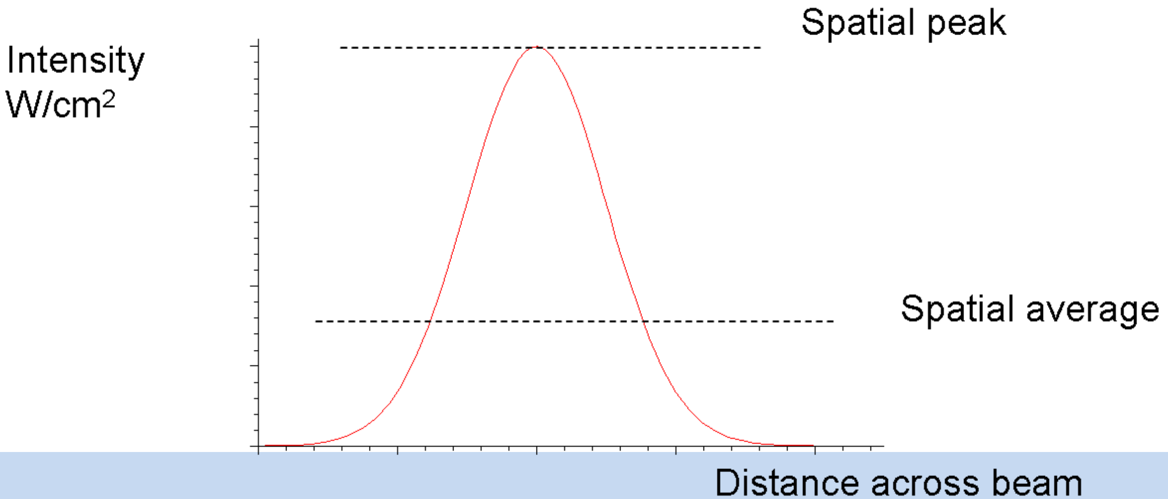
- A intensidade em um pulso de ultrassom não é espacialmente uniforme.

- Para se falar de bioefeitos é preciso especificar qual definição é usada.

- Por exemplo:
  - **Intensidade média espacial e média temporal.**
  - **Intensidade de pico espacial e média temporal.**

Intensidade





Intensidade acústica

Table 9-1 Typical acoustical output values for ultrasound scanners

Operating mode	Pr	I(SPTA)	I(SPPA)	Power
B-Scan imaging	1.68 MPa	18.7 mW/cm^2	174 W/cm^2	18 mW
M-mode	1.68 MPa	73 mW/cm^2	174 W/cm^2	3.9 mW
Pulsed doppler	2.48 MPa	1140 mW/cm^2	288 W/cm^2	30.7 mW
Color flow	2.59 MPa	234 mW/cm2	325 W/cm2	80.5 mW

Acoustical output levels from diagnostic ultrasound equipment, American Institute of Ultrasound in Medicine, 14750 Sweitzer Lane, Suite 100, Laurel, MD, 20707-5906, 1992. (Primarily a compilation of data, but accompanied by some explanations of the data).

$$I_{SATA} \approx \text{Potência}$$

Força radiação acústica

Para uma onda plana a força de radiação acústica por unidade de área ou pressão de radiação acústica:

$$F_{alvo} = a\frac{I}{c}$$

a → constante que depende das propriedades acústicas do alvo e sua geometria.

Para um material com alta diferença de impedância acústica como algum metal em água temos *a*=2. Se o material for um absorvedor perfeito então *a*=1.

Exercício: Mostre essa última observação.

Força de radiação acústica

Levitador e pinça acústicos

- Pinça acústica ver:
- http://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=pincas-acusticas&id=010165120711#.Vdtp7vlViko
- Levitador acústico ver:
- http://www5.usp.br/87102/cientistas-desenvolvem-novas-tecnicas-para-levitar-materiais/

Força radiação acústica

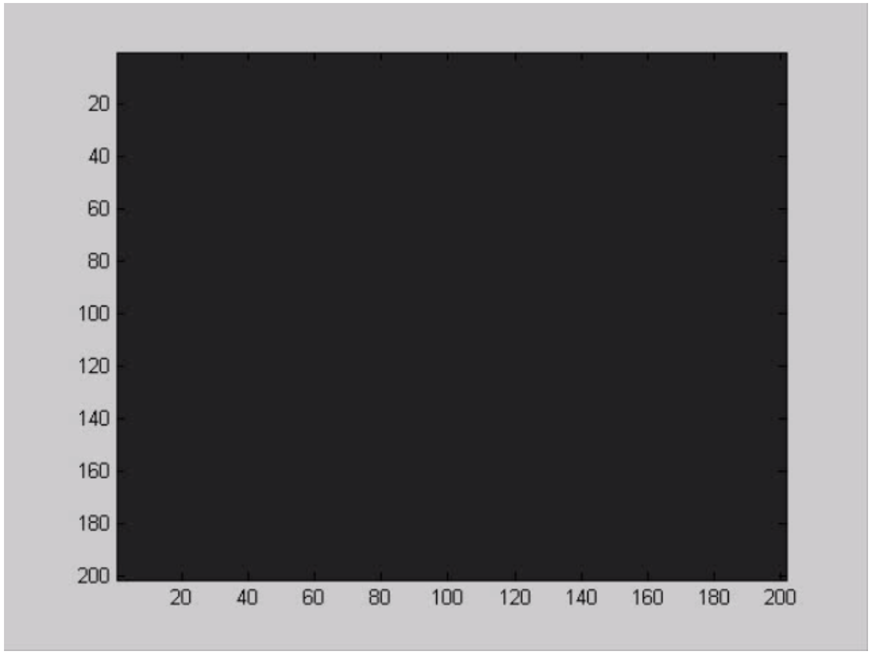
- Em um tecido essa força de radiação acústica por unidade de volume pode ser escrita como:

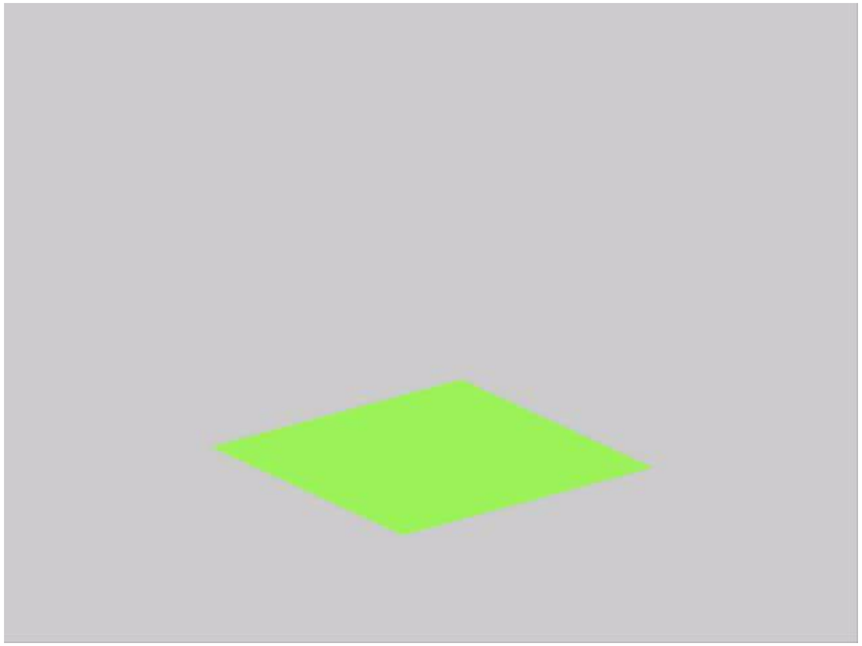
$$F_{meio} = \frac{2\alpha I}{c}$$

sendo α o coeficiente de atenuação do tecido em Np/m

Técnicas de imagem por força de radiação acústica

Técnicas de imagem por força de radiação acústica



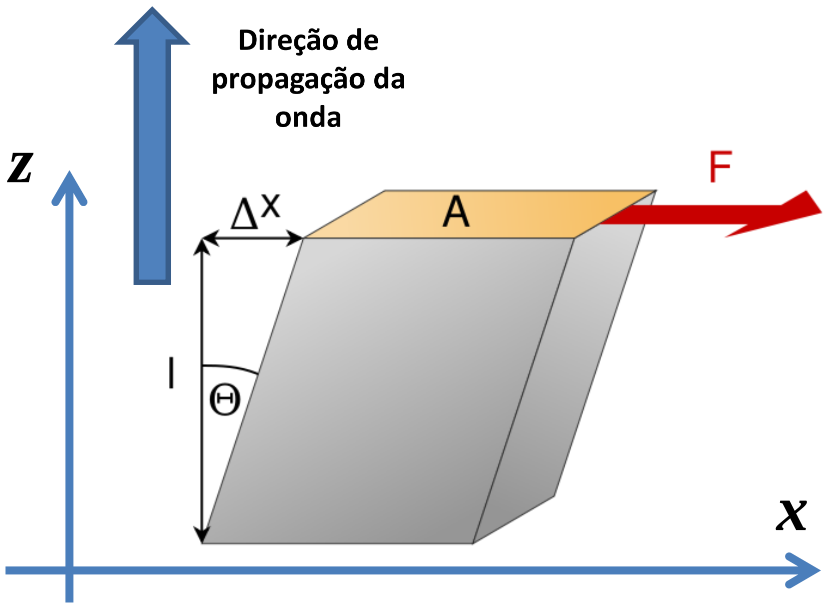


Velocidade onda cisalhamento

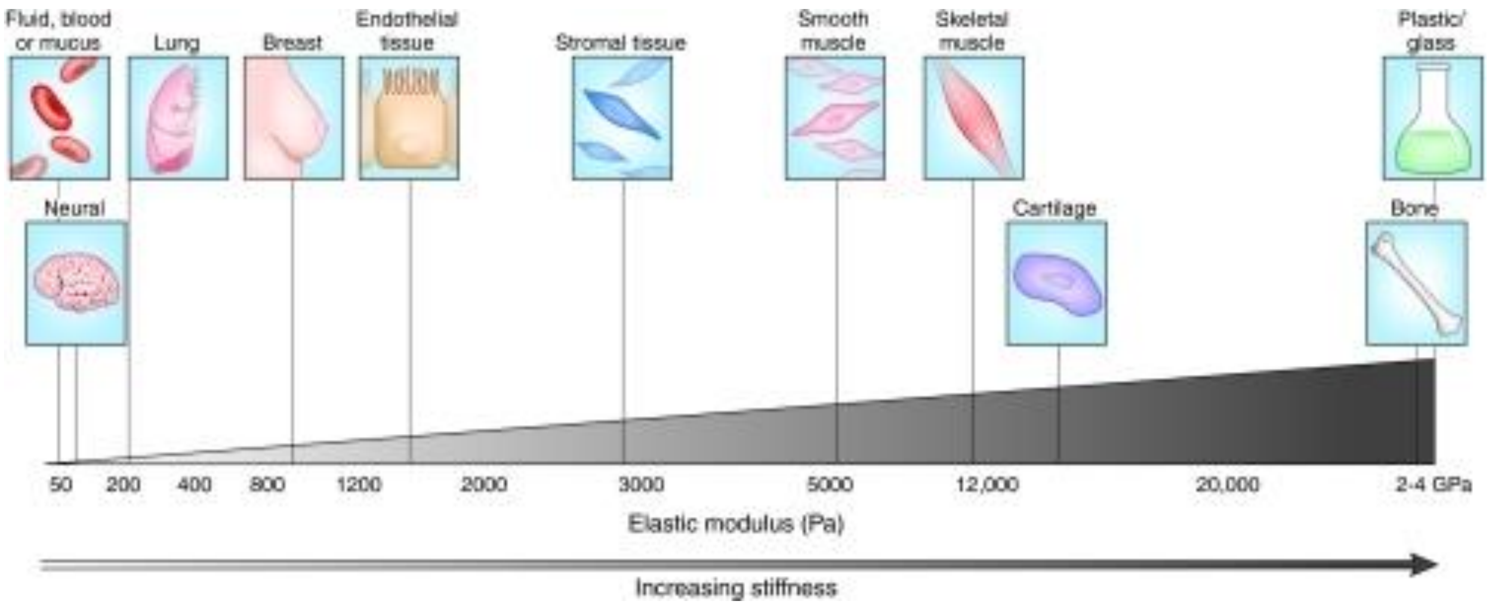
$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2}, \qquad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

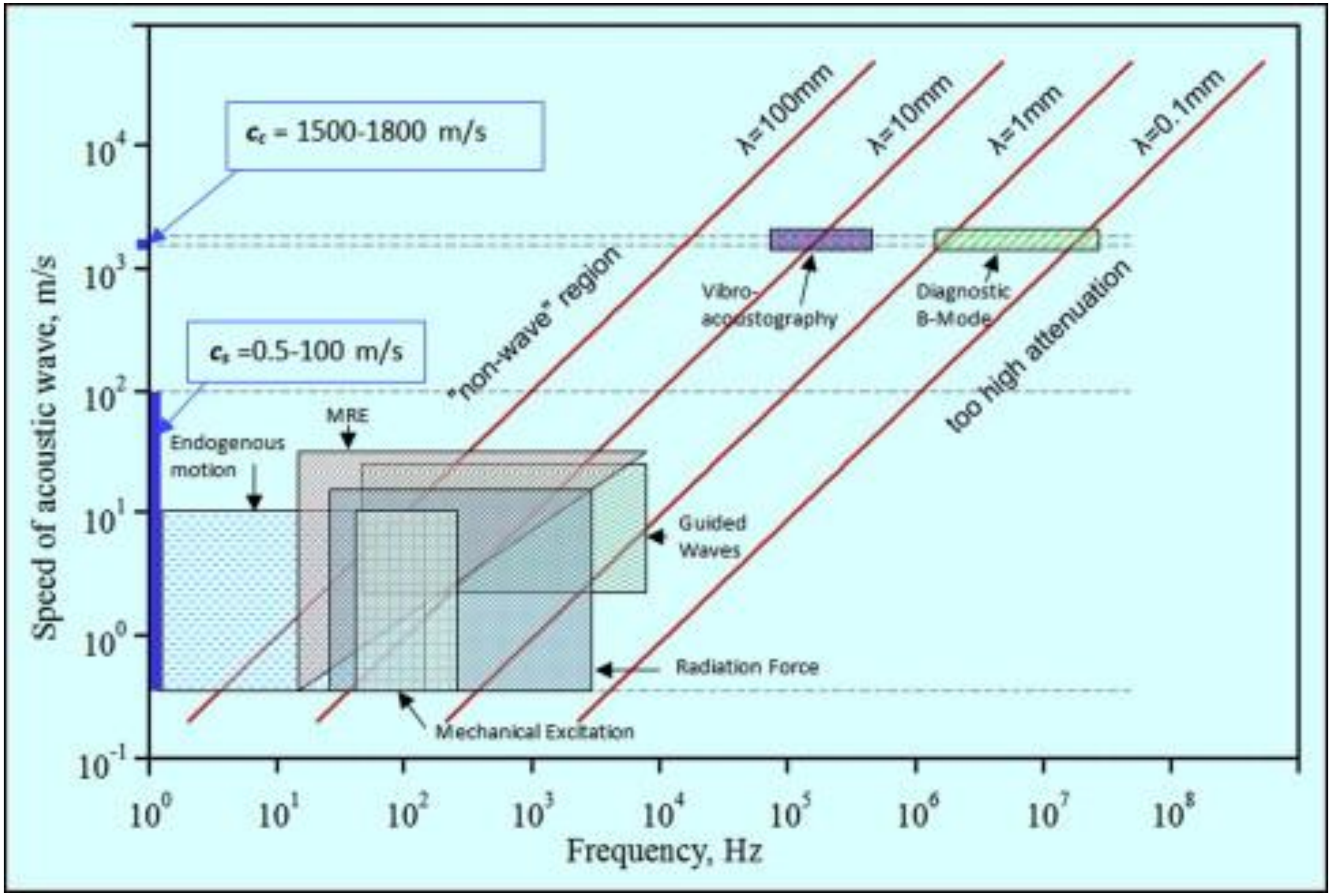
$\mu \rightarrow$ **módulo de cisalhamento**

$$\mu = \frac{F/A}{\Delta x / l}$$



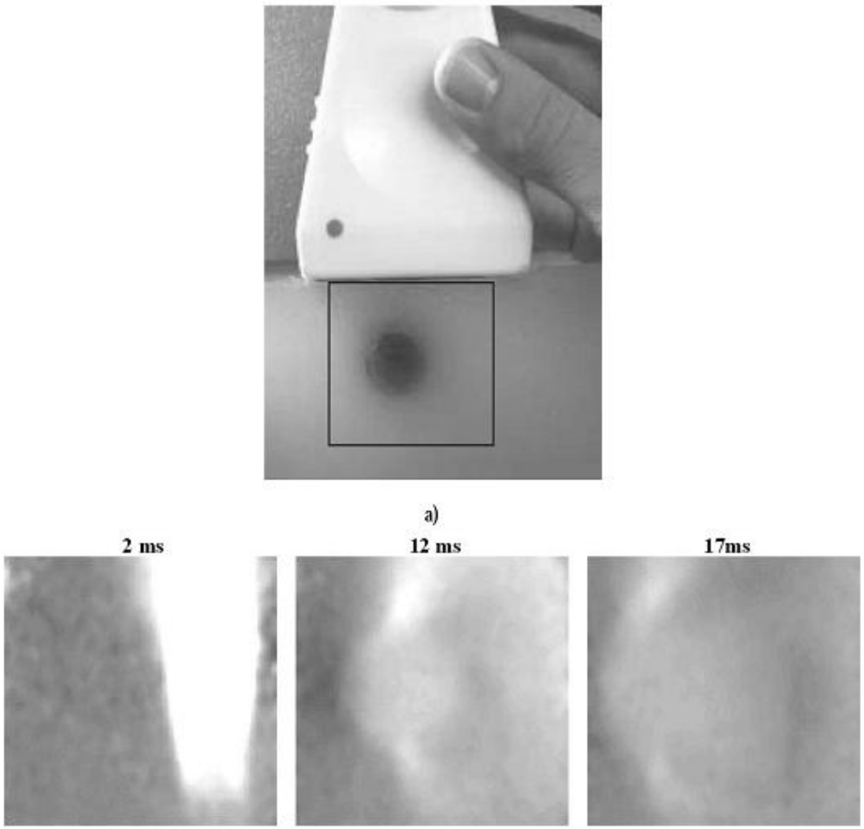
Modulo elástico tecido

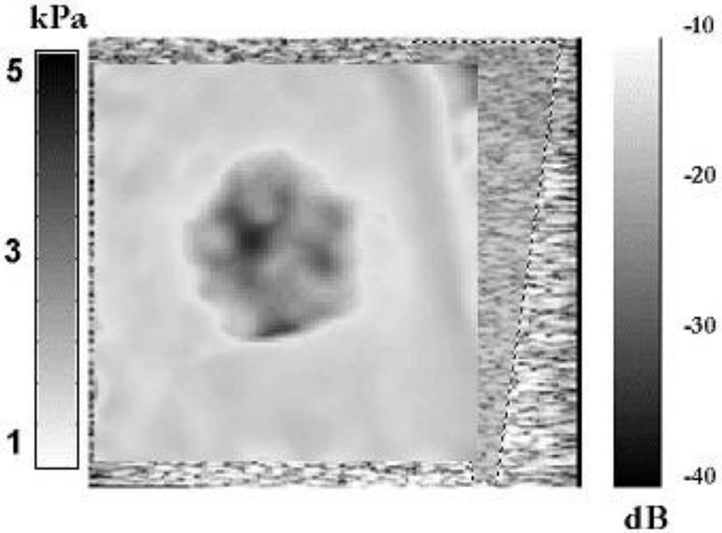




J. Bercoff, S. Chaffai, M. Tanter, L. Sandrin, S. Catheline, M. Fink, J. L. Gennisson, e M. Meunier, "In vivo breast tumor detection using transient elastography", *Ultrasound Med Biol*, vol. 29, nº 10, p. 1387–1396, out. 2003.

Técnicas de imagem por força de radiação acústica

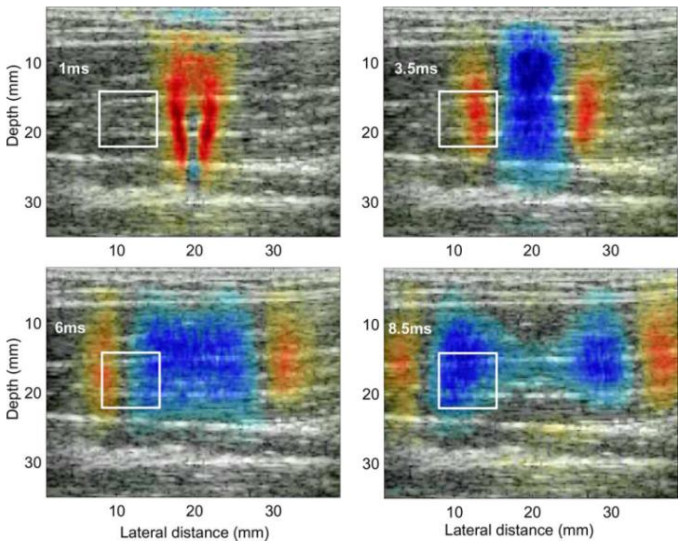


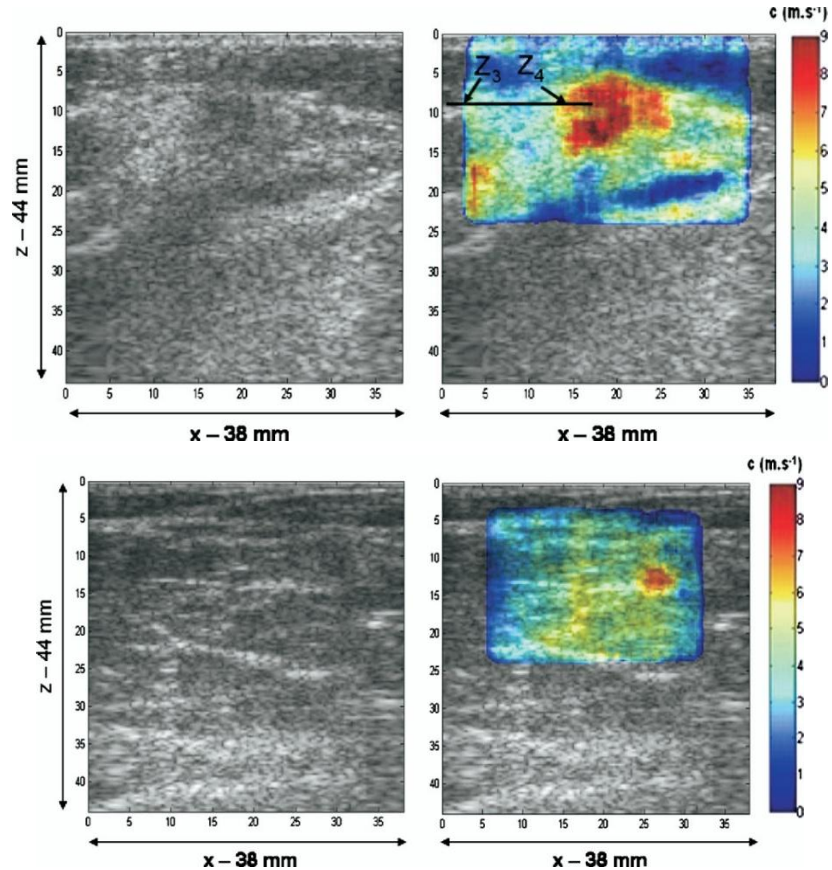


Bercoff J. et al. IEEE TUFFC, 2004.

Imagens de shear wave

Câncer de mama (mapa de velocidade ~ shear wave speed)





$$E = 2(1+\nu)\rho c_{sw}^2$$