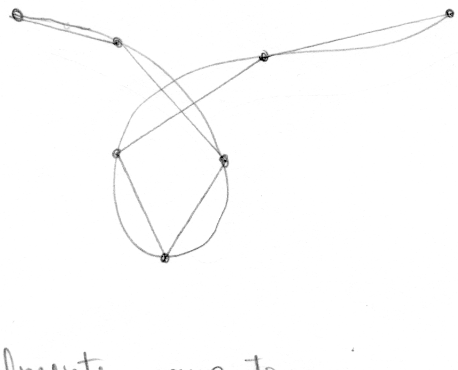
CÁLCULO II - 3 - COMPRIMENTO DE ARCO

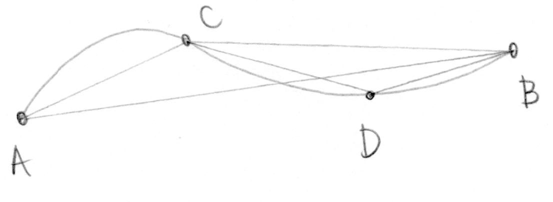
Em vários contextos no estudo de curvas, a questão do comprimento de uma dada curva surge. Nesta aula, construiremos o conceito de <u>comprimento de arco</u> que permite a definição de uma função que mede o comprimento de uma curva, bem como estudaremos propriedades relevantes desta função.

Nosso primeiro passo consiste em precisar a noção de comprimento de uma curva, procederemos como que se tivessemos que medi-la com uma régua. Para tanto, precisamos inicialmente marcar alguns pontos sobre a curva, que usamos para construir um polígono, cujas arestas podemos medir com a régua e obter uma aproximação para o comprimento da curva em questão.



uma curva com um polígono inscrito.

Naturalmente, quanto mais pontos considerarmos, melhor será a aproximação fornecida pelo polígono inscrito.



Note que na figura anterior que conforme adicionamos pontos maior é o comprimento do polígono:

$$\|\overline{AB}\| < \|\overline{ACB}\| < \|\overline{ACDB}\|$$

Por outro lado, a nossa intuição nos diz que o comprimento de nenhum tal polígono pode exceder o comprimento da curva. Dessa forma qualquer definição razoável para o comprimento de uma curva deve fornecer um número que é um <u>majorante</u> (cota superior) do comprimento de todos os polígonos inscritos. De fato, devemos considerá-lo como o <u>supremo</u> (menor cota superior) do comprimento de todos os polígonos inscritos.

Há, no entanto, uma <u>sutileza</u> importante na forma que introduzimos o comprimento de uma curva acima, ele depende da <u>existência</u> do supremo dos comprimentos dos polígonos inscritos. Apesar de a maioria das curvas que surgem em considerações práticas satisfazerem tal hipótese, existem algumas curvas para as quais não existe um majorante para o comprimento dos polígonos inscritos. Por isso precisamos classificar as curvas em duas categorias:

* <u>retificáveis</u>: curvas cujo comprimento dos polígonos inscritos é limitado
* <u>não-retificáveis</u>: curvas cujo comprimento dos polígonos inscritos

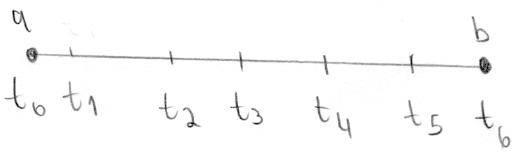
não é limitado.

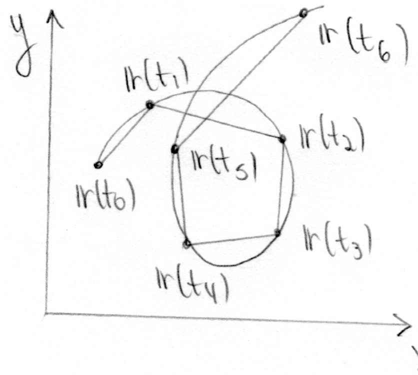
Seja uma curva γ parametrizada pela função vetorial: $\mathbb{r}: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, contínua, considere uma partição P do intervalo $[a,b] \subseteq D$.

$$P = \{ t_i \,;\, 0 \leqslant i \leqslant m \,;\, i, m \in \mathbb{N},\ t_0 = a,\ t_m = b,\ t_i < t_{i+1} \}$$

e denote por $\Pi(P)$ o polígono cujos vértices são os pontos $\mathbb{r}(t_0), \dots, \mathbb{r}(t_n)$.

Por exemplo, se $n = 2$ e $m = 6$, a figura abaixo fornece uma representação gráfica da partição de $[a,b]$ e do polígono correspondente:





O comprimento de qualquer um dos lados do polígono $\Pi(P)$ é:

$$\| \mathbb{r}(t_i) - \mathbb{r}(t_{i-1}) \|, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

de forma que o comprimento total do polígono é:

$$|\Pi(P)| = \sum_{i=1}^{m} \| \mathbb{r}(t_i) - \mathbb{r}(t_{i-1}) \|$$

Com isso podemos finalmente formular a definição de comprimento de arco:

Definição 3.1 : "Se existir um $M \in \mathbb{R}_+$, tal que $|\Pi(P)| \leq M$ para qualquer partição P de $[a,b]$, dizemos que a curva γ é retificável e o seu comprimento de arco definido como

$$\Lambda(a,b) = \sup_P |\Pi(P)|.$$

Caso não exista tal $M \in \mathbb{R}_+$, dizemos que a curva é não-retificável."

Claramente, se existir um $M \in \mathbb{R}_+$ como na definição 3.1, temos que para qualquer partição P de $[a,b]$ deve ser válido que:

$$|\Pi(P)| \leq \Lambda(a,b) \leq M$$

visto que o supremo não pode exceder nenhum majorante.

Teorema 3.2 : "Seja γ uma curva parametrizada por $\mathbb{r}: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e considere o vetor velocidade $\mathbb{v}(t) = \mathbb{r}'(t)$, cujo módulo é denotado por $v(t) = \|\mathbb{v}(t)\|$. Se $v: [a,b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for contínua, então a curva γ é retificável e o seu comprimento de arco $\Lambda(a,b)$ satisfaz a desigualdade:

$$\Lambda(a,b) \leq \int_a^b v(t)\,dt \text{."}$$

Demonstração:

Para cada partição P de $[a,b] \subseteq D$ temos que:

$$|\Pi(P)| = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{m} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\, \mathbf{r}'(t) \right\|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\, \mathbf{v}(t) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\, \|\mathbf{v}(t)\| = \int_a^b v(t)\, dt$$

Onde na segunda passagem exploramos o fato de $\mathbf{r}'(t)$ ser contínua para invocar o segundo teorema fundamental do cálculo (teorema 2.16), enquanto que a desigualdade é uma conseqüência do teorema 2.18. Portanto,

$$|\Pi(P)| \leqslant \int_a^b v(t)\, dt$$

para qualquer partição P de $[a,b]$. Conseqüentemente, o número $\int_a^b v(t)\, dt$ é um majorante para o conjunto de todos os $|\Pi(P)|$.

Demonstramos, pois, que a curva γ é retificável e ao mesmo tempo que,

$$\Lambda(a,b) \leqslant \int_a^b v(t)\, dt.$$

$\boxtimes$

O teorema 3.2 nos ensina que o comprimento de arco de uma curva γ, parametrizada por uma função $\mathbf{r} : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ não pode exceder a integral do módulo da velocidade, $\|\mathbf{r}'(t)\|$.

1 - Aditividade do Comprimento de Arco

Nesta seção demonstramos um daqueles resultados que são intuitivamente óbvios, mas cujas demonstrações não são triviais. A saber, demonstraremos que se uma curva retificável for dividida em dois pedaços, o comprimento total da curva é a soma dos comprimentos dos pedaços em que foi dividida. Essa propriedade é denominada aditividade do comprimento de arco.

Teorema 3.3: "Seja γ uma curva retificável parametrizada por uma função vetorial $\mathbf{r}: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ com comprimento de arco $\Lambda(a,b)$. Se $c \in (a,b)$, denote por γ_1 e γ_2 as curvas parametrizadas por $\mathbf{r}: [a,c] \to \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{r}: [c,b] \to \mathbb{R}^n$, respectivamente. Então γ_1 e γ_2 são retificáveis e, se $\Lambda(a,c)$ e $\Lambda(c,b)$ denotarem seus respectivos comprimentos de arco, tem-se que:

$\Lambda(a,b) = \Lambda(a,c) + \Lambda(c,b)$."

Demonstração:

Sejam P_1 e P_2 partições de $[a,c]$ e $[c,b]$, respectivamente. Claramente, $P = P_1 \cup P_2$ fornece uma partição de $[a,b]$, para a qual temos que

$$|\Pi(P_1)| + |\Pi(P_2)| = |\Pi(P)| \leq \Lambda(a,b) \qquad (*)$$

em virtude da definição 3.1. Mostramos, pois, também devido à definição 3.1 que γ_1 e γ_2 são retificáveis, pois $|\Pi(P_1)|$ e $|\Pi(P_2)|$ são limitados.

$(*) \Rightarrow |\Pi(P_1)| \leqslant \Lambda(a,b) - |\Pi(P_2)|$.

Fixando P_2 e deixando P_1 variar sobre todas as possíveis partições de $[a,c]$, concluímos que $\Lambda(a,b) - |\Pi(P_2)|$ é um majorante para todos os números $|\Pi(P_1)|$, que por definição, não pode ser menor do que $\Lambda(a,c) = \sup\limits_{P_1} |\Pi(P_1)|$. Logo,

$$\Lambda(a,c) \leqslant \Lambda(a,b) - |\Pi(P_2)|$$

$$\Rightarrow |\Pi(P_2)| \leqslant \Lambda(a,b) - \Lambda(a,c).$$

Demonstrando que $\Lambda(a,b) - \Lambda(a,c)$ é um majorante de $|\Pi(P_2)|$, novamente da definição de supremo, temos que

$$\Lambda(c,b) = \sup_{P_2} |\Pi(P_2)| \leqslant \Lambda(a,b) - \Lambda(a,c)$$

$$\Rightarrow \Lambda(a,c) + \Lambda(c,b) \leqslant \Lambda(a,b).$$

Para demonstrarmos a desigualdade recíproca, consideramos uma partição arbitrária P de $[a,b]$. Se adicionarmos o ponto c a P, ou seja, considerarmos a partição $\tilde{P} = P \cup \{c\}$, obtemos uma partição $P_1 \subset \tilde{P}$ de $[a,c]$ e uma partição $P_2 \subset \tilde{P}$ de $[c,b]$ tais que:

$$|\Pi(P)| \leqslant |\Pi(\tilde{P})| = |\Pi(P_1)| + |\Pi(P_2)| \leqslant \Lambda(a,c) + \Lambda(c,b)$$

Demonstrando que $\Lambda(a,c) + \Lambda(c,b)$ é um majorante para $|\Pi(P)|$. Logo

$$\Lambda(a,b) = \sup_{P} |\Pi(P)| \leqslant \Lambda(a,c) + \Lambda(c,b).$$

Combinando as duas desigualdades demonstramos a tese. $\boxtimes$

2 - A Função Comprimento de Arco

Seja γ uma curva parametrizada por uma função vetorial $\mathbb{r}: D \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^n$, cujo argumento corresponde ao tempo. Uma questão corriqueira é a seguinte:

Q: Quanto se moveu uma partícula ao longo de γ em um tempo t?

Uma maneira de respondermos tal questão em geral consiste em utilizar o comprimento de arco para definir a seguinte função

$$s: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \,, \quad t \longmapsto s(t) = \Lambda(t_0, t) \,, \quad \forall\, t > t_0 \in D$$

$$\text{com} \quad s(t_0) = 0.$$

onde o requisito $s(t_0) = 0$ simplesmente reflete a hipótese de que o movimento se inicia em t_0.

Teorema 3.4: " Para qualquer curva retificável, a função comprimento de arco $s(t)$ é monotonicamente crescente em $[t_0, t_f] \subseteq D$, i.e., $s(t_1) \leqslant s(t_2)$ se $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_f$. "

Demonstração: Suponha $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_2$, então

$$s(t_2) - s(t_2) = \Lambda(t_0, t_2) - \Lambda(t_0, t_1) = \Lambda(t_1, t_2)$$

devido ao teorema 3.3. Como $\Lambda(t_1, t_2) \geqslant 0$ por definição, concluímos a veracidade da tese. ▨

O próximo teorema estabelece a existência da derivada da função comprimento de arco e a relaciona com a velocidade da partícula.

Teorema 3.5: " Seja γ uma curva retificável parametrizada por uma função vetorial $\mathbb{r} : [t_0, t_f] \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^n$ e denote a norma da velocidade por: $\| \mathbb{r}'(t) \| = v(t)$. Se $s(t)$ for a função comprimento de arco associada à curva γ então $s(t)$ é diferenciável e $s'(t) = v(t)$, $\forall t \in (t_0, t_f)$. "

Demonstração: Introduza a função

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau$$

Do primeiro teorema fundamental do cálculo segue que $f'(t) = v(t)$.

Queremos, então demonstrar que $s'(t) = v(t)$. Para tanto consideramos

$$\left\| \frac{\mathbb{r}(t+h) - \mathbb{r}(t)}{h} \right\| \quad \text{com} \quad h > 0, \quad t \in (t_0, t_f)$$

Como o segmento ligando os pontos $\mathbb{r}(t+h)$ e $\mathbb{r}(t)$ pode ser interpretado como o polígono aproximador para o arco unindo tais pontos, temos que:

$$\|\mathbb{r}(t+h) - \mathbb{r}(t)\| \leq \Lambda(t, t+h) = \Lambda(t_0, t+h) - \Lambda(t_0, t)$$

$$= s(t+h) - s(t)$$

Por outro lado o teorema 3.2 afirma que

$$\Lambda(t, t+h) \leq \int_t^{t+h} v(\tau)\, d\tau$$

Logo,

$$\left\| \frac{\mathbb{r}(t+h) - \mathbb{r}(t)}{h} \right\| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(\tau)\, d\tau = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Argumentos similares demonstram que as desigualdades acima também são validas para $h < 0$. Tomando, pois, o limite $h \to 0$, e notando que:

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{\mathbb{r}(t+h) - \mathbb{r}(t)}{h} \right\| = \left\| \lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{r}(t+h) - \mathbb{r}(t)}{h} \right\| = \|\mathbb{v}(t)\| = v(t)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = v(t)$$

podemos invocar o teorema do confronto para concluir que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = v(t) \Rightarrow s'(t) = v(t).$$

$\blacksquare$

Usando o resultado do teorema 3.3, a saber, que $s'(t) = v(t)$ em conjunto com o segundo teorema fundamental do cálculo, podemos calcular o comprimento de arco ao integrarmos a norma da velocidade. Conseqüentemente, a distância percorrida por uma partícula em movimento ao longo da curva γ no intervalo $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$ é

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

Como: $s(t_2) - s(t_1) = \Lambda(t_0, t_2) - \Lambda(t_0, t_1) = \Lambda(t_1, t_2)$

$$\Rightarrow \Lambda(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Exemplo 3.6: "(a) Comprimento de um arco circular: seja um círculo de raio r e centro na origem parametrizado em coordenadas polares por:

$$\mathbb{r}(\theta) = r\cos\theta\, \mathbb{e}_1 + r\sin\theta\, \mathbb{e}_2$$

$$\Rightarrow \mathbb{v}(\theta) = \mathbb{r}'(\theta) = -r\sin\theta\, \mathbb{e}_1 + r\cos\theta\, \mathbb{e}_2$$

$$\Rightarrow v(\theta) = \| \mathbb{w}(\theta) \| = \sqrt{r^2 \sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta} = r$$

Logo, o comprimento do arco compreendido entre θ_1 e θ_2 é

$$\Lambda(\theta_1, \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} v(\theta)\, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r\, d\theta = r(\theta_2 - \theta_1)$$

ou seja, o comprimento de um arco de círculo é proporcional ao ângulo que subentende e ao raio do círculo.

(b) <u>Comprimento do gráfico de uma função real</u>: seja $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, seu gráfico é por definição o conjunto

$$\{ (x, f(x)) \mid x \in [a,b] \}$$

que pode ser tratado como uma curva parametrizada por

$$\mathbb{r}: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ , \quad t \mapsto \mathbb{r}(t) = t\, \mathbb{e}_1 + f(t)\, \mathbb{e}_2$$

$$\Rightarrow \mathbb{w}(t) = \mathbb{r}'(t) = \mathbb{e}_1 + f'(t)\, \mathbb{e}_2$$

$$\Rightarrow v(t) = \| \mathbb{w}(t) \| = \sqrt{1 + f'^2(t)}$$

Logo, o comprimento do gráfico de f correspondente ao intervalo $[a,x]$ é

$$s(x) = \int_a^x v(t)\, dt = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt \ . \ //$$

3 – Reparametrização de Curvas por Comprimento de Arco

Muitas vezes em aplicações práticas é conveniente que parametrizemos uma dada curva pelo seu comprimento de arco. Seja, pois, uma curva γ parametrizada por $\mathbb{r} : [a,b] \subset \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \mathbb{r}(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\, \mathbb{e}_i$, queremos parametrizá-la com respeito ao seu comprimento do arco, para tanto:

1) Encontramos a função comprimento de arco

$$s(t) = \int_a^t \| \mathbb{r}'(\tau) \| \, d\tau$$

2) Invertemos (se possível) $s(t)$, encontrando

$$t : [0, \ell] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,, \quad t \mapsto t(s)$$

3) Fazemos a composição de $\mathbb{r}(t)$ com $t(s)$ para obter:

$$\tilde{\mathbb{r}}(s) = \mathbb{r}[t(s)] = \sum_{i=1}^{n} r_i(t(s))\, \mathbb{e}_i$$

Exemplo 3.7: "Reparametrizar pelo comprimento de arco a curva parametrizada por:

$$\mathbb{r}(t) = e^t \cos t\, \mathbb{e}_1 + e^t \sin t\, \mathbb{e}_2 \,, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

1) $s(t) = \int_0^t \| \mathbb{r}'(\tau) \| \, d\tau$

como:

$$\| \mathbb{r}'(\tau) \| = \| (e^{\tau}\cos\tau - e^{\tau}\sin\tau)\,\mathbb{e}_1 + (e^{\tau}\sin\tau + e^{\tau}\cos\tau)\,\mathbb{e}_2 \|$$

$$= \left(e^{2\tau}(\cos\tau - \sin\tau)^2 + e^{2\tau}(\sin\tau + \cos\tau)^2 \right)^{1/2}$$

$$= e^{\tau}\left(2\cos^2\tau + 2\sin^2\tau \right) = e^{\tau}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\, e^{\tau}\, d\tau = \sqrt{2}\,(e^t - 1)$$

2) Invertendo $s(t)$:

$$s(t) = \sqrt{2}\,(e^t - 1) \Rightarrow e^t = 1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow t(s) = \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \forall s \in \mathbb{R}_+$$

3) Compondo $\mathbb{r}(t)$ com $t(s)$

$$\tilde{\mathbb{r}}(s) = \mathbb{r}[t(s)] = e^{\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)} \cos\left[\log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right]\mathbb{e}_1$$

$$+ e^{\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)} \sin\left[\log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right]\mathbb{e}_2$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbb{r}}(s) = \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left\{ \cos\left[\log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right]\mathbb{e}_1 + \sin\left[\log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right]\mathbb{e}_2 \right\}$$

$\forall s \in \mathbb{R}_+$. //