UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Licenciatura em Matemática
MAT1514 – ***Matemática na Educação Básica*** – 2017

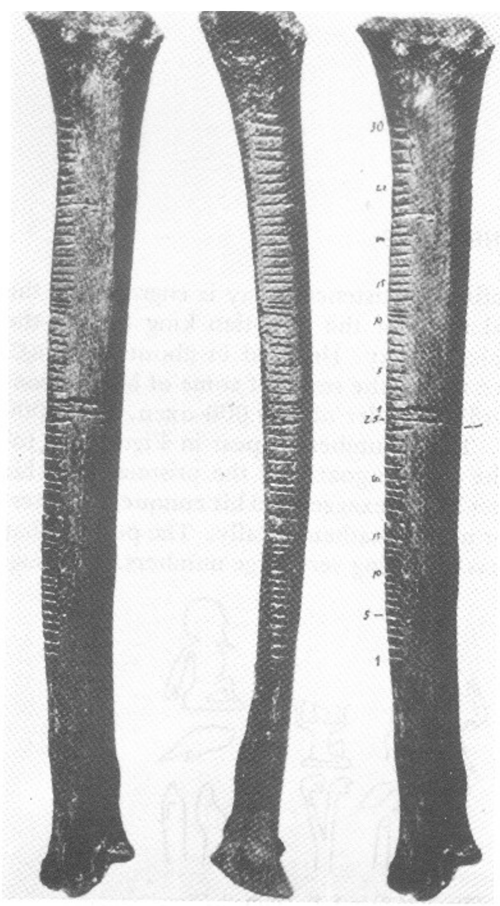
IME-USP

As origens da Matemática – dos processos de contagem aos sistemas de numeração

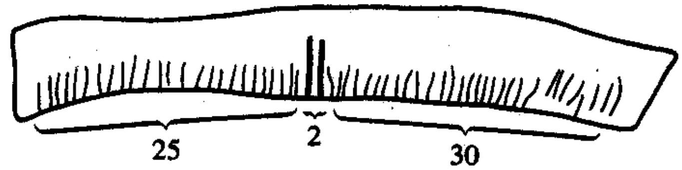
Texto produzido pela ***Profa. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão*** (IME-USP)

Ao longo dos tempos, as origens do conhecimento têm sido o objeto de pesquisa de inúmeros cientistas que se debruçam sobre as poucas informações que as descobertas arqueológicas trazem à luz, na busca de justificativas para suas hipóteses e novas pistas para suas investigações.

Os primórdios da Matemática podem ser recuperados através de registros associados à contagem que foram deixados por povos que viveram nas mais distantes regiões do globo terrestre. Uma das descobertas arqueológicas mais fascinantes ocorreu em 1937, quando um osso de lobo com marcas, cuja datação aponta para aproximadamente 30000 a.C., foi encontrado por Karl Absolom, em Vestonice, na Tcheco-Eslováquia.



Osso de lobo pré-histórico

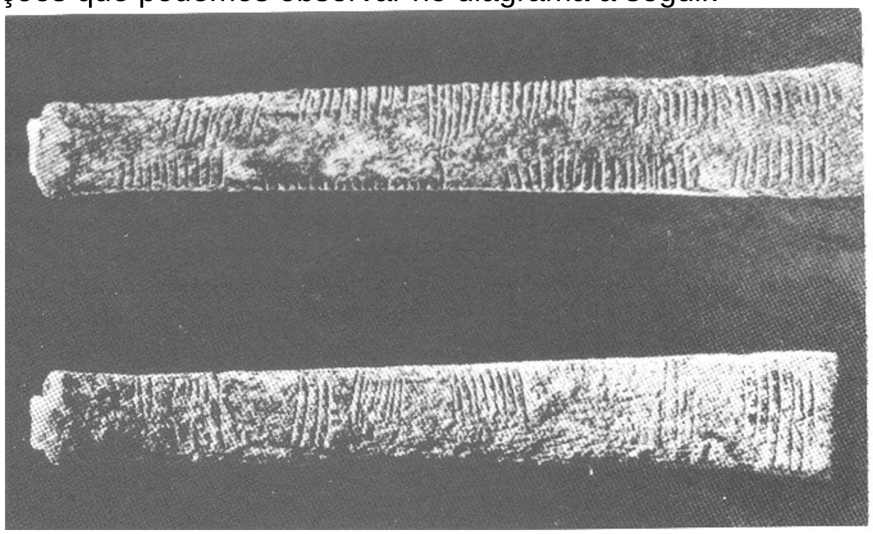


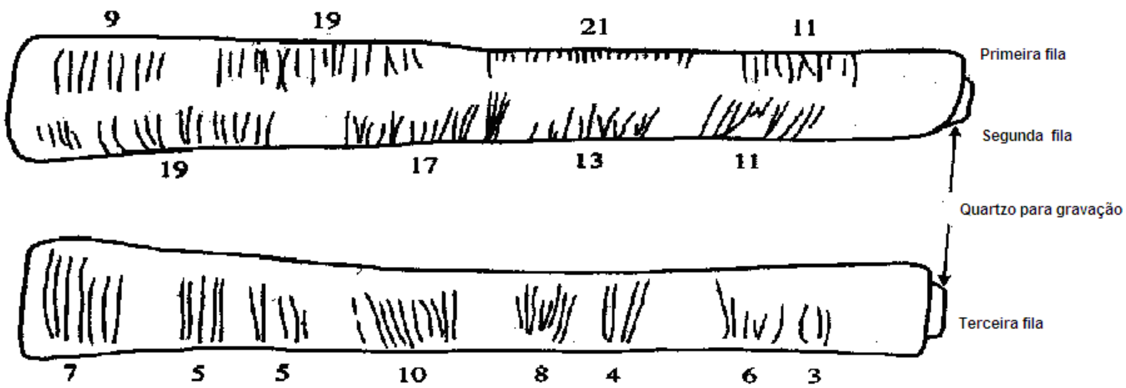
Marcas do osso de lobo

O osso contém 57 marcas profundas, sendo que duas delas são mais longas e separam um grupo de 25 de um grupo de 30 marcas, supostamente correspondentes ao número de presas de um caçador. Pouco se sabe sobre os povos dessa região à essa época, pois eram populações nômades que deixaram pouquíssimos vestígios.

Um outro registro interessante foi descoberto em 1950 pelo arqueólogo belga Jean de Heinzelin, nas proximidades de fronteira do Zaire e Uganda (a localidade é denominada hoje

Ishango), provavelmente registro de um povo que viveu às margens do lago Edward em alguma época entre 9000 e 6500 a.C. Entre arpões de pesca e outros instrumentos, estava o osso com inscrições que podemos observar no diagrama a seguir.





Marcas do osso de Ishango

No osso está encravado um pedaço de quartzo, provavelmente utilizado para produzir as marcas, e temos três filas de marcas representadas nas reproduções acima. Várias suposições são feitas a respeito das representações contidas no osso de Ishango, pois temos as coincidências:

- as somas das quantidades das marcas da segunda e terceira filas são iguais a 60;
- as marcas da primeira fila representam 10 + 1, 20 + 1 20 – 1, 10 –9 ;
- 11, 13, 17 e 19 são números primos;
- os grupos próximos na primeira fila estão relacionadas por duplicação (3 e 6, 4 e 8, 5 e 10).

Algumas das suposições tentam relacionar as marcas com possíveis registros de ciclos lunares, sendo também considerada a hipótese de que algumas das marcas teriam se desgastado com o tempo.

Uma grande discussão relacionada às origens da contagem é motivada pelas questões: contar é intuitivo, ou ainda, o processo de contagem é evolutivo ou foi criado em algum momento? Em meados do século XIX, os antropólogos acreditavam na unidade psicológica da raça humana e partiam da premissa que, em média, os seres humanos compartilhavam capacidades mentais semelhantes, principalmente no que se refere à contagem. A partir da publicação de um estudo sobre como pensam os povos nativos, preconceitos à parte, verificou-se que vários povos primitivos analisados manifestavam distintas habilidades no que diz respeito à contagem, dependendo de suas necessidades.

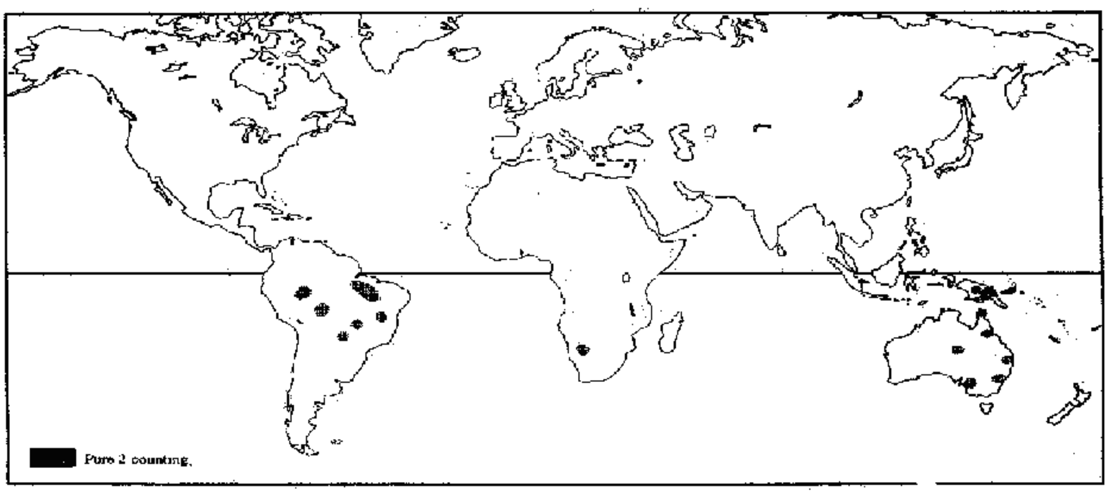
Contar é algo familiar para nós e existe uma tendência a se considerar que essa é uma habilidade tão simples e óbvia que deve ter sido desenvolvida por todas as civilizações e todas as sociedades primitivas. Por outro lado, poderíamos também pensar que o processo de contagem é não trivial, foi desenvolvido por alguns grupos, de acordo com suas necessidades, e difundido geograficamente de acordo com as circunstâncias.

Comparando o conhecimento de várias grupos primitivos, verifica-se que em algumas culturas encontram-se resquícios de noções de contagem que se limitavam apenas a um – dois- muitos. Os antropólogos identificam várias civilizações até bem distantes geograficamente (por exemplo, Nova Guiné, partes da África e América do Sul – índios brasileiros) cuja contagem se baseia em um-dois, e não conseguiam (ou não tinham a necessidade de) descrever quantidades superiores a cinco, evoluindo na seqüência dois-um, dois-dois e dois-dois-um.

O próprio radical do “três”, em várias línguas de origem latina está associado a “muitos“, “très”, em francês.

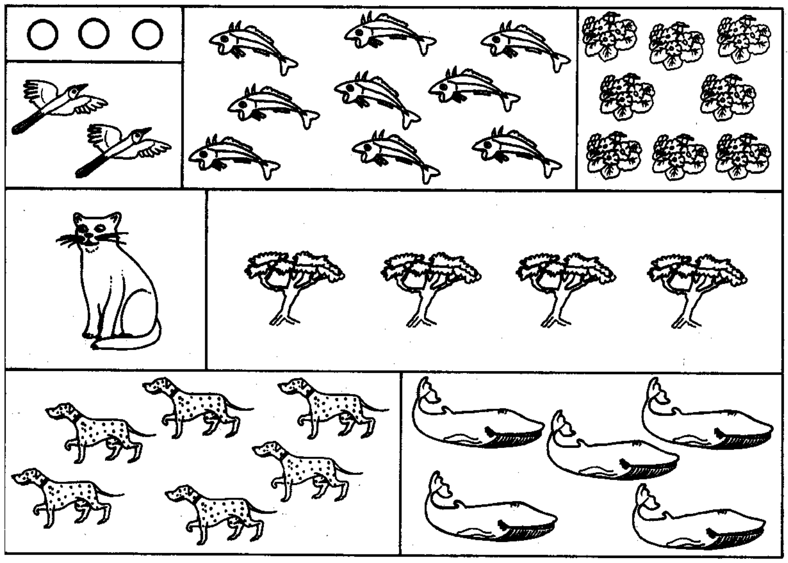
TRÊS	TRE
THREE	DREI
TROIS	TRI
TREIS	TREEA

O mapa a seguir nos dá uma idéia da distribuição geográfica dos registros de contagem do tipo “um-dois-muitos”.



Localização geográfica de povos cujo sistema de contagem é um-dois

Observando as quantidades representadas na figura a seguir, podemos ter uma avaliação dos vários níveis de dificuldade de percepção e/ou identificação precisa da quantidade, à medida que o número de objetos agrupados aumenta.



Teste de Avaliação

A correspondência entre “cinco“ e os dedos da mão e contagens envolvendo outras partes do corpo são as etapas subseqüentes, que aparecem associadas à contagem em várias civilizações. É sempre objeto de conjectura a relação entre o nosso sistema de contagem e os vários sistemas de contagem que temos registros em que se usam os dedos. São sistemas que podemos chamar 5-10, ou 5-10-20.

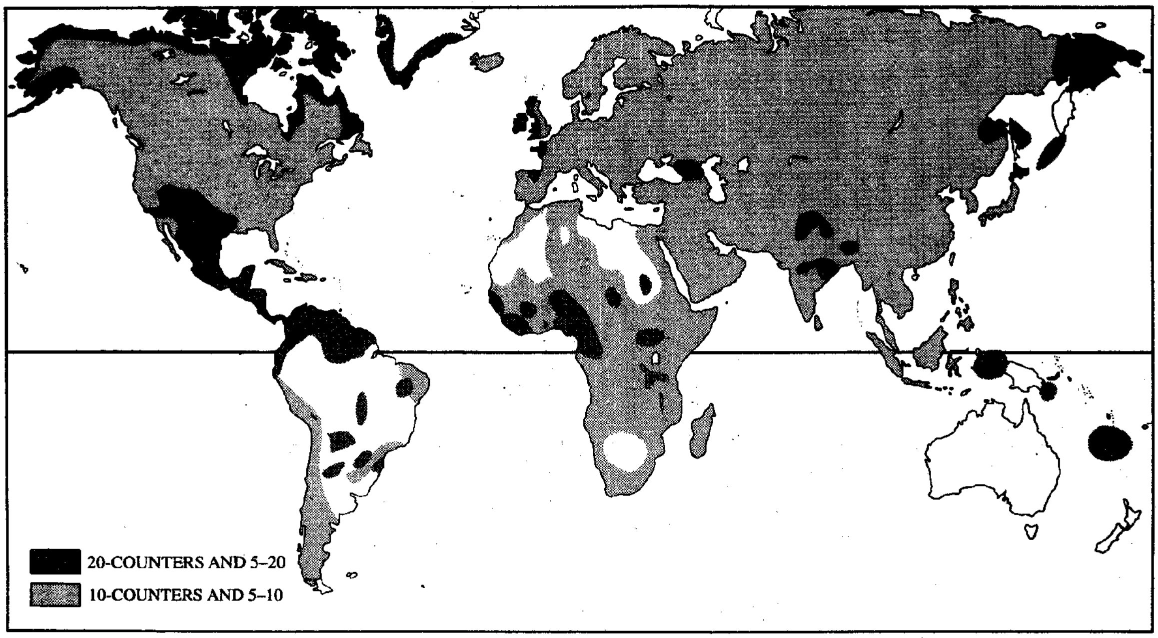
No sistema 5-10-20 as contagem eram feitas da forma:

1, 2, 3, 4, 5,
5+1, 5+2, 5+3, 5+4, 10
.... 20
.... 10. 3
..................................20 . 2
.......................................20 . 2 + 10

com os números intermediários representados na maneira usual. Resquícios dessa contagem são encontrados, por exemplo, entre os franceses, onde temos:

70 = 60 + 10 : soixante-dix
80 = 2 . 20 : quatre-vingts
90 = 2 . 20 + 10 : quatre-vingt-dix

sendo que o 60, que determina o ponto em que a contagem é feita desta forma especial, também tem suas origens em um outro sistema antigo que examinaremos mais tarde. De qualquer forma, define-se, a partir dessas possibilidades de escolha de organização da contagem, a idéia primeira de base para o sistema de numeração. O mapa a seguir nos dá as informações geográficas sobre as regiões de adoção de diferentes sistemas de numeração.

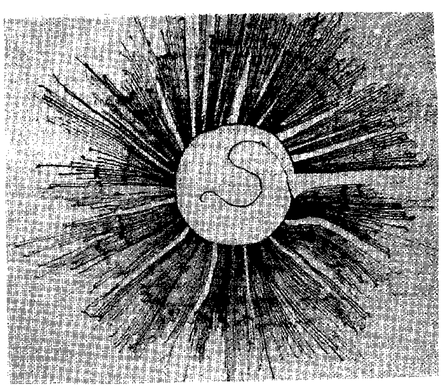


Distribuição geográfica dos sistemas de numeração

É interessante observar que indivíduos de diferentes culturas ainda hoje mantêm formas distintas de utilizar os dedos para contar.

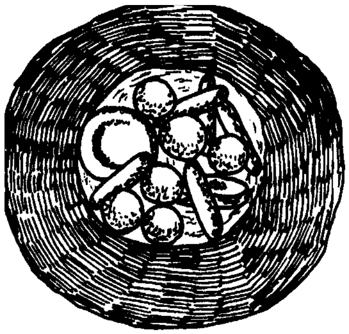
Paralelamente ao processo de contagem surgiu também a idéia de ordenação, e o reconhecimento dessa distinção foi um passo importante na evolução do pensamento humano no que se refere à contagem.

Outro passo igualmente fundamental na história da contagem refere-se ao estabelecimento de uma correspondência entre os objetos a serem contados e uma forma concreta de registro (pedras, nós em um fio, etc..). Este passo é definitivo na direção de se determinarem, posteriormente, os símbolos correspondentes às quantidades a serem escolhidas como padrão no sistema de contagem, que substituiriam os objetos utilizados para o registro, como vemos nas ilustrações a seguir.

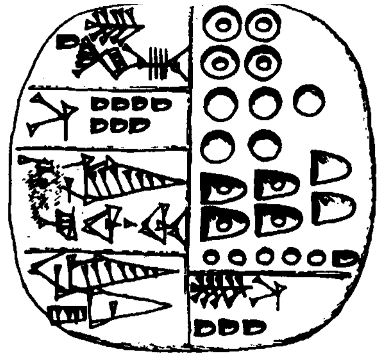


Um quipo de indígenas peruanos onde as quantidades são registradas por nós em cordas

Ovóide de Nuzi – continha pequenos objetos de formas distintas associados a quantidades de animais transportados –Harvard Semitic Museum,Cambridge, MA



Objetos no interior de um ovóide– esboço de imagem obtida por raio-x



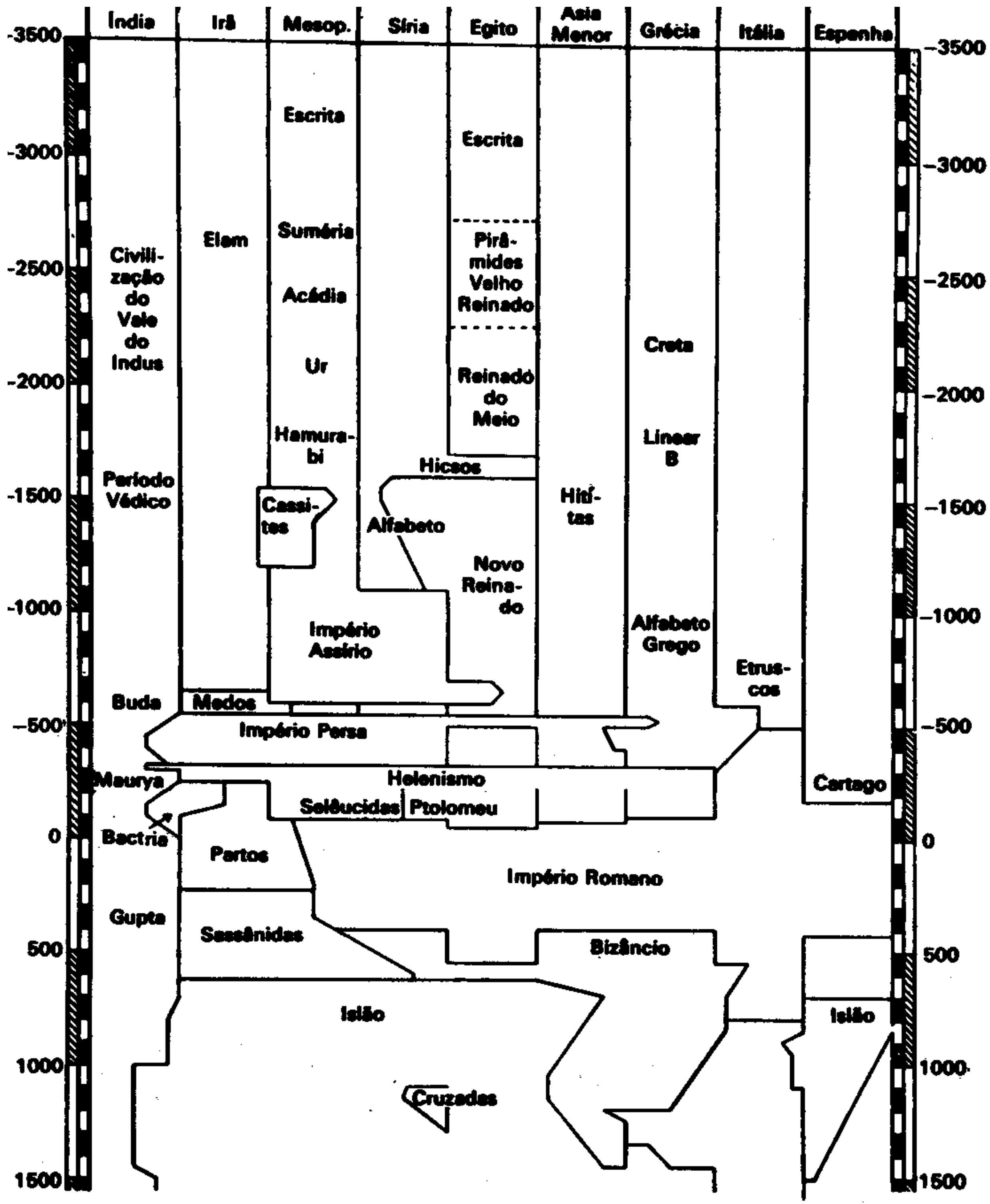
Tablete Sumério de 2650 a.C. que descreve uma distribuição de grãos com todos os elementos de uma divisão formal

A ovóide de Nuzi da figura acima foi descoberta em Kirkuk, em 1928, e estima-se que sua origem date de aproximadamente 3500 a.C.; a escrita no seu exterior descreve os tipos de animais cuja contagem corresponde aos objetos contidos no ovóide. Registros escritos já são encontrados em 2650 a.C., como mostra o tablete sumeriano, acima, à direita.

O quadro a seguir nos propõe a extensão do desenvolvimento e localização geográfica das civilizações ao longo dos séculos.

Os registros escritos mais antigos que nos trazem informações sobre a evolução dos sistemas de numeração são originários da Mesopotâmia e do Egito, onde encontramos também os primeiros registros de escrita da história da humanidade. As especificidades dos sistemas de numeração desenvolvidos por esses povos serão o objeto específico de estudo nos próximos capítulos.

Vamos examinar, rapidamente, a seguir, os registros relativos à contagem e sistemas de numerações adotados por outros povos da antiguidade, que, em épocas e regiões distintas, e de forma bastante particular, resolveram eficientemente os problemas de representação numérica. Concluiremos com o estudo do sistema de numeração maia que, embora muito mais recente em relação aos demais, integra a história e cultura mais antiga entre os povos do continente americano.



Civilizações e períodos históricos

A representação escrita dos povos da Mesopotâmia é a chamada **escrita cuneiforme**, pois seus caracteres eram grafados em forma de cunha, produzidos, através da impressão, em tabletes de argila, com um tipo de estilete. Nesses tabletes encontramos registros de quantidades e totais, tabelas e cálculos de áreas, uma matemática bastante bem desenvolvida datando de, aproximadamente, 2000 a.C.

Uma evidência interessante da evolução desses registros cuneiformes data da época de Dario, o Grande (início do século VI a.C.) e é uma inscrição deixada pelos antigos persas com os números de 1 a 10:

Essa inscrição pode ser comparada com outra bem mais antiga (entre 1800 e 1600 a.C.) , onde as disposições das cunha é um pouco diferente:

Inscrições cuneiformes

Como bem ilustram as representações acima, a unidade era indicada por uma cunha vertical, e a dezena, por uma cunha horizontal.

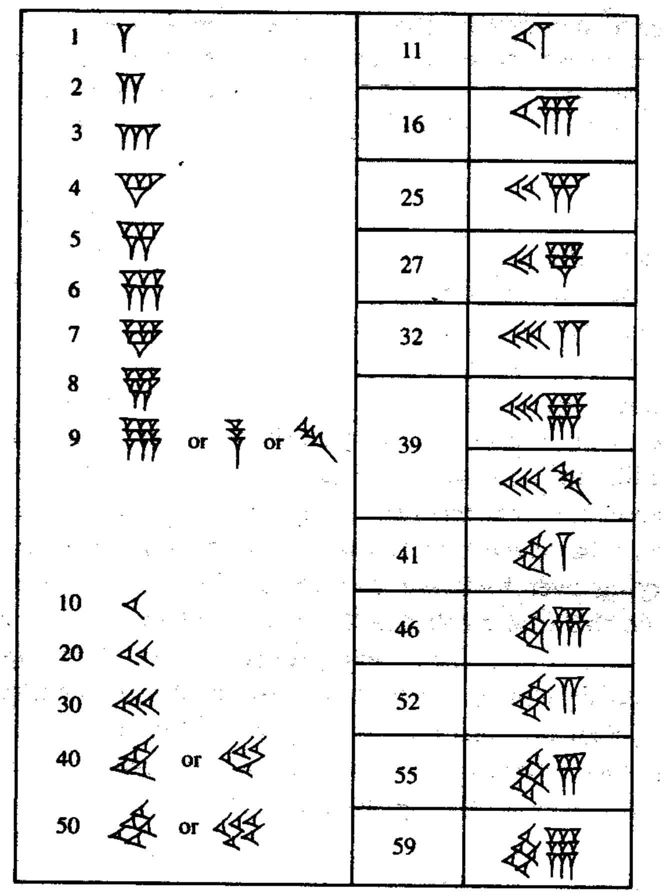


Tabela com números na representação cuneiforme

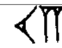
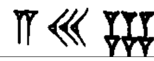
A posição das cunhas ou grupos de cunhas ou o seu tamanho indicavam a ordem de grandeza. Originalmente, não havia símbolo para o zero, o que acarretava dificuldades na interpretação. Espaços maiores em branco aparecem entre 2000 e 1800 a.C., mas somente por volta de 200 a 300 a.C. um símbolo especial denotando zero (uma cunha inclinada) foi introduzido.

A representação cuneiforme para os 60 primeiros números está resumida na tabela acima e nos exemplos a seguir.

Atualmente, usamos uma notação especial para “traduzir” a representação cuneiforme:

1, 21 = 60 + 21 = 81: denota uma cunha vertical, duas horizontais e uma vertical, nesta ordem, da esquerda para a direita;
1, 30 = 90 ; **1, 39** = 99.

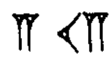
No entanto, quando encontramos 2 cunhas verticais, elas podem representar 2 ou 2. 60 (o zero final não aparece , e, neste caso, denotamos 2,0 = 2.60 + 0 = 120 para estabelecer a diferença); na sequência, podemos continuar: 2, 15 = 135; 2, 42 = 162… Temos, a seguir, outros exemplos que ilustram os problemas provocados pela ausencia do zero na representação cuneiforme.

Decimal	**Escrita representativa (convenção atual)**	**Cuneiforme**
12	12	
602	10,2	
1	1	
60	1,0	
7236	2,0,36	
156	2,36	

Novamente, 3 cunhas verticais podem ser correspondentes a 3 ou 3. 60 = 180, neste caso, denotado 3,0, e assim por diante. Para as frações utilizamos uma representação semelhante:

$$\mathbf{2;\ 20,15} = 2 + 20/60 + 15/60^2 = 2\ \frac{27}{80}$$

Temos, por exemplo, as representações para alguns números e frações:

Decimal	**Escrita representativa (convenção atual)**	**Cuneiforme**
63	1,3	
132	2,12	
1547	25,47	
$2\frac{1}{2} = 2\frac{30}{60}$	2;30	
$\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$	0;45	

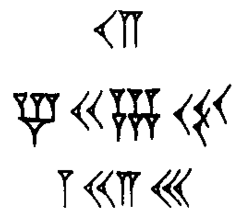
Os cálculos com frações aparecem frequentemente, e a convenção para a leitura da representação cuneiforme e sua tradução decimal estão exemplificadas no quadro abaixo:

Fração Decimal	**Escrita representativa (convenção atual)**	**Cuneiforme**

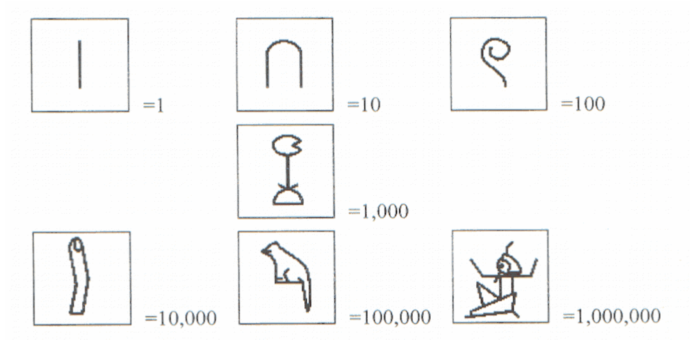
$$\frac{1}{5} = \frac{12}{60} \qquad 0;12$$

$$\frac{2}{27} = \frac{4}{60} + \frac{26}{60^2} + \frac{40}{60^3} \qquad 0;4,26,40$$

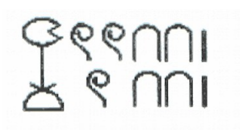
$$1\frac{3}{8} = 1 + \frac{22}{60} + \frac{30}{60^2} \qquad 1;22,30$$



O sistema numérico dos egípcios era um sistema aditivo, com os símbolos para as unidades e os múltiplos de 10 representados, na escrita hieroglífica, como na figura abaixo.



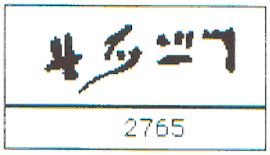
O número 1342 era representado pelo conjunto de símbolos:

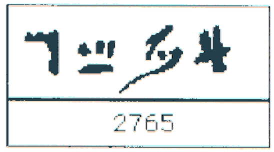


A posição das figuras dá a orientação para a leitura e a soma dos valores correspondentes aos elementos do conjunto indica a quantidade representada.

Hieratic numerals

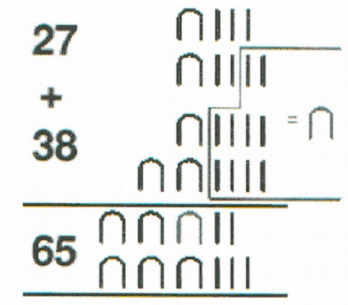
Existe também a versão hierática para a escrita dos números, dada pela tabela acima. Temos os exemplos, nessa escrita, com duas orientações distintas:



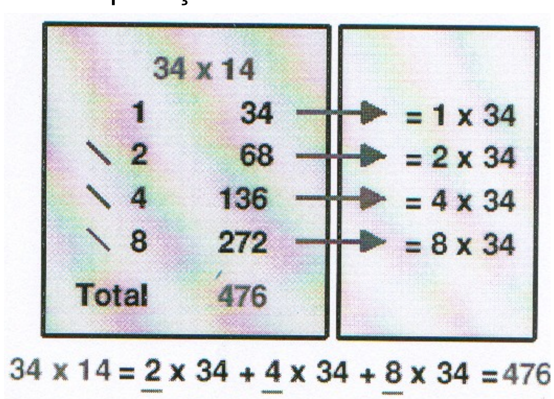


A orientação preferencial era a oriental: da direita para a esquerda.

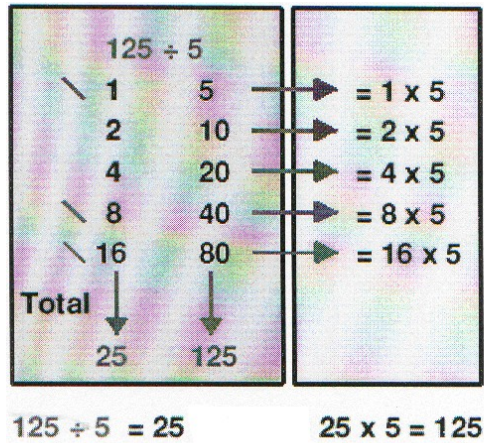
A adição e a subtração eram feitas trocando dez objetos repetidos pelo símbolo correspondente, conforme os exemplos a seguir ([6]):

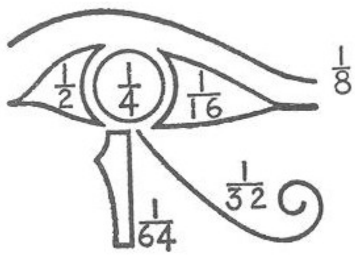


A multiplicação egípcia utilizava um processo de duplicações sucessivas; no quadro a seguir está ilustrada a multiplicação 34 X 14:



e a divisão se utilizava do mesmo procedimento, invertendo a leitura do resultado





O olho de Horus

Frações

Os egípcios tinham um maneira toda especial para trabalhar com as frações, utilizando, por um longo período, apenas as **frações unitárias**: 1/2, 1/3, 1/4,.....1/15,... e a fração 2/3.

Frações cujos denominadores são potências de 2 eram associadas a partes do “ olho de Horus”, como na ilustração acima. Eles foram capazes de desenvolver técnicas, cujos fundamentos são discutidos até hoje, para escrever qualquer fração como soma de frações unitárias.

Por exemplo, 3/4 = 1/2+1/4, 6/7 = 1/2+ 1/3+1/42.

Como não temos unicidade, pois:

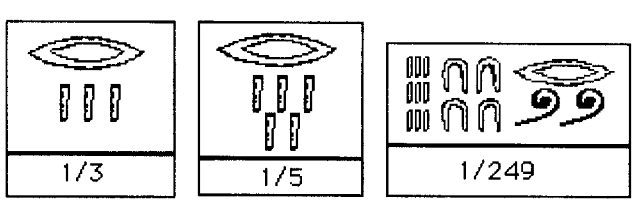
7/12 = 1/2+1/12 ou 1/3+1/4

provavelmente, eram admitidas algumas convenções, que podem ser inferidas a partir dos registros:

- usar a forma que exige o menor número de parcelas;
- usar a maior fração unitária possível, a menos que a regra anterior não se verifique;
- não deve haver repetição;
- as frações unitárias devem ser escritas na ordem decrescente.

A segunda das regras acima nos conduz à representação de
7/12 = 1/2+1/12 ao invés de 1/3+1/4, pois 1/2 > 1/3.

Na escrita hieroglífica, as frações eram representadas pelo conjunto de símbolos correspondente à quantidade de partes (o número do denominador) encimado por um símbolo como um olho ou uma boca.



A única fração não unitária utilizada nos textos antigos era 2/3, e para ela havia um símbolo especial.

Os **gregos**, na Antiguidade, utilizavam um sistema aditivo que recuperamos a partir de inscrições que datam de um milênio a.C., cujos símbolos aparecem no quadro a seguir.

1	I	100	H	10,000	M
2	II	200	HH	20,000	MM
3	III	300	HHH	30,000	MMM
4	IIII	400	HHHH	40,000	MMMM
5	Γ	500	𐅅	50,000	𐅇
6	ΓI	600	𐅅H	60,000	𐅇M
7	ΓII	700	𐅅HH	70,000	𐅇MM
8	ΓIII	800	𐅅HHH	80,000	𐅇MMM
9	ΓIIII	900	𐅅HHHH	90,000	𐅇MMMM
10	Δ	1,000	X		
20	ΔΔ	2,000	XX		
30	ΔΔΔ	3,000	XXX		
40	ΔΔΔΔ	4,000	XXXX		
50	𐅄	5,000	𐅆		
60	𐅄Δ	6,000	𐅆X		
70	𐅄ΔΔ	7,000	𐅆XX		
80	𐅄ΔΔΔ	8,000	𐅆XXX		
90	𐅄ΔΔΔΔ	9,000	𐅆XXXX		

50	𐅄 = Γ. Δ	5 × 10
500	𐅅 = Γ. H	5 × 100
5,000	𐅆 = Γ. X	5 × 1,000
50,000	𐅇 = Γ. M	5 × 10,000

Sistema Ático

Este sistema, chamado de sistema Ático, foi substituído posteriormente, provavelmente por volta de 500 a.C., pelo sistema chamado Jônico, em que os símbolos utilizados eram as próprias letras do alfabeto; por exemplo, neste sistema **νμδ** representa **444**.

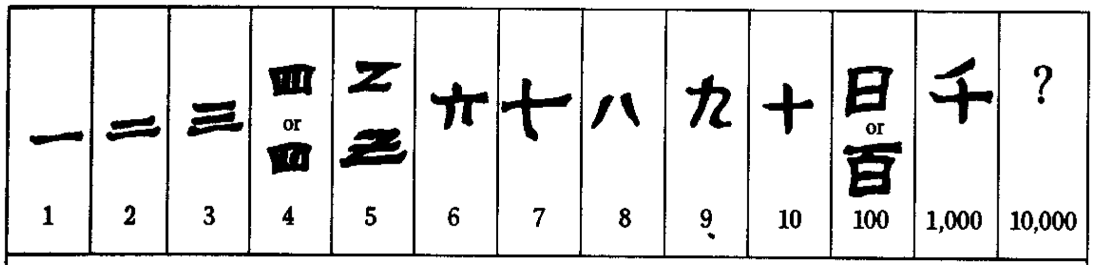
Α	α	alpha	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	rho	100
Β	β	beta	2	Κ	κ	kappa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gamma	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	Μ	μ	mu	40	Υ	υ	upsilon	400
Ε	ϵ	epsilon	5	Ν	ν	nu	50	Φ	φ	phi	500
Ϛ	ϛ	digamma*	6	Ξ	ξ	ksi	60	Χ	χ	chi	600
Ζ	ζ	zeta	7	Ο	ο	omicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	omega	800
Θ	ϑ	theta	9	Ϙ	ϙ	koppa	90	Ϡ	ϡ	san (sampi)	900

Sistema Jônico

Os **romanos**, como é bem conhecido, também se utilizavam das letras do alfabeto para representar os números, num sistema de representação para 1-5-10 (**I, V** e **X**) seguidos das potências de 10 - 100, 1000 com o 500 intermediário, correspondentes às letras **C**, **M** e

D, respectivamente. O sistema, como o sistema grego, é parcialmente aditivo, ou seja, as quantidades correspondentes aos símbolos devem ser somadas para que se chegue ao valor representado. No entanto, em algumas representações, deve-se efetuar uma subtração, como ocorre, por exemplo, em **IV** e **XC** que representam **4** e **90**, respectivamente. As hipóteses aceitas hoje, baseadas em inscrições datadas do século VI a.C., indicam que as origens do sistema romano remontam aos etruscos, cujas inscrições são datadas do século VI a.C.

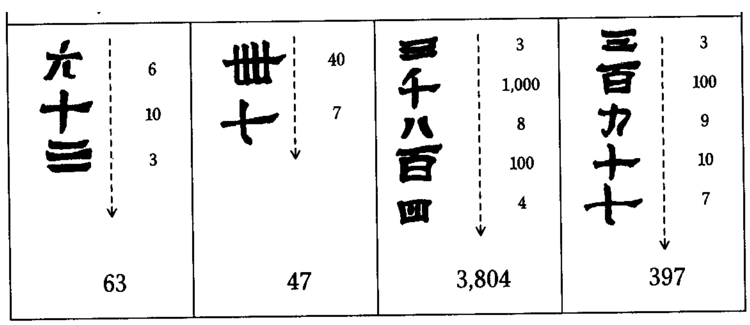
Passando para as civilizações orientais, sabemos que os **chineses** entre 200 a.C. e 200 d.C. utilizavam as representações abaixo para as unidades e potências de dez:



Símbolos numéricos chineses

Com estes símbolos, considerados os precursores da simbologia moderna, a representação das quantidades se utilizava de adições e multiplicações combinadas, como vemos a seguir:

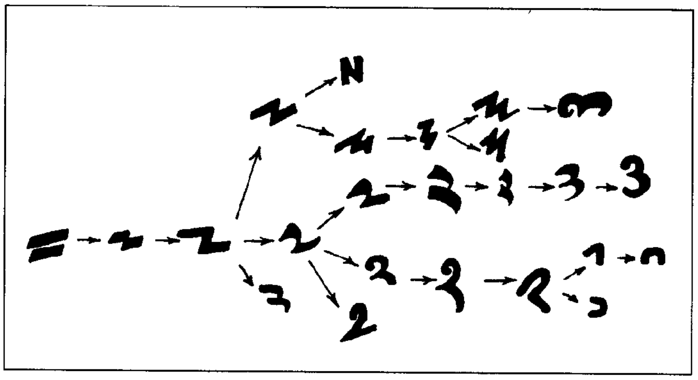
63 = 6 . 10 + 3,
47 = 4 . 10 + 7,
3804 = 3 . 1000 + 8 . 100 + 4,
397 = 3 . 100 + 9 . 10 + 7.



Representação dos Números

Os **japoneses** se utilizam de símbolos semelhantes para o registro numérico, ficando as diferenças restritas principalmente à fonética.

Os **hindus**, dos quais herdamos, através da influência e interferência dos árabes, os princípios do sistema decimal adotado universalmente, nos transmitiram registros escritos que só aparecem a partir do século VI da era cristã; estudaremos posteriormente o desenvolvimento desse sistema. A evolução dos símbolos passa por várias etapas, sofre modificações que dependem da região em que foram utilizados, como muito bem aparece ilustrado na figura a seguir.



Evolução da representação para o 2 e o 3 entre os hindus

Embora mais recentes na cronologia histórica, as **civilizações pré-colombianas** que habitaram o continente americano também desenvolveram formas de contagem diferenciadas e sistemas de numeração com registros bastante interessantes. Vamos nos restringir aos registros da civilização **maia**, que, a partir de um tempo que remonta ao início da era cristã, construiu e viveu em dúzias de cidades abandonadas que ficaram escondidas nas florestas da América Central (México, Guatemala, Belize, Honduras e El Salvador). Foi uma civilização avançada que nos deixou grandes construções, e atingiu um estágio importante de desenvolvimento e precisão nas observações astronômicas, na escrita e na matemática. Estima-se que, por volta do ano 1000, populações inteiras tenham abandonado as cidades, por razões ainda desconhecidas, e se agregado a outros povos que viviam mais ao norte de seus territórios, o que prejudicou a recuperação do patrimônio cultural original desta civilização.

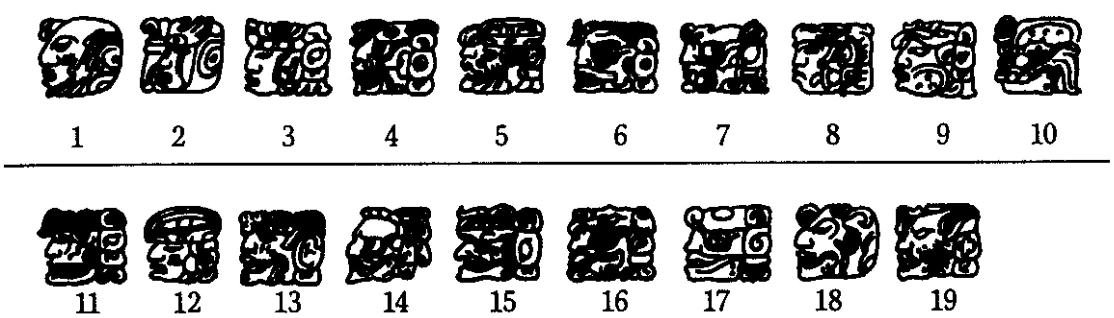
Maias e Astecas – Distribuição geográfica das populações

Por outro lado, as fontes para o estudo da cultura maia foram, em grande parte, destruídas propositalmente pelos espanhóis dominadores, meio milênio depois dos movimentos migratórios das populações. Curiosamente, um deles, Diego de Landa, bispo de Yucatan (Merida), em sua *Relacion de las cosas de Yucatan*, copiou os glifos da escrita maia antes de destruir os documentos originais que, de seu ponto de vista, preservavam a cultura e impediam a assimilação da nova religião. Outras informações importantes sobre essa cultura estão contidas em textos em latim escritos por nativos catequizados e alfabetizados que tinham a preocupação de preservar a herança cultural de seus ancestrais.

Os maias foram hábeis astrônomos e estabeleceram uma forma bastante particular para a divisão do tempo, do ano e suas estações, de conjuntos de anos, relacionados a eventos religiosos e a períodos de governo em que predominava uma determinada dinastia. A divisão anual é representada no calendário abaixo.

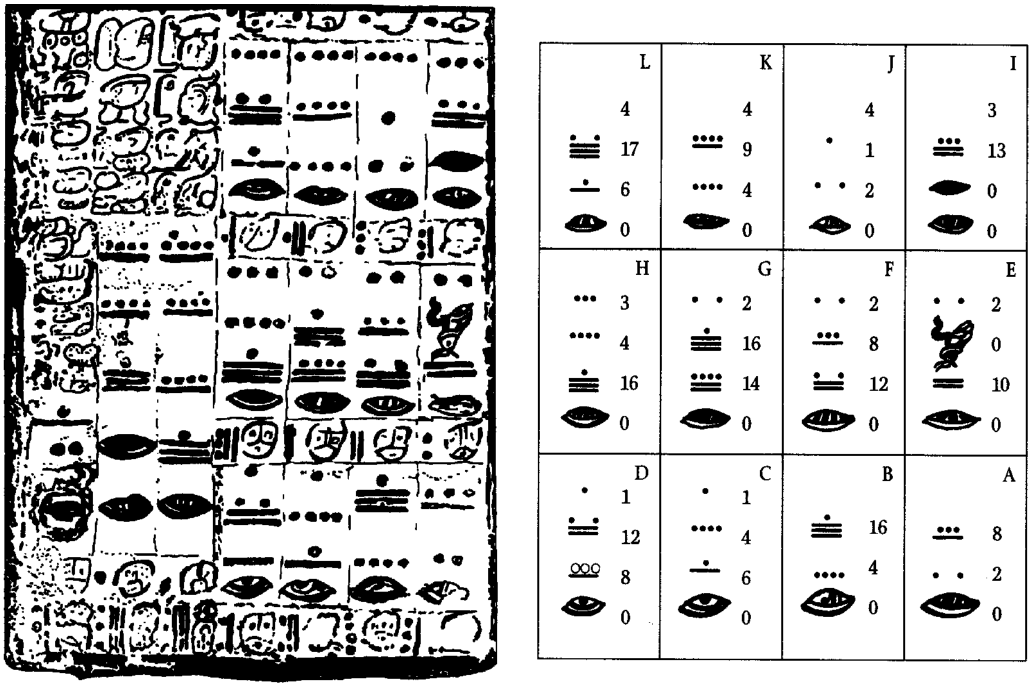
O calendário maia

A matemática dos maias estava, portanto, associada, principalmente, aos registros relativos à astronomia, aos registros numéricos e aos vários tipos de calendários, para os quais eram utilizados símbolos especiais (chamados cefalomórficos), correspondentes a 18 períodos de 20 dias; o último símbolo era reservado para um período de 5 dias que completava o ciclo anual (que já era considerado por eles com 365 dias – 100 dias para plantar, 260 para colher e 5 dias eram considerados de " caos, desgraças",dias em que nada se fazia).



Símbolos cefalomórficos indicativos dos "meses" maias

Os registros da cultura maia estão contidos em documentos denominados " códices ". A principal fonte de estudo do sistema de numeração maia é o chamado *Códice de Dresden*, um documento do século XIX, pertencente ao Museu de Dresden, provavelmente cópia de um documento quatro séculos mais antigo. Os símbolos numéricos da escrita maia contidos no Códice podem ser identificados na reprodução a seguir.

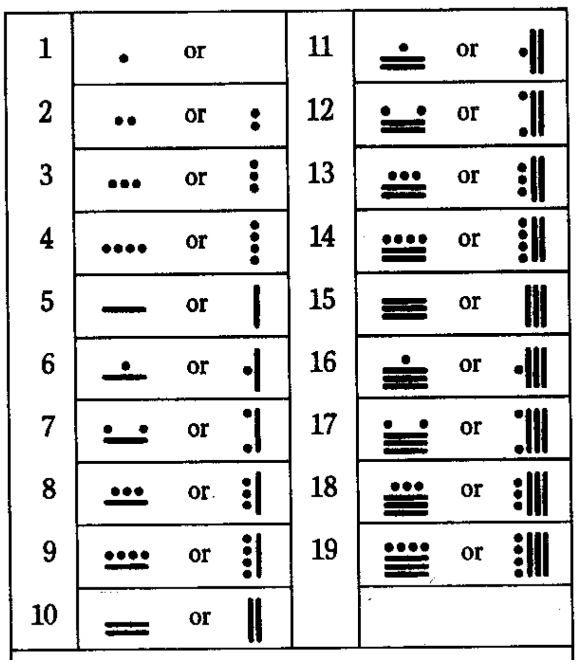


Códice de Dresden **– original e cópia dos símbolos correspondentes à representações numéricas**

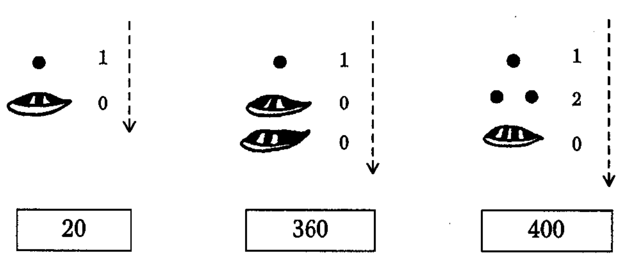
O sistema de numeração maia tem como base o **20** (associado à maneira de contar utilizando os dedos das mãos e dos pés, ou ainda, um sistema 5-20). O registro, posicional, utiliza dois símbolos (que grafamos como um **ponto** - para as **unidades** - e uma **barra** - correspondente ao **5**) e um símbolo especial para representar o **zero**, conforme o quadro a seguir. Encontramos registros de representações com disposição horizontal ou vertical.

A disposição vertical determina o valor posicional, de baixo para cima:

- o número da posição inferior corresponde às unidades;
- o número logo acima representa múltiplos de 20;
- o número na terceira posição representa múltiplos de 360;
- nas camadas superiores vamos sempre multiplicando por 20 para obter o valor posicional: 7200, 14400 etc.

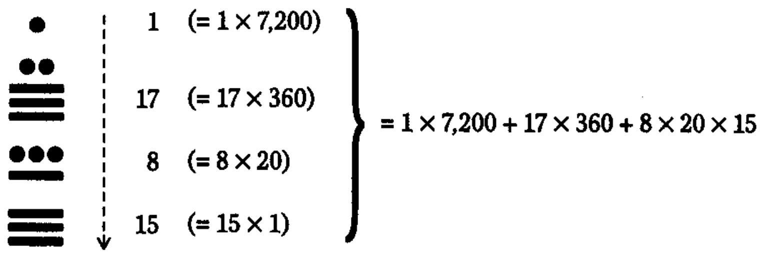


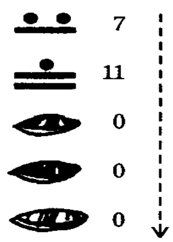
Numeração Maia



A hipótese que se faz a respeito do 360 (valor posicional da terceira posição) é que ele esteja associado ao calendário maia, que tem 360 dias "bons". A seguir, nas ilustrações, temos alguns exemplos de números representados na escrita maia:

21 = 1 + 1. 20   **79 = 19 + 3. 20**





1 087 200 = 0 + 0 + 0 + 11 . 7200 + 7. 14400

Como já observamos anteriormente, a civilização maia, a partir do final do primeiro milênio desloca-se de suas cidades para regiões mais ao norte e se funde com a civilização asteca, em cuja cultura ficam traços de sua influência. De qualquer forma, é importante observarmos que os mais importantes registros de desenvolvimento cultural das Américas são encontrados quando estudamos estas civilizações.

O estabelecimento de formas e símbolos para registrar as quantidades e resolver os problemas que a organização da vida cotidiana e social demandavam, foi o primeiro passo dado pelo homem na direção de criar uma estrutura formal e operacional que serve de base à sistematização do processo de contagem. Desta forma, ficaram assim estabelecidos, nas mais variadas culturas, regiões geográficas e civilizações, os alicerces do pensamento matemático.