Exercícios para Entrega 1

Ana Regina Blak e Gabriel Lefundes
Mecânica I (2018)

Entrega: 21/08/2018 (terça-feira)

Problema 1. (2.0)
Uma partícula de massa m, inicialmente em repouso e na origem, é submetida a uma força $F(t) = F_0\, e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \theta) = 0$ que começa a atuar no instante $t = 0$ e na direção do eixo Ox.

1. Partindo da 2ª lei de Newton, escreva a equação diferencial para $x(t)$.
2. Lembrando que $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, integre a equação para obter $\dot{x}(t)$.
3. Integrando novamente, obtenha $x(t)$.
4. Finalmente, calcule a posição e a velocidade da partícula quando $t \to \infty$

Problema 2. (4.5)
Uma bola de massa m é arremessada com velocidade v_0 a um ângulo θ com o eixo Ox. Suponha que a força de resistência do ar é dada por $\vec{F}_d = -m\alpha\vec{v}$ e que a bola inicia seu movimento na origem.

1. Partindo da 2ª lei de Newton, escreva as equações diferenciais para $x(t)$ e $y(t)$.
2. Obtenha $x(t)$ em função de (apenas) v_0, θ e α. Para isso, utilize as condições iniciais.
3. Mostre que $\ddot{y} = -g - \alpha\dot{y}$ pode ser escrito como $(\frac{d}{dt})(\frac{g}{\alpha} + \dot{y}) = -\alpha(\frac{g}{\alpha} + \dot{y})$.
4. Usando (3), obtenha $y(t)$ em função de (apenas) v_0, θ e α.
5. Vamos assumir que o valor de α é determinado impondo que a magnitude da força de resistência no começo do movimento é igual ao peso da bola. Ache α.

Agora vamos tentar achar o valor de θ para o qual, na altura máxima, x é máximo.

1. Ache uma condição sobre $\dot{y}$ no instante no qual a altura é máxima.
2. Obtenha o tempo t_m para o qual a altura é máxima e calcule $x(t_m)$.
3. Mostre que para maximizar $x(t_m)$, θ deve satisfazer $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(Note que a força depende do **vetor** $\vec{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ e que a gravidade é denotada por g e aponta na direção $-\hat{y}$)

Problema 3. (3.5)
Uma partícula de massa m move-se num poço de potencial dado por

$$U(x) = -8U_0a^2\frac{a^2 - x^2}{8a^4 + x^4}$$

onde U_0 e a são constantes positivas.
Esta é uma interação típica de uma partícula α dentro de um núcleo.

1. Esboce $U(x)$ (tente fazer e depois confira com algum software), determine os pontos de equilíbrio e os classifique em estável ou instável.

2. Suponha que uma partícula começa seu movimento em $x = -\infty$ com velocidade v_0. Determine o valor de v_0 tal que se $v > v_0$, a partícula atravessa o potencial e segue para $x = \infty$.

3. Para o ponto de equilíbrio estável, encontre o período de pequenas oscilações em torno deste.

Agora analisaremos o potencial de ligação entre dois átomos:

$$U(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$$

onde a e b são constantes positivas e x é a distância entre os átomos.

1. Esboçe $U(x)$, determine o ponto de equilíbrio e mostre que este é estável.

2. Sabendo que a massa reduzida do sistema é μ, calcule o período de pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio.

Problema 4. Extra (+2.5)
Um oscilador não-linear tem um potencial $U(x)$ dado por

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}m\lambda x^3$$

onde λ é um parâmetro pequeno. Nosso objetivo é encontrar a solução das equações do movimento $x(t)$ até a primeira ordem em λ, assumindo[1] que $x(0) = 0$.

1. Mostre que a equação do movimento é dada por $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda x^2$.

2. Nós iremos procurar por uma solução da forma $x = x^{(0)} + \lambda x^{(1)} + \lambda^2 x^{(2)} + ...$, onde $x^{(0)}$ é a solução do oscilador harmônico simples, isto é, $\ddot{x}^{(0)} + \omega_0^2 x^{(0)} = 0$. Utilizando as condições iniciais, mostre que $x^{(0)} = A\sin(\omega_0 t)$, onde A é uma constante.

3. Mostre que à ordem 0, $\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = (x^{(0)})^2 = A^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{A^2}{2}(1 - 2\cos(2\omega_0 t))$.

4. Sabemos que a solução homogênea dessa equação ($\ddot{x_H}^{(1)} + \omega_0^2 x_H^{(1)} = 0$) é $x_H^{(1)} = B\sin(\omega_0 t) + C\cos(\omega_0 t)$. Mostre que $x_P^{(1)} = \frac{A^2}{2\omega_0^2}\left(1 + \frac{1}{3}\cos(2\omega_0 t)\right)$ é a solução particular desta equação e, assim, ache a solução geral.

5. Impondo novamente as condições iniciais, mostre que $C = -\frac{2A^2}{3\omega_0^2}$. Conclua que à primeira ordem em λ,

$$x(t) = \tilde{A}\sin(\omega_0 t) + \frac{A^2\lambda}{\omega_0^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{6}\cos(2\omega_0 t)\right)$$

onde $\tilde{A}$ e A são determinados pelas condições iniciais.

A ideia geral utilizada aqui é: sabemos resolver a equação a menos de uma correção proporcional a uma constante pequena λ, então tratamos esta correção adicional como uma perturbação que apenas fará correções pequenas (pelo menos de ordem λ) na solução do problema que sabemos resolver. Disso, podemos escrever a solução para o problema perturbado como uma série de potências em λ e, igualando os termos de mesma ordem, obter equações para os coeficientes da série de potências um por um. Ideias semelhantes a esta são utilizadas para resolver perturbativamente problemas em, por exemplo, Mecânica Quântica, Cosmologia e Teoria Quântica de Campos.

[1] Assuma que $x(0) = 0$ em todas as ordens de λ