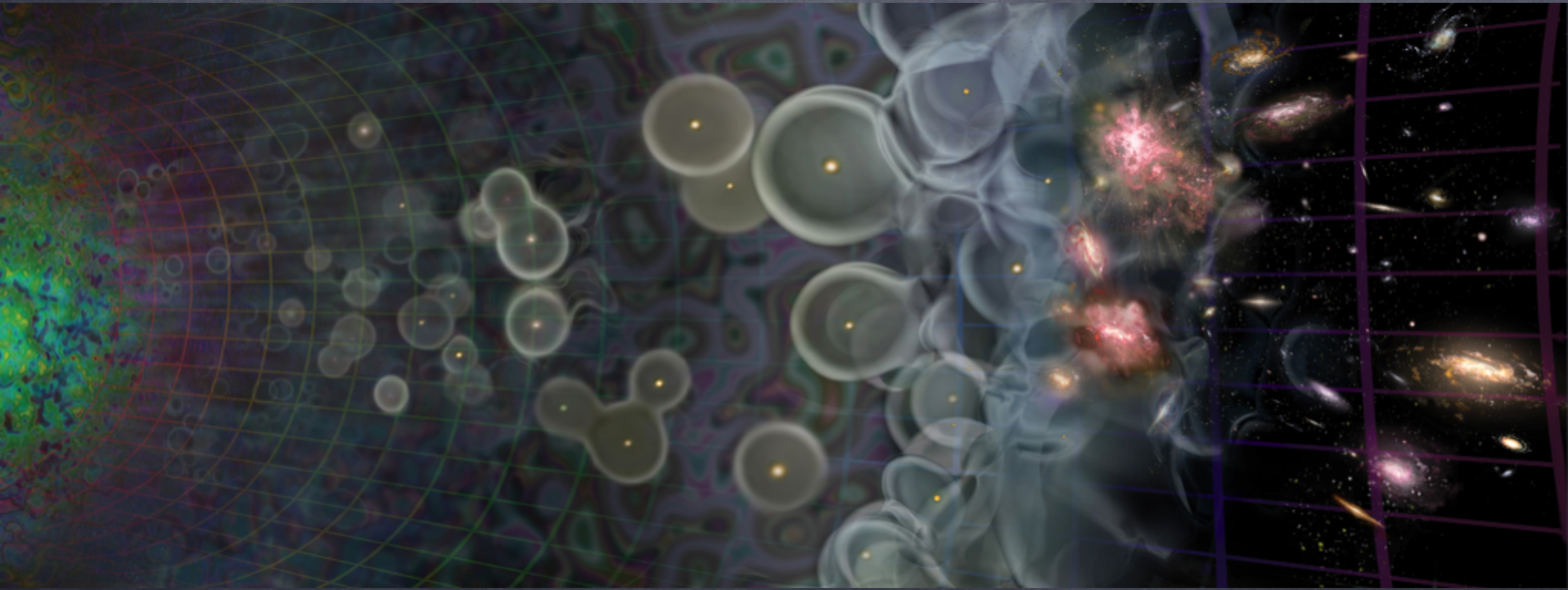
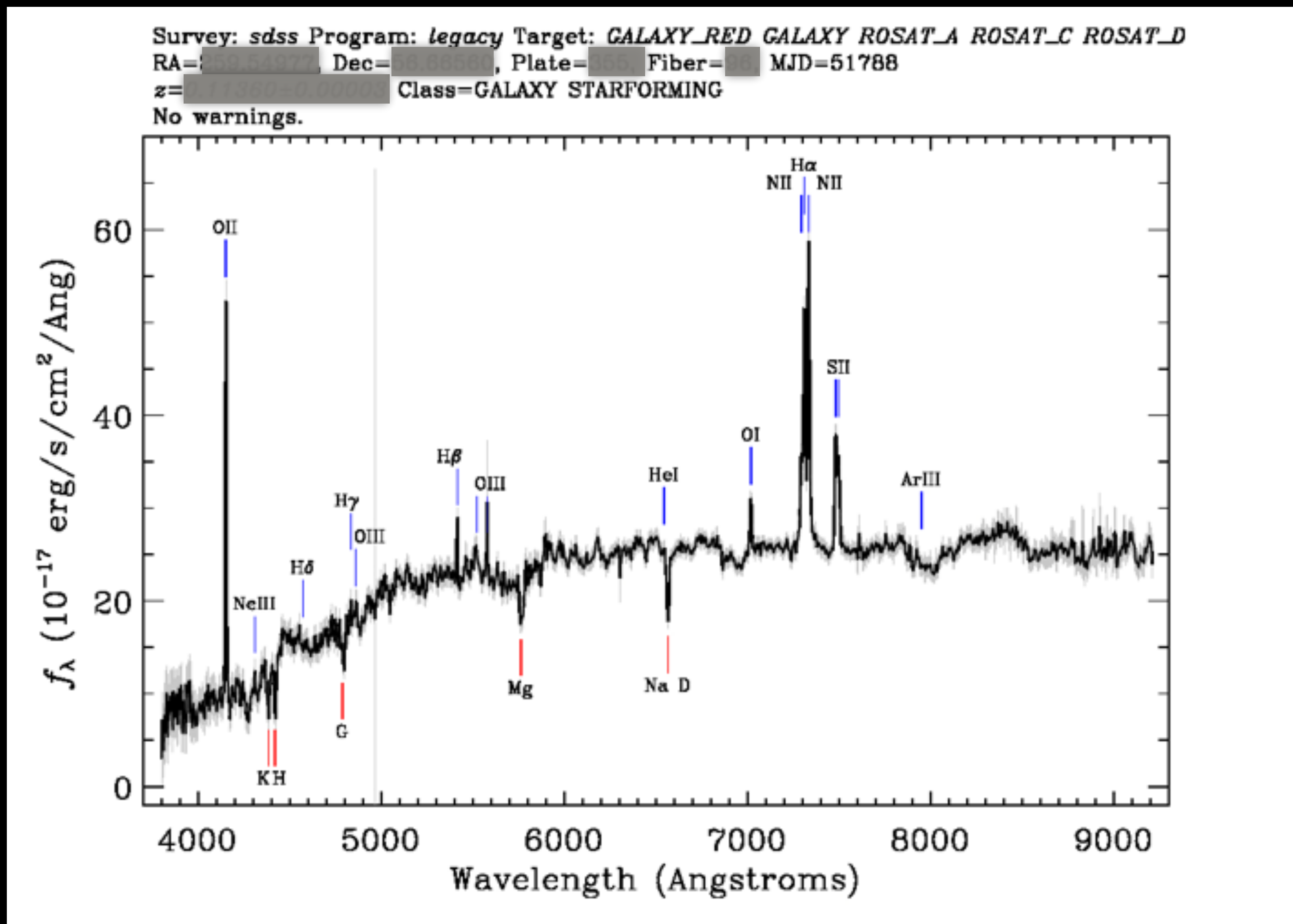
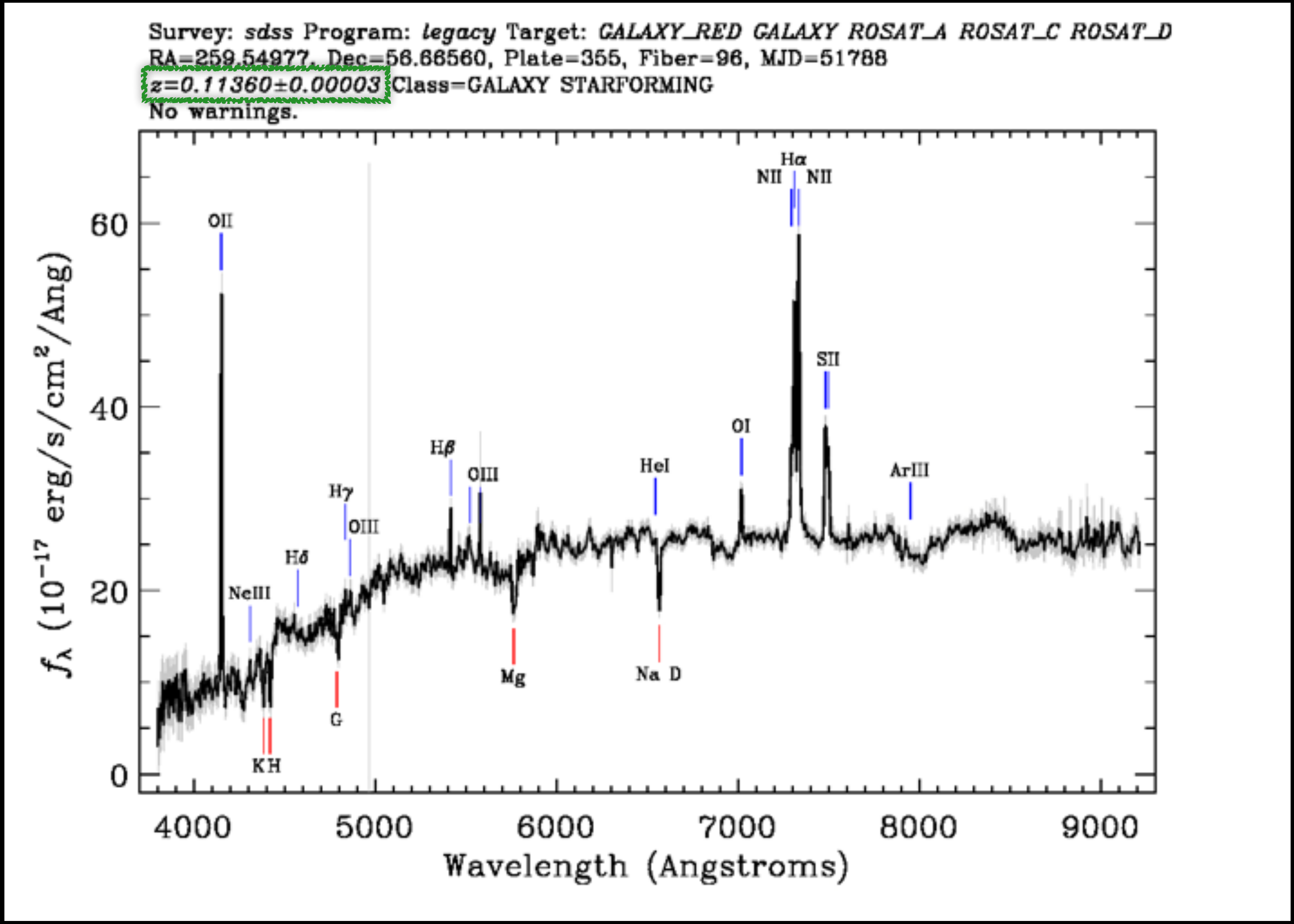
Introdução à Cosmologia Física



Desafio: encontrar o z desta galáxia:



Resposta:


Survey: sdss Program: legacy Target: GALAXY_RED GALAXY ROSAT_A ROSAT_C ROSAT_D
RA=259.54977, Dec=56.66560, Plate=355, Fiber=96, MJD=51788
z=0.11360±0.00003 Class=GALAXY STARFORMING
No warnings.
OII
NeIII
Hδ
Hγ
OIII
Hβ
OIII
HeI
OI
NII
Hα
NII
SII
ArIII
K H
G
Mg
Na D
f_λ (10^{-17} erg/s/cm^2/Ang)
Wavelength (Angstroms)
0
20
40
60
4000
5000
6000
7000
8000
9000

Hoje:

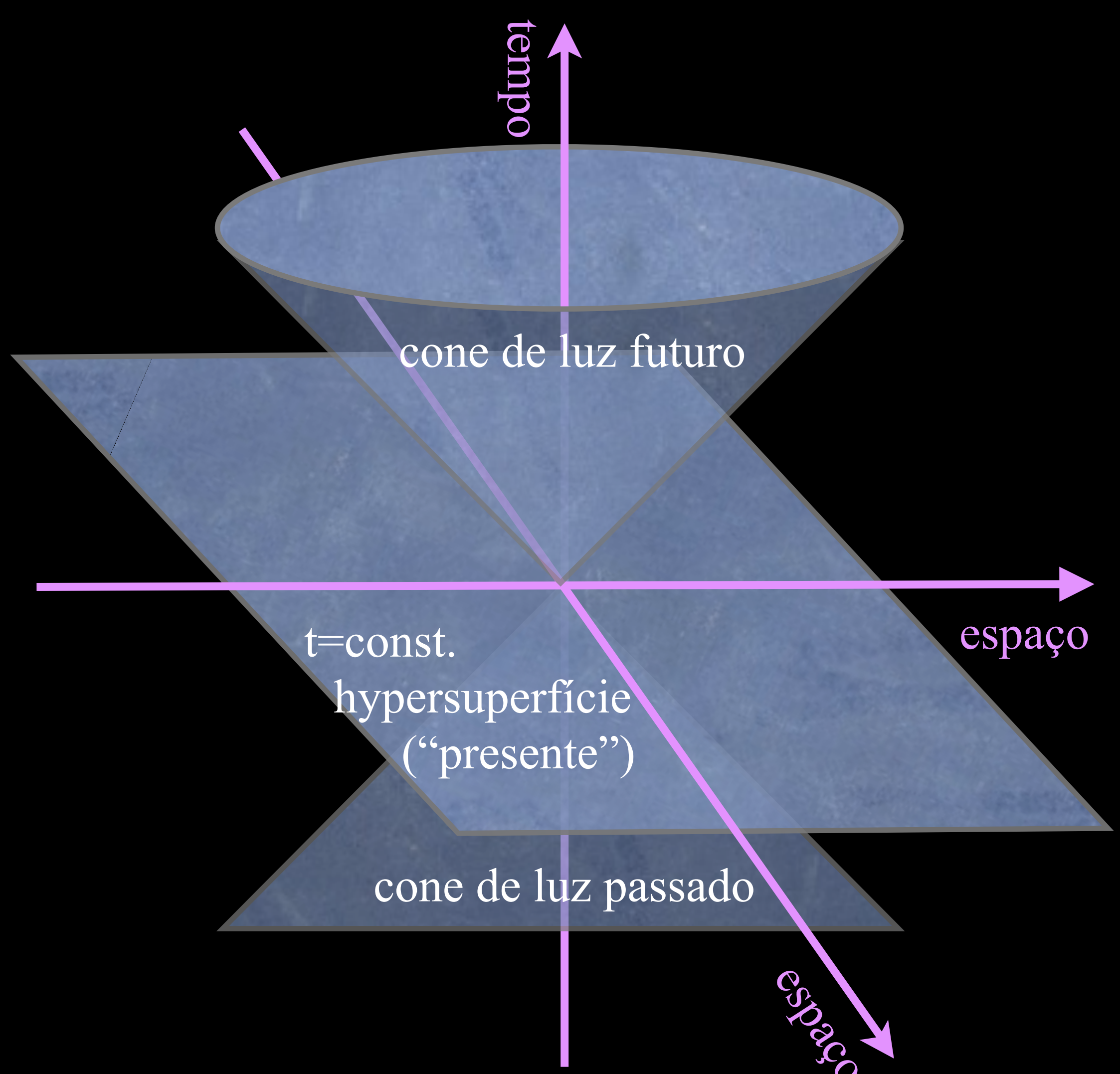
- Relatividade Restrita (revisão rápida)
- O Princípio da Equivalência
- A Relatividade Geral de Einstein
- Coordenadas generalizadas e a métrica

Bibliografia adicional:

C. Boyer, "A History of Mathematics"

H. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski & H. Weyl, "The Principle of Relativity" ("O Princípio da Relatividade")

Relatividade <u>especial</u>: o objeto fundamental é o <u>cone de luz</u>



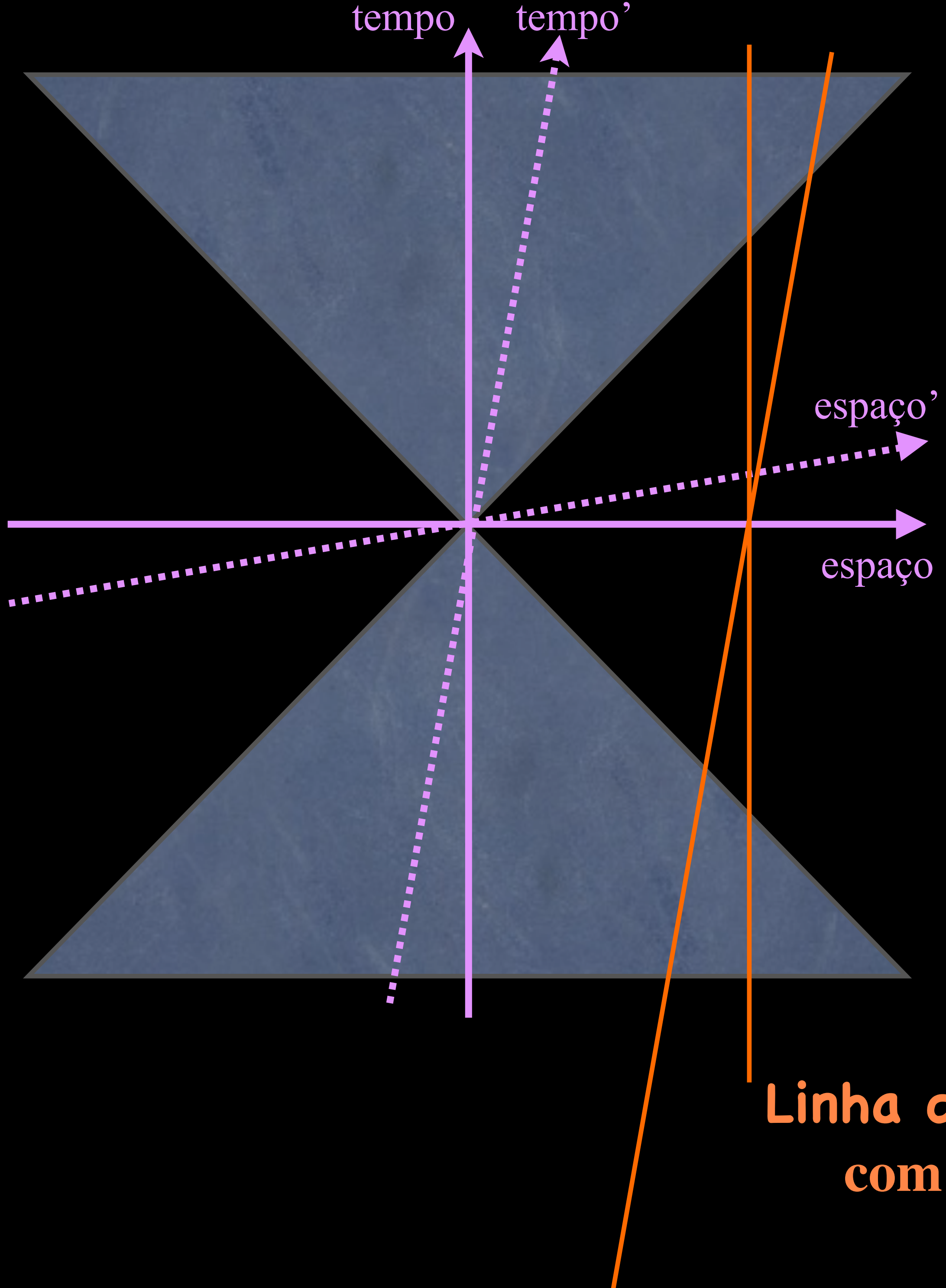
Cone de luz:

$$ds^2 = -c^2\, dt^2 + d\vec{x}^2 \Rightarrow 0$$

Luz:

$$|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right| = c$$

Relatividade especial: invariância do cone de luz sob "**boosts**"



$$dx^\mu \to dx'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu}\, dx^\nu$$

$$\Lambda^\mu_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v^i}{c} \\ -\gamma\frac{v_j}{c} & \delta_{ij} + (\gamma - 1)\frac{v^i\, v_j}{v^2} \end{pmatrix}$$

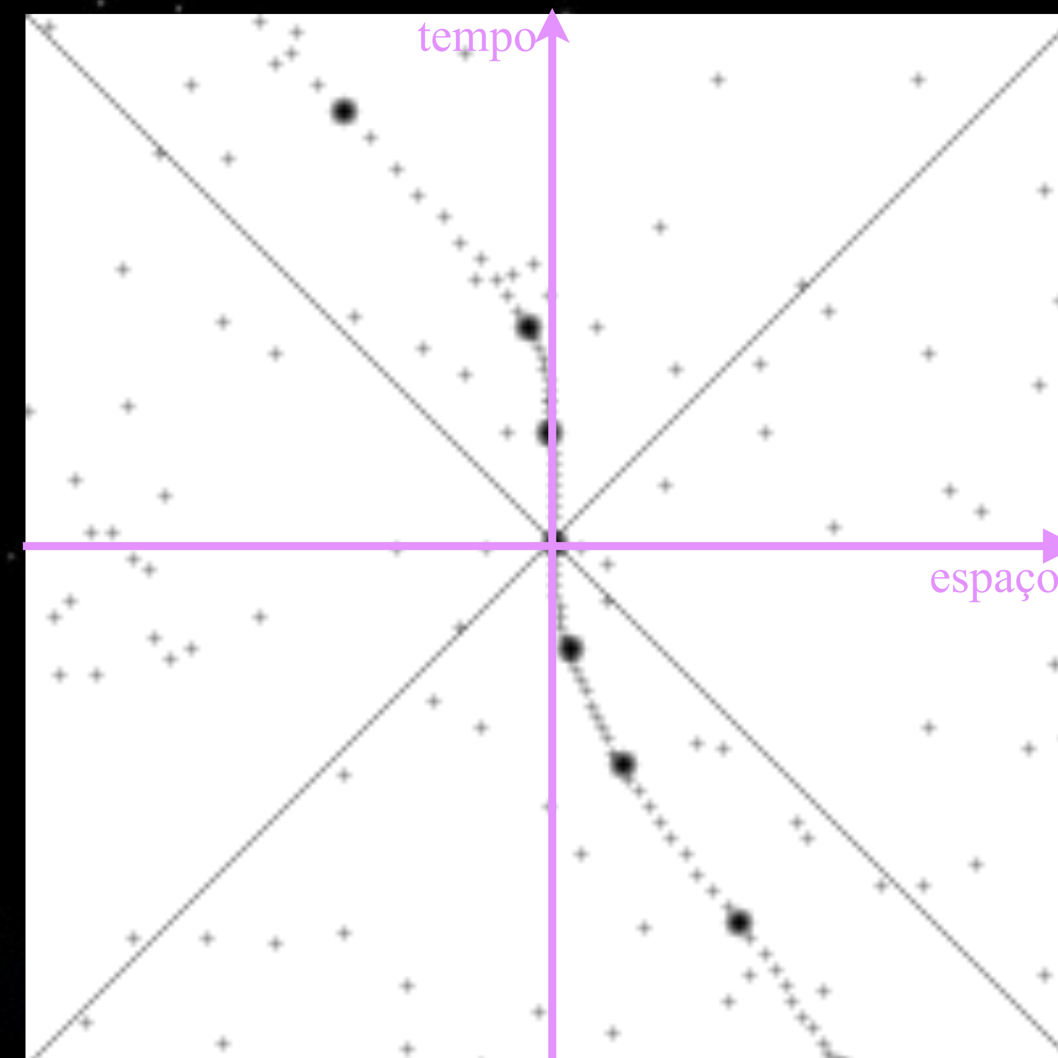
$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Lambda^\mu_{\ \alpha}(v)\Lambda^\alpha_{\ \nu}(-v) = \delta^\mu_\nu$$

Linha de mundo de observador
com $dx/dt = 0$, $dx'/dt' = -v$

Linha de mundo de observador
com $dx/dt = +v$, $dx'/dt' = 0$

O **princípio de equivalência** de Einstein (1915!) permite tratar referenciais acelerados ➠ covariância sob transf. de coordenadas <u>generalizadas</u>



Observer estacionário num campo gravitacional

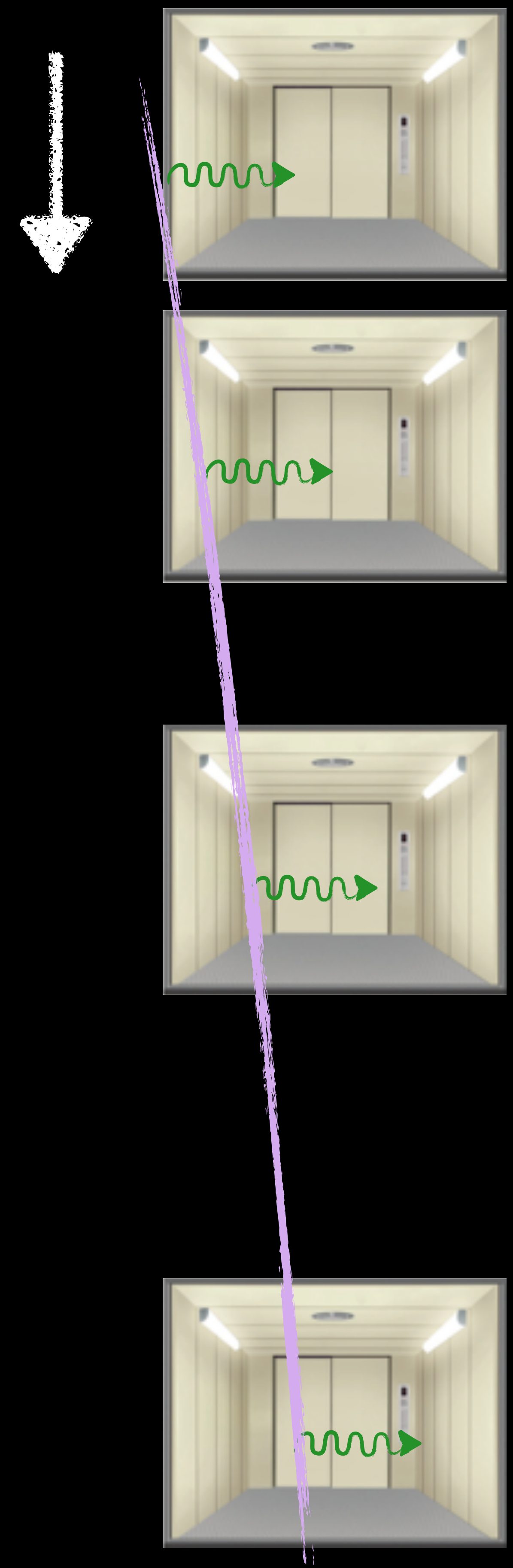
Observador acelerado (queda livre) = observador inercial

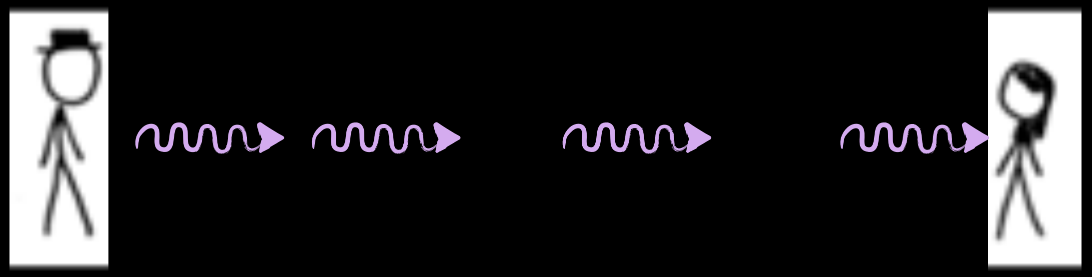
$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + d\vec{x}^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu$$

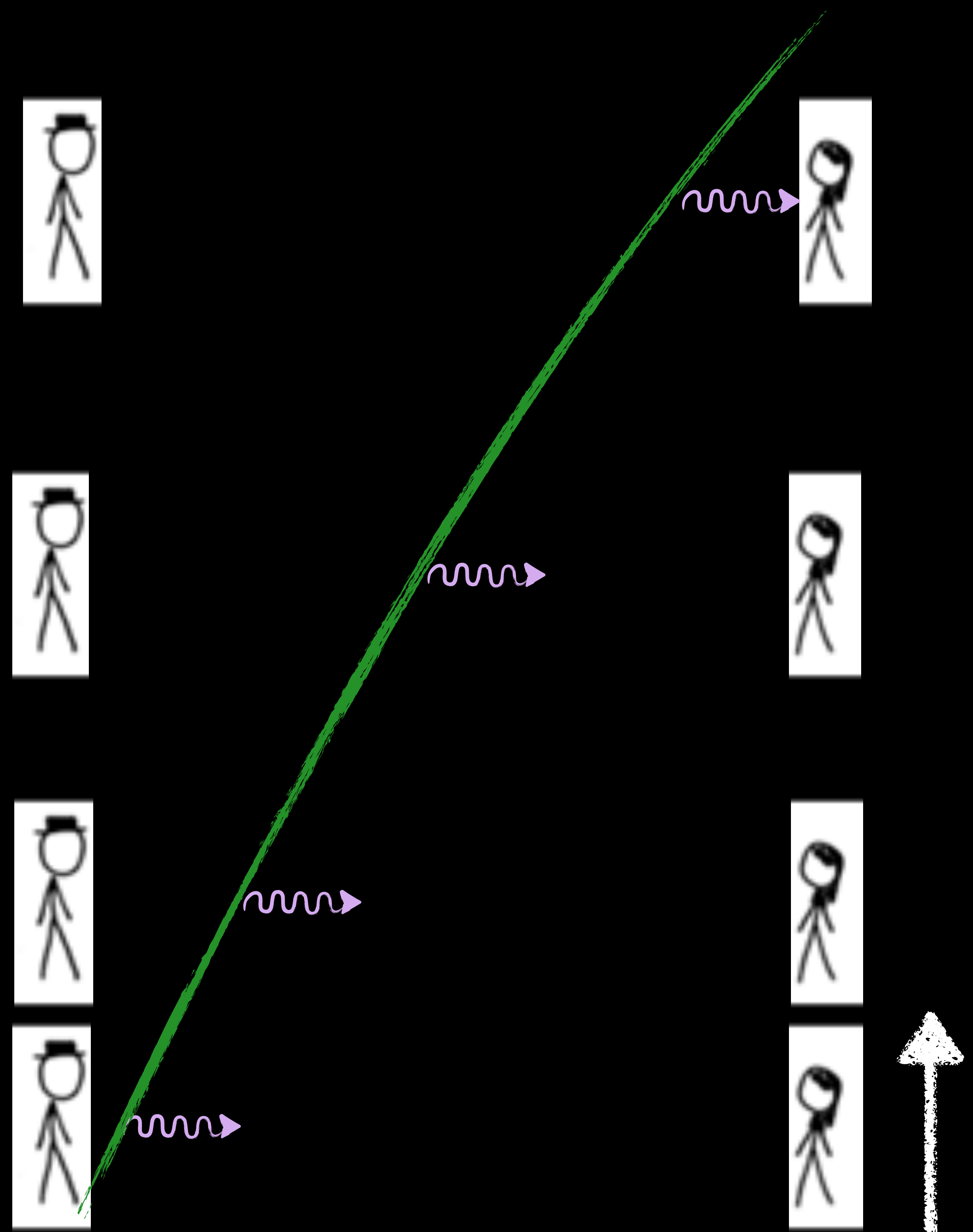
métrica: geometria do espaço-tempo

O elevador de Einstein visto de um observador parado na Terra:





O cara parado na Terra, visto desde o elevador de Einstein:



Mas... e agora? E o cone de luz?

$$ds^2 = -c^2\, dt^2 + d\vec{x}^2 \Rightarrow 0$$

Pelo **Princípio de Fermat**, a luz tem que percorrer o caminho que **minimiza o tempo** de viagem.

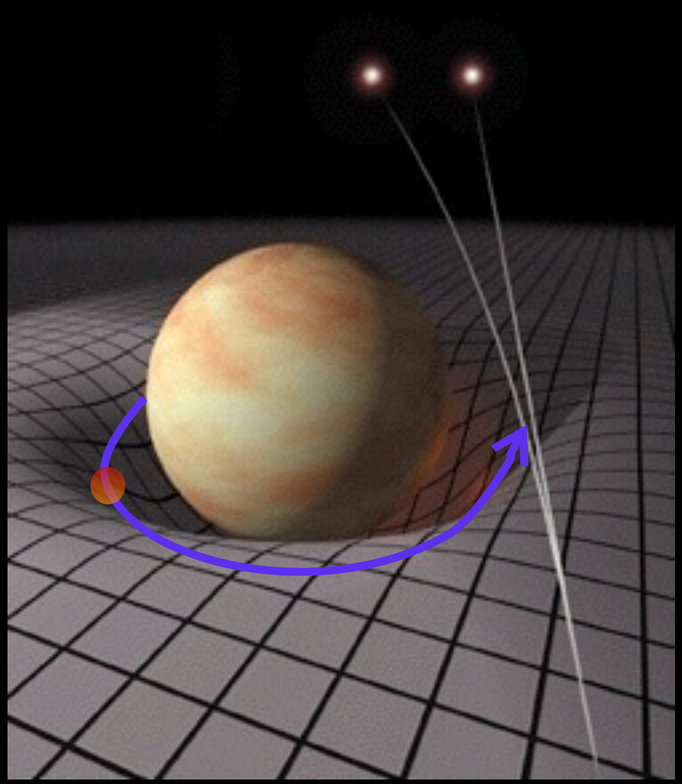
Mas como o menor tempo de viagem da luz pode ser uma **curva**, e não uma **reta**?

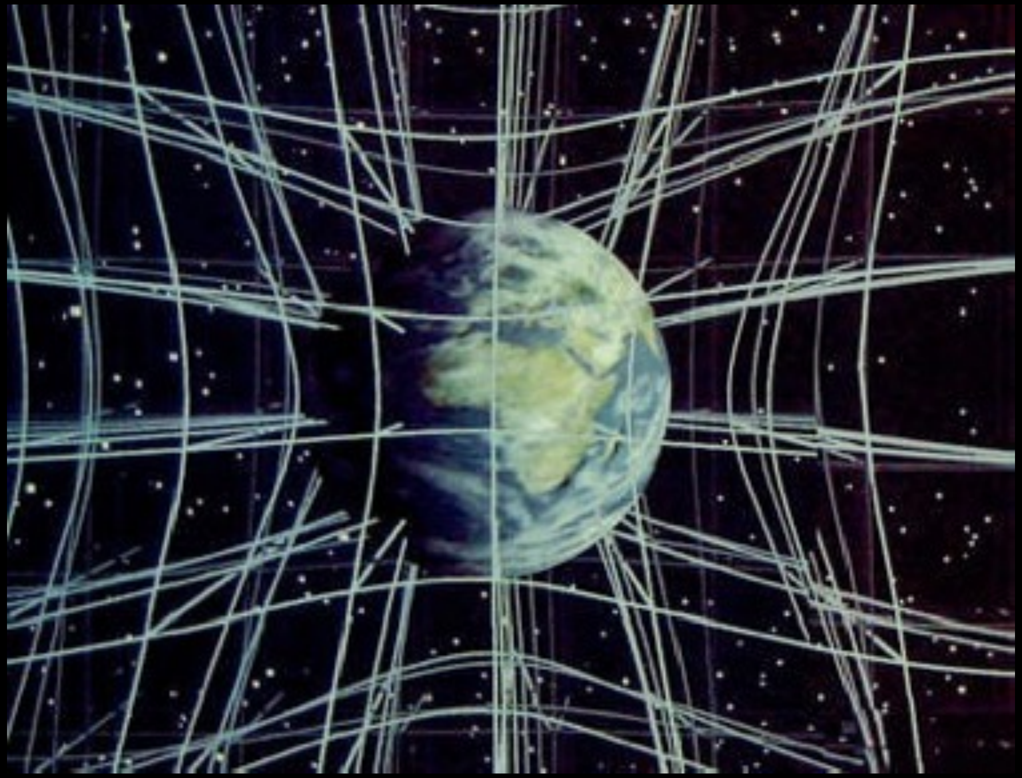
A resposta é que precisamos pensar em **espaços curvos** - ou melhor, **espaços-tempo curvos**!

Nas teorias "covariantes" da gravidade (p. ex., a Relatividade Geral), a **gravidade** é uma manifestação da **curvatura do espaço-tempo**

Nessas teorias, a **métrica** do espaço-tempo (i.e., sua **geometria**) tem dois papéis:

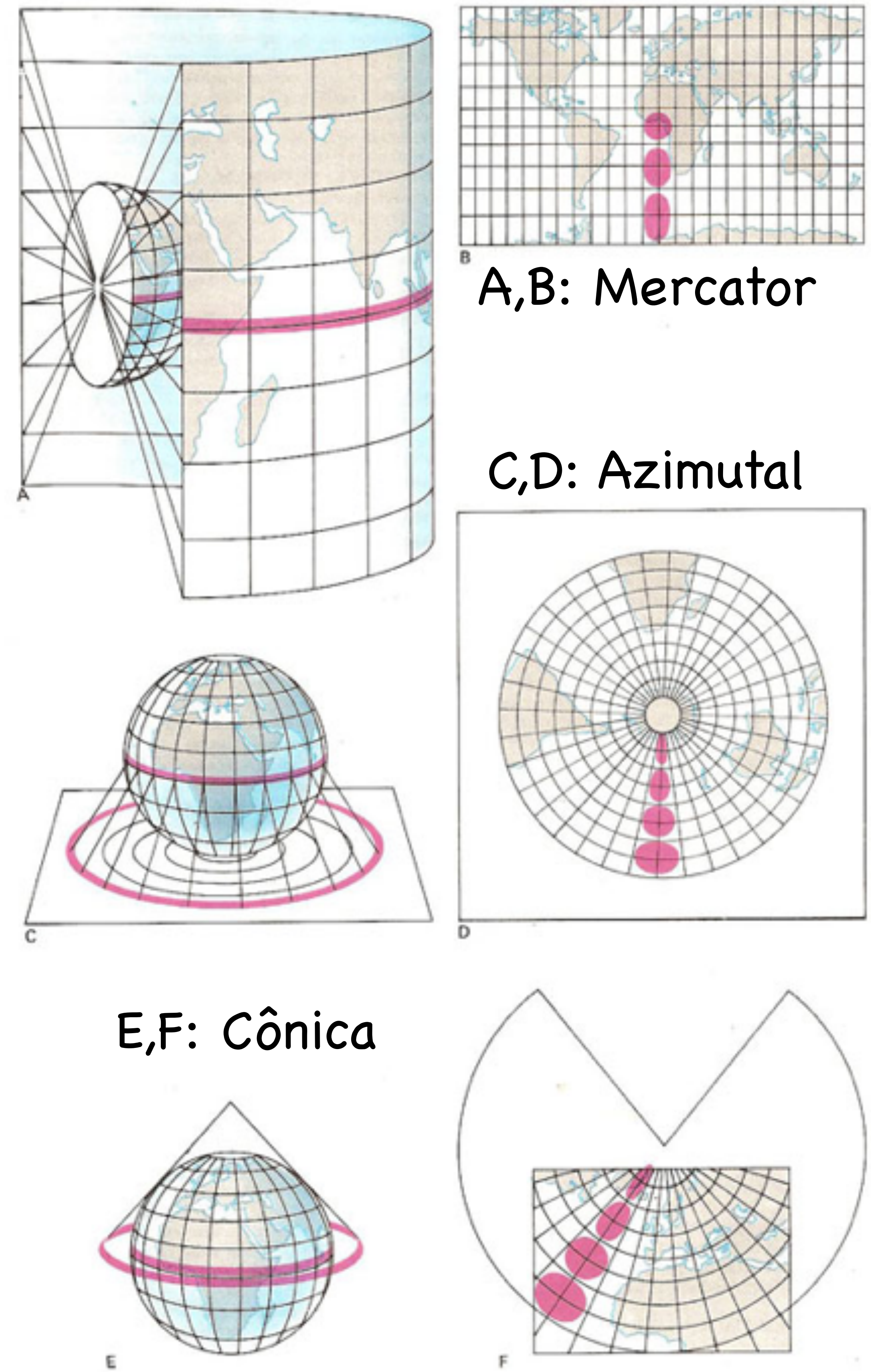
ela **determina** a trajetória da matéria... ...e é **curvada** pela matéria





- O que significa uma "geometria" do espaço-tempo?
- O que determina essa geometria?
- Como podemos fazer medidas que testam essa teoria?

Um exercício simples: a esfera e suas projeções



Qual a **rota mais rápida** de São Paulo a Paris?

E de São Paulo a Tokyo?...

Esta é a rota mais rápida de São Paulo a Tokyo!

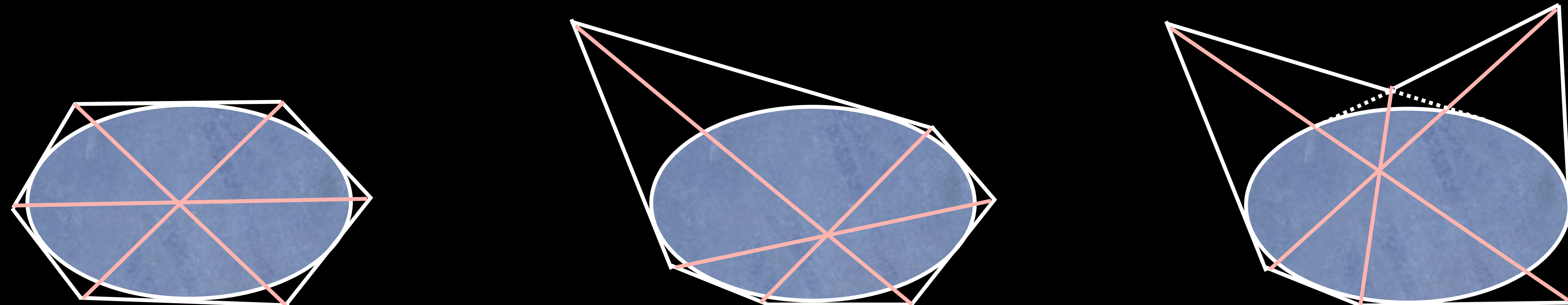
Vamos para o quadro negro...

Preâmbulo: A pré-história da Geometria Diferencial

Após Newton, a Física se concentrou na Mecânica, Óptica, Termodinâmica; os matemáticos ficaram obcecados com a Análise; a Geometria era considerada assunto de 2ª classe

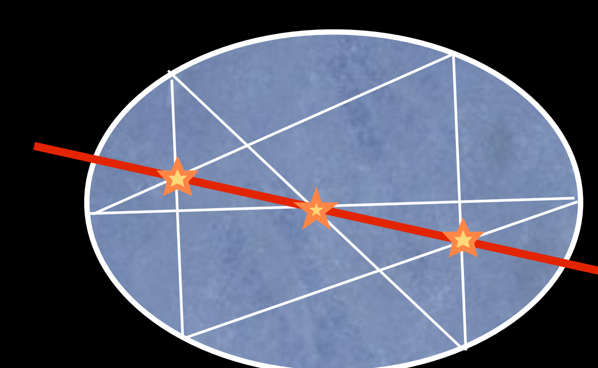
O retorno da Geometria iniciou c. 1806, quando **Charles J. Brianchon** (que tinha 21 anos) e **Gaspard Monge** ("Comte de Péluse") provaram o seguinte teorema:

Os seis lados de um hexágono circunscrevem uma seção cônica SSE as três linhas comuns aos três pares de vértices opostos têm um ponto em comum



Isso foi logo reconhecido como o **dual** (ou "dual projetivo") do teorema de **Pascal** de 1639 (demonstrado quando Pascal tinha 16 anos!), que afirma o seguinte:

Se um hexágino arbitrário está inscrito numa seção cônica, então os três pares das continuações de lados opostos se encontram em pontos numa linha reta.

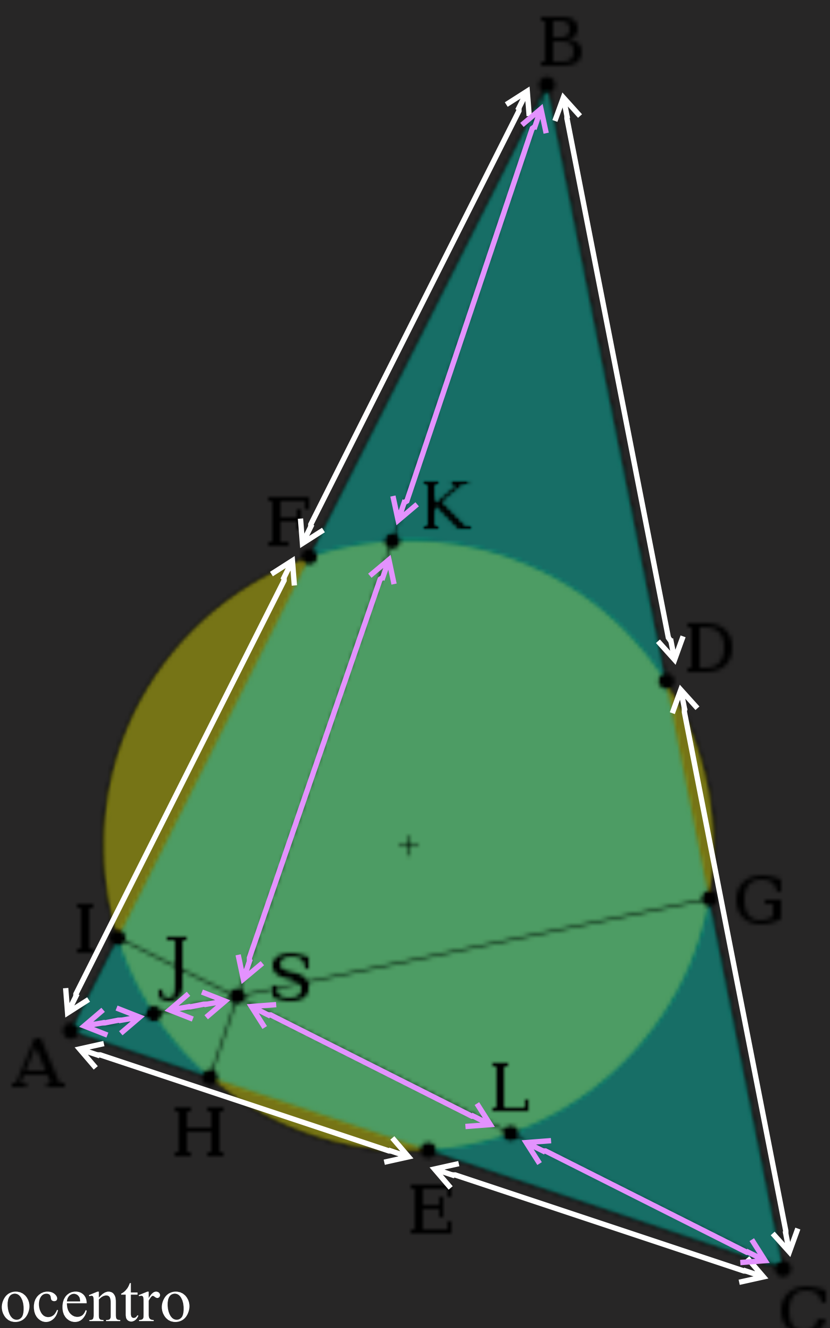


Já esses resultados inspiraram **Karl Feuerbach**, em 1822, a (re-)descobrir as propriedades do **círculo de 9 pontos** (Brianchon chegou antes...)

... e provar o **Teorema de Feuerbach:**

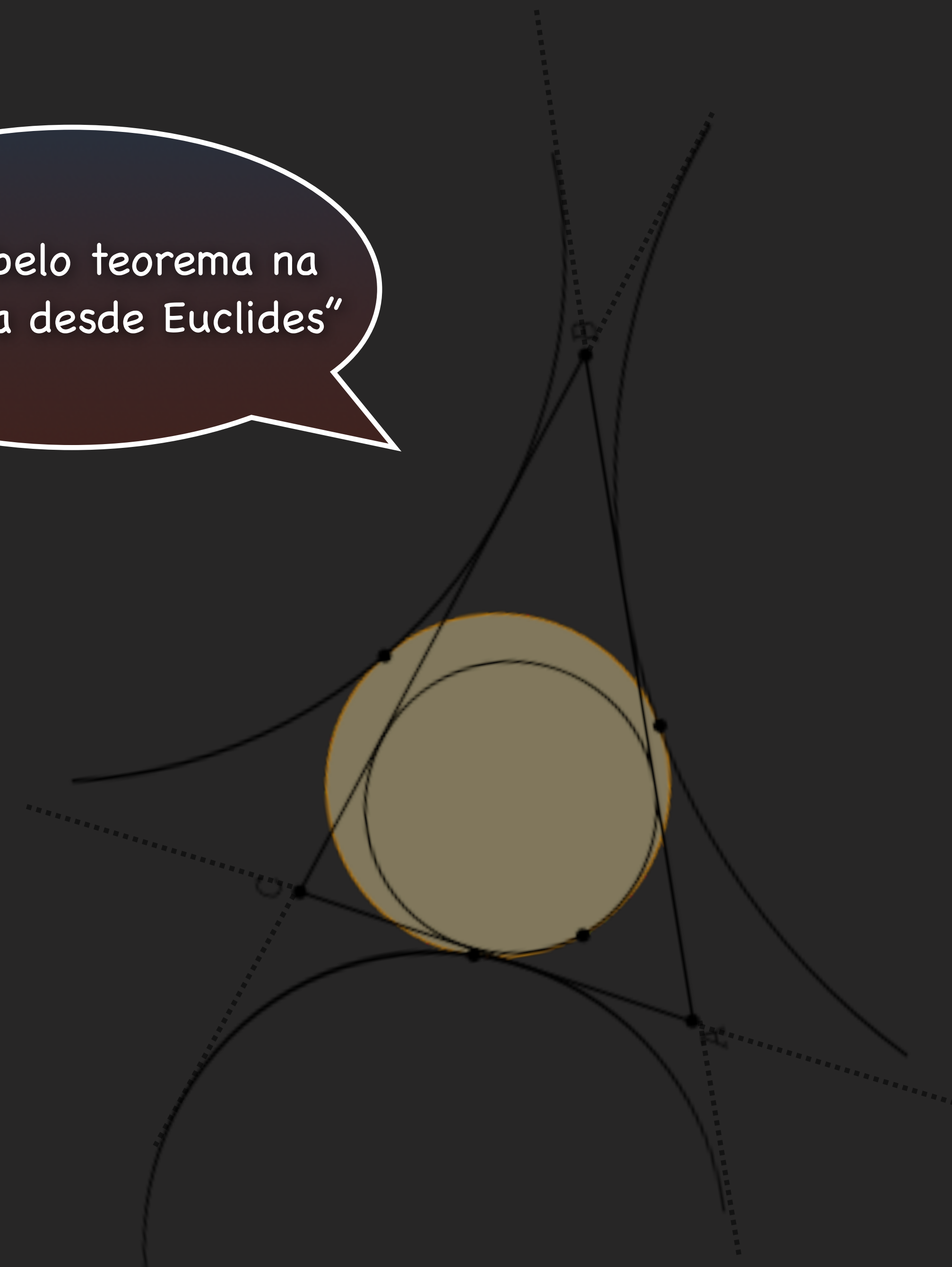
AE=EC
CD=DB
BF=FA

SL=LC
SK=KB
SJ=JA



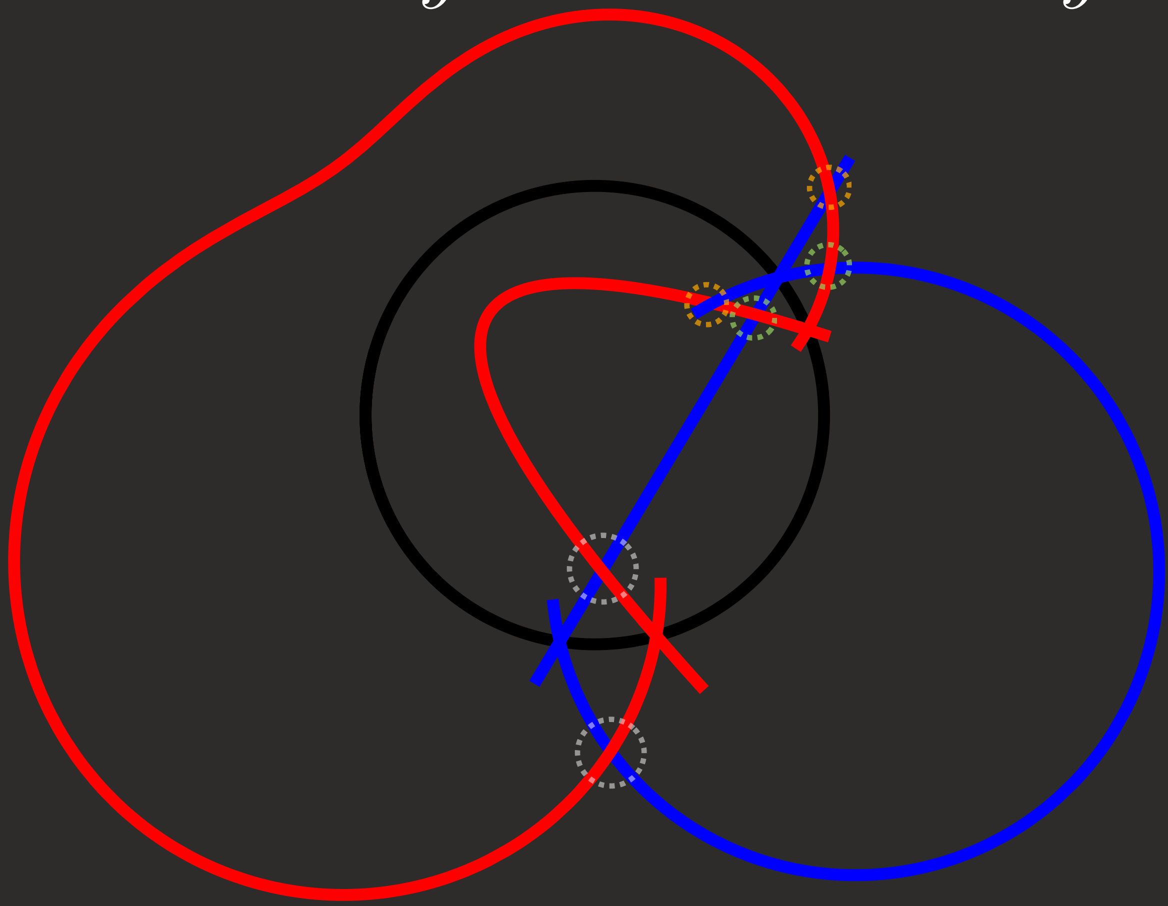
S: Ortocentro
AG, BH, CI: Altitudes

"o mais belo teorema na Geometria desde Euclides"



... que, por sua vez, levou **Jakob Steiner** (Steiner/Geometria :: Gauss/Análise) a descobrir, c. 1824, as leis da "geometria inversiva": a todo ponto dentro (fora) de um círculo, corresponde outro ponto, fora (dentro) dele, dado pela transformação (para raio unitário):

$$x' = \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad y' = \frac{y}{x^2+y^2}$$



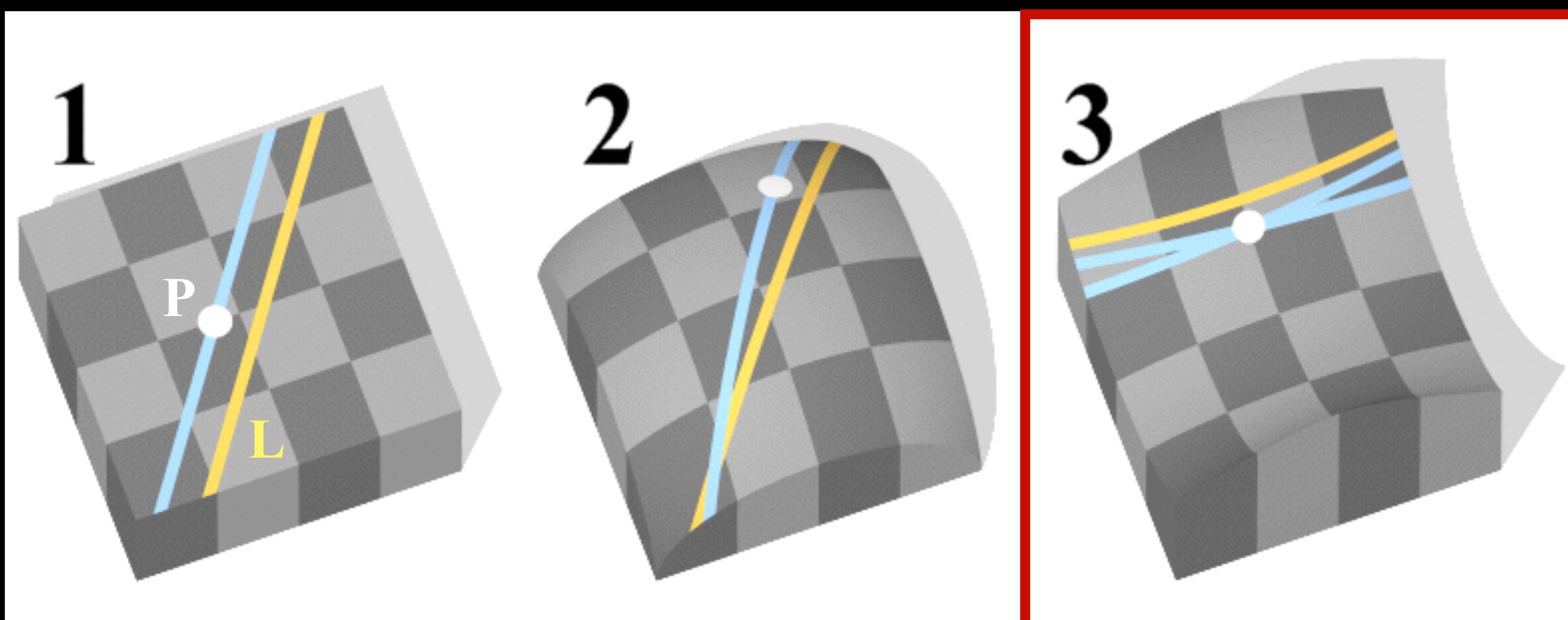
Essa é uma **transformação conforme** - que preserva os **ângulos** de linhas que cruzam. (Essas transformações foram depois re-descobertas por outros, incluindo **Lord Kelvin**, no contexto da Eletrostática - no **método das imagens**.)

O estudo de transformação de coordenadas e de dualidades (e.g., pontos/linhas) reacendeu o interesse na Geometria, que recobrou uma reputação respeitável

Em ~1826 **Nicolai Lobachevski** (e, independentemente, **C. F. Gauss** e **János Bolyai**) miraram num dos pilares da Geometria Euclideana: o "**postulado das paralelas**":

> **dada uma linha L e um ponto P, pode existir apenas uma linha que passa por P e não cruza L.**

Lobachevski mostrou que isso era **falso**, construindo espaços "curvos", infinitos, em 2D, (que ele chamava "geometrias imaginárias") onde existem **muitas linhas por P:**



1. Plano, infinito (Euclidean)

2. Curvo, <u>finito</u> (fechado/elíptico)

3. Curvo, infinito (aberto/hiperbólico)

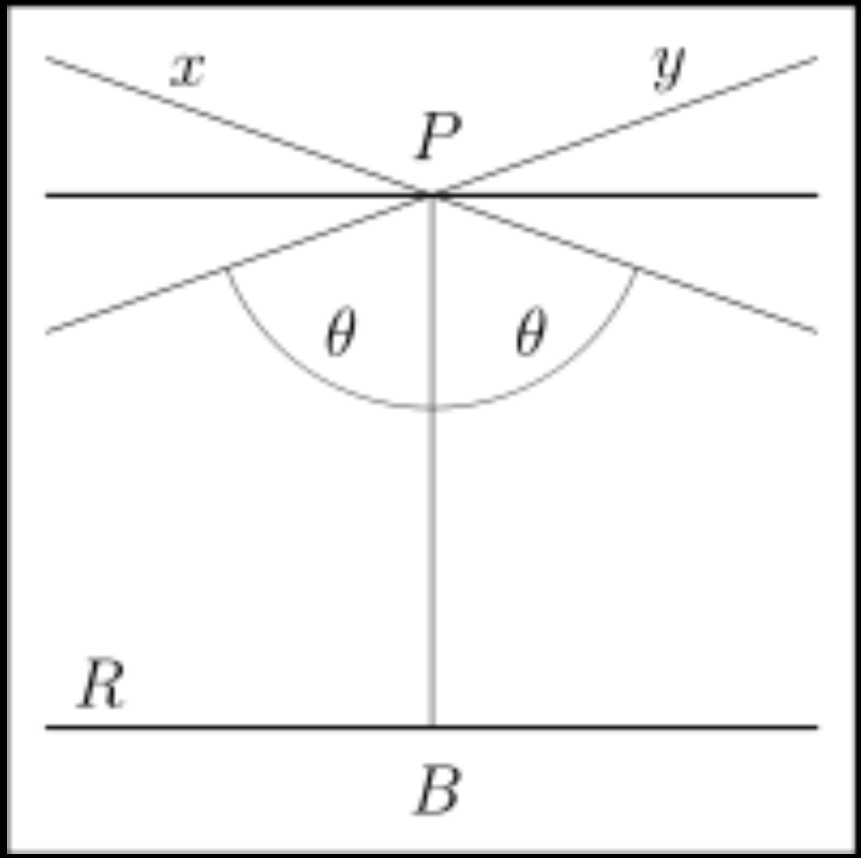
Espaço de Gauss-Lobachesvki-Bolyai

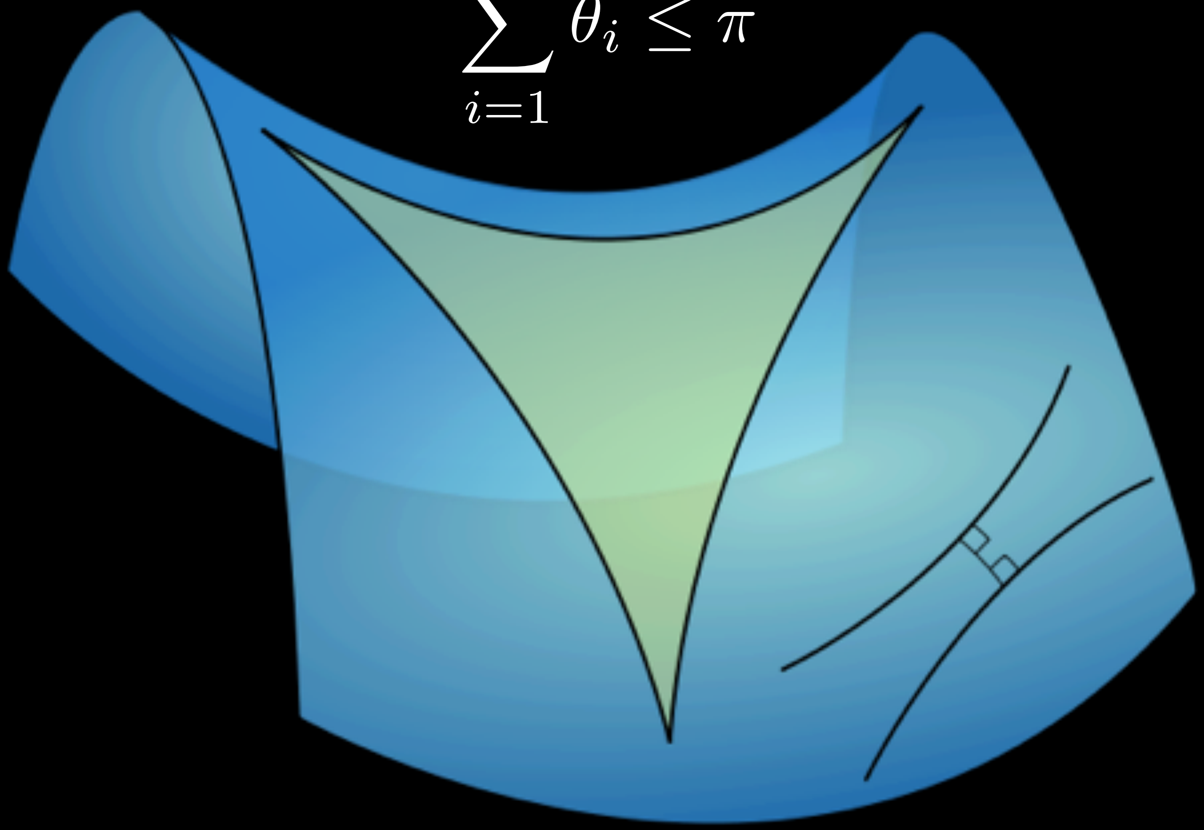
Geometria <u>**hiperbólica**</u> (ou Geometria de Bolyai-Lobachevsky)

Teorema ultraparalelo:

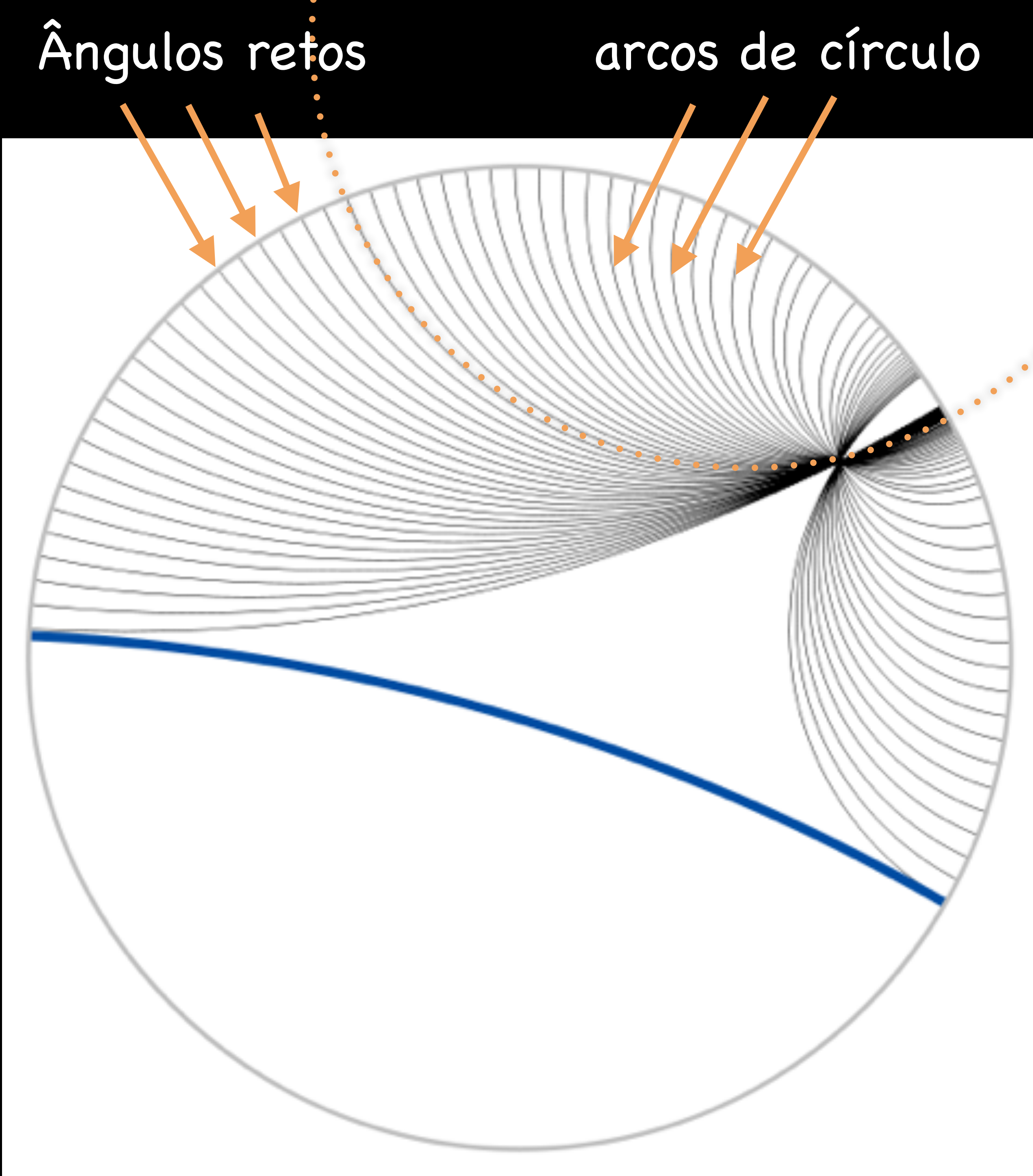
dadas duas linhas paralelas (hipérboles), há uma única linha perpendicular a elas.

$$\sum_{i=1}^{3} \theta_i \leq \pi$$

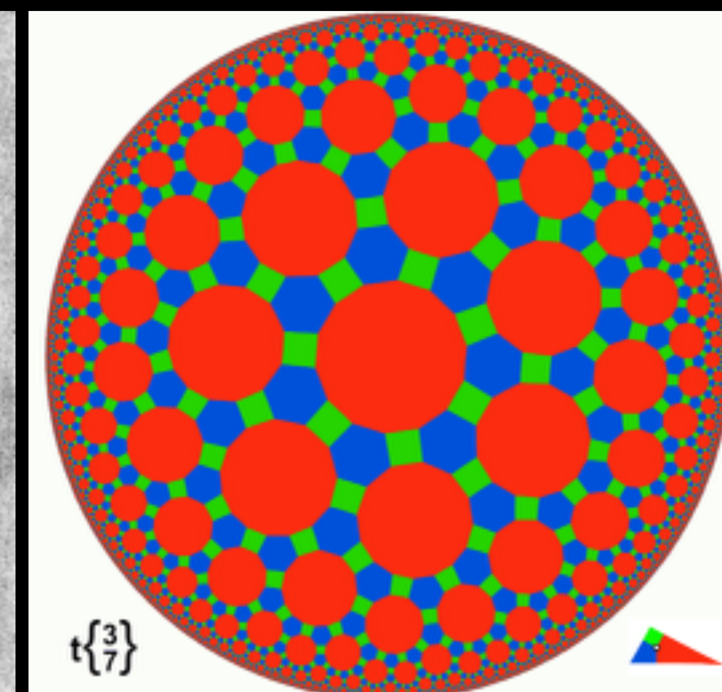




É mais fácil visualizar a Geometria hiperbólica usando o **Disco de Poincaré** (ou **disco conforme**) - inventado por Beltrami, para demonstrar a equivalência da Geometria hiperbólica com a Geometria Euclideana



M. C. Escher



Leituras para a próxima aula

As Equações de Einstein:

http://ls.poly.edu/~jbain/philrel/philrellectures/10.EinsteinEqus.pdf

http://ls.poly.edu/~jbain/philrel/philrellectures/11.InterpretingGR.pdf

http://math.ucr.edu/home/baez/einstein/einstein.pdf

Buracos Negros:

http://pt.wikipedia.org/wiki/Buraco_negro (boa ação: traduza melhor essa página!)

http://en.wikipedia.org/wiki/Black_hole

http://ls.poly.edu/~jbain/philrel/philrellectures/13.BlackHoles1.pdf