

CAPÍTULO 2 - REVISÃO DE TÓPICOS DE CÁLCULO - INTEGRAIS

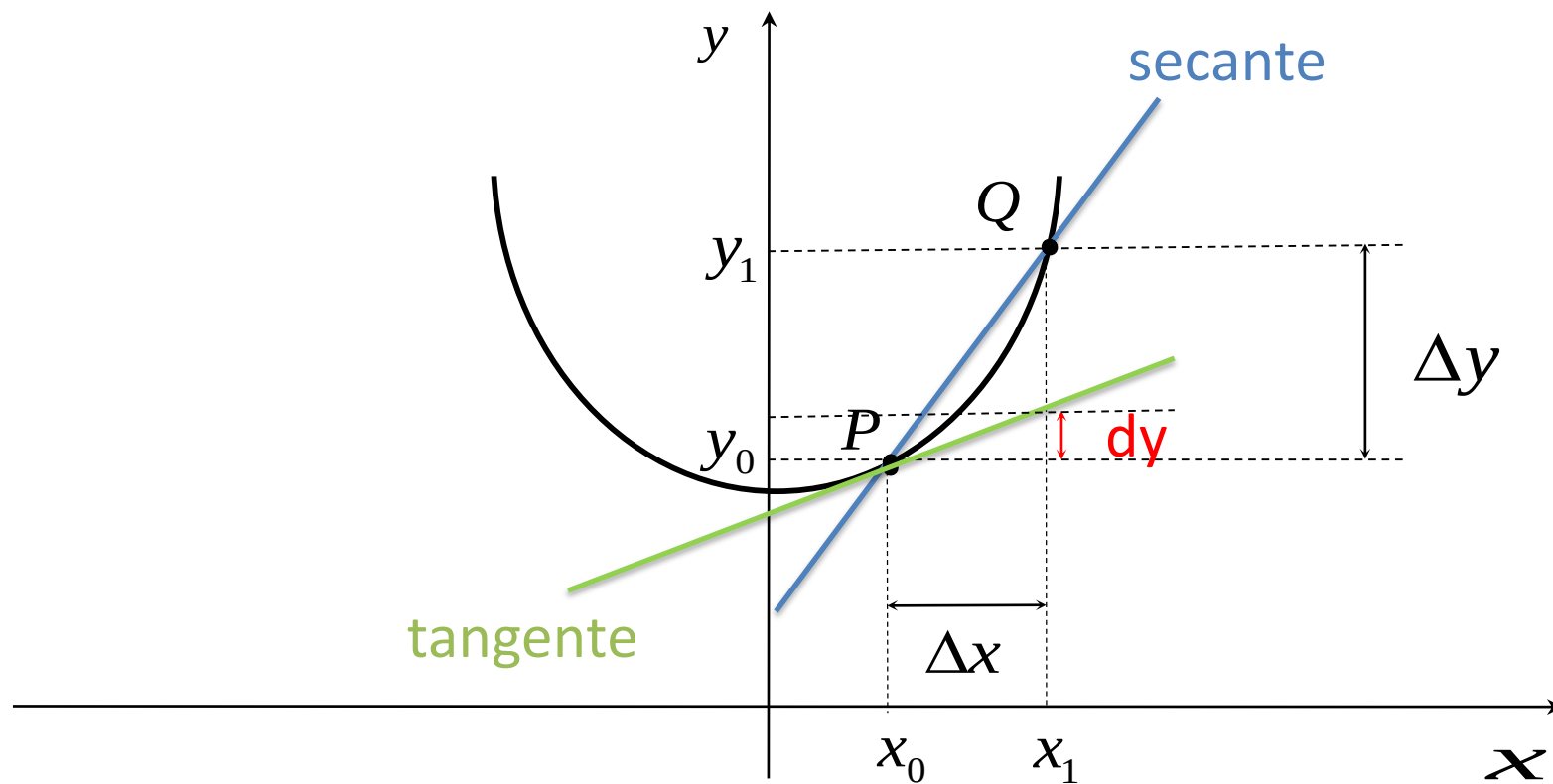
2.1 Integrais indefinidas

- Além de iniciar o estudo intensivo de derivadas, *Newton* e *Leibniz* descobriram também que muitos problemas de geometria e física dependem de “antiderivação”. Este problema é, às vezes, chamado “inverso das tangentes”, ou seja, dada a derivada de uma função, achar a própria função.

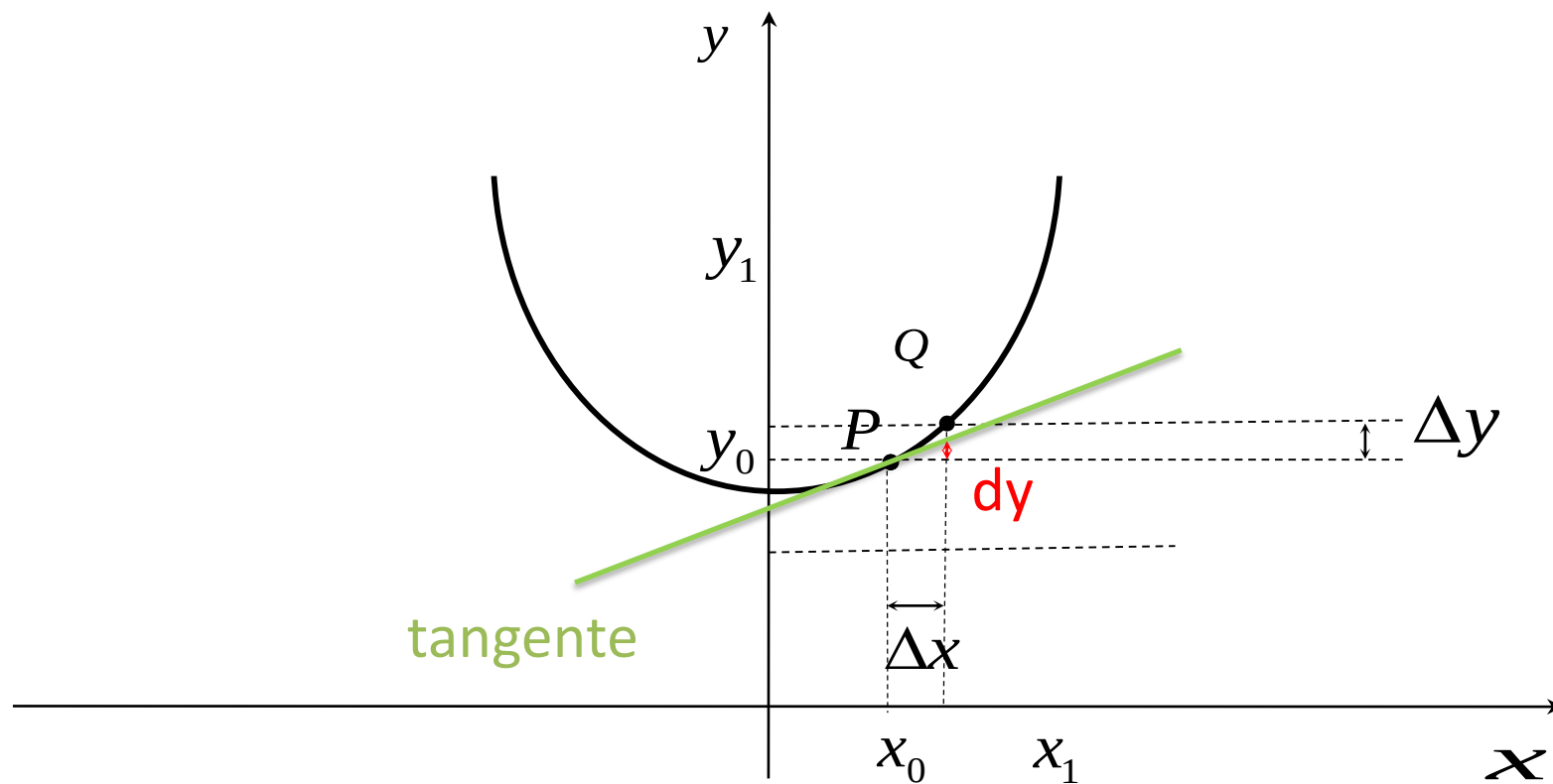
Diferencial

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{dy}{dx}$$

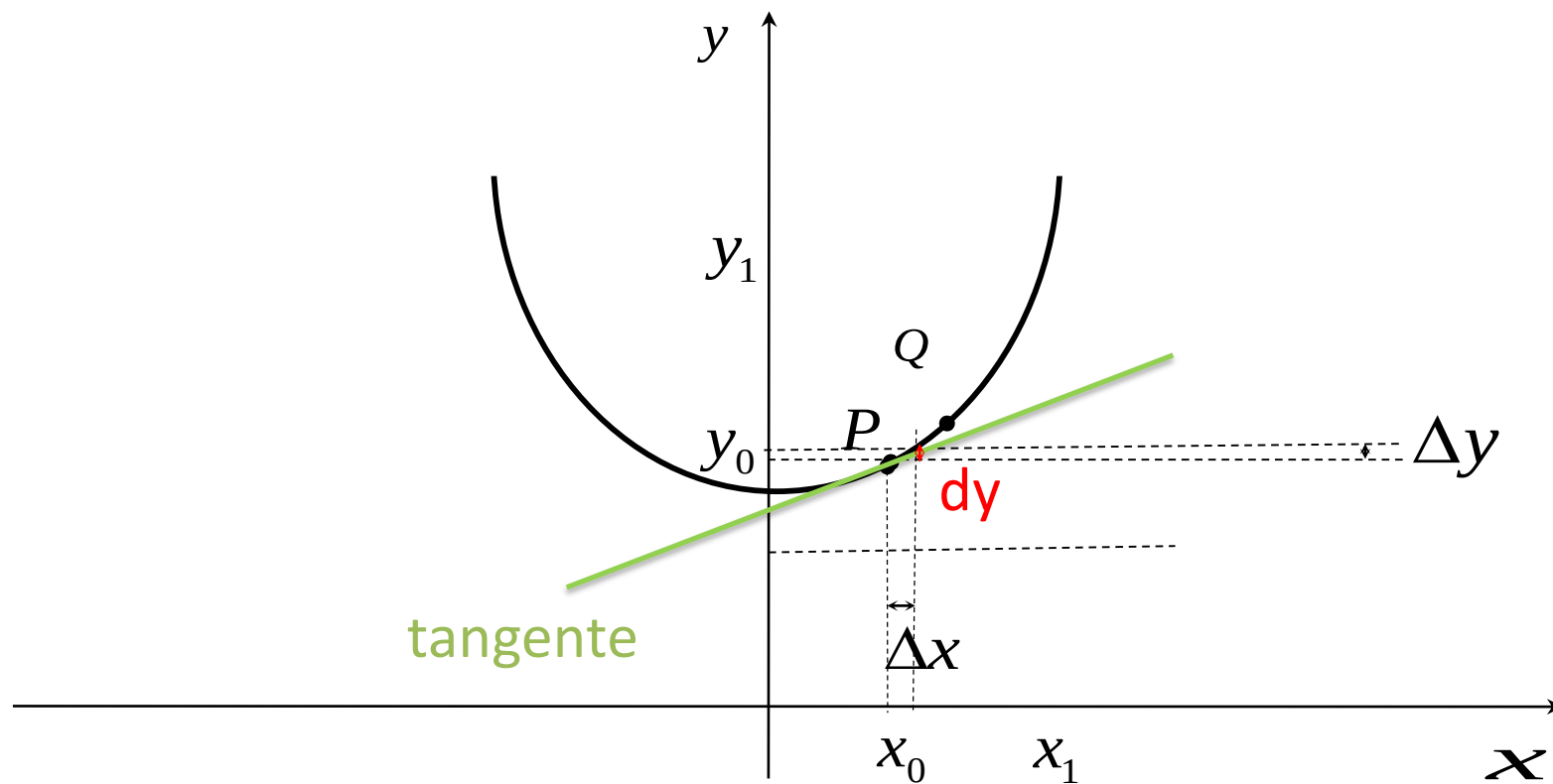
Interpretação geométrica



Interpretação geométrica



Interpretação geométrica



A diferencial da variável independente:

- Se a função $f(x)$ é definida por: $y = f(x) = x$
- Então a diferencial de x , denotada por dx é dada por:

$$dx = \Delta x$$

- Podendo-se escrever: $dy = f'(x) \cdot dx$

Exemplo:

- Se a função $f(x)$ é definida por: $y = f(x) = x^2$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$dy = f'(x) \cdot dx = 2x dx$$

A diferencial como estimativa de erro

- Considera:

$x \rightarrow$ valor correto de entrada

$Dx \rightarrow$ erro da medição

$Dy \rightarrow$ erro na variável calculada (erro de saída)

$$Dy = f(x + Dx) - f(x)$$

$dy \rightarrow$ estimativa do erro $dy = f'(x) \cdot Dx$

Exemplo: Dados → $f(x) = 4x^2 + 1$
 → para $x = 2$
 → considerando $Dx = 0,1$ e $Dx = 0,01$
 → Calcular Dy e dy

$$\begin{aligned}
 Dy &= f(x + Dx) - f(x) = 4(x + Dx)^2 + 1 - (4x^2 + 1) \\
 &= 4(x^2 + 2x Dx + Dx^2) + 1 - (4x^2 + 1) = \\
 Dy &= 4x^2 + 8x Dx + 4Dx^2 + 1 - 4x^2 - 1 = 8x Dx + 4Dx^2
 \end{aligned}$$

x	Dx	Dy	dy	(Dy - dy)
2	0,1	1,64	1,60	0,04
2	0,01	0,1604	0,1600	0,0004

- **2.2 A antidiferenciação ou integração**

$$\frac{d(G(x) + C)}{dx} = g(x) = 2x$$

Diferenciação

$$y = G(x) + C = x^2$$

Função Primitiva
ou integral de
 $g(x)$

$$g(x) \, dx = 2x \, dx$$

$g(x)$ é o
integrando

Antidiferenciação ou Integração

$$\int g(x) = (G(x) + C) = x^2 + C$$

- **Determinação da constante de integração**
- A constante de integração pode ser determinada quando conhecemos algumas condições iniciais, isto é, quando conhecemos o valor da integral para algum valor da variável.
- Solução particular

Exemplo

Achar a função cuja derivada primeira é $3x^2 - 2x + 5$ e que para $x = 1$, $f(x) = 12$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 5 \Rightarrow dy = (3x^2 - 2x + 5) dx$$

$$\int dy = \int (3x^2 - 2x + 5) dx$$

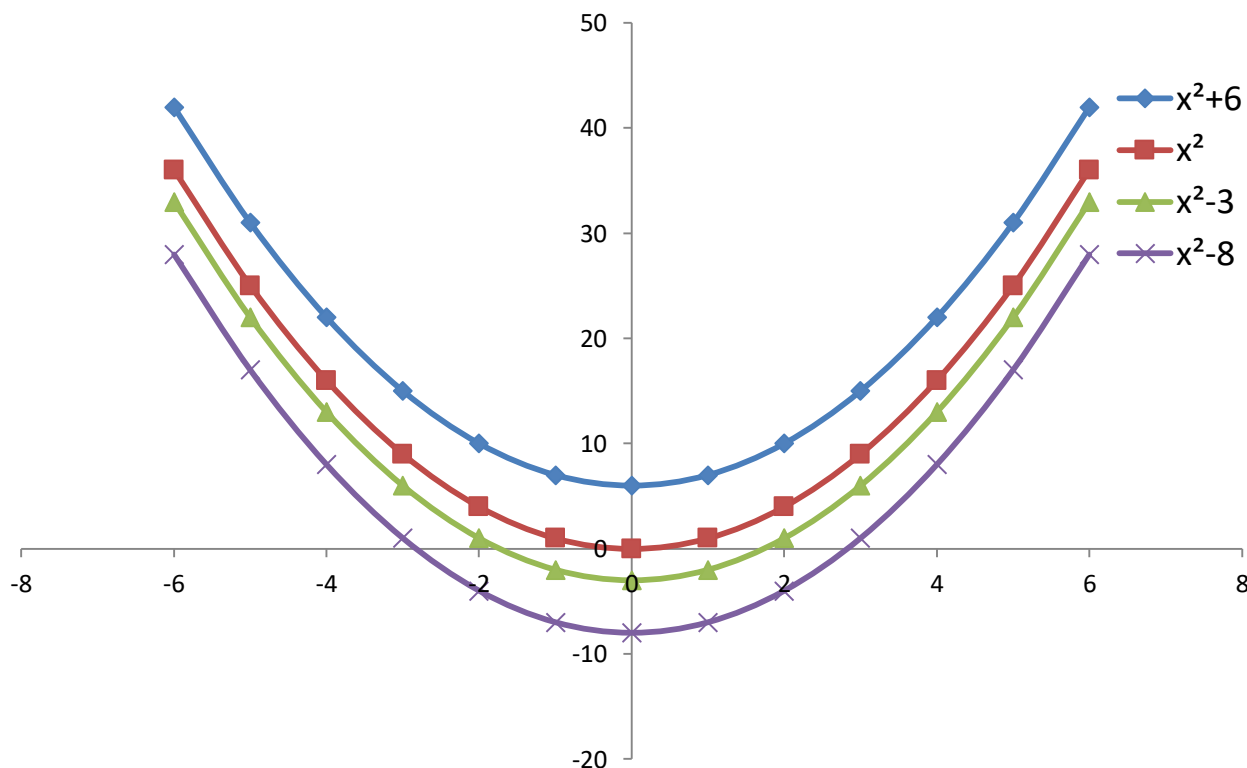
$$y = f(x) = x^3 - x^2 + 5x + C$$

Dadas as condições iniciais $f(x) = 12$ para $x = 1$; temos

$$12 = 1 - 1 + 5 + C, \quad \text{ou} \quad C = 7$$

Logo, $x^3 - x^2 + 5x + 7$ é a solução particular.

- **Significado geométrico da constante de integração**
- Solução geral $\rightarrow$ família de curvas com o mesmo dy/dx
- Exemplo: $y = x^2 + C \rightarrow dy/dx = 2x$



- **Significado físico da constante de integração**
- A constante de integração reflete as condições iniciais do problema, ou seja, pode ser determinada conhecendo-se o valor da variável dependente para o momento inicial.

- Ex: movimento uniforme acelerado (movimento de um ponto móvel em linha reta, com aceleração constante).

- Aceleração (a) é constante: $\frac{dv}{dt} = a$, ou $dv = a dt$.

- Integrando, $\int dv = \int a dt \Rightarrow v = at + C$ (solução geral).

- Para a solução particular:

- Condição inicial: $v = v_0$ quando $t = 0$.

$$v_0 = 0 + C, \quad \text{ou} \quad C = v_0 .$$

- $v = a t + C \rightarrow$ Logo, $v = a t + v_0$ (Solução particular).

2.3 Algumas regras de integração

$$\text{a) } \int dx = x + C$$

$$\text{b) } \int a \, dx = ax + C$$

$$\text{c) } \int a f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$$

$$\text{d) } \int (u(x) \pm v(x) \pm w(x)) \, dx = \int u \, dx \pm \int v \, dx \pm \int w \, dx$$

$$\text{e) } \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$$

$$\text{f) } \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$g) \int e^x dx = e^x + C$$

$$h) \int \cos x dx = \text{sen } x + C$$

$$i) \int \text{sen } x dx = -\cos x + C$$

$$j) \int \sec^2 x du = \text{tg } x + C$$

$$k) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arcsen } \frac{x}{a} + C$$

$$l) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$m) \int \tan x du = -\ln(\cos x) + C$$

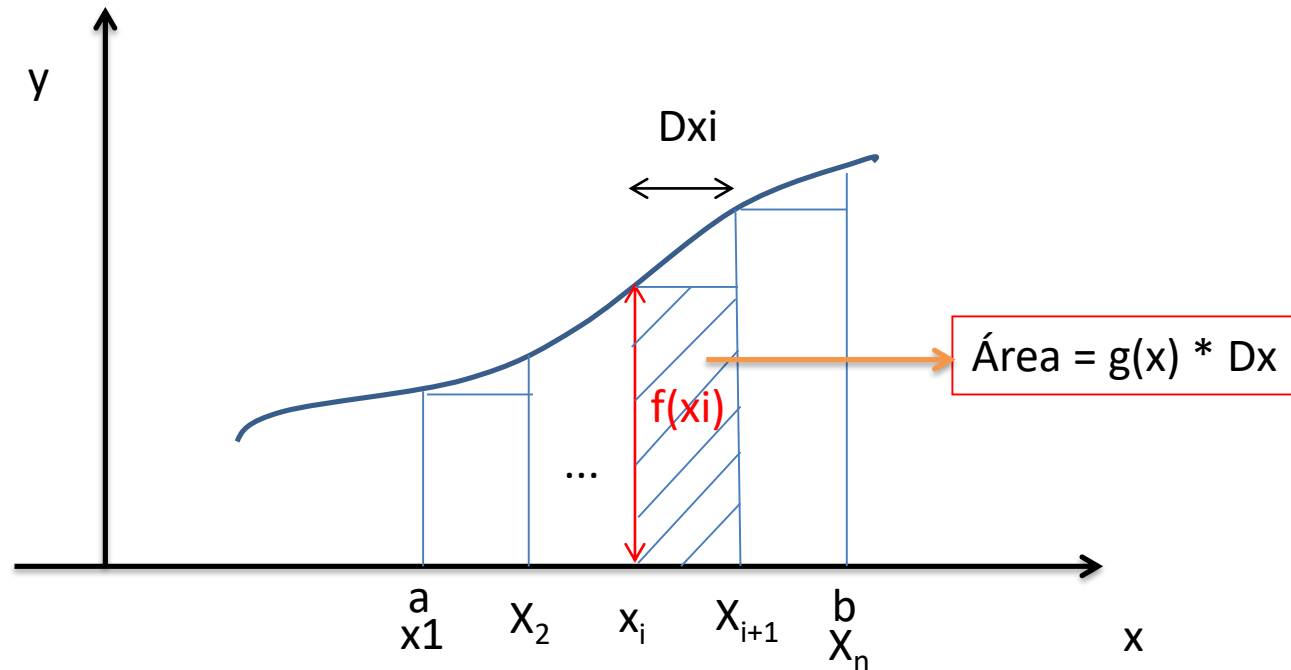
- Algumas integrais são resolvidas por substituição:

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{u = x^2 + 1} \\ \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \end{array}$$

Substituindo: $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{\cancel{x}}{u} \frac{du}{\cancel{2x}} = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} =$

$$\frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C$$

2.4 A Integral definida – A área delimitada sobre uma curva de 2 pontos



Quando n tender ao infinito os erros tendem a sumir e Dx tende a zero

$$A = \lim_{a \rightarrow b} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$A = \int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemplo: Calcular $\int_2^3 f(x) dx$ para $f(x) = 2x$

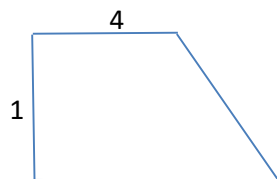
Analiticamente:

$$y = \int_2^3 2x dx =$$

$$2 \int_2^3 x dx =$$

$$2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^3 = [x^2]_2^3$$

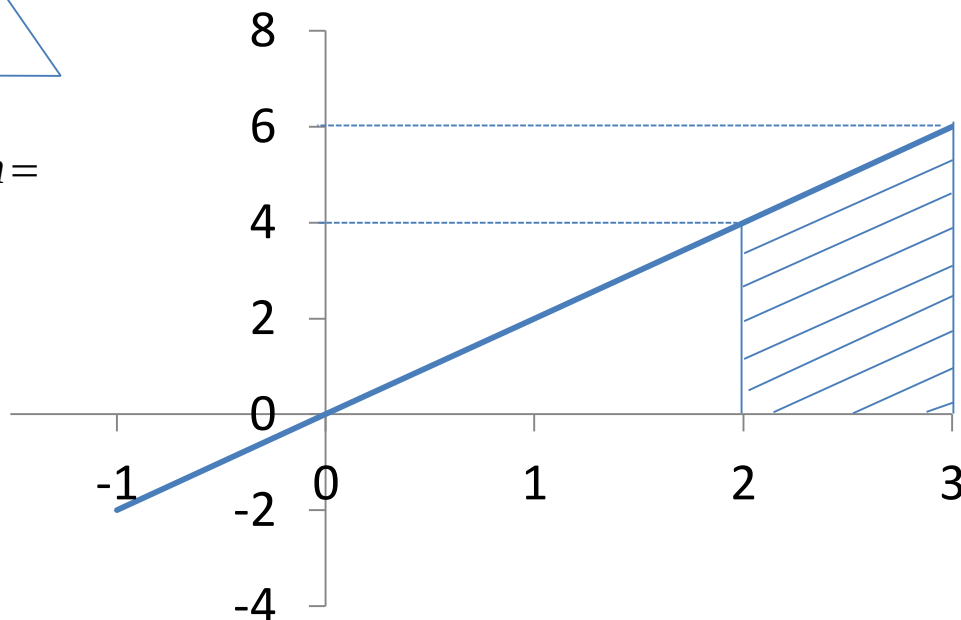
$$= 9 - 4 = 5$$



$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h =$$

$$\frac{6+4}{2} \cdot 1 = 5$$

Geometricamente:



- Exemplo: Achar a área compreendida entre as funções:

- $y = x^2 - 4x + 5$

$$y = x + 1$$