CAPÍTULO 1 - REVISÃO DE TÓPICOS DE CÁLCULO - DERIVADAS

1.1 Os problemas básicos do cálculo

Quase todas as ideias e aplicações do cálculo giram em torno de dois problemas geométricos fáceis de serem entendidos. Ambos se referem ao gráfico de uma função $y = f(x)$. Assumiremos, para simplificar, que esse gráfico está inteiramente acima do eixo x, como na Figura 1.1.

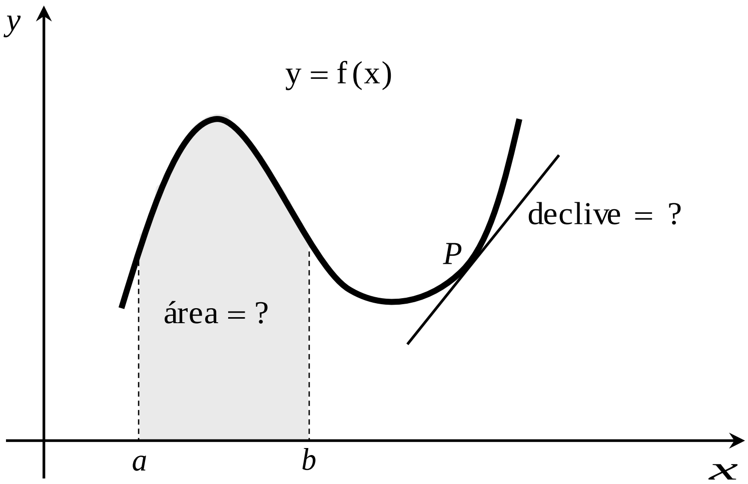


Figura 1.1 - Problemas básicos do cálculo

Os dois problemas são:

(1) o cálculo das tangentes, é o problema básico do cálculo diferencial, isto é, calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico num ponto dado P ;

(2) o cálculo das áreas, é o problema básico do cálculo integral, isto é, calcular a área debaixo do gráfico, entre os pontos $x = a$ e $x = b$.

Tudo que se faz no cálculo está sempre relacionado com esses dois problemas, as ideias e as técnicas para resolvê-los e as aplicações originadas deles.

À primeira vista, estes problemas podem parecer de alcance bem limitado. O que é surpreendente é constatar que eles têm muitas aplicações profundas e de longo alcance em muitas ciências.

1.2 O problema da tangente

Antes de calcular o coeficiente angular de uma reta tangente, devemos primeiro entender o que é uma reta tangente. E isto não é tão fácil quanto parece.

No caso de uma circunferência não há dificuldade. Uma tangente a uma circunferência (Figura 1.2) é uma reta que intercepta a circunferência em apenas um ponto, chamado o ponto de tangência; as retas não-tangentes ou interceptam a circunferência em dois pontos ou não a interceptam.

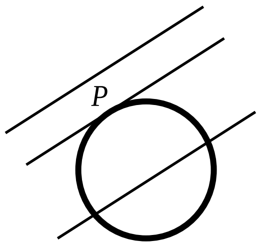


Figura 1.2 - Tangente a uma circunferência

Essa situação reflete a ideia intuitiva que temos de tangente a uma curva num dado ponto como sendo uma reta que "toca" a curva naquele ponto. Ela sugere também a possibilidade de definir uma tangente a uma curva com uma reta que intercepta a curva em apenas um ponto. Esta definição não é satisfatória para curvas em geral. Considere a curva mostrada na Figura 1.3. Ela tem uma tangente perfeitamente aceitável no ponto *P*, que esta definição rejeitaria; a reta acima, obviamente não tangente, é que seria aceita.

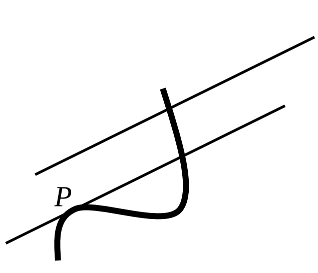


Figura 1.3 - Tangente a uma curva

O conceito correto de tangente originou-se com *Fermat*, em 1630. Este conceito não é só um razoável enunciado sobre a natureza geométrica das tangentes, mas é também a chave de um processo prático para a construção de tangentes.

Resumidamente, a ideia de *Fermat* é a seguinte:

- considere uma curva $y = f(x)$ e P um dado ponto fixo sobre essa curva (Figura 1.4).
- considere Q um segundo ponto próximo de P sobre a curva e trace a reta secante PQ.
- a reta tangente em P pode agora ser vista como a posição limite da secante variável quando Q desliza ao longo da curva em direção a P.

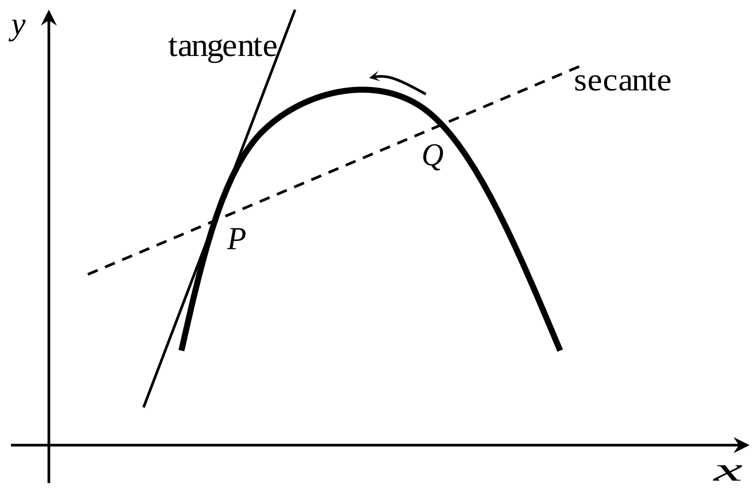


Figura 1.4 - A idéia de *Fermat*

Com essa idéia qualitativa, é possível ter-se um método quantitativo para o cálculo do coeficiente angular exato da tangente em termos da função $f(x)$. Essa idéia de tangente é uma das três ou quatro idéias mais fecundas que um matemático já possa ter concebido. Sem ela, não haveria o conceito de velocidade, de aceleração e de força em Física, nem dinâmica ou astronomia *newtoniana*, nem certamente teríamos a modernidade da Engenharia e Tecnologia.

1.3 Cálculo do coeficiente angular da tangente (inclinação)

Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto arbitrário fixado sobre a parábola $y = x^2$, como mostrado na Figura 1.5. Nosso objetivo é calcular o coeficiente angular da tangente a essa parábola no ponto dado P. Para iniciar o processo, escolhemos um segundo ponto próximo $Q = (x_1, y_1)$ sobre a curva.

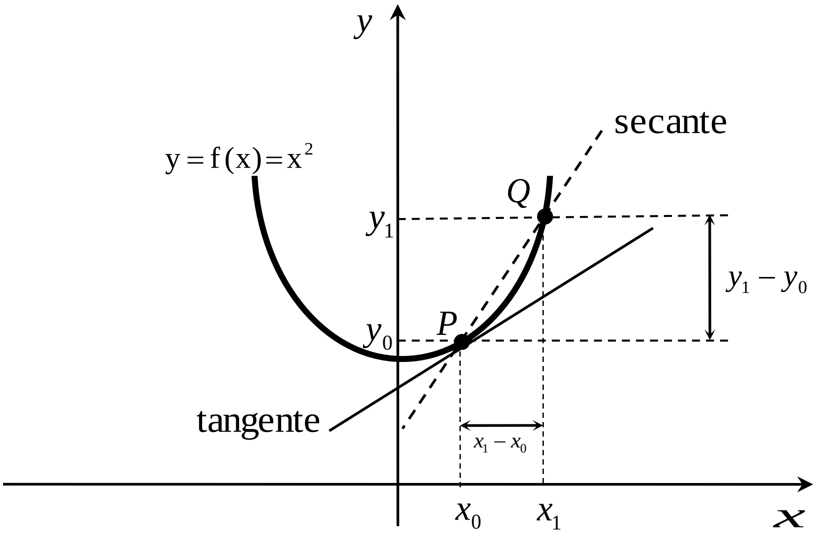


Figura 1.5 - Coeficiente angular da tangente

A seguir, traçamos a reta secante PQ determinada por estes dois pontos. O coeficiente angular dessa secante é evidentemente (equação 1.1):

$$m_{sec} = \text{Coeficiente angular } PQ = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad 1.1$$

Agora, a etapa crucial: façamos x_1 se aproximar de x_0, de modo que o ponto variável *Q* se aproxime do ponto *P*, deslizando ao longo da curva. Quando acontece isso, a secante muda de direção e se aproxima da tangente em *P* em sua posição limite. É intuitivo que o coeficiente angular *m* da tangente é o valor limite aproximado pelo coeficiente angular m_{sec} da secante. Isto poderia ser escrito simbolicamente de forma concisa e mais adequada (equação 1.2). A abreviação "lim", com "$x_1 \to x_0$", lê-se "o limite, quando x_1 tende a x_0, de...":

$$m = \lim_{Q \to P} m_{\sec} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad 1.2$$

Não podemos calcular o valor limite *m* em (1.2) colocando simplesmente $x_1 = x_0$, porque isto daria um resultado sem significado:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0}{0}$$

Devemos pensar que x_1 chega perto de x_0, mas permanece distinto dele. No entanto, quando isto acontece, ambos $y_1 - y_0$ e $x_1 - x_0$ tornam-se arbitrariamente pequenos e não é de todo claro que valor limite esse quociente se aproxima.

O modo de sair dessa dificuldade é usar a equação da curva. Como *P* e *Q* estão sobre a curva temos $y_0 = x_0{}^2$ e $y_1 = x_1{}^2$ e, assim tem-se (equação 1.3):

$$m_{\sec} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} \qquad 1.3$$

Donde $$m_{\sec} = \frac{\cancel{(x_1 - x_0)}\,(x_1 + x_0)}{\cancel{x_1 - x_0}} = x_1 + x_0$$

e a equação 1.2 torna-se $$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} (x_1 + x_0)$$

Agora fica fácil entender o que acontece. Quando x_1 fica cada vez mais próximo de x_0, $x_1 + x_0$ fica cada vez mais próximo de $x_0 + x_0 = 2x_0$. Assim $2x_0$ é o coeficiente angular da tangente à curva $y = x^2$ (equação 1.4).

$$m = 2x_0 \qquad 1.4$$

- ***Exemplo 1.1***

Os pontos (1, 1) e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ estão na parábola $y = x^2$ (Figura 1.6.).

Pela equação 1.4, os coeficientes angulares das tangentes nesses pontos são $m = 2$ e $m = -1$. Usando a forma ponto-coeficiente angular da equação de uma reta, nossas duas retas têm as equações:

$$\frac{y-1}{x-1} = 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{y-\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}} = -1$$

De maneira exatamente igual, $\dfrac{y-x_0^2}{x-x_0} = 2\,x_0$ é a equação da reta tangente em um ponto genérico (x_0, x_0^2) sobre a curva.

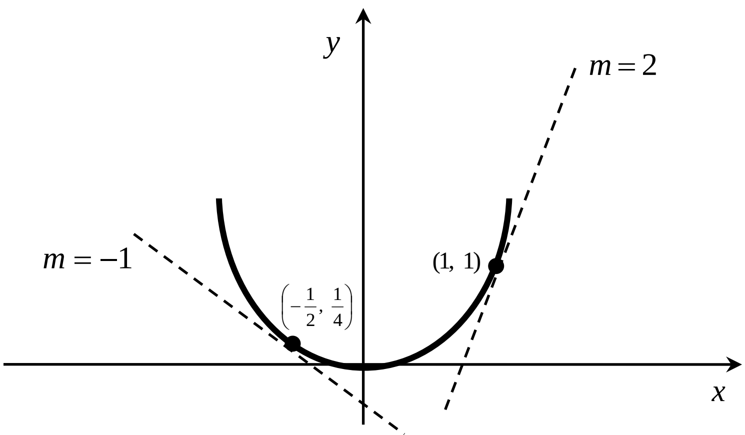


Figura 1.6 - Tangente a um ponto genérico

Vamos introduzir agora a chamada notação delta (notação Δ). O procedimento acima descrito começa variando a variável independente x de um primeiro valor x_0 para um segundo valor x_1. A notação padrão para a quantidade de tal variação é Δx (leia-se delta x), de modo que (equação 1.5):

$$\Delta x = x_1 - x_0 \qquad 1.5$$

é a variação em x ao se passar do primeiro valor para o segundo. Podemos também considerar o segundo valor como sendo obtido do primeiro, acrescentando-se a mudança (equação 1.6):

$$x_1 = x_0 + \Delta x \qquad 1.6$$

É importante compreender que Δx é um incremento de x. Um incremento Δx pode ser negativo ou positivo.

Assim, se $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$,
então $\Delta x = 3 - 1 = 2$;
e se $x_0 = 1$ e $x_1 = -2$,
então $\Delta x = -2 - 1 = -3$.

Em vista das equações 1.5 e 1.6 a equação 1.3 para o coeficiente angular da secante, pode ser escrita na forma da equação 1.7:

$$m_{\sec} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \qquad 1.7$$

Expandindo o primeiro termo do numerador e simplificando o resultado, tem-se:

$$(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x)$$

assim, a equação 1.7 torna-se: $m_{\sec} = \dfrac{\cancel{\Delta x}\left(2x_0 + \Delta x\right)}{\cancel{\Delta x}} = 2x_0 + \Delta x$

Se inserirmos isto na equação 1.2 e utilizarmos o fato de que $x_1 \to x_0$ é equivalente a $\Delta x \to 0$, temos como antes:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 \ ,$$

Assim, quando Δx fica cada vez mais perto de zero, 2 x_0 + Δx fica cada vez mais próximo de 2 x_0.

O segundo método, usando a notação Δ, depende da expansão do quadrado $(x_0 + \Delta x)^{2,}$ enquanto o primeiro depende da fatoração da expressão $x_1^2 - x_0^{2.}$ Nesse caso particular nenhum dos dois métodos é mais árduo que o outro. No entanto, em geral, expandir é mais fácil que fatorar, e por essa razão adotamos o método de incrementos como nosso procedimento padrão.

O cálculo que acabamos de realizar para a parábola $y = x^2$ pode ser, em princípio, generalizado para o gráfico de qualquer função $y = f(x)$, (Figura 1.7).

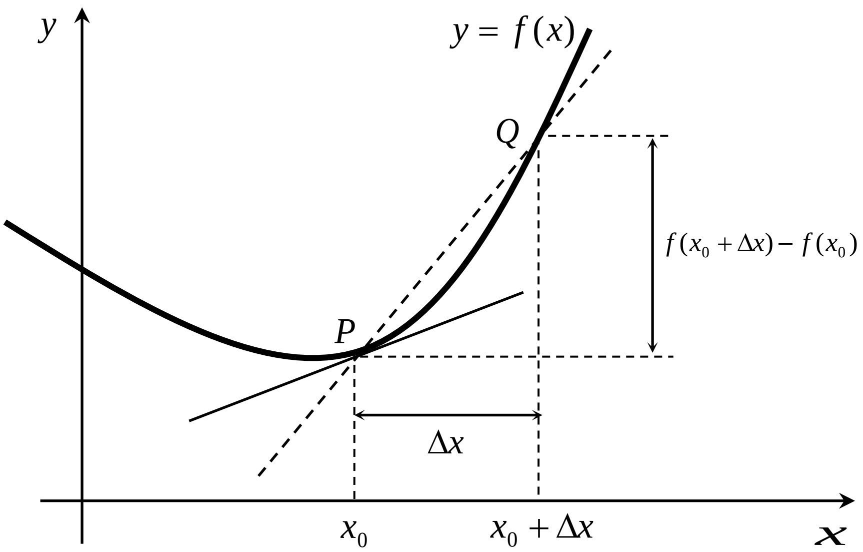


Figura 1.7 - Incremento numa função qualquer

Primeiro, calculamos o coeficiente angular da secante que passa pelos pontos *P* e *Q*, correspondentes a x_0 e $x_0 + \Delta x$,

$$m_{\sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ .$$

Depois, calculamos o limite de m_{sec} quando Δx tende a zero, obtendo um número m que interpretamos geometricamente como sendo o coeficiente angular da tangente à curva no ponto *P* :

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

O valor desse limite é usualmente denominado pelo símbolo $f'(x_0)$, que se lê *"f linha de x_0"*, enfatizando sua dependência do ponto x_0 e da função $f(x)$. Assim por definição, temos (equação 1.8):

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad 1.8$$

Nessa notação, o resultado do cálculo dado acima pode ser expresso como se segue:

se $f(x) = x^2$, então $f'(x_0) = 2x_0$

- ***Exemplo 1.2***

Calcular $f'(x_0)$ se $f(x) = 2x^2 - 3x$

Solução:

Para essa função, o numerador do quociente na equação 1.8, é:

$$
\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x) - f(x_0) &= [2(x_0+\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x)] - [2x_0^{\,2} - 3x_0] \\
&= 2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x_0 - 3\Delta x - 2x_0^2 + 3x_0 \\
&= 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x \\
&= \Delta x(4x_0 + 2\Delta x - 3)\ .
\end{aligned}
$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$f'(x_0) = \frac{\cancel{\Delta x}(4x_0 + 2\Delta x - 3)}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (4x_0 + 2\Delta x - 3)$$

$$\boxed{f'(x_0) = 4x_0 - 3}$$

- ***Exemplo 1.3***

Dada a função $y = \frac{1}{x}$, calcular o coeficiente angular da tg no ponto (x_0, y_0) por:

a) fatoração

b) notação Δ

c) achar a equação da reta tg para $x_0 = 2$.

Solução:

a) por fatoração

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}\right)}{x_1 - x_0} =$$

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{\left(\frac{x_0 - x_1}{x_1 \cdot x_0}\right)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{x_0 - x_1}{x_1 \cdot x_0 \left(x_1 - x_0\right)} =$$

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{\cancel{\left(x_1 - x_0\right)}}{-x_1 \cdot x_0 \cancel{\left(x_1 - x_0\right)}} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{1}{-\underset{\swarrow\, x_0}{x_1} \cdot x_0} =$$

$$\boxed{m = -\frac{1}{x_0^2}}$$

b) por notação

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad =$$

$$f'(x_0) = m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{(x_0 + \Delta x)} - \dfrac{1}{x_0}}{\Delta x} =$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\dfrac{\cancel{x_0} - \cancel{x_0} - \Delta x}{x_0 (x_0 + \Delta x)}\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\dfrac{-\cancel{\Delta x}}{x_0 (x_0 + \Delta x)}\right]}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0 (x_0 + \Delta x)} = \frac{-1}{x_0{}^2 + \underbrace{\cancel{x_0 \cdot \Delta x}}_{0}} =$$

$$\boxed{m = -\frac{1}{x_0^2}}$$

c) equacao da reta para $x_0 = 2$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2^2} \cdot (x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{4} x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4} x + 1}$$

EXERCICIOS PROPOSTOS – LISTA 1A

1- Use a aproximação da secante para calcular a inclinação do gráfico num ponto x_0, sendo dados:

a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

c) $f(x) = 2x^2 + 1$

d) $f(x) = x^2 - 4$

Respostas: a) $2x_0 - 4$; b) $2x_0 - 2$; c) $4x_0$; d) $2x_0$

2- Ache a equação da tangente à parábola $y = x^2$

a) No ponto (-2,4)

b) No ponto em que o coeficiente angular é 8

c) Se a tangente corta o eixo x no ponto 2

Respostas: a) $y = -4x - 4$; b) $8x - 16$; c) $y = 4x - 4$

3) Esboce o gráfico de $y = x - x^2$ sobre o intervalo $-2 \leq x \leq 3$

a) Use o método dos incrementos para calcular o coeficiente angular da reta tangente num ponto arbitrário (x_0, y_0) da curva.

b) Quais são os coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos (-1,-2); (0,0); (1,0) 2 (2,-2) sobre a curva? Use esses coeficientes angulares para desenhar as tangentes nesses pontos em seu gráfico.

c) Em que ponto sobre a curva a tangente é horizontal ?

Respostas: a) $m = 1 - 2x_0$; b) para o ponto (-1,-2) $m = 3$; para o ponto (0,0) $m = 1$; para o ponto (1,0) $m = -1$; para o ponto (2,-2) $m = -3$; c) ponto (½, ¼)

4) Mostre que a tangente da curva $y = \frac{1}{x}$ passando pelos pontos de coordenadas (x,y), tem uma inclinação $-\frac{1}{x^2}$. Usando este resultado, determine a inclinação da curva em cada um dos seguintes pontos:

a) $\left(5,\ \frac{1}{5}\right)$

b) (1,1)

c) $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$

d) $\left(-3, -\frac{1}{3}\right)$.

Respostas: a) $-\frac{1}{25}$ *; b) -1; c) -4 ;d)* $-\frac{1}{9}$

1.4 A derivada

1.4.1 Definição

Dada uma função $f(x)$ qualquer, sua derivada $f'(x)$ é a nova função cujo valor num ponto x é definida pela equação 1.9:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad 1.9$$

Ao calcularmos esse limite, x é mantido fixo enquanto Δx varia e tende a zero. O limite indicado pode existir para alguns valores de x e deixa de existir para outros. Se o limite existe para $x = a$, então a função se diz derivável (ou diferenciável) em a. Uma função derivável (ou diferenciável) é aquela que é derivável em cada ponto do seu domínio.

A derivada $f'(x)$ pode ser visualizada da maneira sugerida pela Figura 1.8., na qual $f(x)$ é a altura variável de um ponto P se movendo ao longo da curva e $f'(x)$ é a declividade variável da reta tangente em P.

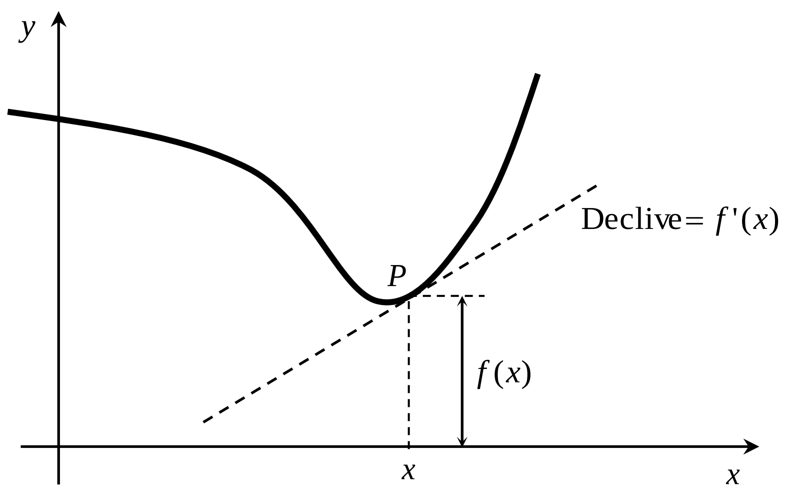


Figura 1.8 - Derivada $f'(x)$ numa curva qualquer

A definição acima de derivada não depende, de maneira nenhuma, de ideias geométricas. O que pensamos a cerca da Figura 1.8. constitui uma interpretação geométrica e mesmo que possa ser importante como auxiliar para a compreensão, não é parte essencial do conceito de derivada. Nas seções seguintes encontraremos outras interpretações de derivadas que não tem a ver com geometria. Devemos estar preparados para considerar $f'(x)$ puramente como uma função e reconhecer que ela tem diversas interpretações.

Exemplo 1.4

Determine $f'(x)$ se $f(x) = \frac{1}{x}$

Solução

• Passo 1. Escreva a diferença $f(x + \Delta x) - f(x)$ para a função dada

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}$$

$$f(x\Delta x) - f(x) = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)} \ .$$

• Passo 2. Dividir Δx para formar o quociente das diferenças

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{-\frac{\cancel{\Delta x}}{x(x+\Delta x)}}{\cancel{\Delta x}} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$$

• Passo 3. Cálculo do limite do quociente das diferenças quando $\Delta x \to 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{1}{x(x+\Delta x)} = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$$

Vamos considerar resumidamente o que o resultado deste exemplo no diz acerca do gráfico da função $y = f(x) = \frac{1}{x}$.

Primeiro, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ é evidentemente negativo para todo $x \neq 0$ e, como este é o coeficiente angular da tangente, todas as retas tangentes apontam à direita, para baixo.

Quando x está próximo de zero, $f'(x)$ é muito grande, o que significa que essas retas tangentes são bem inclinadas; e quando x é grande, $f'(x)$ é pequeno, e assim essas retas são quase horizontais (veja Figura 1.9.). Como se observa, no ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ a inclinação da reta tangente é $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

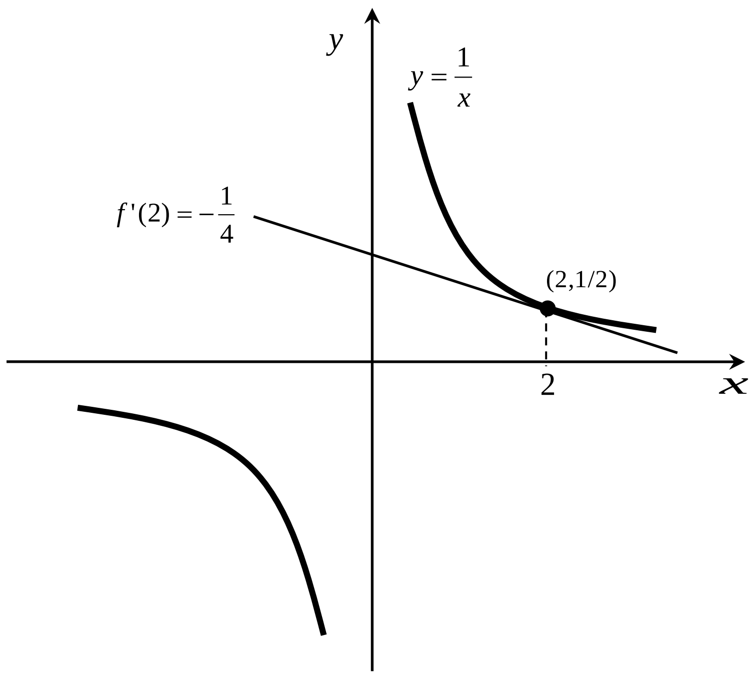


Figura 1.9 - Resultados do exemplo 1.3 para função $y = f(x) = \frac{1}{x}$.

1.4.2 Notação

Diversas notações para as derivadas são de uso comum. A derivada de uma função $f(x)$ foi denotada acima por $f'(x)$. Essa notação tem o mérito de enfatizar que a derivada de $f(x)$ é uma outra função de x que está associada de certa maneira com a função dada. Se nossa função é dada na forma $y = f(x)$, com a variável dependente explícita, então o símbolo mais curto, y'**,** é frequentemente usado em lugar de $f'(x)$.

A principal desvantagem da notação prima (') para derivadas é que ela não sugere a natureza do processo pelo qual $f'(x)$ é obtida de $f(x)$. A notação criada por *Leibniz* para sua versão de cálculo é melhor nesse aspecto bem como em outros.

Para explicar a notação de *Leibniz*, começamos pela função $y = f(x)$ e escrevemos o quociente de diferenças.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad \text{Na forma } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

onde $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Aqui Δy não é apenas uma mudança qualquer em y; ela é a mudança específica que resulta quando a variável independente muda de x para $x + \Delta x$. Como sabemos, o quociente de diferenças $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pode ser interpretado como a razão de variação de y pela variação de x ao longo da curva $y = f(x)$, e esta é o declive da secante (Figura 1.10). *Leibniz* escreveu o limite desse quociente de diferenças, que naturalmente é a derivada $f'(x)$, na forma $\frac{dy}{dx}$ (leia-se dy sobre dx). Nessa notação, a definição da derivada torna-se

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad 1.10$$

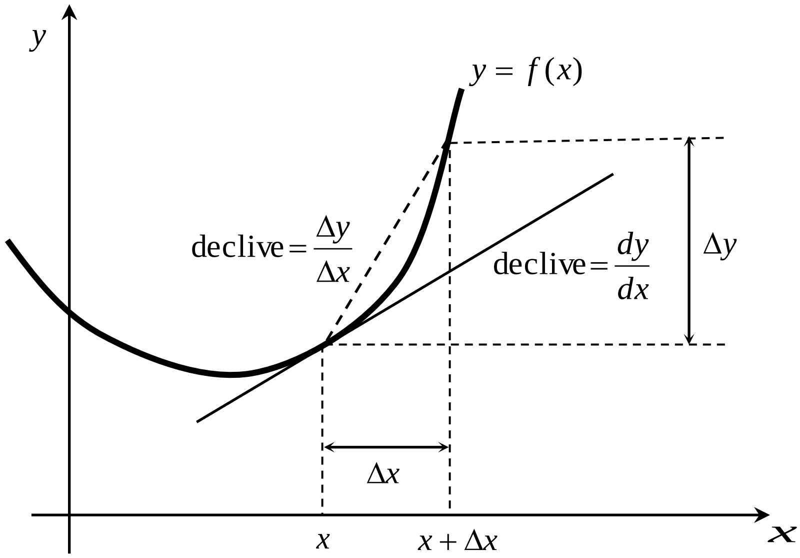


Figura 1.10 - Coeficiente angular (declive) da tangente

A equação 1.10 é o coeficiente angular (declive) da tangente na Figura 1.10. Duas formas equivalentes, um pouco diferentes de $\frac{d}{dx}$ são

$$\frac{df(x)}{dx} \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dx} f(x) \ .$$

Na segunda notação, o símbolo $\frac{d}{dx}$ deve ser encarado como uma operação que pode ser aplicada à função $f(x)$ para levar a sua derivada $f'(x)$, como é sugerida pela equação

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \ .$$

O símbolo $\frac{d}{dx}$ pode ser lido "a derivada em relação a *x* de...", qualquer que seja a função de *x*.

Apesar das vantagens da notação de *Leibniz*, ela ainda não é perfeita. Por exemplo, suponha que desejamos escrever o valor numérico da derivada num ponto específico, digamos $x = 3$. Como $\frac{dy}{dx}$ não mostra a variável *x* da maneira conveniente, como faz $f'(x)$, somos forçados a usar a notação

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3} \quad \text{ou} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}$$ que não é conciso.

1.4.3 Algumas regras de derivação

Se lembrarmos que a notação $f(x)$ abarca todas as funções concebíveis, então podemos compreender que o cálculo das derivadas pelo processo descrito na seção 4.2, muitas vezes pode ser difícil e demorado. Nosso propósito, nesta seção, é apresentar um número de regras formais que nos capacitarão a derivar rapidamente grandes classes de funções, por processos puramente mecânicos.

- A derivada de uma constante é zero

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

- Se n é um inteiro positivo, então

$$\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(cx)^n = c\,n\,x^{n-1}$$

Exemplo: $\dfrac{d(\sqrt{x})}{dx} = \dfrac{d\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

- Se c é uma constante e $u = f(x)$ é uma função derivável de x, então

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}cx = c$$

- Se $u = f(x)$ e $v = g(x)$ são funções de x, então

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u+v+w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$$

- A regra do produto. Sejam u e v funções deriváveis de x, então

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uvw) = v\,w\,\frac{du}{dx} + u\,w\frac{dv}{dx} + u\,v\,\frac{dw}{dx}$$

- A regra do quociente. Sejam u e v funções deriváveis de x, então

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$ em todos os valores de x onde $v \neq 0$

- A regra da cadeia. Seja y uma função de u, onde u, por sua vez, é uma função de x, isto é $y = f(u)$ onde $u = g(x)$.
  A correspondente função composta é a função $y = f(g(x))$, obtida substituindo-se $u = g(x)$ em $y = f(u)$. A derivada $\frac{dy}{dx}$ é obtida por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

Exemplo: $y = \left(x^3 + 2\right)^5$ se $u = x^3 + 2$

$y = u^5 \; e \; assim \; y' = 5u^4$

$u' = 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 3x^2 = 5(x^3+2)^4 \cdot 3x^2 = 15x^2 \cdot (x^3+2)^4$$

- Outras regras de derivação

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \ln a \cdot a^x$$

$$\frac{d(e^x)}{dx} = \ln e \cdot e^x = e^x$$

1

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d(u^v)}{dx} = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} u'\right)$$

- **Observação: derivação implícita**

Consiste em derivar toda a expressão sem antes colocar a variável dependente y em evidencia. É útil quando for trabalhoso ou impossível colocar y em evidencia como se fosse uma função *u(x)* qualquer.

Exemplo: $x^2 + y^2 = a^2$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Estas regras serão usadas de muitas maneiras em tudo que fizermos a partir de agora. Portanto é recomendável praticá-las até seu uso se torne quase automático.

1.4.4 Derivadas de ordem superior

As derivadas sucessivas de uma função $y = f(x)$ podem ser escritas como:

Primeira deridada	$f'(x)$	y'	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}f(x)$
Segunda derivada	$f''(x)$	y''	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2}f(x)$
Terceira derivada	$f'''(x)$	y'''	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3}{dx^3}f(x)$
n-ésima derivada	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	$\frac{d^n}{dx^n}f(x)$

A seguinte observação é importante: a Segunda derivada é a derivada da primeira derivada, e assim sucessivamente, isto é

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad\qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

Quais as aplicações das derivadas de ordem superior? Em geometria, a derivada segunda nos diz se a curva $y = f(x)$ é côncava para cima ou para baixo. Em física, as segundas derivadas são importantes, pois se $s = f(t)$ dá a posição de um corpo móvel no tempo t, então sabemos que a primeira e segundas derivadas dessa função de posição são a velocidade e a aceleração do corpo no instante t.

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \text{e} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\ ,$$

As derivadas de ordem maior que dois não tem tais interpretações geométricas e físicas fundamentais. No entanto, essas derivadas têm sua aplicação também, na expansão de funções em série infinitas.

EXERCICIOS PROPOSTOS – LISTA 1B

1 Use a definição de derivada para calcular $f'(x)$, sendo dados:

a) $f(x) = x^3$;

b) $f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

e) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$;

f) $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Respostas: a) 3x ; b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$*; c)* $\dfrac{-x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ *; d)* $-\dfrac{2}{x^3}$; e) $\dfrac{1}{(x+1)^2}$; f) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

2 Use as regras práticas de derivação para calcular $f'(x)$ no ponto x, sendo dados:

a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$;

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+4x$;

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+x+1$;

e) $f(x)=(x^3+4)(x+3)$;

f) $f(x)=(\sqrt{x}+3)(x^2+6)$;

g) $f(x)=\left[\dfrac{(x+1)}{(x-1)}\right]^2$;

h) $f(x)=(x+1)^2(x^2+1)^{-3}$;

i) $f(x)=\log\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$;

j) $f(x)=\sqrt{\log x}$;

k) $f(x)=(\log x^2)^3$;

l) $f(x)=\ln\sqrt{x^2-1}$;

m) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;

n) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;

o) $f(x)=x^{x^2}$;

p) $f(x)=x^{e^x}$;

q) $4x^2+9y^2=36$;

r) $x^2y-xy^2+x^2+y^2=0$;

s) $f(x)=sen^2 3x$;

t) $x=y+\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{1}{5}y^5$.

Respostas:

a) $\dfrac{-x}{\sqrt{(1-x^2)}}$;

k) $\dfrac{6\log(x^2)}{x\ln 10}$

b) $\dfrac{-5}{x^6}$;

l) $\dfrac{x}{(x^2+1)}$

c) $-\dfrac{3}{x^4}+4$;

m) $\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

d) $-\dfrac{2}{x^3}+1$;

n) $1-\dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$ = (sech x)^2

e) $4x^3+9x^2+4$;

o) $x^{x^2}\,(2\,x\ln(x)+x)$

f) $\dfrac{5}{2}x^{3/2}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}+6\,x$

p) $x^{e^x}\left(e^x\ln(x)+\dfrac{e^x}{x}\right)$

g) $-\dfrac{4\,(x+1)}{(x-1)^3}$

q) $-\dfrac{4}{9}\,\dfrac{x}{y}$

h) $\dfrac{2\,(x+1)}{(x^2+1)^3}-\dfrac{6\,(x+1)^2\,x}{(x^2+1)^4}$

r) $-\dfrac{2\,x\,y-y^2+2\,x}{x^2-2\,x\,y+2\,y}$

i) $\dfrac{1}{x\ln(10)\,(x+1)}$

s) $6\sin(3\,x)\cos(3\,x)$

j) $\dfrac{1}{2\sqrt{\log(x)}\;x\ln(10)}$

t) $\dfrac{1}{1+y^2+y^4}$

1.5 Algumas aplicações de derivadas

1.5.1 Taxas relacionadas

À medida que um reservatório vai recebendo água, o nível da água sobe. Para descrever a velocidade com que o nível da água sobe, usamos a taxa de variação do nível da água ou, de modo equivalente, a taxa de variação da profundidade.

Denotando-se a profundidade por h e sendo t o tempo medido a partir de um momento conveniente, a derivada $\frac{dh}{dt}$ fornece a taxa de variação da profundidade. Além disso, o volume V de água no reservatório também está mudando e $\frac{dv}{dt}$ é sua taxa de variação.

Analogamente, toda quantidade física ou geométrica que varia com o tempo é função do tempo, digamos que $Q = Q(t)$ e sua derivada $\frac{dQ}{dt}$ é a taxa de variação da quantidade. Os problemas que vamos considerar a seguir estão baseados em que, se duas quantidades variáveis estão relacionadas entre si, então suas taxas de variação também estarão.

Exemplo 1.5

Um reservatório em forma de cone com vértice para baixo mede 12 m de altura e tem no topo um diâmetro de 12 m. Bombeia-se água à taxa de 4 $m^3.min^{-1}$. Encontre a taxa com que o nível da água sobe:

(a) quando a água tem 2 m de profundidade; e

(b) quando a água tem 8 m de profundidade.

Solução:

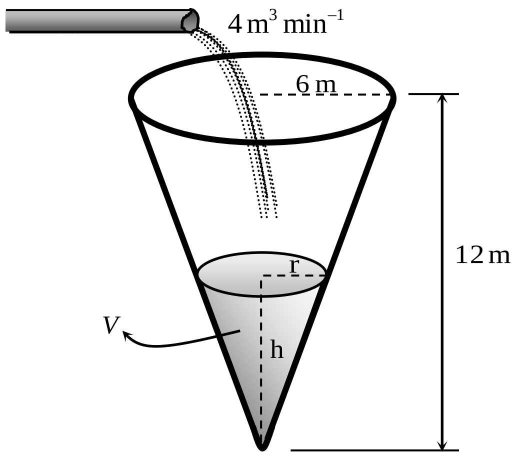


Figura 1.11 - Reservatório em cone

Ao se despejar água no reservatório cônico (Figura 1.11) à taxa de 4 $\mathrm{m}^3\mathrm{min}^{-1}$, a taxa de variação do volume V da água no reservatório no instante t, será

$$\frac{dv}{dt} = 4$$

A taxa de variação da profundidade h é a derivada $\frac{dh}{dt}$ e esta não é constante. É intuitivamente claro que essa taxa de variação é grande quando a área da superfície da água é pequena e torna-se pequena quando esta área aumento.

Neste problema, estamos procurando $\frac{dh}{dt}$, quando h = 2 e h = 8, sendo dado $\frac{dv}{dt}$ = 4. O volume variável da água no reservatório tem a forma de um cone, logo, o nosso ponto de partida é a fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h \ .$$

As únicas variáveis dependentes que nos interessam são V e h. Queremos eliminar a variável supérflua r. Da Figura 1.11, usando triângulos semelhantes, vemos que,

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{1}{2}h$$

Assim, obtemos

$$V = \frac{\pi}{12} h^3 \ .$$

Estamos agora em condições de introduzir as taxas de variação, derivando a fórmula de volume, com relação a *t*, o que leva a

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}$$

Como $\frac{dV}{dt}$= 4, tem-se

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi\, h^2}\frac{dV}{dt} = \frac{16}{\pi\, h^2}$$

Para h = 2,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{16}{4\,\pi} \cong 1{,}27\,\mathrm{m\ min^{-1}}$$

e, para h = 8,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\,\pi} \cong 0{,}08\,\mathrm{m\ min^{-1}}$$

Obs.: Vale a pena observar que a taxa de variação do volume é igual à área da superfície livre vezes a taxa de variação da profundidade, isto é,

Como, h = 2 r = Diâmetro (=D)

Tem-se,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{dh}{dt} = A\frac{dh}{dt}$$

onde, A = área da superfície livre da água

Exemplo 1.6

Um grande balão esférico de borracha está sendo cheio de gás a uma taxa constante de 8 $m^3.min^{-1}$. Calcule com que velocidade o raio r do balão cresce (a) quando $r = 2$ m ; (b) quando $r = 4$ m.

Solução: O volume do balão (Figura 1.12) é dado pela fórmula:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

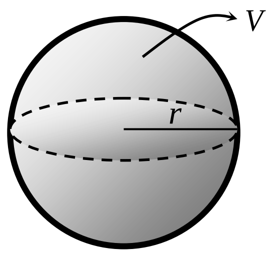


Figura 1.12. Balão

Temos que $\frac{dV}{dt} = 8$ e precisamos determinar $\frac{dr}{dt}$ para dois valores específicos de r. É essencial compreender o que está por trás dessa situação, ou seja, o fato de que V e r serem variáveis dependentes, tendo o tempo t como variável independente subjacente. Com isto em mente, é natural introduzir as taxas de variação de V e r, derivando o fórmula do volume com relação a t,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\,\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\pi\ 3r^2\,\frac{dr}{dt} = 4\pi\, r^2\,\frac{dr}{dt}$$

Onde a regra da cadeia foi aplicada. Segue-se que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi\, r^2}\frac{dV}{dt} = \frac{2}{\pi\, r^2}\ ,$$

pois $\frac{dV}{dt} = 8$.

Para $r = 2$, temos $\frac{dr}{dt} = \frac{2}{4\pi} \cong 0{,}16\,\text{m.min}^{-1}$

e para $r = 4$, temos $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8\pi} \cong 0{,}04\,\text{m.min}^{-1}$

Exemplo 1.7

Uma plataforma de 3 m está apoiada em uma parede. A base da plataforma está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede, a uma taxa constante de 2 m min^{-1}. Qual a velocidade com a qual o topo da plataforma se move para baixo, encostada à parede, quando a base da plataforma está a 1 m da parede?

Solução: A Figura 1.13, representa graficamente o problema em questão.

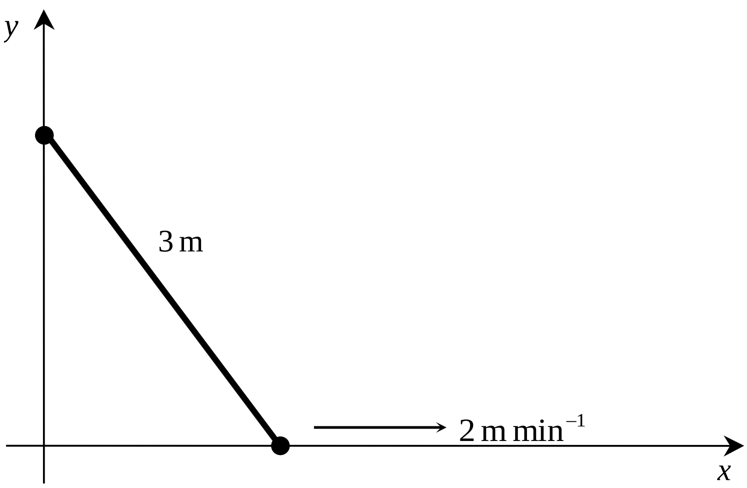


Figura 1.13 - Plataforma apoiada numa parede

Estamos interessados em calcular $-\dfrac{dv}{dt}$, para $x = 1$m, dado $\dfrac{dx}{dt} = 2$ m min^{-1}. O uso do sinal negativo é porque y está decrescendo.

Deveremos procurar uma equação que relaciona *x* e *y*, da qual possamos obter uma Segunda equação relacionando suas taxas de variação. Pela Figura 1.13, decidimos que nosso ponto de partida deve ser o fato de que $x^2 + y^2 = 9$.

Derivando essa expressão com relação a *t*, obtemos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad -\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \quad ,$$

e, portanto $-\dfrac{dy}{dt} = 2\dfrac{x}{y}$, visto que $\dfrac{dx}{dt} = 2$.

Para $x = 1$, temos $y = \sqrt{1^2 + 9} = \sqrt{10}$; logo $-\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2\ .\ 1}{\sqrt{10}} \cong 0{,}632\,\text{m min}^{-1}$.

1.5.2 Descrevendo gráficos de funções

O objetivo dessa seção é dar condições para descobrir a derivada como uma ferramenta para descobrir rapidamente os aspectos mais importantes de uma função e esboçar o seu gráfico.

- Funções crescentes e decrescentes

Dizemos que uma função $f(x)$ é crescente num certo intervalo do eixo x se, nesse intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$. Geralmente, isso significa que o gráfico é ascendente quando o analisamos da esquerda para a direita. Analogamente, a função é dita decrescente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$. Estes conceitos são ilustrados na Figura 1.14.

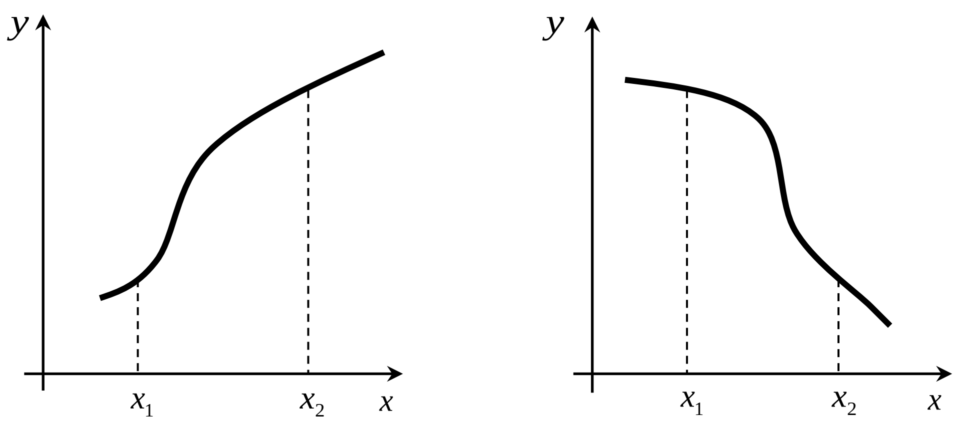


Figura 1.14 - Função crescente e decrescente

Para esboçarmos o gráfico de uma função, é importante conhecermos os intervalos em que ela é crescente e aqueles em que ela é decrescente. O sinal da derivada nos dá essa informação: uma função $f(x)$ é crescente nos intervalos em que $f'(x) > 0$ e é decrescente nos intervalos em que $f'(x) < 0$. Estes conceitos são ilustrados na Figura 1.15.

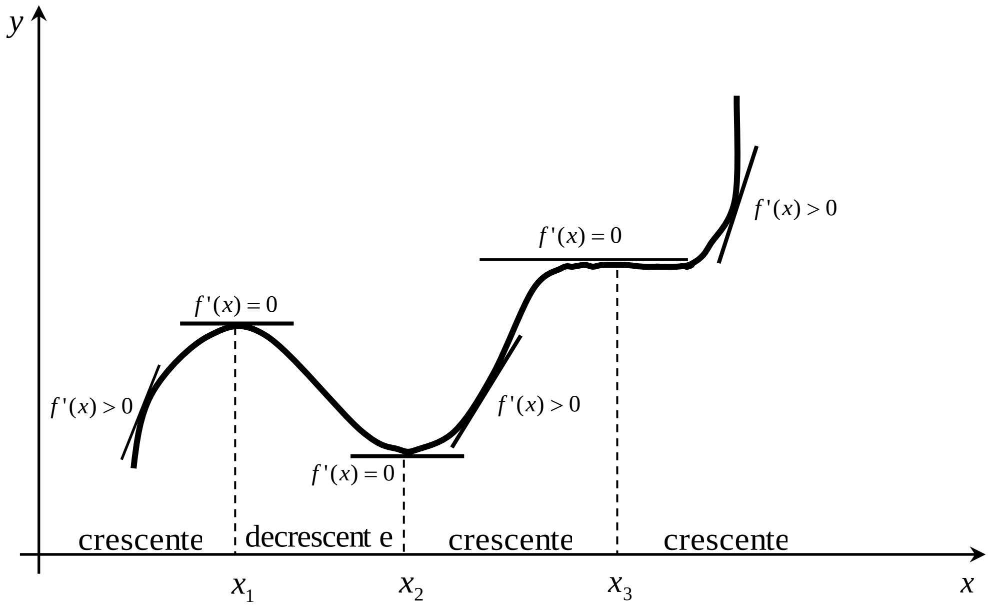


Figura 1.15 - Intervalos crescentes e decrescentes de uma função

Uma curva lisa só pode se transformar de crescente em decrescente passando por um pico onde o coeficiente angular da reta tangente é zero. Analogamente, ela só pode passar de decrescente para crescente passando por uma depressão onde o coeficiente angular da reta tangente é zero. Nesses pontos temos um valor máximo ou mínimo relativos da função.

Localizamos esses pontos determinando inicialmente os pontos críticos da função, que são as soluções da equação $f'(x) = 0$. Depois resolvemos a equação $f'(x) = 0$ encontrando suas raízes. Na Figura 1.15, os pontos críticos são x_1, x_2 e x_3 e os correspondentes valores críticos são os valores da função nesses pontos, isto é, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$.

Um valor crítico não é necessariamente um ponto de máximo ou de mínimo. No ponto crítico x_3 o gráfico não passa por um pico nem por uma depressão, mas simplesmente se achata momentaneamente entre dois intervalos, em cada, um dos quais a derivada é positiva.

Os valores máximos ou mínimos locais (ou relativos) são assim qualificados quando comparados somente com pontos vizinhos sobre a curva. Na Figura 1.15, $f(x_1)$ é um máximo, embora haja muitos pontos com cota maior sobre a curva, à direita.

Estamos interessados no máximo absoluto de uma função, devemos comparar esses máximos relativos entre si, determinando qual (se existir) é maior que qualquer outro valor assumido pela função.

Exemplo 1.8

Analise o gráfico do polinômio

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$$

Solução: Começamos calculando a derivada e fatorando tanto quanto possível

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$$

Os pontos críticos são obtidos como segue

$$(x+1)(x-2) = 0$$

donde, $x = -1$ e $x = +2$.
Os correspondentes valores críticos são $y = 19$ e $y = -8$.

Os dois pontos críticos dividem o eixo x em três intervalos:

$$x < -1,$$

$$-1 < x < 2 \text{ e}$$

$$x > 2.$$

Em cada um desses intervalos $f'(x)$ tem sinal constante.

- Quando $x < -1$, $x + 1$ e $x - 2$ são ambos negativos e o seu produto é positivo, logo $f'(x) > 0$.

- Quando $-1 < x < 2$ e $x + 1$ é positivo e $x - 2$ é negativo e assim seu produto é negativo, logo $f'(x) < 0$.

- Quando $x > 2$, $x + 1$ e $x - 2$ são ambos positivos e assim seu produto é positivo, logo $f'(x) > 0$.

Na Figura 1.16 assinalamos os pontos $(-1, 19)$ e $(2, -8)$ e esboçamos a curva lisa passando por eles, usando os resultados da análise acima, isto é:

- $f(x)$ é crescente quando $x < -1$,
- decrescente quando $-1 < x < 2$
- crescente quando $x > 2$.

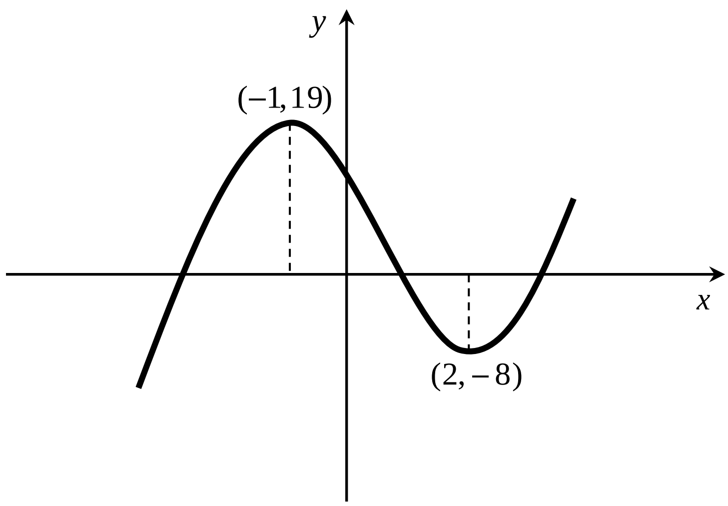


Figura 1.16 - Polinômio $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$

- Concavidade e pontos de inflexão

Um dos aspectos mais marcantes de um gráfico é o sentido em que ele se curva. O sinal da segunda derivada nos dá essa informação.

- Uma segunda derivada positiva, $f''(x) > 0$, indica que o coeficiente angular $f'(x)$ é uma função crescente de x.
- Se $f''(x) < 0$, o declive da tangente é decrescente (veja Figura 1.17).

Dessa forma, em um dado ponto $x = x_0$,

- se $f''(x_0) > 0$, então $f(x)$ é côncava para cima (ou simplesmente côncava)
- se $f''(x) < 0$, então $f(x)$ e côncava para baixo (ou convexa).

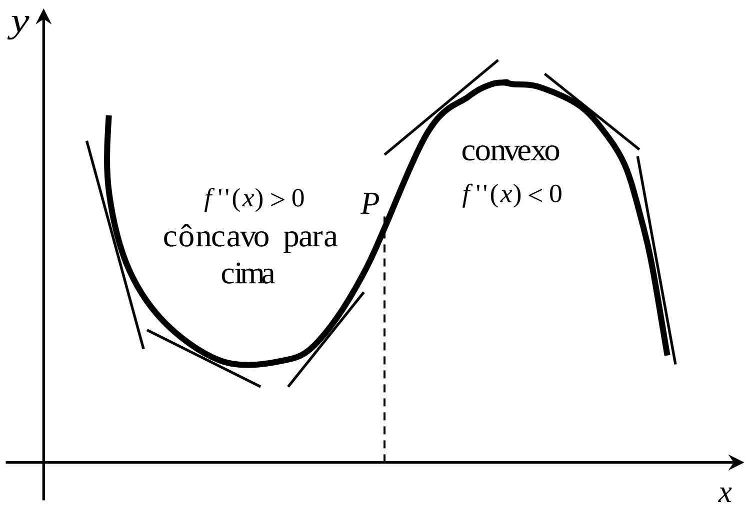


Figura 1.17 - Concavidade e pontos de inflexão

Um ponto P, no qual o sentido da concavidade muda chama-se ponto de **inflexão**. Se $f''(x)$ é contínua e tem sinais apostos em cada lado de P, deve-se anular no próprio P. A busca de pontos de inflexão é basicamente uma questão de resolver a equação $f''(x) = 0$ e conferir o sentido de concavidade em ambos os lados de cada vez.

Exemplo 1.9

Investigue a função quanto à concavidade e pontos de inflexão.

$$y = f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2$$

Solução

Calculamos

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x^2 - 4x + 3) = 6(x-1)(x-3)$$

e $\qquad f''(x) = 12x - 24 = 12(x-2)$.

Os pontos críticos (as raízes de $f'(x) = 0$) são $x = 1$ e $x = 3$, e os valores críticos correspondentes são $y = 6$ e $y = -2$.

Resolvendo $f''(x) = 0$, encontramos uma única raiz, $x = 2$. Temos, portanto, um possível ponto de inflexão $x < 2$ e positiva para $x > 2$. Assim, o gráfico e côncavo para baixo à esquerda de $x = 0$ e côncavo para cima em à sua direita. Isto revela que temos realmente um ponto de inflexão em $x = 2$, como está indicado na Figura 1.18.

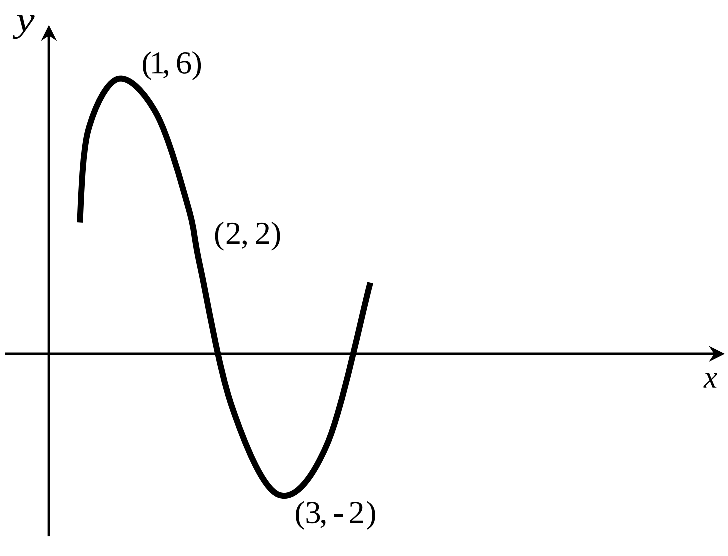
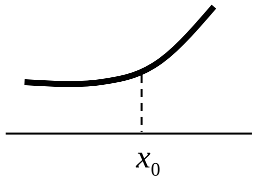
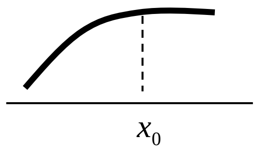
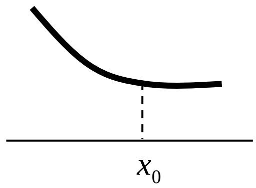
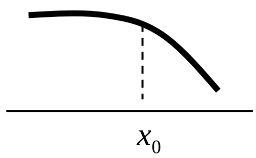


Figura 1.18 Polinômio $f(x) = = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2$

Na tabela abaixo, mostra-se resumidamente como um gráfico pode combinar as propriedades de crescimento, decrescimento, concavidade e convexidade.

	Condição nas derivadas	Descrição de $f\,(x)$	Gráfico de $y(x)$ na vizinhança de $x = x_0$
1	$f'\,(x_0) > 0$ $f''\,(x_0) > 0$	$f\,(x)$ crescente $f\,(x)$ côncava	
2	$f'\,(x_0) > 0$ $f''\,(x_0) < 0$	$f\,(x)$ crescente $f\,(x)$ convexa	
3	$f'\,(x_0) < 0$ $f''\,(x_0) > 0$	$f\,(x)$ decrescente $f\,(x)$ côncava	
4	$f'\,(x_0) < 0$ $f''\,(x_0) < 0$	$f\,(x)$ decrescente $f\,(x)$ cônvexa	

1.5.3 Problema de otimização

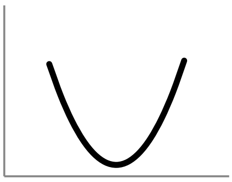
Uma das aplicações mais notáveis do conceito de derivada é a dos problemas de otimização, em que se buscam valores máximo ou mínimo de funções.

Sempre que utilizamos palavras como o maior, o menor, o máximo o mínimo, o melhor, e assim por diante, é razoável admitir que alguma espécie de problema de máximo ou mínimo se nos apresenta. Quando esse problema puder ser expresso em termos de variáveis e funções (o que nem sempre é possível), os métodos do cálculo estão disponíveis para facilitar sua compreensão e solução.

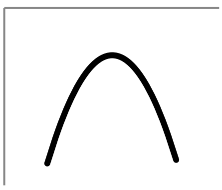
Analisemos alguns problemas.

Otimizar a função objetivo	maximizar a vantagem
	Minimizar a desvantagem

O procedimento consiste em achar o ponto crítico ($f'(x) = 0$). Obter em seguida a segunda derivada ($f''(x)$). Sendo:



Se $f''(x) > 0$ concavidade para cima
indicando ponto de mínimo



Se $f''(x) < 0$ concavidade para baixo
indicando ponto de máximo

Exemplo 1.10

Ao preço de R$ 1,50 um comerciante pode vender 500 unidades de certa mercadoria que custa R$ 0,70 cada. Para cada centavo que o vendedor abaixa no preço, a quantidade vendida pode aumentar de 25 unidades. Que preço de venda maximizará o lucro?

Solução

Façamos x denotar o número de unidades monetárias que o vendedor abaixa no preço;

- o lucro na venda de cada mercadoria será a Receita menos o custo

  L = (1,50 – 0,70) – x

  L = 80 – x centavos, e

- a quantidade vendida será 500 + 25 x.

- O lucro total, em unidades monetárias é:

  L = (80 – x) (500 + 25 x) = 40.000 + 1.500 x – 25 x^2

Maximizamos essa função igualando sua derivada a zero e resolvendo a equação resultante,

$$\frac{dL}{dx} = 1.500 - 50\,x \quad \Rightarrow \quad 1.500 - 50\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad 50\,x = 1.500 \ \text{ e }, \quad x = 30 \,\text{centavos}$$

O preço de venda mais vantajoso será R$ 1,20.

Confirmando ponto de máximo:

$$\frac{d^2L}{dx^2} = -50 \quad \Rightarrow \text{ convexa } \quad \Rightarrow \text{ ponto de máximo}$$

Exemplo 1.11

Deseja-se construir uma área retangular cercada ao longo de um dos lados de um muro. Determinar as dimensões da maior área que pode ser construída usando 40 m de cerca.

Solução: A Figura 1.19 apresenta um esquema do problema.

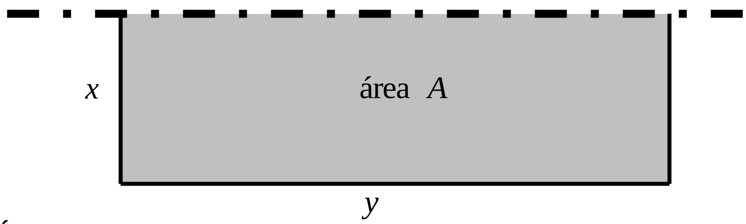


Figura 1.19 - Área a ser cercada

Designemos por x e y as dimensões da área. A cerca em três lados deve perfazer 40 m, isto é

$$2\,x + y = 40 \text{ (equação restritiva).}$$

Desejamos maximizar a área A ; em termos das variáveis x e y, temos

$$A = x.\,y$$

$$\text{onde, } y = 40 - 2\,x\,.$$

Logo, a função objetivo será

$$A = x\,(40 - 2\,x) = 40\,x - 2\,x^2$$

Temos agora uma fórmula para a área que depende de uma única variável, isto é, $A = f\,(x)$. Derivando e igualando a zero, temos

$$\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dx}} = 40 - 4x \quad \Rightarrow \quad 40 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 10\,\mathrm{m} \quad \text{e} \quad y = 40 - 2\ .\ 10 = 20\,\mathrm{m}$$

Exemplo 1.12

Uma caixa fechada com base quadrada vai ter um volume de 2.000 dm^3. O material da tampa e da base vai custar R$ 30,00 por dm^2, e o material para o lado R$ 15,00 por dm^2. Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.

Solução

Sejam, x = número de decímetros no comprimento de um lado da base quadrada;

y = número de decímetros na altura da caixa;

C = número de reais no custo do material.

O número total de cm^2 na soma das áreas da tampa e da base é $2\,x^2$ e para os lados é de $4\,x\,y$. Assim temos,

$C = 30\,(2\,x^2) + 15\,(4\,x\,y)$

Como o volume da caixa é o produto da área da base pela altura, temos

$$x^2 y = 2.000 \quad \text{ou} \quad y = \frac{2.000}{x^2}$$

Assim, $$C = 60x^2 + \frac{120.000}{x}$$

O objetivo é determinar as dimensões da caixa de forma a minimizar o custo dos materiais. Dessa forma,

$$\frac{dC}{dx} = 120x - \frac{120.000}{x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad x = 10 \text{ dm}$$

A altura da caixa será y = 20 dm.

Para certificar que em x = 10, a função de custo C tem um mínimo relativo, aplicamos o teste da derivada Segunda:

$$\frac{d^2C}{dx^2} = 120 + \frac{240.000}{x^3} \rightarrow \text{Para } x = 10, \quad \frac{d^2C}{dx^2} > 0$$

e portanto a função é côncava.

EXERCICIOS PROPOSTOS – LISTA 1C

1. Dado $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$, achar:

a) os pontos críticos;

b) os intervalos em que *y* é crescente e decrescente;

c) os valores máximos e mínimos.

Respostas:pontos críticos (2;0,66) e (-3;21,5)

2. Repita os cálculos da questão 1 para a função $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.

Respostas:pontos críticos(-2;0); (1;0) e $\left(-\frac{1}{2};\frac{81}{16}\right)$

3. Estudar a concavidade e os pontos de inflexão da curva

$y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7.$

Respostas:pontos de inflexão (2;- 63) e $\left(-\frac{1}{3}; -11{,}93\right)$

4. Dividir o número 120 em duas partes tais que o produto *P* de uma pelo quadrado da outra, seja máximo.

Resposta: A = 40 e B = 80

5. Uma folha de papel para um cartaz tem 2 m^2 de área. As margens no topo e na base são de 25 cm e nos lados 15 cm. Quais são as dimensões da folha sabendo que a área impressa é máxima?

Resposta: 109,54cm x 182,58 cm

6. Um reservatório cilíndrico, de base circular, tem capacidade de 64 dm^3. Achar suas dimensões de modo que a quantidade (área) de metal necessário seja mínima (a) considerando o reservatório sem cobertura, (b) com cobertura.

Respostas: a) D =5,46 dm e h= 2,73dm e b) D =4,336 dm e h= 4,336 dm

7. O preço do combustível para acionar um veículo é proporcional ao quadrado da velocidade e é de R$ 25,00 por hora para uma velocidade de 50 km/h. O preço de outras despesas independentes da velocidade é de R$ 100,00 por hora. Achar a que velocidade o custo por km será um mínimo.

Resposta: 100 km/h

8. Um corpo se move na horizontal de acordo com a lei

$S = f(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 + 10t + 3$

a) quando o movimento é acelerado e quando é retardado?

b) quando é mudado o sentido do movimento?

c) Achar a distância total percorrida nos 3 primeiros segundos do movimento.

9. O gás escapa de um balão na razão de 2 $dm^3.mim^{-1}$. Qual a razão de diminuição da superfície do balão, quando o raio for de 12 dm?

Resposta: - 1/3 dm^2/minuto

10. De um funil, cônico, escoa água na razão de 1 $cm^3.s^{-1}$. Sabendo-se que o raio da base do funil é de 4 cm e a altura é de 8 cm, achar a razão segundo a qual o nível da água está descendo, quando estiver a 2 cm do topo.

11. Resposta: - 0,0352cm/s