

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

MECÂNICA DAS ESTRUTURAS AERONÁUTICAS

VOLUME II

Sergio Persival Baroncini Proença

São Carlos, julho de 2009.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – ESTRUTURAS LINEARES HIPERESTÁTICAS

<i>1. Conceituação</i>	<i>221</i>
<i>2. O P.T.V. como condição de compatibilidade</i>	<i>222</i>
Exemplo 1	224
<i>3. Aplicação do P.T.V. na análise de estruturas hiperestáticas .</i>	<i>225</i>
Exemplo 2	228
Exemplo 3	231
Exemplo 4	235
<i>4. Análise de cavernas</i>	<i>239</i>
Exemplo 5	241
Exemplo 6	243
Exemplo 7	247

CAPÍTULO 2 – ANÁLISE DE PAINÉIS REFORÇADOS

<i>1. Análise simplificada de painéis reforçados</i>	<i>255</i>
Exemplo 1	256
Exemplo 2	258
<i>2. Análise simplificada de painéis reforçados com aberturas .</i>	<i>261</i>

CAPÍTULO 3 – ESTABILIDADE DE PAINÉIS REFORÇADOS

<i>1. Introdução</i>	<i>267</i>
<i>2. Abordagem simplificada da perda de estabilidade de chapas comprimidas</i>	<i>267</i>
Exemplo 1	274
Exemplo 2	275

3. Breve comentário sobre os painéis curvos	277
4. Análise pós-flambagem	277
Exemplo 3	282

CAPÍTULO 4 – FLEXO-TORÇÃO

1. Cálculo do empenamento em seções delgadas abertas sob torção uniforme	286
Exemplo 1	292
2. Tensão normal e tensão de cisalhamento na flexo-torção. O momento de flexo-torção	294
3. A equação diferencial fundamental da torção não-uniforme	298
4. O bimomento	304
Exemplo 3	308
Exemplo 4	312

CAPÍTULO 5 – NERVURAS E O EFEITO DE ABERTURAS EM ASAS

1. Introdução	317
2. Análise simplificada de nervura	318
Exemplo 1	318
3. Efeito de aberturas no revestimento de asas	322
Exemplo 2	323

CAPÍTULO 6 – MEF NA ANÁLISE BIDIMENSIONAL

1. Introdução	330
2. O MEF em problemas planos	331
Exemplo 1	342

<i>Exemplo 2</i>	344
<i>Exemplo 3</i>	346
<i>3. O MEF em problemas potenciais: análise térmica</i>	349

CAPÍTULO 7 – PLACAS FINAS CIRCULARES

<i>1. Introdução</i>	359
<i>2. Resumo da teoria das placas finas retangulares</i>	359
<i>2.1 Esforços internos</i>	359
<i>2.2 Relações de equilíbrio envolvendo esforços internos e carregamento transversalmente distribuído</i>	360
<i>2.3 Relações de compatibilidade e constitutiva</i>	361
<i>2.4 Equação diferencial do problema das placas finas retangulares formulado em deslocamentos</i>	362
<i>2.5 Condições de contorno</i>	363
<i>2.5.1 Bordas $x = a$ e $y = b$ simplesmente apoiadas</i>	363
<i>2.5.2 Borda livre em $x = a$</i>	365
<i>2.5.3 Borda engastada em $x = a$</i>	366
<i>3. Resumo das relações para placas finas circulares</i>	380
<i>Exemplo 1</i>	370
<i>Exemplo 2</i>	372
<i>Exemplo 3</i>	372
<i>Exemplo 4</i>	373
<i>Exemplo 5</i>	375
<i>Exemplo 6</i>	375
<i>Exemplo 7</i>	377
<i>4. Efeito de temperatura em placa circular engastada na borda</i>	378
<i>Exemplo 8</i>	381

Exemplo 9	382
---------------------	-----

CAPÍTULO 8 – PLACAS FINAS RETANGULARES

1. Introdução	383
2. Soluções de Navier	386
2.1 Caso particular de força aplicada uniformemente distribuída $p(x,y)=\bar{p}$ sobre placa retangular	389
2.2 Caso particular de força aplicada uniformemente distribuída sobre placa quadrada	391
2.3 Caso particular de força aplicada uniformemente distribuída sobre área retangular	395
2.4 Caso particular de força concentrada P aplicada no ponto de coordenadas: $x = \zeta$ e $y = \eta$	395
Exemplo 1	396
Exemplo 2	396

CAPÍTULO 9 – CASCAS EM REGIME DE MEMBRANA

1. Introdução	399
2. Definição dos esforços solicitantes em cascas de geometria qualquer	400
2.1 Alguns preliminares da geometria das superfícies	400
2.2 Os esforços internos solicitantes	403
3. Cascas de revolução	406
3.1 Geometria	406
3.2 Ações	407
3.3 Esforços internos generalizados	408
3.4 Equações de equilíbrio	410
4. Cascas de revolução em regime de membrana	413

<i>Exemplo 1</i>	416
<i>Exemplo 2</i>	417
<i>Exemplo 3</i>	418
<i>Exemplo 4</i>	420
<i>Exemplo 5</i>	422

CAPÍTULO 10 – *DEFORMAÇÕES EM MEMBRANAS DE REVOLUÇÃO*

<i>1. Introdução</i>	425
<i>2. Relações entre as deformações e os deslocamentos</i>	425
<i>3. Rotação da tangente ao meridiano</i>	429
<i>4. Variação de curvatura</i>	430
<i>5. Caso da membrana esférica</i>	432
<i>Exemplo 1</i>	433

CAPÍTULO 11 – *FLEXÃO NAS CASCAS DE REVOLUÇÃO*

<i>1. Introdução</i>	435
<i>2. Cascas esféricas de espessura constante</i>	435
<i>2.1 Relações entre esforços e deformações</i>	435
<i>2.2 O problema de flexão</i>	436
<i>Exemplo 1</i>	444
<i>Exemplo 2</i>	445

CAPÍTULO 1 ESTRUTURAS LINEARES HIPERESTÁTICAS

1. Conceituação.

As estruturas lineares resultam da combinação de grande número de barras (*'simples e gerais'*) e *nós* (articulações aonde concorrem somente *barras simples*). Nem sempre todos esses elementos estão presentes, havendo casos de estruturas formadas apenas por barras simples e nós, como as treliças, ou cuja composição apresenta somente barras gerais.

As estruturas são ditas *isostáticas* (ou *'determinadas geometricamente'*) quando contêm um número mínimo de *barras vinculares*, introduzidas externa e internamente, suficiente para eliminar todos os graus de liberdade associados aos possíveis movimentos de corpo rígido, seja de todo o arranjo de elementos ou de partes dele (*).

Uma particularidade das estruturas isostáticas é que as deformabilidades dos seus elementos podem ocorrer livremente, isto é, sem a movimentação de esforços internos adicionais. Assim sendo, a condição de compatibilidade entre deslocamentos e deformações, garantindo a continuidade do arranjo geométrico inicial de barras, é atendida de forma independente. Por sua vez, os esforços internos podem ser determinados diretamente em função das forças externas aplicadas, sendo as relações de equilíbrio condição suficiente neste sentido.

Nas estruturas *hiperestáticas*, o número de barras vinculares existentes ultrapassa o mínimo necessário para a sua determinação geométrica, sendo o número adicional definido como *grau de hiperestaticidade*. Assim, a situação isostática é sempre tomada como referência para a determinação do *grau de hiperestaticidade* de uma estrutura. Nas estruturas hiperestáticas as deformações dos elementos não mais ocorrem sem que se introduzam esforços internos adicionais e a estimativa destes esforços não pode ser feita exclusivamente com as relações de equilíbrio. As condições de compatibilidade e equilíbrio resultam combinadas, passando a resposta do material a oferecer um elo fundamental entre elas.

As estruturas de aviões, particularmente aquelas que compõem as asas e fuselagens, apresentam elevado *grau de hiperestaticidade*. Naturalmente, se considerada toda a estrutura do avião, em termos de vinculação externa há diferenças entre as situações de voo e de repouso; na primeira delas a

(*) A determinação geométrica de estruturas é tema da Mecânica dos Sólidos considerado conhecido nestas notas.

análise do grau de hiperestaticidade se restringe ao grau de vinculação interno e se determina a partir da eliminação dos movimentos relativos de corpo rígido entre partes internas da estrutura.

Apesar da maior complexidade conceitual, comparando-se os sistemas hiperestáticos em relação aos isostáticos, o Princípio dos Trabalhos Virtuais oferece uma metodologia consistente também para a análise de estruturas hiperestáticas.

Neste capítulo, estende-se às estruturas hiperestáticas a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, preservando, essencialmente, a mesma metodologia para o cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas apresentada na disciplina Mecânica das Estruturas Aeronáuticas I.

2. O P.T.V. como condição de compatibilidade.

Já foi visto que o Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece a igualdade entre o trabalho *virtual* das forças externas e o trabalho *virtual* das forças internas. A partir da forma como o princípio é expresso, a ele equivale primariamente a satisfação da condição de equilíbrio ou da condição de compatibilidade.

A forma do princípio que equivale à condição de equilíbrio tem os trabalhos virtuais determinada pelos produtos de forças externas e esforços internos *reais*, respectivamente por deslocamentos e deformações virtuais compatíveis entre si.

A forma do princípio que equivale à condição de compatibilidade tem os trabalhos virtuais determinados pelos produtos de forças externas e esforços internos virtuais em equilíbrio entre si, respectivamente por deslocamentos e deformações *reais*.

Quando o objetivo é o cálculo de deslocamentos em qualquer ponto da estrutura, a forma do P.T.V. que equivale à condição de compatibilidade é a mais interessante. Neste caso, o sistema *real* é composto por deslocamentos e deformações compatíveis, a serem determinados, e o sistema *virtual* (independente das forças e esforços internos reais atuantes na estrutura) é formado por convenientes forças externas e esforços internos em equilíbrio. Nessa forma o P.T.V. também recebe a denominação de Princípio das Forças Virtuais.

Tendo-se em vista o cálculo de deslocamentos no caso de estruturas de barras simples (treliças), o P.T.V. apresenta-se na seguinte igualdade:

$$1. u_k = \int_{\text{estrut.}} \frac{N}{EA} \bar{N}_k dx \quad (1)$$

Claramente, a relação (1) impõe a igualdade entre os trabalhos virtuais externo e interno, sendo u_k o deslocamento linear real na direção (u) e ponto (k) de interesse, e $\frac{N}{EA}$ representa a deformação linear específica, compatível com o deslocamento num ponto da estrutura.

Na disciplina de Mecânica das Estruturas Aeronáuticas I o P.T.V. foi aplicado ao cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas de barras. Em seguida, resumem-se os principais aspectos daquele estudo e reapresenta-se um exemplo de aplicação apenas para recordar o procedimento.

O sistema de forças virtuais que aparece na (1) deve constituir um conjunto equilibrado e independente do conjunto de forças efetivamente aplicado. Uma escolha conveniente, porque permite simplificar o cálculo do trabalho virtual externo, consiste em adotar uma força unitária aplicada no ponto e na direção aonde se quer determinar o deslocamento. Com essa força e a partir de uma análise simples de equilíbrio da estrutura isostática, determina-se o conjunto de forças normais (\bar{N}_k) em cada barra da treliça. Desse modo, justifica-se a forma apresentada pela (1).

Por outro lado, o P.T.V. pode ter aplicação mais ampla, permitindo a consideração combinada de outros tipos de sollicitação: como flexão, torção e força cortante, para se restringir ainda às barras. Em sua forma mais completa, que pode ser aplicável às estruturas tridimensionais compostas por arranjos de barras simples e gerais, o princípio, representando a condição de compatibilidade, se apresenta como:

$$1. v_k = \int_{\text{estrut}} \bar{N} \frac{N dx}{EA} + \int_{\text{estrut}} \bar{M} \frac{M dx}{EI} + \int_{\text{estrut}} \bar{V} \frac{cV dx}{GA} + \int_{\text{estrut}} \bar{M}_T \frac{M_T dx}{GI_T} \quad (2)$$

Na relação anterior, v_k representa um deslocamento real generalizado (linear ou angular) e os esforços $\bar{N}, \bar{M}, \bar{V}$ e \bar{M}_T (força normal, momento fletor, força cortante e momento torçor) são virtuais e estão em equilíbrio com uma força, ou momento, virtual unitário aplicado no ponto k , com a direção ou sentido do deslocamento que se deseja determinar. Os termos $(N/EA), (M/EI), (cV/GA)$ e (M_T/GI_T) representam as deformações reais

compatíveis e associadas aos esforços solicitantes reais. Observa-se, ainda, que a constante c que aparece na parcela de integração correspondente à força cortante assume valores diferentes, a depender da forma geométrica da seção transversal (I, I no caso da seção circular; $I, 2$ para a seção retangular; $2, 4$ para a seção em I, etc.).

Exemplo 1. Determinar o deslocamento na extremidade livre da barra submetida a uma força concentrada aplicada na sua seção central, conforme ilustra a Figura 1.

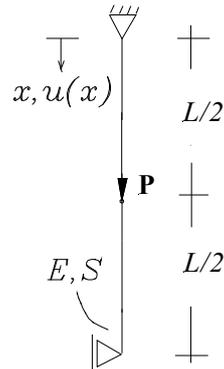


Figura 1 – Barra sob força concentrada

A estrutura é isostática e o procedimento de resolução pelo P.T.V. exige a adoção de um sistema de forças virtuais independente do real e em equilíbrio. Como o deslocamento a determinar é o do ponto da extremidade da barra, o trabalho virtual externo é mais simplesmente determinado se a força externa (unitária) for aplicada naquele ponto.

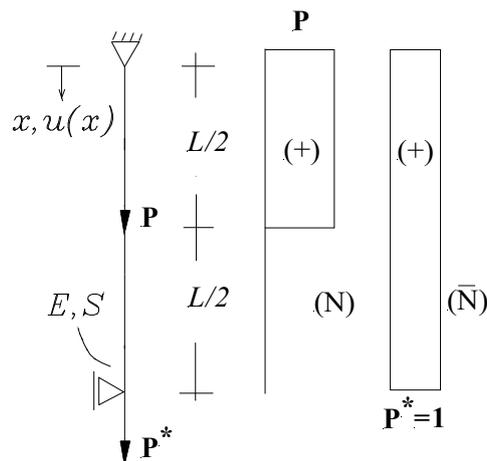


Figura 2 – Diagramas de força normal

Assim sendo, para fins de resolução introduz-se uma força $P^* = 1$ na extremidade livre e a partir daí determina-se a distribuição de força normal em equilíbrio com ela. Constrói-se, também, o diagrama de força normal da

força aplicada (real), pois em função dessa força normal se determina a deformação real compatível ($N/E A$) em qualquer ponto da barra. A Figura 2 ilustra os diagramas resultantes.

A aplicação da relação (1) deve levar em conta que o diagrama de (N) apresenta valores não-nulos somente num trecho de comprimento $L/2$ e, portanto, a integral lá envolvida passa a ser definida da seguinte forma:

$$u(L).1 = \int_0^{L/2} \frac{N}{E A} \bar{N}_k dx$$

$$= \int_0^{L/2} \frac{(P)}{E A} 1 dx$$

Assim procedendo, o deslocamento procurado resulta:

$$u(L) = \frac{PL}{2 E A}$$

3. Aplicação do P.T.V. na análise de estruturas hiperestáticas.

Considere-se a estrutura indicada na Figura 3a e admita-se que se deseja determinar as distribuições de momento fletor e força cortante.

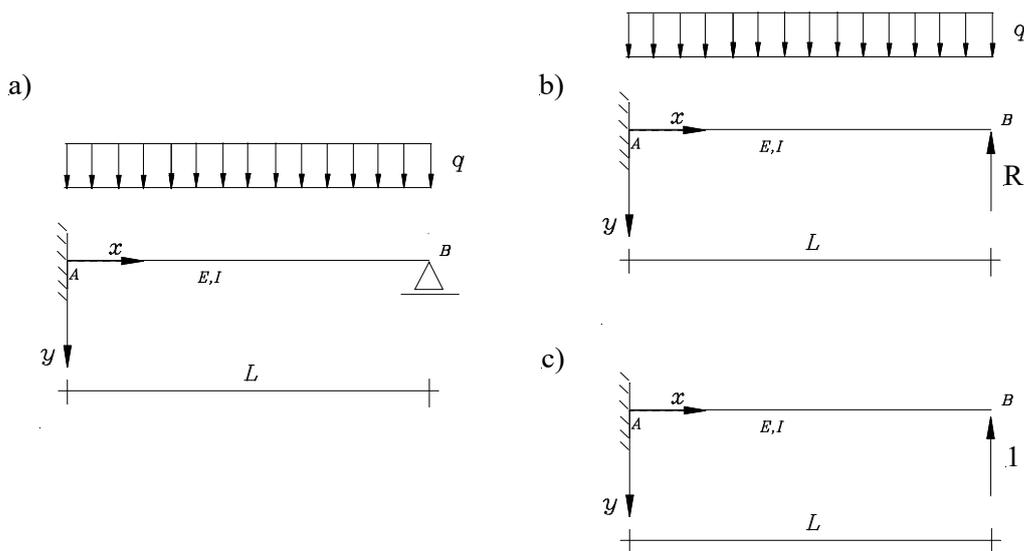


Figura 3 – a) Estrutura hiperestática; b) Estrutura isostática; c) Sistema virtual

Trata-se de estrutura formada por uma barra, porém uma vez hiperestática, de modo que há uma barra vincular externa (*) a mais do que o mínimo necessário para determiná-la geometricamente.

Independente do P.T.V., uma estratégia de resolução geral, consiste em ‘idealmente’ liberar um dos vínculos externos, por remoção da barra vincular correspondente, reduzindo a estrutura para uma situação isostática. Para não alterar o conjunto de forças que deve existir na estrutura original, representa-se a força de reação, inicialmente desconhecida, transmitida pelo vínculo idealmente retirado. Esta reação incógnita recebe o nome de *força hiperestática*. Naturalmente, na liberação de vínculos deve-se tomar o cuidado de evitar a criação de algum caso excepcional, no qual a estrutura isostática apresenta mobilidade¹.

Ocorre que, em geral, a possibilidade de redução para uma situação isostática não é única. Neste exemplo, uma escolha simples consiste em retirar a barra vincular que impede o deslocamento transversal na seção *B*, representando-se a força de reação correspondente, conforme ilustra a figura 3b (o sentido dessa força é arbitrário).

Desde que a intensidade da força de reação (*R*) seja tal que isoladamente provoque na seção *B* um deslocamento que anule aquele por efeito do carregamento aplicado, a estrutura isostática idealizada se comportará exatamente como a hiperestática dada; tal igualdade entre deslocamentos constitui, essencialmente, de uma condição de compatibilidade. Uma maneira absolutamente equivalente de expressar esta condição consiste em impor a nulidade do deslocamento transversal da seção *B*, resultante da soma dos efeitos da força distribuída e da reação de apoio.

A relação que exprime o deslocamento total na estrutura isostática idealizada, soma dos efeitos combinados e representado por v_B , pode ser fornecida pelo P.T.V. Considerando-se, neste problema, que o efeito dominante sobre o deslocamento transversal seja o da deformação por flexão, a (2) assume a forma:

$$1. v_B = \int_0^L \bar{M} \frac{M dx}{EI} \quad (3)$$

(*) Do estudo da determinação geométrica sabe-se que a cada tipo de vínculo externo ou interno corresponde certo número de barras vinculares.

¹ A relação de determinação geométrica é condição necessária, portanto, não exclui casos excepcionais.

Na relação anterior M/EI representa a curvatura da barra num ponto genérico de seu eixo, $(M/EI)dx$ é o giro elementar relativo entre a seção onde atua M e uma seção vizinha, distante dx . Assim, os momentos virtuais \bar{M} trabalham nos giros elementares relativos reais, e a integral que aparece na (3) representa a soma de todos os trabalhos elementares virtuais ao longo da viga. Naturalmente, M é a função que descreve a distribuição ‘real’ de momentos fletores, por efeito das forças externas (a diretamente aplicada e a de reação hiperestática). Por sua vez, na estrutura isostática idealizada a distribuição de momentos fletores virtuais \bar{M} verifica o equilíbrio com a força virtual unitária (que aparece no trabalho virtual externo).

No caso, considera-se que uma força unitária esteja atrelada ao deslocamento v_B , isto é, aplicada na seção B e na direção desse deslocamento, pois assim, o trabalho virtual externo fica prontamente determinado.

As Figuras 3b e 3c ilustram os estados resultantes, ‘real’ e ‘virtual’. As funções para M e \bar{M} então se escrevem:

$$M(x) = R(L - x) - q \frac{(L - x)^2}{2}$$

$$\bar{M}(x) = (L - x)$$

A condição de compatibilidade consiste em impor que v_B seja nulo. Segue daí que no P.T.V. o trabalho virtual externo se anula e, por conseguinte, na condição de produto EI constante, obtém-se da relação (3):

$$\int_0^L \bar{M} \frac{M dx}{EI} = -3qL + 8R = 0$$

$$\therefore R = \frac{3qL}{8}$$

Finalmente, o momento fletor e a força cortante resultam de análises simples de equilíbrio, considerando-se uma parte arbitrária da estrutura, isolada a partir de sua extremidade livre:

$$M(x) = \frac{3qL}{8}(L-x) - q\frac{(L-x)^2}{2}$$

$$V(x) = q(L-x) - R = q(L-x) - \frac{3qL}{8}$$

Observa-se que uma vez conhecido o valor da reação de apoio é possível novamente aplicar o P.T.V. para se determinar o deslocamento em qualquer outro ponto da viga, sempre considerando a estrutura isostática idealizada; o resultado será válido também para a estrutura hiperestática original.

No exemplo seguinte, mostra-se que a compatibilidade pode ser imposta internamente.

Exemplo 2. Determinar a força normal na barra de reforço da estrutura indicada na Figura 4.

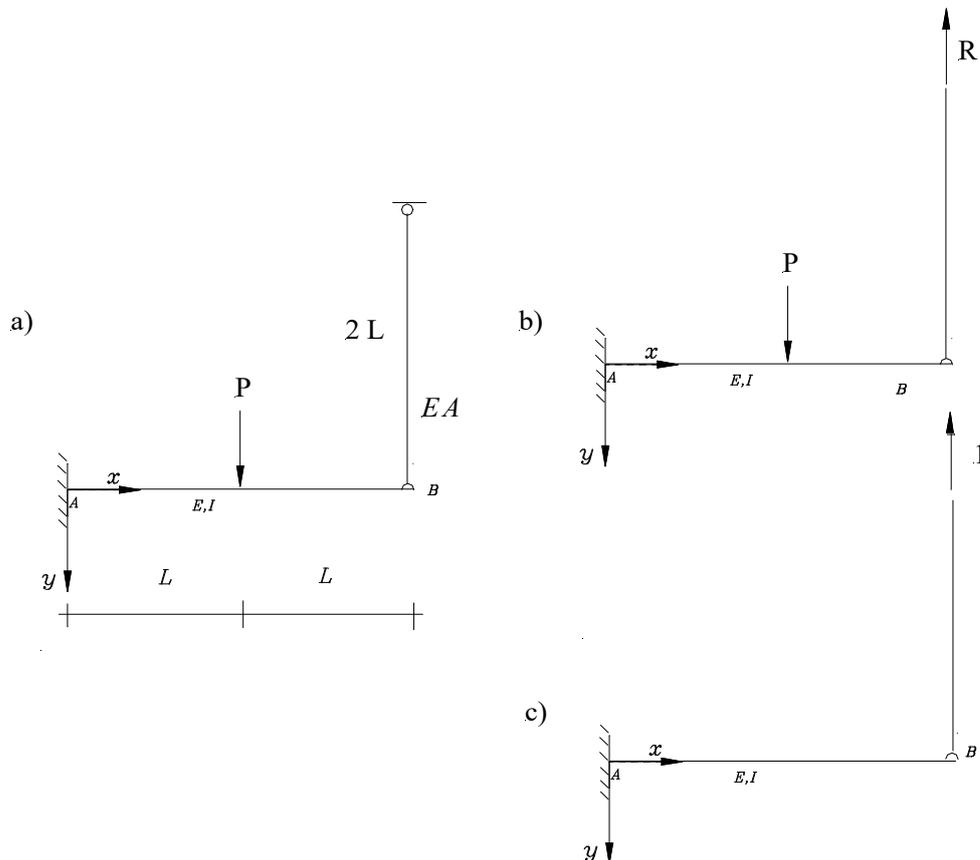


Figura 4 – Viga em balanço com barra de reforço

A estrutura é uma vez hiperestática e, como mostra a Figura 4b, uma primeira opção para a idealização de um sistema isostático consiste em

liberar o vínculo externo da barra de reforço. Nota-se que força hiperestática R coincide com a força normal procurada.

A condição de compatibilidade exprime que o deslocamento na altura do vínculo liberado deve ser nulo. O sistema virtual é então formado por uma força unitária aplicada na altura do vínculo liberado e, por opção, de mesmo sentido que a força hiperestática R . Essa opção, ao simplificar a questão dos sinais, facilita os cálculos envolvidos na expressão do P.T.V. Como agora o sistema estrutural envolve uma barra geral, deformável por flexão, e uma barra simples, deformável por força normal, a relação do P.T.V., envolvendo o deslocamento (δ) da extremidade liberada resulta:

$$1.\delta = \int_0^{2L} \bar{M} \frac{M dx}{EI} + \bar{N} \frac{N 2L}{EA} \quad (4)$$

Nota-se que a integração indicada deve ser realizada em duas parcelas, pois a função que descreve a distribuição de momentos por efeito das forças externas P e R muda na altura da força concentrada. Segue que:

$$1.\delta = \int_0^L (2L-x) \frac{[-P(L-x) + R(2L-x)]}{EI} dx + \int_0^L (2L-x) \frac{R(2L-x)}{EI} dx + 1 \frac{R 2L}{EA}$$

A condição de compatibilidade consiste em: $\delta = 0$, de onde resulta:

$$\frac{EAL^2}{EI} \frac{(-5P+16R)}{6} + 2R = 0$$

Admitindo-se uma combinação de dados tais que: $\frac{EAL^2}{EI} = 3$, obtém-se:

$$R = \frac{P}{4}.$$

A Figura 5 ilustra uma segunda possibilidade para a liberação do vínculo, agora internamente, junto à ligação entre as barras.

Nota-se que a liberação do vínculo interno acaba por separar as barras, sendo que suas extremidades passam a ter possibilidade de deslocamento. É

também importante notar que as forças hiperestáticas atuam aos pares, e com sentidos opostos entre si.

Os deslocamentos das extremidades podem ser determinados pela aplicação da expressão do P.T.V., resultando em relações idênticas às anteriores. O que muda, portanto, de uma alternativa de resolução para a outra é o significado da condição de compatibilidade. Neste último caso ela significa que não há deslocamento relativo entre as seções separadas (como os deslocamentos se dão em sentidos contrários, sua soma deve ser nula); já no primeiro, trata-se da nulidade de um deslocamento relativo a um vínculo fixo.

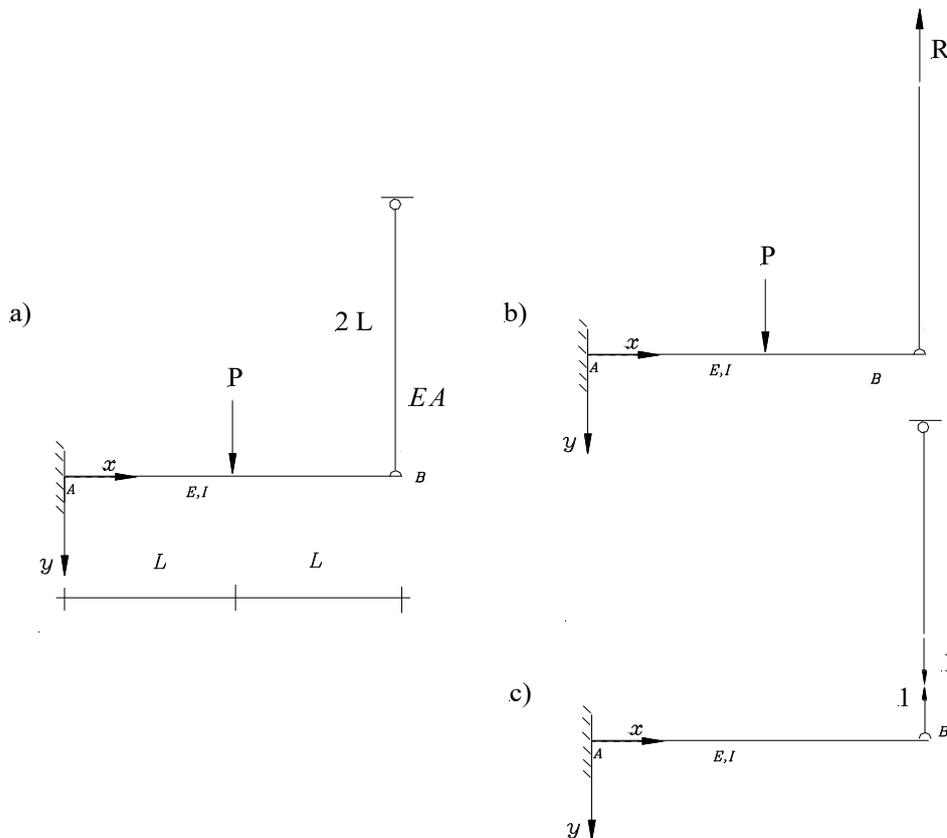


Figura 5 – Viga em balanço com barra de reforço

A análise de treliças planas hiperestáticas também pode ser conduzida aplicando-se os mesmos passos anteriores, isto é: identificação do grau de hiperestaticidade, redução do sistema para um isostático com aplicação das forças hiperestáticas de reação (interna ou externa) em correspondência às barras vinculares eliminadas, e imposição de condições de compatibilidade pelo P.T.V. (essencialmente reproduzindo as restrições iniciais sobre os deslocamentos liberados na idealização).

O aspecto característico a observar no caso das treliças é que se levam em conta somente as deformabilidades por forças normais, quando da

aplicação do P.T.V. O exemplo seguinte ilustra a análise de uma treliça plana.

Exemplo 3. Determinar as forças normais nas barras da treliça indicada na Figura 4. Todas as barras possuem a mesma rigidez EA .

Trata-se de uma estrutura duas vezes hiperestática, sendo que este grau decorre da existência de duas barras vinculares (externa e interna) a mais que o mínimo necessário para a determinação geométrica. Neste caso, a redução da estrutura para uma condição de determinação geométrica pode ser feita liberando-se dois vínculos. Como se sabe, a metodologia de resolução exige, ainda, que em correspondência aos vínculos liberados sejam introduzidas forças incógnitas, de modo a preservar o conjunto de forças existente na estrutura hiperestática dada.

Há, neste caso, mais de uma possibilidade de escolha quanto às barras vinculares a serem retiradas e forças hiperestáticas introduzidas. Entretanto é importante observar que somente uma barra vincular externa pode ser retirada, sob pena de redução do sistema a uma condição de indeterminação geométrica, mesmo permanecendo a estrutura uma vez hiperestática (caso excepcional!). Assim sendo, o segundo vínculo a ser liberado deve ser interno.

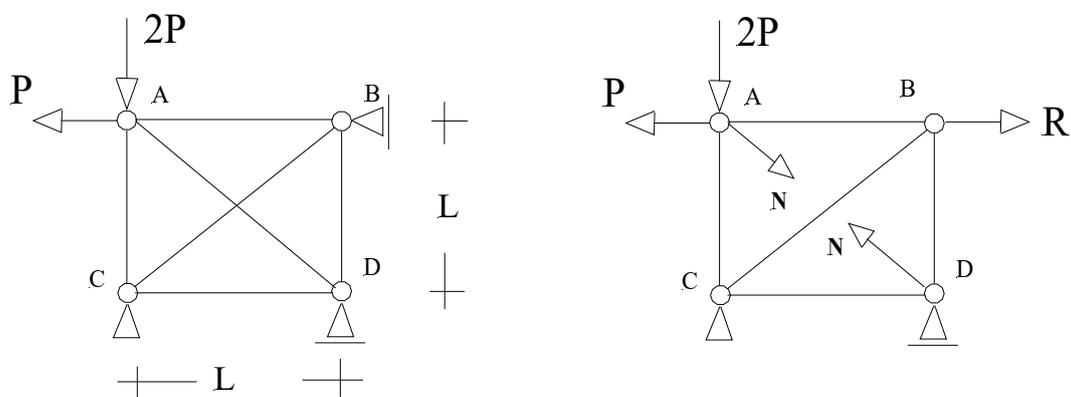


Figura 4 – Treliça plana hiperestática

Opta-se, então, pela liberação do apoio externo em B e pelo corte (arbitrário) numa seção da barra diagonal. Para forças hiperestáticas escolhem-se, portanto: a reação externa correspondente à barra vincular do apoio B e as forças normais internas (necessariamente iguais!) aplicadas em cada uma das partes da barra AD seccionada da treliça. Na Figura 4 indicam-se a treliça isostática resultante e as forças hiperestáticas escolhidas.

Duas condições de compatibilidade devem ser impostas, completando a metodologia de análise: o deslocamento horizontal nulo em B e a nulidade do deslocamento relativo entre as seções adjacentes ao corte na barra AD . As condições podem ser impostas de modo independente, criando-se para cada uma delas um sistema próprio de forças virtuais, aplicado sobre a estrutura isostática idealizada.

Assim, na primeira condição de compatibilidade, aplica-se uma força unitária no nó B com a direção do deslocamento procurado. Na segunda condição, aplicam-se forças normais unitárias em cada uma das partes da barra AD seccionada. A Figura 5 ilustra as duas situações descritas.

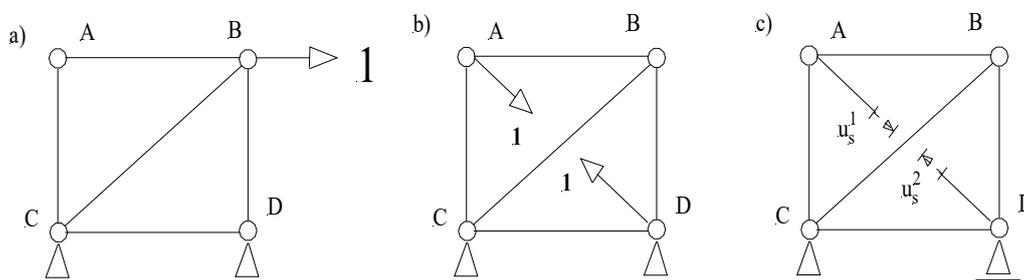


Figura 5 – Sistemas de forças virtuais

Sendo n_b o número de barras na treliça dada, para o deslocamento horizontal no ponto B a aplicação do P.T.V. leva à seguinte relação:

$$u_B = \sum_{i=1}^{n_b} \frac{N_i \bar{N}_i L_i}{(EA)_i}$$

onde \bar{N}_i representa a força normal virtual na barra i por efeito de uma força unitária aplicada no nó B com a direção do deslocamento procurado. Naturalmente, como o que se considera é a estrutura isostática idealizada, a barra diagonal seccionada resulta sem esforço, em cada uma de suas partes, no sistema virtual.

Os deslocamentos das seções seccionadas, designados por u_s^1 e u_s^2 , e indicados na Figura 5c, podem ser determinados pelas seguintes relações:

$$u_s^1 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n_b} \frac{N_i \bar{N}_i L_i}{(EA)_i} \tag{5a,b}$$

$$u_s^2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n_b} \frac{N_i \bar{N}_i^* L_i}{(EA)_i}$$

A diferença entre os somatórios das relações anteriores está justamente no significado das forças normais virtuais. Na primeira relação, \bar{N}_i representa a força normal virtual na barra i por efeito da força virtual unitária aplicada na extremidade da parte da barra AD ligada ao nó A . Na segunda relação, \bar{N}_i^* representa a força normal virtual na barra i por efeito da força virtual unitária aplicada na extremidade da parte da barra AD ligada ao nó D .

As condições de compatibilidade exprimem-se, então, por:

$$\begin{aligned} u_B &= 0 \\ u_s^1 + u_s^2 &= 0 \end{aligned} \tag{6a,b}$$

Considerando-se a treliça isostática mostrada na Figura 4, sob a ação das forças externas aplicadas e dos hiperestáticos escolhidos, determinam-se, por equilíbrio de nós, as seguintes forças normais *reais* N_i :

$$\begin{aligned} N_{A-C} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}N - 2P; & N_{A-B} &= P - \frac{\sqrt{2}}{2}N; \\ N_{B-C} &= R\sqrt{2} + N - \sqrt{2}P; & N_{B-D} &= P - R - \frac{\sqrt{2}}{2}N; & N_{D-C} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}N. \end{aligned}$$

Naturalmente, as partes da barra AD ficam submetidas às forças normais N . Em correspondência ao sistema indicado na Figura 5a determinam-se as seguintes forças *virtuais* \bar{N}_i :

$$\bar{N}_{A-C} = 0; \quad \bar{N}_{A-B} = 0; \quad \bar{N}_{B-C} = \sqrt{2}; \quad \bar{N}_{B-D} = +1; \quad \bar{N}_{D-C} = 0.$$

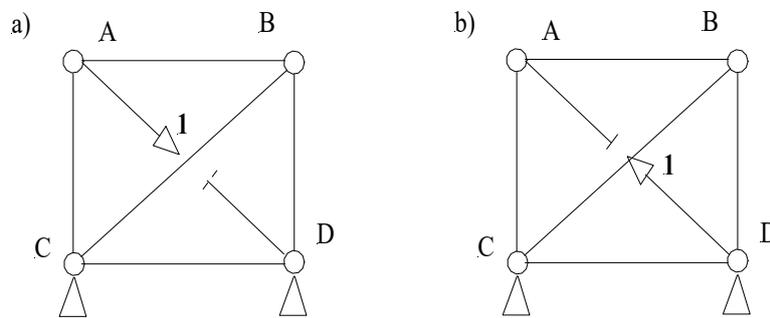


Figura 6 – Sistemas de forças virtuais

Para o sistema da Figura 6a as forças *virtuais* \bar{N}_i resultam:

$$\bar{N}_{A-C} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \bar{N}_{A-B} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \bar{N}_{B-C} = +1; \quad \bar{N}_{B-D} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \bar{N}_{D-C} = 0.$$

Para o sistema da Figura 6b as forças *virtuais* \bar{N}_i^* são:

$$N_{A-C}^* = 0; \quad N_{A-B}^* = 0; \quad N_{B-C}^* = 0; \quad N_{B-D}^* = 0; \quad N_{D-C}^* = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Observa-se que as partes da barra *AD* submetidas às forças virtuais aplicadas tem força normal unitária. Para fins de simplificação na aplicação das relações do P.T.V. admita-se que a barra *AD* tenha sido seccionada na sua seção média; então, cada parte resulta com comprimento: $L \sqrt{2}/2$.

As relações para os deslocamentos procurados resultam:

$$u_{B,1} = R(2\sqrt{2} - 1)L + P(1 - 2\sqrt{2})L + N\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)L$$

$$u_s^1 \cdot 1 = N\frac{\sqrt{2}}{2}L - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(P - \frac{\sqrt{2}}{2}N\right)L + \left(R\sqrt{2} + N - \sqrt{2}P\right)\sqrt{2}L$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{2}\left(P - R - \frac{\sqrt{2}}{2}N\right)L - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}N - 2P\right)L$$

$$u_s^2 \cdot 1 = N\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}N\right)$$

Aplicando-se, finalmente, as condições de compatibilidade, obtêm-se o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas *N* e *R*:

$$R(2\sqrt{2} - 1) + P(1 - 2\sqrt{2}) + N\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$2N + 2N\sqrt{2} + R\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2P = 0$$

Da solução do sistema resultam: $R = 1,172P$; $N = -0,243P$. Na Figura 7 apresentam-se as forças finais nas barras:

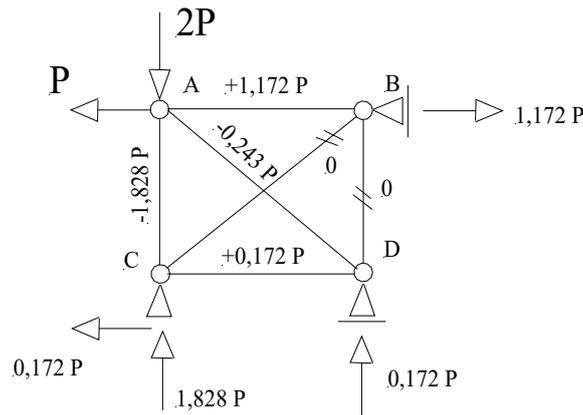


Figura 7 – Respostas finais

O próximo exemplo ilustra a aplicação do P.T.V. ao caso de uma estrutura que combina um arranjo de barras simples e geral.

Exemplo 4. Determinar as forças normais nas barras simples e a distribuição de momento fletor na barra geral da estrutura indicada na Figura 7. Todas as barras simples possuem a mesma rigidez EA , enquanto que a barra geral tem produto de rigidez EI e área de seção transversal A_g .

Trata-se, essencialmente, de uma estrutura em viga (‘barra geral’) simplesmente apoiada, com reforço em treliça (‘barras simples’) e apresentando um grau de hiperestaticidade.

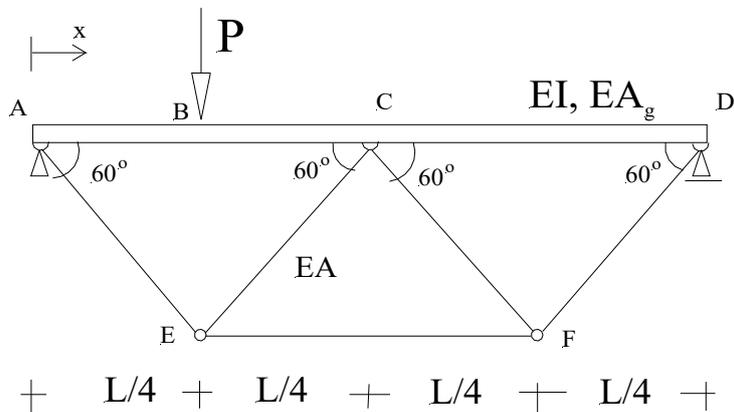


Figura 7 – Estrutura de viga com reforço em treliça

Como a vinculação externa é a mínima possível para eliminar os movimentos de corpo rígido da toda a estrutura, a redução ao caso isostático se dá por liberação de um vínculo interno. Opta-se pelo corte numa seção arbitrária da barra simples EF .

A Figura 8 ilustra a estrutura isostática obtida pela liberação do vínculo interno na barra EF e substituição em seu lugar de forças normais N hiperestáticas aplicadas em suas partes. As reações de apoio, que podem ser facilmente determinadas por equilíbrio, também aparecem indicadas na figura.

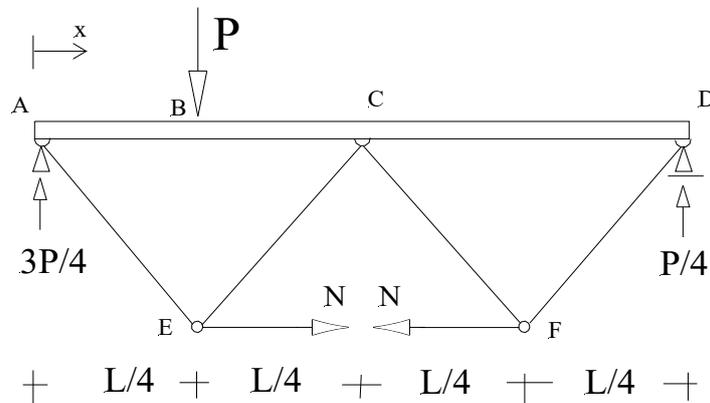


Figura 8 – Estrutura isostática de análise

O P.T.V. é empregado para a imposição da condição de compatibilidade, basicamente significando a nulidade do deslocamento relativo entre as extremidades das partes seccionadas da barra EF . Ao contrário do exemplo anterior, da treliça plana, onde os deslocamentos foram determinados por análises separadas, e seus valores então somados para imposição da compatibilidade, neste exemplo a soma deles é calculada diretamente. Isto é possível considerando-se os dois hiperestáticos atuando simultaneamente no sistema real, bem como as duas forças unitárias no arranjo virtual.

Representando por (u) a soma dos deslocamentos das seções seccionadas, a expressão do P.T.V., levando em conta as deformabilidades axiais de todas as barras (simples e geral) e a deformabilidade por flexão da barra geral, apresenta a seguinte forma:

$$u \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\bar{N}_i N_i L_i}{(EA)_i} + \int_{ABCD} \bar{M} \frac{M dx}{EI} = 0 \quad (7)$$

onde em n_b inclui-se também a barra geral, além de todas as barras de treliça da estrutura dada.

Por equilíbrio de nós, tem-se, de imediato, que as forças normais nas barras simples do sistema real valem:

$$N_{A-E} = +N; \quad N_{E-C} = -N; \quad N_{C-F} = -N; \quad N_{F-D} = +N.$$

Obviamente, as partes da barra EF também ficam solicitadas por forças normais de tração (N). As distribuições de momento fletor e força normal na barra geral podem ser equacionadas a partir do diagrama de corpo livre da barra e dividindo-se o seu domínio em trechos delimitados pelas forças concentradas nela atuantes. A Figura 9 ilustra o diagrama de corpo livre em questão.

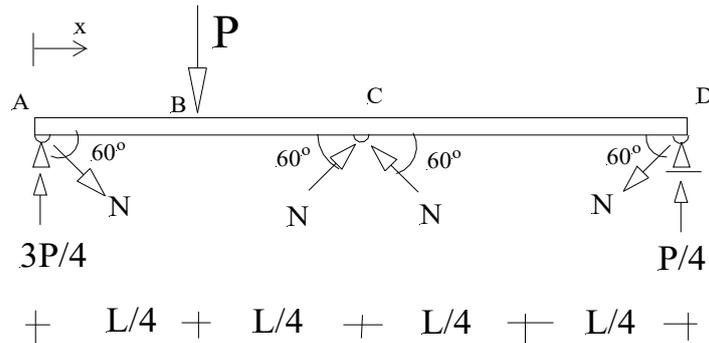


Figura 9 – Diagrama de corpo livre da barra geral

Usando as componentes das forças N , escrevem-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} (0 \leq x \leq L/4) & & (L/4 \leq x \leq L/2) \\ M(x) = \frac{3}{4}Px - \frac{\sqrt{3}}{2}Nx; & & M(x) = \frac{3}{4}Px - \frac{\sqrt{3}}{2}Nx - P\left(x - \frac{L}{4}\right); \\ N(x) = -\frac{N}{2}; & & N(x) = -\frac{N}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L/2 \leq x \leq L) \\ M(x) = \frac{3}{4}Px - \frac{\sqrt{3}}{2}Nx - P\left(x - \frac{L}{4}\right) + N\sqrt{3}\left(x - \frac{L}{2}\right); \\ N(x) = -\frac{N}{2}; \end{aligned}$$

O sistema auxiliar, ilustrado na Figura 10, é formado pela estrutura isostática submetida a forças virtuais unitárias em correspondência às forças hiperestáticas.

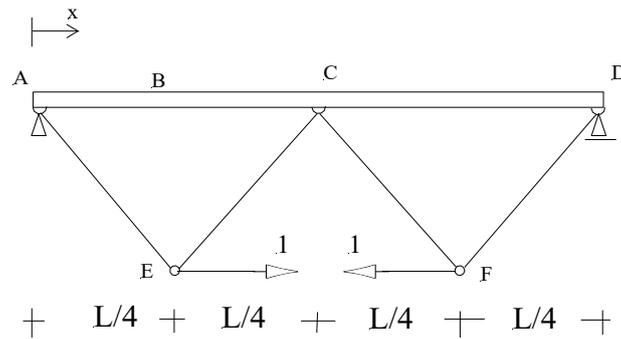


Figura 10 – Sistema com força virtual

Por equilíbrio de nós, resulta que as forças normais nas barras simples do sistema virtual valem:

$$\bar{N}_{A-E} = +1; \quad \bar{N}_{E-C} = -1; \quad \bar{N}_{C-F} = -1; \quad \bar{N}_{F-D} = +1.$$

As partes da barra EF também ficam solicitadas por forças normais de tração ($+1$). As distribuições de momento fletor e força normal na barra geral podem ser equacionadas analogamente ao caso de forças reais a partir do diagrama de corpo livre da barra, dividindo-se o seu domínio em trechos delimitados pelas forças concentradas nela atuantes.

A Figura 11 ilustra o diagrama de corpo livre em questão.

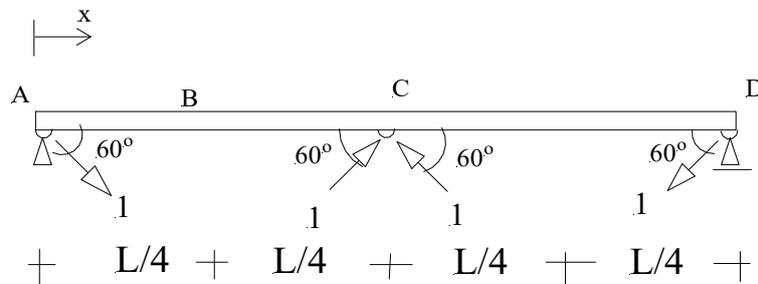


Figura 11 – Diagrama de corpo livre da barra geral sob força virtual

Nesta situação, escrevem-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} (0 \leq x \leq L/2) & & (L/2 \leq x \leq L) \\ \bar{M}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} x; & & \bar{M}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} x - \sqrt{3} \left(x - \frac{L}{2} \right); \\ \bar{N}(x) = -\frac{1}{2}; & & \bar{N}(x) = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

Com as funções dos esforços deduzidas, a condição de compatibilidade resulta:

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{EI} \int_0^{L/4} \left(\frac{3}{4} P x - \frac{\sqrt{3}}{2} N x \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) dx + \frac{1}{EI} \int_{L/4}^{L/2} \left(\frac{P}{4} (L-x) - \frac{\sqrt{3}}{2} N x \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) dx + \\
 & \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(\frac{P}{4} (L-x) - \frac{\sqrt{3}}{2} N (L-x) \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (x-L) \right) dx + \\
 & \frac{1}{EA_g} \left(\frac{N}{2} \frac{1}{2} L \right) + \frac{1}{EA} \left(\frac{NL}{2} \cdot 2 + \frac{NL}{2} \cdot 2 + \frac{NL}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Desenvolvendo-se as integrais, e após algumas simplificações, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 4NIA + 40NIA_g + NL^2 AA_g &= \frac{11\sqrt{3}}{48} PL^2 AA_g \\
 \therefore N &= \frac{11\sqrt{3} PL^2 AA_g}{48 \left[L^2 AA_g + 4I(A + 10A_g) \right]}
 \end{aligned}$$

Com o valor determinado para a força hiperestática e com o auxílio das relações de equilíbrio para o sistema real, podem-se calcular os esforços nos elementos da estrutura dada.

4. Análise das cavernas.

Nas estruturas de fuselagens, as cavernas constituem elementos estruturais importantes para resistir a forças transversais contidas no seu plano, tais como: forças concentradas transmitidas pelas estruturas internas de apoio para os assentos, reações provenientes dos trens de pouso e pressões internas, no caso de grandes aeronaves.

As cavernas, necessariamente não possuem forma circular, porém sempre apresentam um eixo de simetria no seu plano.

Como ao longo de todo o seu perímetro as cavernas estão continuamente ligadas aos elementos em casca que compõem o revestimento externo, as forças externas concentradas são transmitidas ao revestimento por cisalhamento, de forma análoga como ocorre nos painéis reforçados (*). De

(*) A análise de painéis reforçados é objeto de capítulo específico destas notas.

modo inverso, as cavernas recebem fluxos de cisalhamento provenientes das reações dos elementos de revestimento e que devem ser levados em conta na análise.

A Figura 12 ilustra o diagrama de corpo livre de um elemento de caverna na hipótese do mesmo estar submetido a uma força concentrada, conforme indicado.

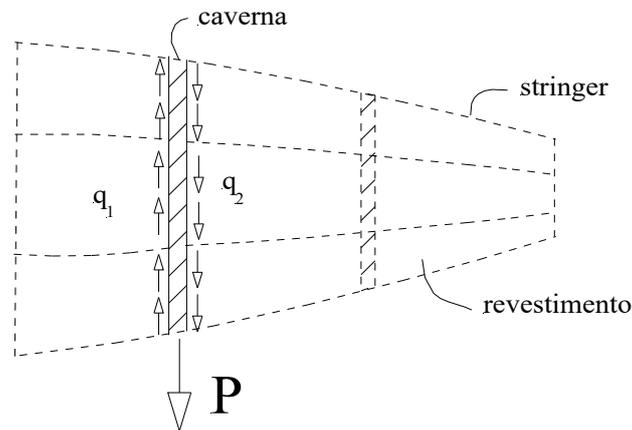


Figura 12 – Esquema de trecho de fuselagem e forças na caverna

Uma maneira razoável de simplificar a representação decorre da desconsideração das contribuições dos ‘stringers’ longitudinais, o que permite admitir uma distribuição contínua para os fluxos de cisalhamento.

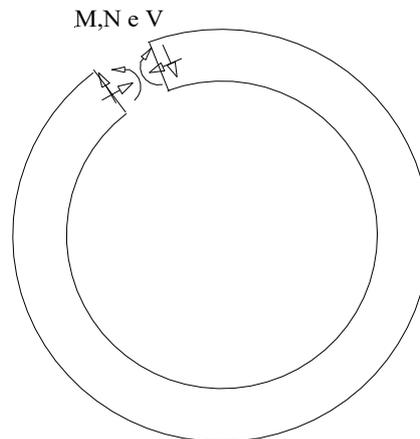


Figura 13 – Esquema dos esforços internos na caverna

Por outro lado, em termos de determinação geométrica, as cavernas são classificadas como elementos de barra geral, com eixo curvo, ou poligonal, e que se fecham sobre si mesmos. Por serem fechadas, isoladamente configuram-se como elementos internamente hiperestáticos, sendo os esforços hiperestáticos genericamente compostos por: força normal, força

cortante e momento fletor, responsáveis pela compatibilização dos deslocamentos e giro relativos entre seções arbitrárias de corte. A Figura 13 ilustra este conceito.

O primeiro exemplo a ser considerado consiste na análise de uma caverna isolada, isto é, sem levar em conta a sua interação com o revestimento. O objetivo preliminar é o de ilustrar a aplicação do P.T.V. à este caso.

Exemplo 5. Determinar a distribuição de esforços internos na caverna ilustrada na Figura 14a.

A redução da estrutura ao caso isostático pressupõe a realização de um corte em posição interna arbitrária, de modo a transformá-la numa chapa geral aberta, pois uma chapa aberta simplesmente apoiada configura uma situação isostática.

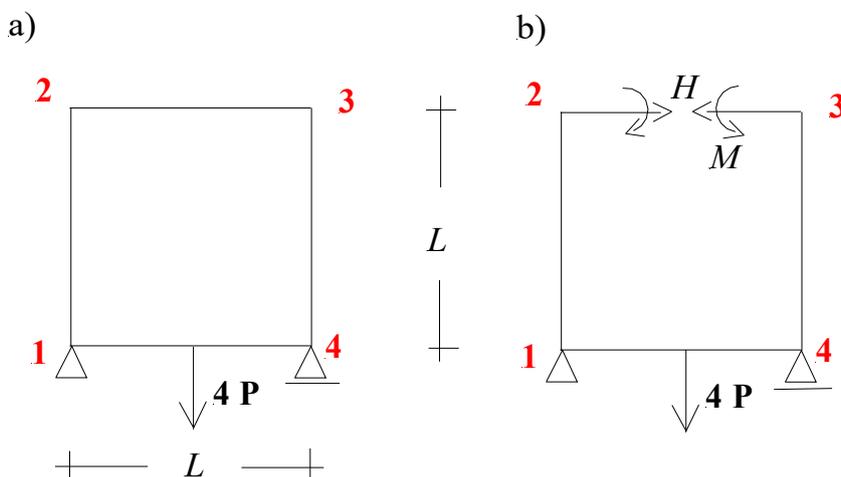


Figura 14 – Caverna quadrada

Neste caso, porque o sistema possui um eixo vertical de simetria, o corte mais conveniente resulta na seção central da parte horizontal superior da caverna, portanto, posicionada sobre aquele eixo. A conveniência desta posição deve-se ao fato que, ainda em decorrência da simetria, as seções separadas pelo corte não apresentam qualquer deslocamento vertical relativo.

Assim sendo, os hiperestáticos a serem indicados nas seções resultantes do corte são apenas dois: relativos a uma força normal (H) e a um momento fletor (M), mostrados na Figura 14b.

Como existem dois esforços hiperestáticos a determinar, duas são as condições de compatibilidade a impor, a saber: deslocamento relativo horizontal nulo e giro relativo nulo entre as seções separadas pelo corte.

Considerando-se que a deformação por flexão seja dominante no sistema, as condições de compatibilidade, expressas pelo P.T.V., resultam:

$$u_o = 2. \int_{\text{estrut}} \frac{M \bar{M}}{EI} ds = 0$$

$$\phi_o = 2. \int_{\text{estrut}} \frac{M \bar{\bar{M}}}{EI} ds = 0$$
(8 a,b)

onde s indica uma coordenada auxiliar que corre ao longo de todo o eixo da estrutura.

Evidentemente, em função da forma poligonal do eixo, as integrais podem ser calculadas somando-se as contribuições de cada trecho; nesse caso, em cada um deles uma coordenada auxiliar pode ser adotada com origem arbitrária conveniente.

A diferença entre as duas relações, 8a e 8b, está, naturalmente, no significado dos momentos \bar{M} e $\bar{\bar{M}}$: o primeiro decorrente de uma força unitária aplicada com o sentido da força normal hiperestática e o segundo decorrente de um momento unitário aplicado com o sentido do momento fletor hiperestático.

Tendo-se em vista as distribuições de momentos indicadas na Figura 15 (já levando em conta a simetria do sistema), as relações de compatibilidade fornecem:

$$u_o = \int_0^{2L} \frac{(M + Hx)x}{EI} dx + \int_0^L \frac{(M + 2HL + 2Px)2L}{EI} dx$$

$$= 4ML^2 + \frac{20}{3}HL^3 + 2PL^3 = 0$$

$$\phi_o = \int_0^L \frac{M \cdot 1}{EI} dx + \int_0^{2L} \frac{(M + Hx) \cdot 1}{EI} dx + \int_0^L \frac{(M + 2HL + 2Px) \cdot 1}{EI} dx$$

$$= 4ML + 4HL^2 + PL^2 = 0$$

A solução do sistema anterior fornece:

$$H = -\frac{3P}{8}; \quad M = \frac{PL}{8}.$$

A distribuição final de momentos na caverna está mostrada na Figura 15d.

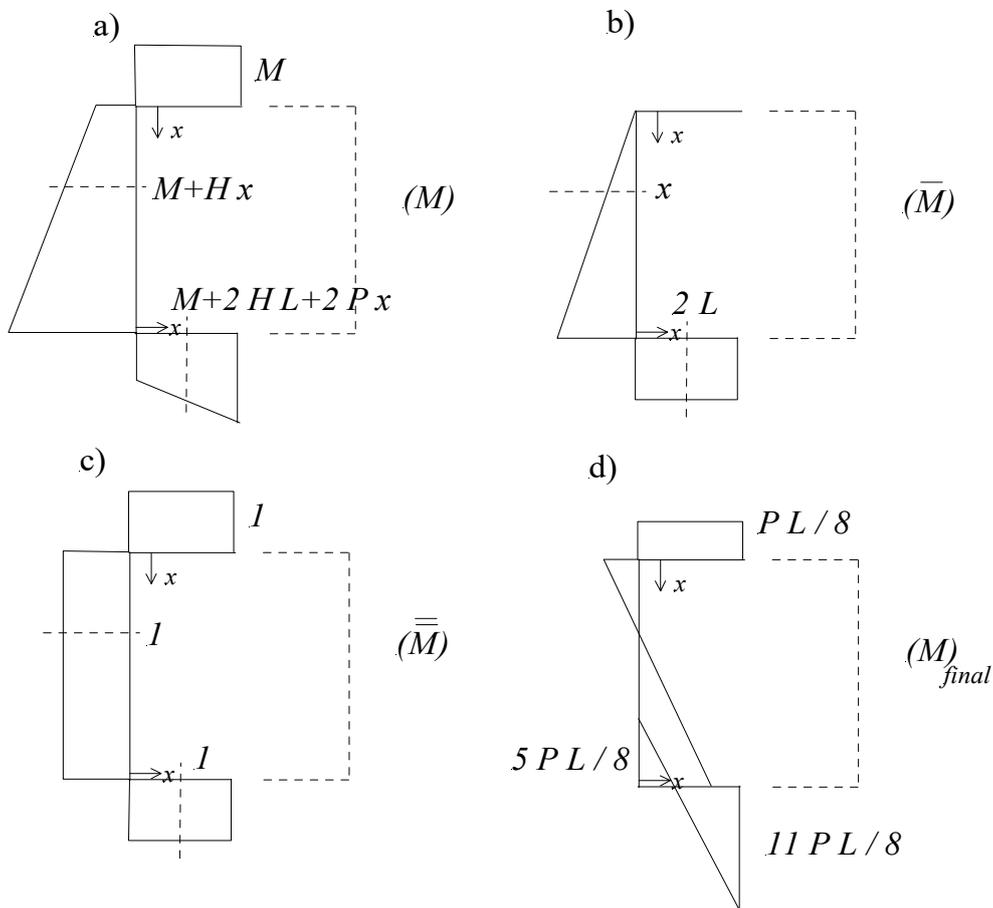


Figura 15 – Diagramas de esforços

O segundo exemplo estende a análise feita no caso anterior, levando em conta a interação da caverna com o revestimento. Novamente o objetivo é de ilustrar a aplicação do P.T.V. à esta situação.

Exemplo 6. Determinar a distribuição de esforços internos na caverna ilustrada na Figura 16a. O fluxo indicado na figura representa a reação do revestimento sobre a ação de distribuição da força concentrada aplicada realizada pela caverna aos elementos vizinhos.

A redução da estrutura a um caso isostático segue abordagem idêntica ao do exemplo anterior, repetindo-se a mesma escolha sobre a posição da seção de corte e definição dos hiperestáticos. Além disso, valem as mesmas condições de compatibilidade, naturalmente levando-se em conta o efeito do fluxo.

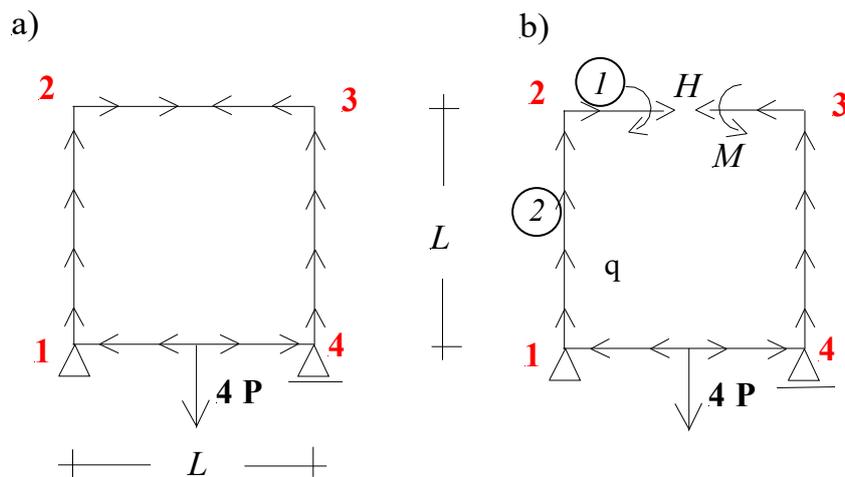


Figura 16 – Caverna quadrada com fluxo

A novidade fica por conta da determinação preliminar da intensidade do fluxo (q) em cada trecho da caverna, tendo como condição básica que seu valor resultante deva ser igual ao valor da força concentrada aplicada.

Para fins de determinação do fluxo, pode-se interpretar a caverna, na situação isostática idealizada, como uma seção aberta de parede fina, submetida a uma força cortante de valor $4P$, no seu plano. A relação para o cálculo do fluxo decorre, então, de uma análise de equilíbrio já apresentada para o caso de seções abertas e tem a forma:

$$q = \frac{4P}{I} M_s \quad (9)$$

onde M_s representa o momento estático em relação ao eixo horizontal de simetria da seção.

Nota-se que a intensidade do fluxo é variável, com diminuição de valor na medida em que se consideram pontos mais afastados do ponto de aplicação da força $4P$.

Para a aplicação da relação (9), parte-se da extremidade superior livre da seção em direção ao ponto de aplicação da força concentrada.

Os trechos 1 e 2 indicados na Figura 16 b são de particular interesse para a solução deste exemplo.

Os momentos estáticos correspondentes a esses trechos são escritos em função de uma coordenada local s definida nas extremidades de cada um deles. As relações para os mesmos são:

$$M_{s_1} = t s L; \quad M_{s_2} = t L^2 + t s \left(L - \frac{s}{2} \right).$$

Já momento de inércia da seção em relação ao eixo horizontal de simetria pode ser calculado pelas contribuições de cada trecho, porém desprezando-se parcelas que envolvem potências da espessura em relação às demais. Assim procedendo, obtém-se:

$$I = \frac{16tL^3}{3}.$$

Com as relações anteriores, os valores dos fluxos nos trechos 1 e 2 resultam:

$$q_1 = \frac{3Ps}{4L^2}; \quad q_2 = \frac{3P \left(tL^2 + tsL - \frac{ts^2}{2} \right)}{4tL^3}.$$

O fluxo de um trecho contribui para a distribuição de momentos ao longo dos trechos seguintes da caverna. Para o cálculo dessas contribuições interessam os valores das resultantes dos fluxos q_1 e q_2 . Tais resultantes valem:

$$F_1 = \int_0^L \left[\frac{3Ps}{4L^2} \right] ds = \frac{3P}{8}; \quad F_2 = \int_0^{2L} \left[\frac{3P \left(tL^2 + tsL - \frac{ts^2}{2} \right)}{4tL^3} \right] ds = \frac{P}{2}.$$

O sistema resolvente formado pelas relações de compatibilidade passa a ter as contribuições dos momentos dos fluxos. Aproveitando as relações escritas no exemplo anterior, as condições de compatibilidade ficam dadas por:

$$u_o = \int_0^{2L} \frac{\left(M + Hx + \frac{3Px}{8} \right) x}{EI} dx + \int_0^L \frac{\left(M + 2HL + 2Px + \frac{3PL}{4} + \frac{Px}{2} \right) 2L}{EI} dx$$

$$= 4ML^2 + \frac{20}{3}HL^3 + 5PL^3 = 0$$

$$\phi_o = \int_0^L \frac{M \cdot 1}{EI} dx + \int_0^{2L} \frac{\left(M + Hx + \frac{3Px}{8} \right) \cdot 1}{EI} dx + \int_0^L \frac{\left(M + 2HL + 2Px + \frac{3PL}{4} + \frac{Px}{2} \right) \cdot 1}{EI} dx$$

$$= 4ML + 4HL^2 + \frac{11PL^2}{4} = 0$$

A solução do sistema anterior fornece:

$$H = -\frac{27P}{32}; \quad M = \frac{5PL}{32}.$$

A distribuição final de momentos na caverna está mostrada na Figura 17.

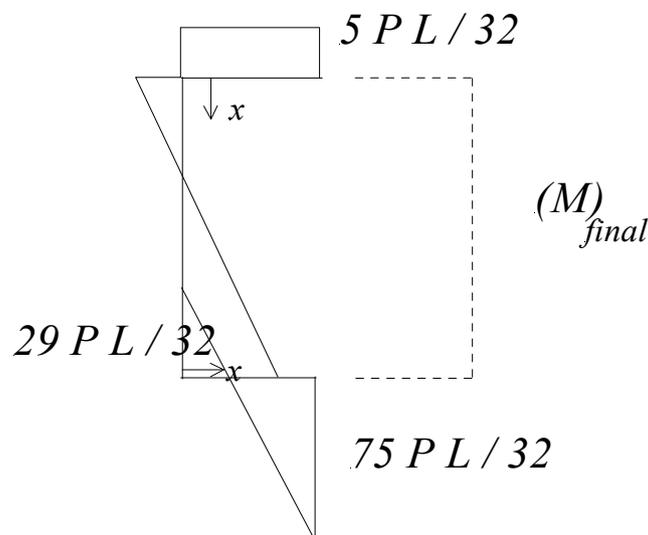


Figura 17 – Distribuição final de momentos

O exemplo seguinte consiste na determinação dos esforços internos numa caverna, provenientes de uma solicitação particular de carregamento externo.

Exemplo 7. Determinar os esforços internos na caverna indicada na Figura 18.

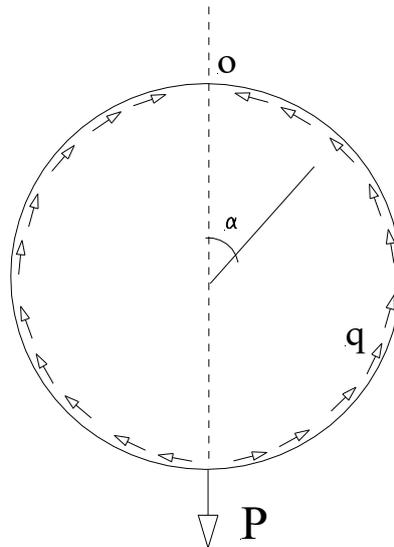


Figura 18 – Caverna circular

O fluxo de cisalhamento indicado na figura (*), decorre da reação do revestimento ao efeito de distribuição da força P ao longo da caverna e, analogamente ao exemplo anterior, sua intensidade pode ser determinada por equilíbrio mediante a seguinte relação:

$$q = \frac{P}{I} M_s \quad (10)$$

onde M_s representa o momento estático.

Novamente, justifica-se a aplicação da relação acima, típica da determinação de fluxos em seções transversais de paredes finas abertas submetidas à força cortante, pela simetria do sistema, que impõe fluxo nulo no ponto O indicado na Figura 18.

O momento estático que aparece na (10) passa a ser determinado em função da parte de seção compreendida entre o ponto O e um ponto posicionado pelo ângulo α , medido a partir do eixo vertical de simetria. Tendo por base a figura 19, e tomando-se o eixo horizontal de simetria como referência, o momento estático fica expresso por:

* Comparando-se com a Figura 12, $q = q_1 - q_2$.

$$M_s = \int_0^\alpha (t R \cos \alpha) d\alpha = R^2 t \operatorname{sen} \alpha$$

onde R é o raio médio da caverna.

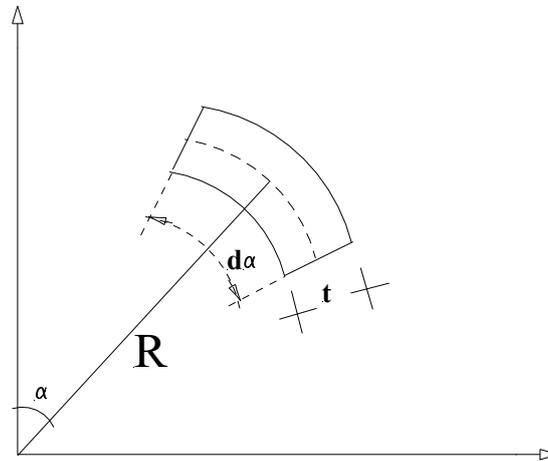


Figura 19 – Setor circular da caverna

Considerando-se a caverna como uma seção anular de espessura fina, o momento de inércia pode ser determinado de forma simplificada pela relação:

$$I = \frac{\pi D^3 t}{8}$$

Segue, finalmente, que:

$$q = \frac{P}{I} M_s = \frac{P \operatorname{sen} \alpha}{\pi R}$$

Os esforços internos ao longo da caverna podem ser determinados mais convenientemente em função dos esforços hiperestáticos atuantes na seção de simetria indicada por O . Nesta seção em particular, conforme ilustrado na figura 20, existem apenas a força normal e o momento fletor, sendo nula a força cortante justamente por conta da simetria.

O momento fletor real numa seção genérica posicionada pelo ângulo α em relação ao eixo vertical, fica então escrito em função das contribuições dos hiperestáticos escolhidos e do fluxo q :

$$M_{\alpha} = M_o + N_o R(1 - \cos \alpha) + \int_0^{\alpha} q e R d\theta$$

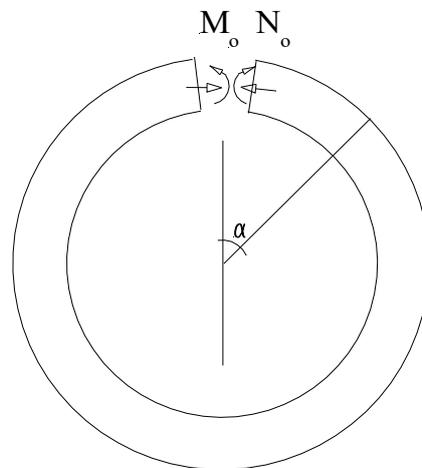


Figura 20 – Forças Hiperestáticas

Em particular a integral que aparece na relação anterior representa as contribuições das parcelas elementares de fluxo (resultantes num trecho de comprimento $R d\theta$), ao longo do arco definido pelo ângulo α , conforme ilustra a figura 21.

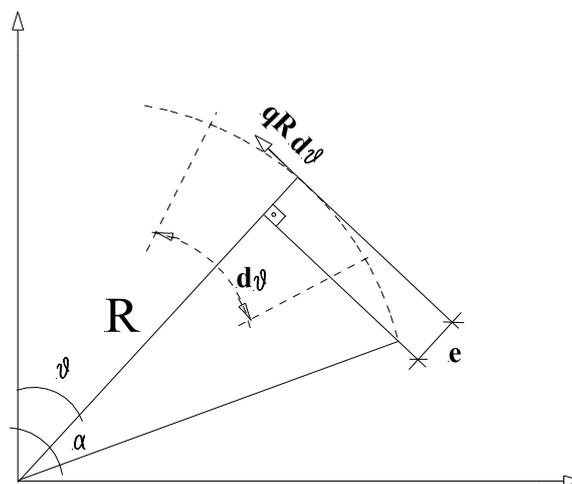


Figura 21 – Parcela elementar de fluxo resultante

Nota-se que o braço e da resultante elementar fica determinado por:

$$e = R - R \cos(\alpha - \theta)$$

Com a definição acima a integral que aparece na relação de M_{α} resulta:

$$\int_0^\alpha q e R d\theta = \int_0^\alpha \frac{P \operatorname{sen}\theta}{\pi R} R^2 [1 - \cos(\alpha - \theta)] d\theta$$

$$= \frac{P R}{\pi} \left(1 - \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \alpha \right)$$

Como se tratam de dois esforços hiperestáticos incógnitos, duas são as condições de compatibilidade a serem impostas, representativas das nulidades do deslocamento e giro relativos na seção O .

Tais condições, fazendo-se uso da simetria para fins de definição do domínio de integração, e levando-se em conta somente a deformabilidade por flexão da caverna, expressam-se como:

$$u_o = 2 \cdot \int_0^\pi \frac{M_\alpha \bar{M}_\alpha}{EI} R d\alpha = 0$$

$$\phi_o = 2 \cdot \int_0^\pi \frac{M_\alpha \bar{\bar{M}}_\alpha}{EI} R d\alpha = 0$$

Formalmente as relações apresentam-se idênticas, porém a diferença conceitual está nos significados dos momentos virtuais. Na primeira expressão o momento \bar{M} decorre de uma força unitária aplicada na seção O ; na segunda, $\bar{\bar{M}}$ decorre de um momento unitário aplicado na mesma seção.

A Figura 22 ilustra essas forças generalizadas virtuais.

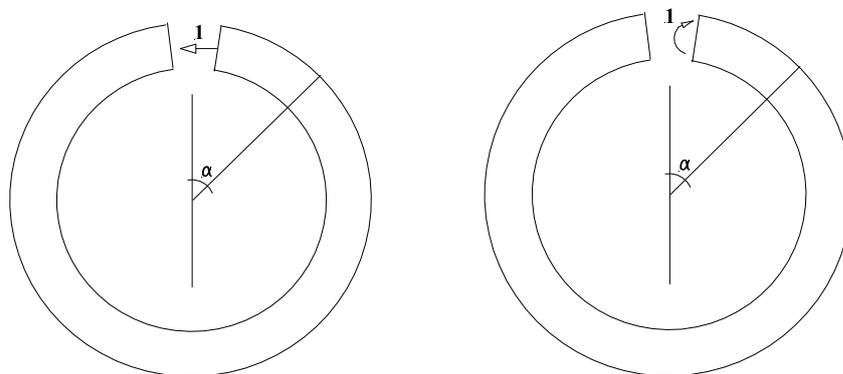


Figura 22 – Forças virtuais unitárias

As expressões para os respectivos momentos virtuais na seção α resultam:

$$\bar{M}_\alpha = 1.R(1 - \cos \alpha);$$

$$\bar{M}_\alpha = 1$$

Substituindo-se nas condições de compatibilidade as relações obtidas para os momentos, obtém-se o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas hiperestáticas:

$$M_o + N_o R = -\frac{PR}{2\pi}$$

$$M_o + \frac{3}{2}N_o R = -\frac{7PR}{8\pi}$$

Resolvendo o sistema determinam-se:

$$N_o = -\frac{3P}{4\pi}; \quad M_o = \frac{PR}{4\pi}.$$

Com estes resultados, a relação do momento fletor na seção α escreve-se:

$$M_\alpha = \frac{PR}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cos \alpha - \alpha \operatorname{sen} \alpha \right)$$

Por outro lado, a força normal na seção α provém das contribuições das componentes do hiperestático N_o e do fluxo q , conforme ilustra a figura 23.

As contribuições em questão fornecem:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= N_o \cos \alpha + \int_0^\alpha q_\theta R \cos(\alpha - \theta) d\theta \\ &= N_o \cos \alpha + \frac{P}{2\pi} \alpha \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

Com o valor do hiperestático calculado escreve-se, finalmente:

$$N_\alpha = \frac{P}{2\pi} \left(\alpha \operatorname{sen} \alpha - \frac{3}{2} \cos \alpha \right)$$

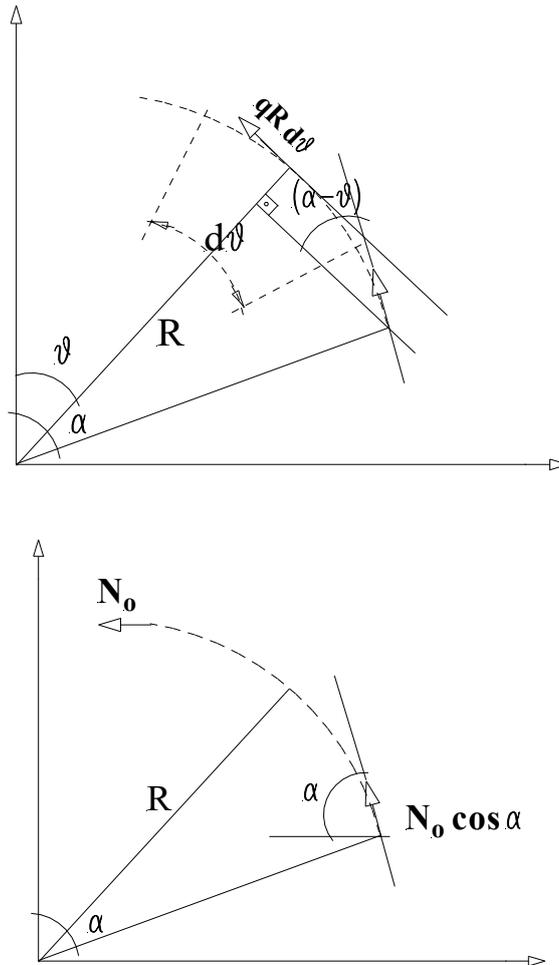


Figura 23 – Contribuições para a força normal em seção arbitrária

A dedução da expressão para a força cortante segue caminho análogo à da força normal, tomando-se, entretanto, o $\text{sen}\alpha$ no cálculo da projeção do hiperestático N_o e do fluxo q :

$$\begin{aligned} V_\alpha &= N_o \text{sen}\alpha + \int_0^\alpha q_\theta R \text{sen}(\alpha - \theta) d\theta \\ &= N_o \text{sen}\alpha + \frac{P}{2\pi} (\text{sen}\alpha - \alpha \cos\alpha) \end{aligned}$$

Substituindo-se o valor do hiperestático N_o resulta:

$$V_\alpha = -\frac{P}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \text{sen}\alpha + \alpha \cos\alpha \right)$$

É interessante completar o estudo com uma análise do equilíbrio da caverna considerando-se as relações obtidas para os esforços internos.

Neste sentido são úteis as expressões das componentes horizontal e vertical da resultante do fluxo q compreendido num setor de ângulo α . Tais expressões são dadas por:

Componente vertical:

$$\int_0^{\alpha} (q R d\alpha) \operatorname{sen} \alpha = \int_0^{\alpha} \frac{P}{\pi} \operatorname{sen}^2 \alpha d\alpha = \frac{P}{2\pi} (\alpha - \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha)$$

Componente horizontal:

$$\int_0^{\alpha} (q R d\alpha) \cos \alpha = \frac{P}{2\pi} (\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

A Figura 24 ilustra o equilíbrio de forças na vertical para um setor de caverna com $\alpha = \pi/2$.

Na figura indicam-se: a força P externa, a componente vertical da resultante do fluxo de cisalhamento no setor e as forças normais nas seções transversais.

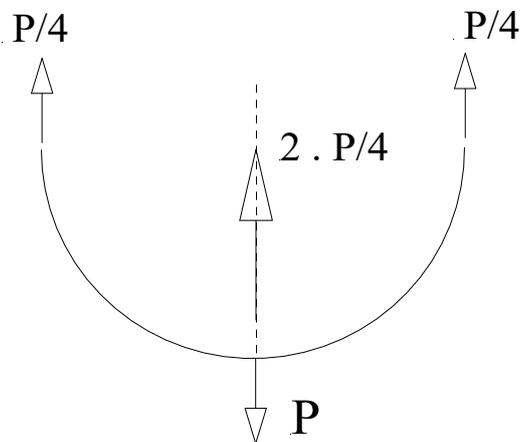


Figura 24- – Verificação do equilíbrio de forças

CAPÍTULO 2 ANÁLISE DE PAINÉIS REFORÇADOS

1. Análise simplificada de painéis reforçados

Neste capítulo, trata-se da análise simplificada de chapas reforçadas que compõem, por exemplo, as estruturas de revestimento das fuselagens ou mesmo as nervuras das asas. A análise é dita simplificada devido às hipóteses admitidas sobre o comportamento tanto da chapa quanto do reforço, quando o conjunto está submetido a forças no seu plano.

Em termos gerais, as chapas de revestimento são capazes de transmitir e resistir eficientemente a esforços de tração e de cisalhamento contidos no seu plano, porém possuem eficiência limitada quando se tratam de esforços de compressão, podendo perder estabilidade em razão de sua esbelteza elevada. As barras de reforço são também elementos esbeltos, que promovem o enrijecimento das chapas e permitem a transmissão mais eficiente de eventuais forças concentradas aplicadas no plano das chapas. Da mesma forma como os reforços melhoram a estabilidade das chapas, estas servem de elemento estabilizador para os reforços. Ambos os elementos estruturais, e mesmo os painéis reforçados resultantes de sua combinação, possuem baixa rigidez à flexão. Assim, a resistência às forças a serem aplicadas transversalmente ao seu plano exige a composição com um segundo painel disposto em plano distinto, ou sua combinação com outra estrutura de reforço, como as cavernas.

Numa abordagem simplificada, considera-se que os reforços trabalham como barras simples, isto é, transmitindo forças axiais de tração ou compressão; já as chapas trabalham essencialmente num regime de cisalhamento puro. A composição desses dois tipos de comportamento confere ao conjunto boa eficiência estrutural. A Figura 1 ilustra o diagrama de corpo livre de um reforço imerso numa chapa e alinhado com uma força concentrada.

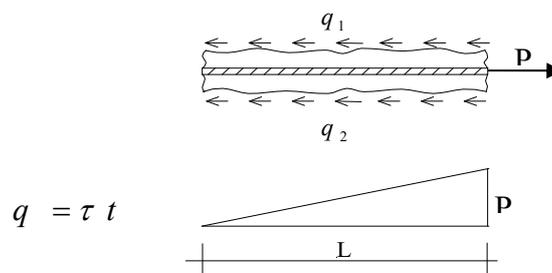


Figura 1 – Conjunto chapa-reforço sob força concentrada

As forças distribuídas q , ou fluxos, indicadas naquela figura, são resultantes das tensões de cisalhamento ao longo da espessura (t) da chapa.

O equilíbrio de forças na barra se exprime pela relação: $q_1 + q_2 = \frac{P}{L}$. Nesta relação fica evidente a dependência entre as intensidades dos esforços de cisalhamento transmitidos à chapa e o comprimento da barra de reforço; quanto maior o comprimento, menor a intensidade dos esforços sobre a chapa. Nota-se, ainda, uma simplificação adicional: *os fluxos de cisalhamento possuem intensidades constantes ao longo do comprimento da barra*.

Os exemplos seguintes procuram ilustrar a análise simplificada dos painéis reforçados.

Exemplo 1. A Figura 2 mostra um arranjo estrutural no qual uma força concentrada encontra-se aplicada no plano da estrutura.

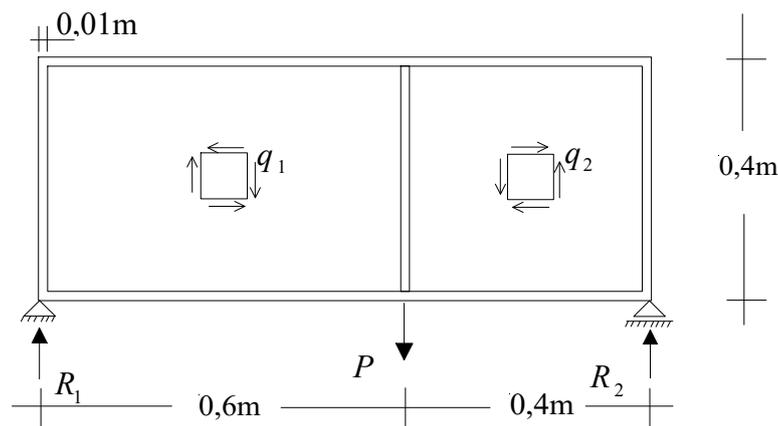


Figura 2 – Painel reforçado bi-apoiado

Claramente o sistema apresentado pode ser associado com uma viga simplesmente apoiada e, nesse caso, intuitivamente a idéia de flexão prevalece. Por exemplo, imagina-se que ao longo da altura de certa seção transversal haja uma distribuição linear de tensões normais, de modo a promover compressão na região superior da chapa e tração na inferior. Além disso, também ao longo da altura pode-se idealizar uma distribuição variável de tensões de cisalhamento, cuja resultante iguala a força cortante atuante.

Entretanto, o modelo adotado para o comportamento dos elementos que compõem o conjunto, ao idealizar que a resistência ao cisalhamento cabe

exclusivamente às chapas e a resistência às tensões normais longitudinais exclusivamente às barras de reforço, simplifica substancialmente o comportamento imaginado à partida como de viga.

Na Figura 2 indicam-se os fluxos de cisalhamento, constantes, que cabem a cada uma das partes da chapa. Por outro lado, nota-se a presença de um reforço vertical alinhado com a força concentrada. Isto está de acordo com uma regra geral de concepção desses painéis: *sempre que houver uma força concentrada deve existir um reforço com ela alinhado*. Em particular, se a força aplicada for inclinada em relação às direções preferenciais do painel, dois reforços alinhados com aquelas direções devem ser providos, sendo cada um deles responsável pela transmissão de uma componente da força. Outra regra de concepção geral é a seguinte: *uma barra de reforço deve sempre ter suas extremidades ligadas à outra barra de reforço*. Segue que o painel indicado na figura apresenta uma concepção mínima de reforços para transmitir a força concentrada aplicada.

Neste problema as reações de apoio, indicadas na Figura 2, podem ser determinadas por condição global de equilíbrio: nulidade da resultante das forças verticais e do momento das forças, por exemplo, em relação ao ponto de aplicação do apoio móvel. Segue que as reações valem:

$$R_1 = \frac{2P}{5}; \quad R_2 = \frac{3P}{5}.$$

A Figura 3 mostra os diagramas de corpo livre de duas das barras de reforço e as correspondentes relações de equilíbrio.

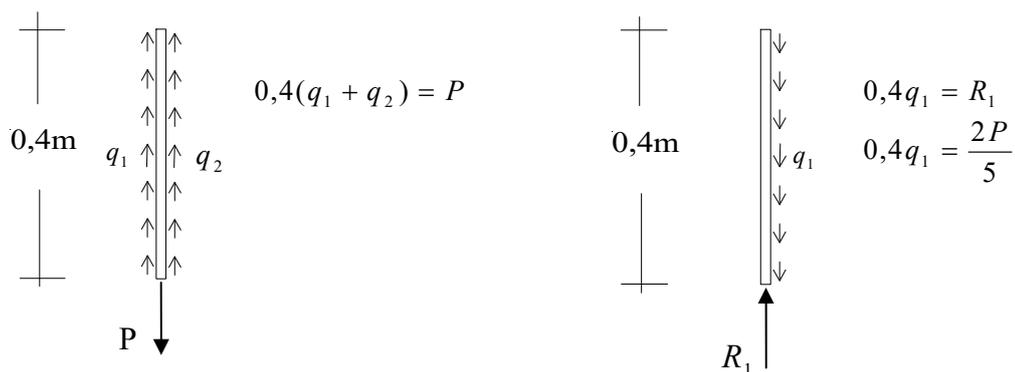


Figura 3 – Diagramas de corpo livre

A partir das condições de equilíbrio, determinam-se:

$$q_1 = P; \quad q_2 = \frac{3P}{2}.$$

Os mesmos resultados poderiam ser confirmados por análise de equilíbrio tomando-se oportunas seções transversais arbitrariamente posicionadas em cada parte do painel. Por exemplo, imaginando-se uma seção transversal arbitrária entre a posição de aplicação da força concentrada e o apoio móvel, dividindo o painel em duas partes, à esquerda e à direita da seção, a resultante do fluxo de cisalhamento q_2 sobre a parte da esquerda deve igualar o valor da reação de apoio R_2 :

$$q_2 \cdot 0,4 = \frac{3P}{5} \rightarrow q_2 = \frac{3P}{2}$$

Procedimento análogo pode ser feito para confirmar o valor do fluxo q_1 .

Por outro lado, os reforços horizontais recebem, por reação, os fluxos determinados, ficando submetidos ao longo do seu comprimento a uma distribuição variável de força normal. Figura 4 ilustra os esforços sobre esses reforços e os valores máximos de força normal à que estão submetidos.

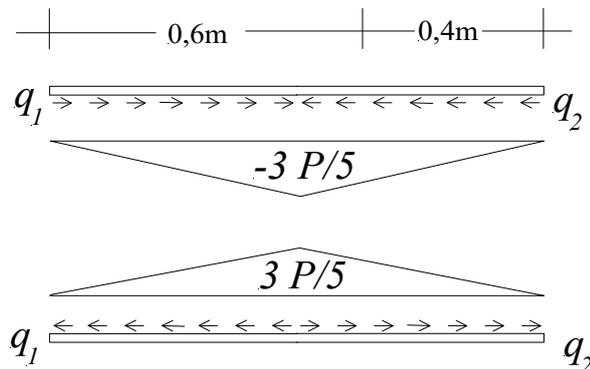


Figura 4 – Diagramas de esforços axiais nas barras de reforço

Exemplo 2. Determinar as distribuições de esforços nos elementos da estrutura indicada na Figura 5.

Notam-se três forças concentradas, sendo que alinhadas com elas aparecem barras de reforço responsáveis pela sua transmissão ao restante da estrutura. Nota-se, também, que a concepção de reforços indicada atende às regras gerais mencionadas anteriormente.

Neste caso, não é necessário determinar à partida as reações de apoio, mesmo porque elas se caracterizam por forças concentradas, no ponto de

vinculação das barras horizontais, e por um fluxo vertical de cisalhamento em correspondência ao reforço disposto nesta direção.

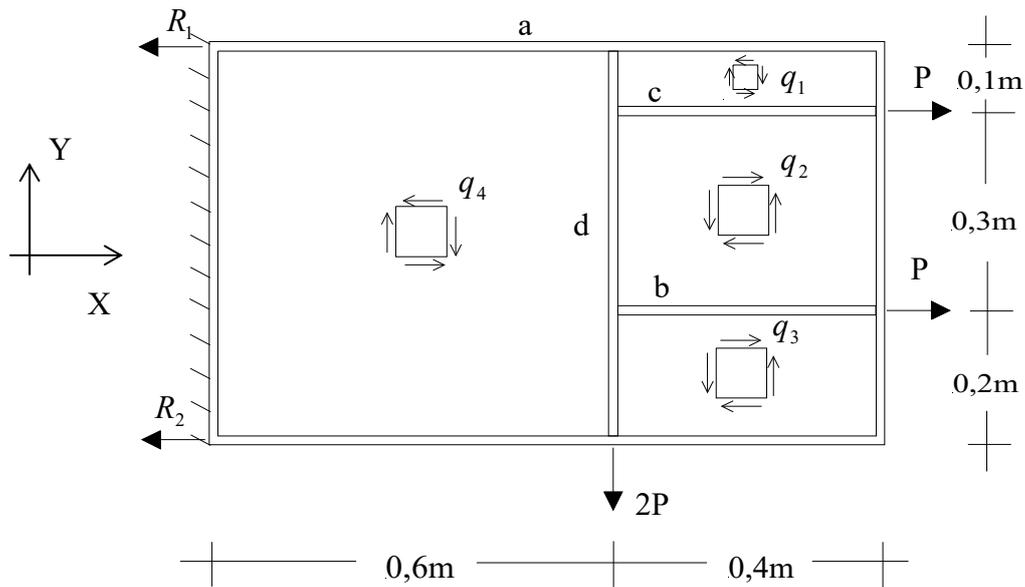


Figura 4 – Fluxos externos na nervura

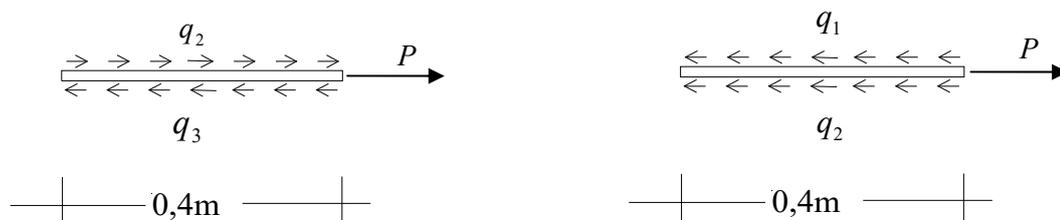
Analogamente ao exemplo anterior, pode-se proceder à construção dos diagramas de corpo livre das barras de reforço, conforme mostra a Figura 5.

O equilíbrio do reforço C fornece:

$$(q_1 + q_2) \cdot 0,4 = P \quad \therefore \quad (q_1 + q_2) = 2,5P$$

Para o reforço B vale a relação:

$$(q_3 - q_2) \cdot 0,4 = P \quad \therefore \quad (q_3 - q_2) = 2,5P$$



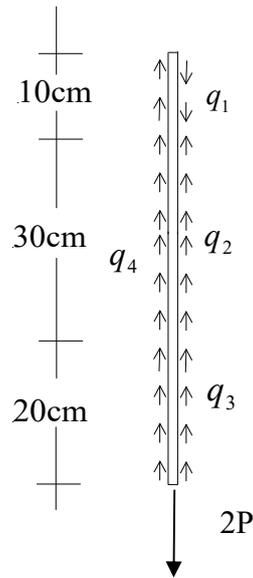


Figura 5 – Diagramas de corpo livre

O equilíbrio da barra D fornece:

$$0,6q_4 - 0,1q_1 + 0,3q_2 + 0,2q_3 = 2P$$

O equilíbrio da barra de reforço vertical na extremidade direita do painel fica dado por:

$$-0,1q_1 + 0,3q_2 + 0,2q_3 = 0$$

A combinação das duas últimas relações leva à condição:

$$0,6q_4 = 2P \quad \rightarrow \quad q_4 = \frac{10P}{3}.$$

Observa-se que esta relação poderia ser obtida diretamente a partir de uma seção transversal arbitrária à esquerda da barra de reforço d , pois exprime que a resultante vertical do fluxo q_4 deve ser igual à força cortante $2P$.

Das outras condições anteriores resultam:

$$q_1 = \frac{70P}{24}; \quad q_2 = -\frac{10P}{24}; \quad q_3 = \frac{50P}{24}.$$

As distribuições de forças normais nos reforços horizontais, superior e inferior, podem então ser determinadas, e estão mostradas na Figura 6.

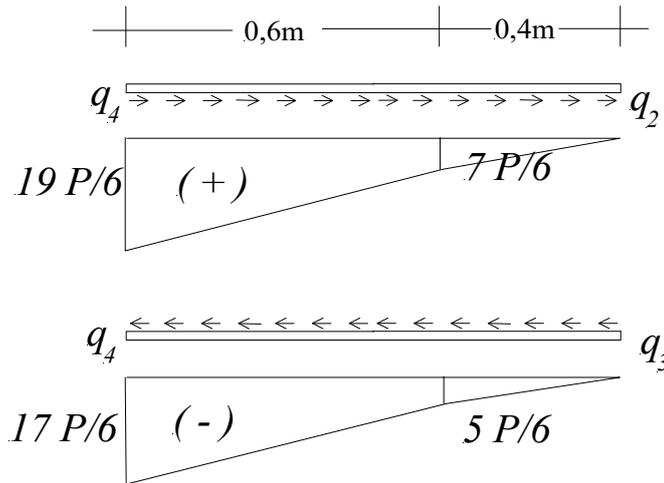


Figura 6 – Diagramas de forças normais nas barras de reforço

Uma conclusão que decorre da análise daqueles diagramas é que as reações vinculares devem coincidir com as forças normais máximas, isto é:

$$R_1 = \frac{19P}{6}; \quad R_2 = -\frac{17P}{6}.$$

Tais valores podem ser facilmente confirmados por análise do equilíbrio global das forças externas.

2. Análise simplificada em painéis reforçados com aberturas

Em muitas situações os painéis apresentam aberturas e seu efeito também pode ser avaliado por meio de uma abordagem simplificada.

Para um entendimento mais imediato da abordagem, considere-se novamente o painel da figura 4 e admita-se que em sua célula maior, a que apresenta fluxo de cisalhamento q_4 , seja introduzido um furo centralizado de dimensões (0,3m x 0,3m). Claramente, a parcela de fluxo correspondente à região da abertura deve ser transferida para o restante do painel e as hipóteses que governam esta distribuição dão origem à abordagem simplificada.

As hipóteses a serem admitidas são as seguintes:

- A redistribuição de fluxos se limita à região da célula na qual foi introduzida a abertura, verificando a condição de estado auto-equilibrado;

- Nesse sentido, a parcela de fluxo correspondente à abertura se distribui igualmente acima e abaixo dela e com outro valor, porém também igualmente, à esquerda e à direita; as partes correspondentes aos cantos da célula recebem parcelas iguais entre si.

A distribuição final de fluxos é obtida por sobreposição de casos. A Figura 7 ilustra as hipóteses anteriores e os comentários que seguem.

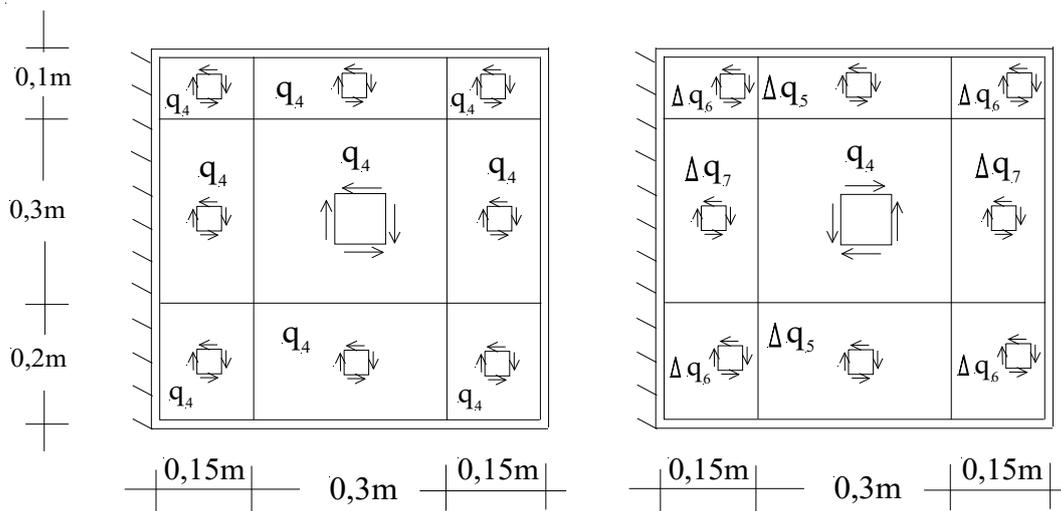


Figura 7 – Redistribuição de fluxos na abertura

A representação à esquerda da figura é a da célula maior dividida em novas sub-células, definidas a partir dos prolongamentos das linhas que definem os lados da abertura a ser introduzida; os fluxos indicados em cada sub-célula são iguais e de valor determinado na resolução do exemplo 2:

$$q_4 = \frac{10P}{3}.$$

A representação à direita da figura 7 contém na sub-célula correspondente à abertura um fluxo igual e de sentido contrário à q_4 . Nas células vizinhas são indicadas variações de fluxos segundo as hipóteses descritas. A idéia é que a sobreposição das duas representações forneça a distribuição final de fluxos compatíveis com a existência da abertura.

Uma condição que deve ser obedecida é que as intensidades dos fluxos indicados na representação à direita da figura 7 devem verificar a condição de estado auto-equilibrado, isto é: as resultantes de forças em qualquer direção de referência devem ser nulas.

Assim sendo, tomando-se uma seção horizontal passando pela parte central da abertura, e cortando toda a célula, os fluxos Δq_7 devem ser tais que:

$$\Delta q_7 \cdot 0,15 + \Delta q_7 \cdot 0,15 - q_4 \cdot 0,3 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta q_7 = q_4$$

Em outro sentido, tomando-se uma seção vertical passando pela parte central da abertura, e cortando toda a célula, os fluxos Δq_5 devem ser tais que:

$$\Delta q_5 \cdot 0,2 + \Delta q_5 \cdot 0,1 - q_4 \cdot 0,3 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta q_5 = q_4$$

As variações de fluxo Δq_6 podem ser obtidas alternativamente pelas seguintes condições obtidas por cortes horizontais ou verticais passando pelas sub-células que as contém:

$$\Delta q_6 \cdot 0,15 + \Delta q_6 \cdot 0,15 + \Delta q_5 \cdot 0,3 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta q_6 = -\Delta q_5 = -q_4$$

$$\Delta q_6 \cdot 0,2 + \Delta q_6 \cdot 0,1 + \Delta q_7 \cdot 0,3 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta q_6 = -\Delta q_7 = -q_4$$

Segue, portanto, que:

$$\Delta q_5 = \Delta q_7 = \frac{10P}{3};$$

$$\Delta q_6 = -\frac{10P}{3}.$$

O resultado final após a sobreposição dos fluxos está mostrado na Figura 8.

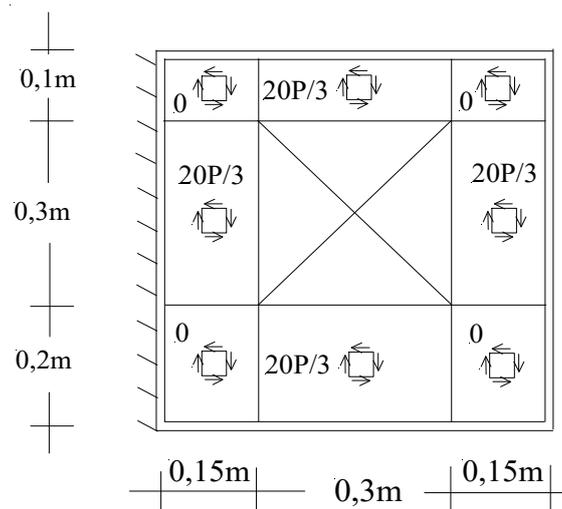


Figura 8 – Distribuição de fluxos em célula com abertura

Na Figura 9, sempre com referência ao exemplo2, indica-se uma outra posição desejável para uma abertura (0,2m x 0,2m), agora abrangendo duas células com fluxos diferentes.

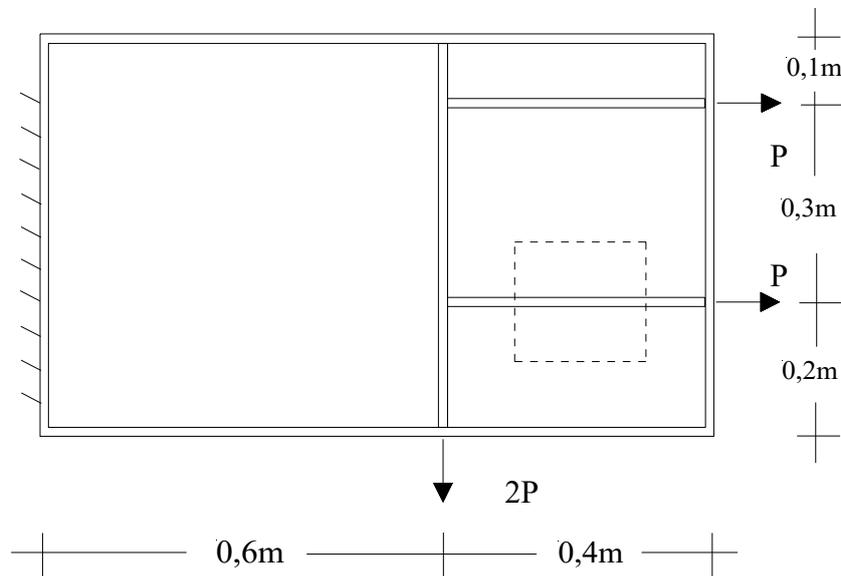


Figura 9 – Abertura cortando duas células

Os fluxos contidos pela abertura devem ser redistribuídos dentro dos limites das células que contém a abertura.

A Figura 10 mostra a divisão em sub-células das células envolvidas e os casos que compõem a sobreposição para a determinação dos fluxos finais.

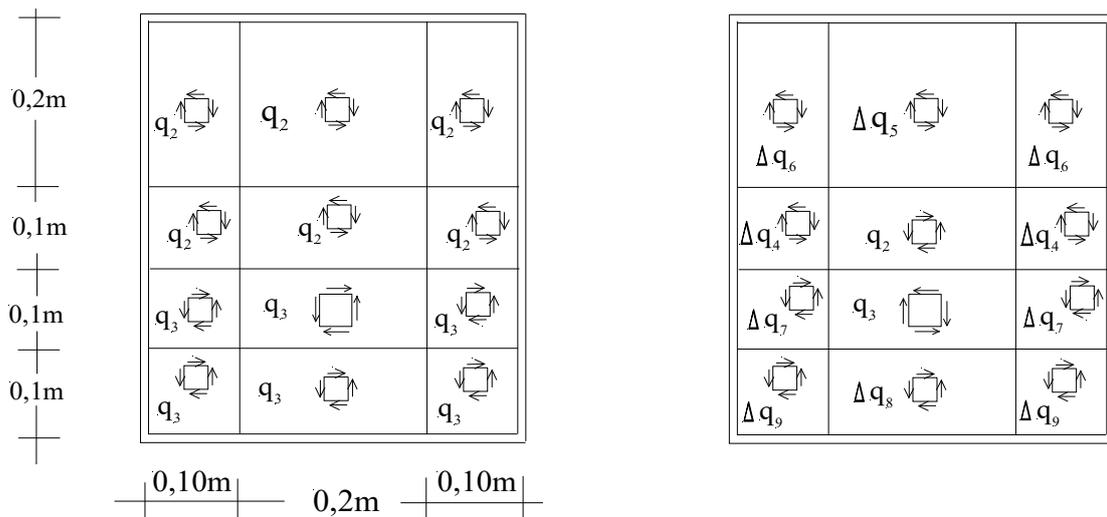


Figura 10 – Casos para a sobreposição final

Nota-se que os lados da abertura e a divisão entre as células atingidas por ela servem de guia para a composição de sub-células mostrada. As hipóteses de distribuição dos fluxos q_2 e q_3 aplicam-se independentemente às células nas quais eles se apresentavam inicialmente.

Novamente a condição de distribuição auto-equilibrada deve ser verificada em cada célula, resultando nas seguintes condições de equilíbrio:

$$\Delta q_4 \cdot 0,10 + \Delta q_4 \cdot 0,10 - q_2 \cdot 0,2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta q_4 = q_2$$

$$\Delta q_5 \cdot 0,20 - q_2 \cdot 0,10 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta q_5 = q_2 / 2$$

$$\Delta q_7 \cdot 0,10 + \Delta q_7 \cdot 0,10 - q_3 \cdot 0,2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta q_7 = q_3$$

$$\Delta q_8 \cdot 0,10 - q_3 \cdot 0,10 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta q_8 = q_3$$

$$\Delta q_6 \cdot 0,10 + \Delta q_6 \cdot 0,10 + \Delta q_5 \cdot 0,2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta q_6 = -\Delta q_5 = -q_2 / 2$$

$$\Delta q_9 \cdot 0,10 + \Delta q_9 \cdot 0,10 + \Delta q_8 \cdot 0,2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta q_9 = -\Delta q_8 = -q_3$$

Segue, portanto, que:

$$\Delta q_4 = \frac{5P}{12}; \quad \Delta q_5 = \frac{5P}{24}; \quad \Delta q_6 = -\frac{5P}{24};$$

$$\Delta q_7 = \frac{25P}{12}; \quad \Delta q_8 = \frac{25P}{12}; \quad \Delta q_9 = -\frac{25P}{12}.$$

 $5P/24$	 $5P/8$	 $5P/24$	
 $5P/6$			 $5P/6$
 $25P/6$			 $25P/6$
0	$25P/6$ 	0	

Figura 11 – Distribuição final de fluxos

O resultado final após a sobreposição dos fluxos está mostrado na Figura 11. Naturalmente as fronteiras entre as novas sub-células devem ser ocupadas por novo conjunto de reforços.

Observa-se, finalmente, que as outras células do painel reforçado, não-afetadas pela abertura, mantêm os mesmos fluxos inicialmente calculados para a situação sem abertura. Obviamente a redistribuição de esforços pode também alterar as distribuições de forças normais inicialmente determinadas nas barras de reforço.

CAPÍTULO 3 ESTABILIDADE DE PAINÉIS REFORÇADOS

1. Introdução.

Em Mecânica dos Sólidos o tema da estabilidade elástica de barras comprimidas é abordado pela teoria de Euler. Segundo esta teoria, tensões críticas de flambagem podem ser determinadas em função das propriedades do material e do coeficiente, ou índice, de esbeltez da barra; este índice (adimensional) leva em conta as propriedades geométricas e a vinculação imposta à barra.

A teoria da estabilidade elástica de Euler é representativa do comportamento das barras esbeltas, onde o fenômeno da flambagem é dominante. Em barras pouco esbeltas, fenômenos associados a processos físicos de plastificação ou de esmagamento do material acabam prevalecendo, precedendo ou se combinando com a flambagem; a chamada flambagem plástica somente pode ser levada em conta mediante formulação mais complexa, obviamente não apresentada neste texto.

Na indústria aeronáutica o termo “buckling” faz referência ao fenômeno de perda de estabilidade de um elemento estrutural por flambagem. Em se tratando de chapas e cascas, a flambagem se caracteriza pela ondulação ou ‘enrugamento’ das superfícies daqueles elementos.

A ocorrência da perda de estabilidade pode comprometer seriamente a eficiência estrutural, e deve ser prevista.

Neste texto uma abordagem simplificada para a análise da perda de estabilidade elástica de chapas reforçadas é apresentada. Por um lado, coloca-se em destaque a determinação das tensões críticas considerando-se diferentes vinculações das bordas das chapas; por outro lado, aborda-se a questão da redistribuição de tensão, decorrente da flambagem, em painéis reforçados.

2. Abordagem simplificada da perda de estabilidade em chapas comprimidas

A relação que define, segundo a teoria de Euler, a tensão crítica de flambagem para barras esbeltas comprimidas, pode ser representada pela seguinte forma:

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{fl}^2} \quad \text{com} \quad \lambda_{fl}^2 = \left(\frac{L_{fl}}{i} \right)^2 \quad (1)$$

Na relação anterior, λ_{fl} representa o chamado índice de esbeltez da barra e i é o raio de giração, definido pela raiz quadrada da razão entre o momento de inércia, relacionado ao plano de flexão da barra, e a área da sua seção transversal.

No caso particular de barra bi-articulada, de comprimento a , com seção transversal retangular de dimensões b e t , sendo $t < b$, e na condição de flambagem ocorrendo segundo o plano de menor inércia, a tensão crítica resulta:

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{12} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \quad (2)$$

Considerando-se a chapa ilustrada na Figura 1, com vinculação e regime de solicitação similar ao da barra bi-articulada, é possível estender a aplicação da relação de Euler, desde que se introduza uma pequena correção para se levar em conta o efeito de Poisson sobre a deformação da seção transversal.

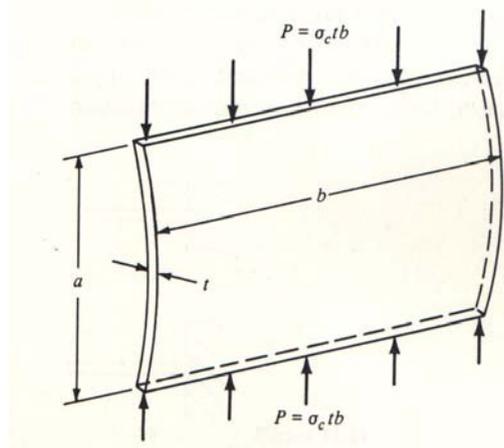


Figura 1 – Flambagem de chapa comprimida com bordas laterais livres [*]

De modo mais específico, a teoria de Euler para barras faz uso da hipótese cinemática clássica relativa à deformação por flexão, considerando que as seções sejam indeformáveis no seu plano; e isto equivale a desconsiderar o efeito de Poisson. A idealização da chapa pela composição de faixas

[*] Azar, J.J., Peery, D.J. *Aircraft Structures*, 2nd.ed., McGraw-Hill, Inc., 1982.

justapostas permite entender melhor a restrição imposta por esse efeito sobre o cálculo da tensão de flambagem para ela.

Por um lado, supondo que a deformação por flexão de cada faixa não sofra qualquer restrição por parte das faixas vizinhas, e que não se aplique a hipótese de indeformabilidade da seção no seu plano, esta apresentará distorção de forma em virtude do efeito de Poisson, conforme ilustra a Figura 2b. Assim, como indicado, a linha de borda superior, situada na região comprimida da seção, tenderá a aumentar o seu comprimento inicial, enquanto que a linha de borda inferior deverá diminuir sua dimensão; a seção deformada, portanto, tende a assumir uma forma trapezoidal, por assim dizer.

Por outro lado, quando se considera o conjunto de faixas compondo a chapa, cada uma delas impõe restrição à tendência de distorção de forma das seções das faixas vizinhas, bem como recebe delas restrição à tendência de distorção de suas seções. Conseqüentemente surgem tensões normais na direção transversal àquela da flexão, que em parte inibem as distorções; este efeito, somado ao fato que as chapas possuem espessuras finas, leva à validação da hipótese de indeformabilidade de toda a seção da chapa, conforme mostra a Figura 2a.

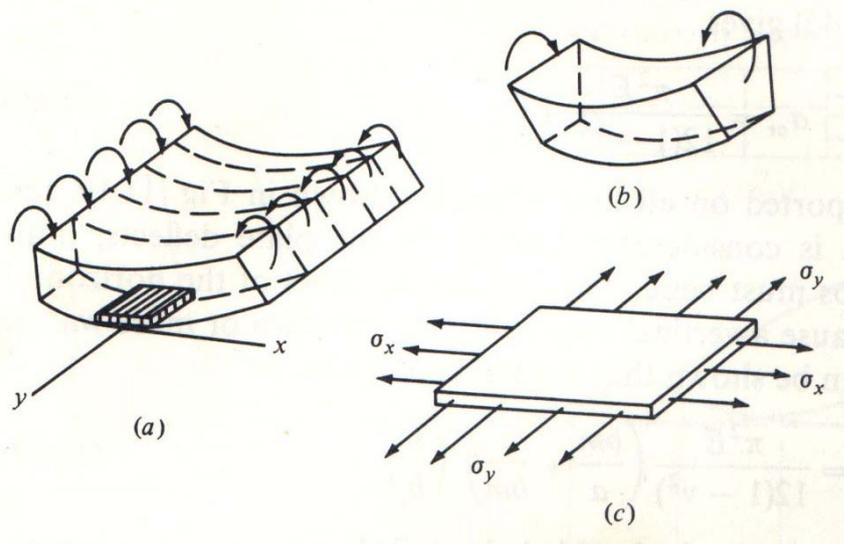


Figura 2 – a) Idealização da flexão da chapa sem distorção; b) Deformação por flexão da viga com distorção da seção; c) Estado de tensão de um elemento arbitrário da chapa fletida, (fonte: [*]).

Assim sendo, o diagrama de corpo livre de um elemento arbitrário isolado do interior da chapa fica representado conforme ilustrado na Figura 2c.

[*] Azar, J.J., Peery, D.J. *Aircraft Structures*, 2nd.ed., McGraw-Hill, Inc., 1982.

Trata-se, portanto, de um estado plano de tensão, para o qual a lei de Hooke generalizada fica expressa pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x)\end{aligned}\tag{3 a,b}$$

Em particular, a ausência de distorção da seção implica em: $\varepsilon_y = 0$, ou: $\sigma_y = \nu \sigma_x$. Segue, da relação (3a) que:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(1 - \nu^2)\sigma_x \quad \rightarrow \quad \sigma_x = \frac{E \varepsilon_x}{(1 - \nu^2)}.\tag{4}$$

Claramente, o fator $(1 - \nu^2)$ estabelece a diferença entre a tensão normal calculada para a viga de Euler, onde o efeito de Poisson é desprezado, e a tensão normal σ_x calculada num ponto da chapa, nas mesmas condições de vinculação da viga. Assim sendo, aquele fator deve aparecer na expressão da tensão de flambagem de Euler estendida para as chapas.

Segue que a tensão crítica de flambagem para chapas finas simplesmente apoiadas, com bordas não-carregadas livres, resulta, por extensão da (2), na forma:

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 = K E \left(\frac{t}{a}\right)^2 \quad \rightarrow \quad K = \frac{\pi^2}{12(1 - \nu^2)}\tag{5}$$

O fator K foi introduzido propositadamente, e se define pela relação indicada somente para o caso de vinculação considerado.

Na verdade, o tipo de vinculação adotado, particularmente quando de sua aplicação em todas as bordas da chapa, implica em acréscimo de resistência à flambagem da chapa em relação ao caso descrito pela relação (5). Uma nova idealização da chapa, agora pela composição de faixas verticais e horizontais, permite um melhor entendimento sobre esse acréscimo de resistência. Por exemplo, a Figura 3 ilustra uma configuração de flambagem das faixas verticais, com duas ou mais ondulações, decorrente de vínculos que impedem o deslocamento transversal ao longo de todas as bordas laterais.

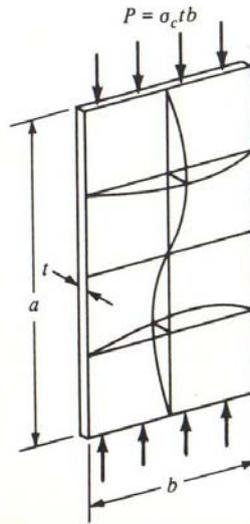


Figura 3 – Flambagem resultante de maior vinculação nas bordas [*]

Em função da vinculação lateral, para que a flambagem ocorra nas faixas verticais é preciso que as faixas horizontais sofram flexão; porque tal flexão inexistente no caso de bordas laterais livres, comparativamente aquele caso possui menor resistência à flambagem do que este.

Entendendo-se que o aspecto formal da relação (5) se mantenha para qualquer caso de vinculação nas bordas, para prever as tensões críticas em chapas é necessário identificar o parâmetro K a partir da resolução do ‘Problema de Valor de Contorno’ representativo de cada caso em questão; entretanto este cálculo não será aqui detalhado.

De uma dessas resoluções, conclui-se, por exemplo, que valores para a tensão crítica de flambagem de uma chapa sob compressão e simplesmente apoiada em todas as bordas podem ser determinados mediante a seguinte relação:

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{bm}{a} + \frac{a}{bm} \right)^2 \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (6)$$

onde m representa o número de ondas na direção de compressão da chapa flambada. Por comparação com a (5) tem-se: $K = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{bm}{a} + \frac{a}{bm} \right)^2$.

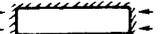
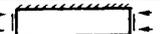
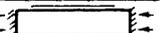
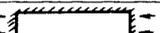
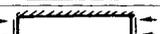
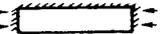
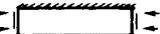
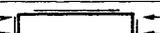
Nota-se, ainda, que b representa a menor dimensão entre bordas e a representa a maior dimensão.

[*]Azar, J.J., Peery, D.J. *Aircraft Structures*, 2nd.ed., McGraw-Hill, Inc., 1982.

No caso particular de uma chapa quadrada, e com $m=1$, conclui-se, comparando-se os resultados obtidos com o uso das relações (5) e (6), que a carga crítica de flambagem para a chapa com quatro extremidades simplesmente apoiadas é quatro vezes superior ao da chapa com extremidades não-carregadas livres. Em geral, o parâmetro K depende das dimensões externas, (a/b) , e também das condições de contorno através do parâmetro m .

A partir desse tipo de abordagem, com as contribuições de diversos autores, construíram-se tabelas fornecendo valores do parâmetro K , em função de diferentes tipos de carregamento e condições de contorno. A Tabela 1 exemplifica os valores para chapas longas, empregados por algumas empresas, sendo que a diferença para as mesmas condições de vinculação certamente decorre do grau de simplificação adotado, por um ou outro autor, na modelagem realizada de cada caso.

Tabela 1 - Coeficientes K para chapas finas em compressão (fonte [*])

	Support conditions at edges	Sources							
		McDonnell-Douglas	Lockheed	NASA	Convair	Rockwell Int'l	Northrop	Republic	Boeing
Plate panel all edges supported	① 	3.62	3.62	4.0	4.0	3.62	3.62	3.62	3.62
	② 	6.3	6.3	6.98	6.98	6.98	6.28	6.45	6.3
	③ 	6.25	6.3	—	6.98	6.98	6.28	6.3	6.3
	④ 	3.7	6.32	—	4.0	4.0	3.62	3.7	6.32
	⑤ 	5.1	5.02	—	5.4	—	4.9	5.0	5.0
	⑥ 	5.0	5.02	—	5.4	5.41	4.9	4.9	5.0
Plate panel one edge free	⑦ 	1.2	1.16	1.28	1.28	—	1.2	1.05	1.12
	⑧ 	1.17	1.16	—	1.28	1.28	1.2	1.14	1.12
	⑨ 	0.45	0.378	—	0.429	—	0.367	0.4	0.4
	⑩ 	0.429	0.378	0.43	0.429	0.429	0.367	0.388	0.4

 Simply supported edge
  Fixed edge

Por outro lado, quando as chapas estão submetidas diretamente ao cisalhamento simples, como nos painéis reforçados analisados no capítulo 2, a questão da flambagem pode ser abordada de modo análogo ao dos painéis comprimidos. Naturalmente, o detalhamento do tratamento teórico dessa situação será omitido nestas notas.

[*] Niu, Michael C.Y. *Airframe Structural Design*, Hong Kong Conmilit Press Ltd., 1988.

Entretanto, para entender a similaridade entre este caso e o anterior, é importante lembrar que o estado de cisalhamento puro, hipoteticamente assumido para as chapas, tem por correspondência, à 45°, um estado principal de tensões normais (v.Fig.4). O estado principal é caracterizado por componentes de tração e de compressão, cujo valor em módulo é igual ao da tensão de cisalhamento; naturalmente, as componentes de compressão são responsáveis pela flambagem.

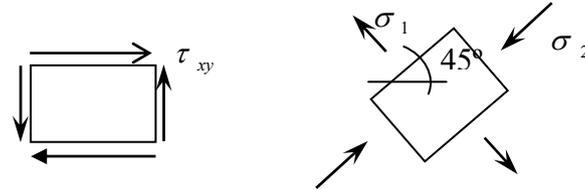


Figura 4 – Correspondência entre estados de tensão num ponto

Em resumo, nas chapas sob fluxo de cisalhamento, a tensão a ser determinada passa a ser a tensão crítica de cisalhamento e a relação para o seu cálculo envolve também um parâmetro *K*. Assim sendo, nos painéis reforçados a análise de estabilidade se aplica a cada célula, e consiste em comparar a tensão de cisalhamento determinada mediante análise simplificada de equilíbrio, com a tensão crítica de flambagem, calculada com a ajuda do parâmetro *K*, pela seguinte relação:

$$\tau_{fl} = K E \left(\frac{t}{b} \right)^2 \tag{7}$$

onde *b* refere-se à menor dimensão da célula retangular.

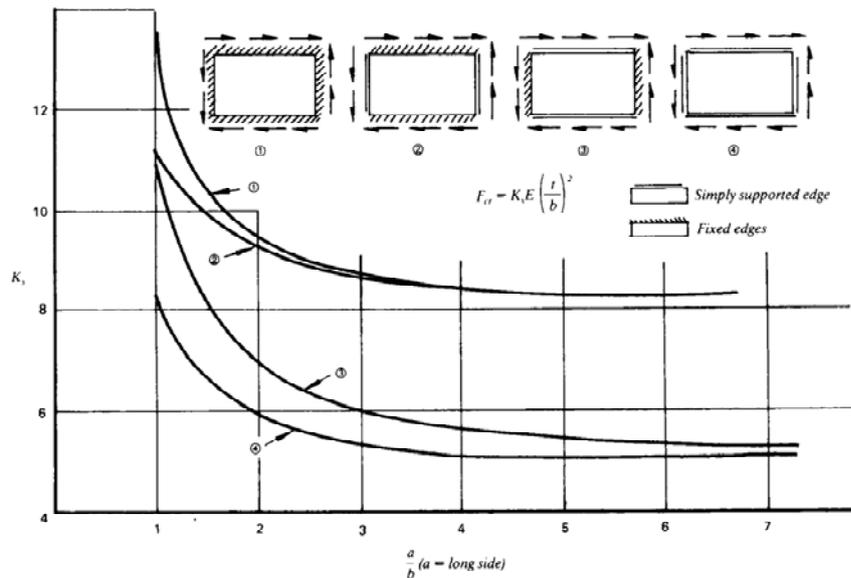


Figura 5 – Curvas para o cálculo do coeficiente *K* (fonte[*])

[*] Niu, Michael C.Y. *Airframe Structural Design*, Hong Kong Conmlit Press Ltd., 1988.

O gráfico da Figura 5 mostra curvas que fornecem o valor do parâmetro K para o cálculo da tensão de cisalhamento crítica, correspondentes a quatro situações típicas de vinculação nas bordas.

Exemplo 1. Neste exemplo, retoma-se o primeiro painel reforçado analisado no capítulo anterior e reproduzido na Figura 6.

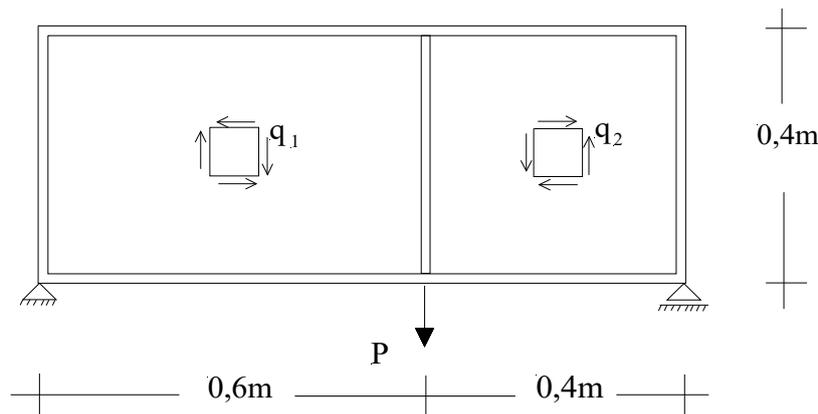


Figura 6 – Painel reforçado bi-apoiado

O que se pede é determinar o maior valor para a força aplicada de modo que não ocorra perda de estabilidade em nenhuma das células. A chapa que compõe o painel possui espessura constante $t = 0,2 \text{ cm}$ e o material é caracterizado pelo módulo de elasticidade longitudinal: $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$.

A análise de equilíbrio levou aos seguintes valores para os fluxos:

$$q_1 = P; \quad q_2 = \frac{3P}{2}.$$

Nota-se que os fluxos são resultantes de tensões de cisalhamento na espessura, de modo que, admitindo-se uma mesma espessura para todo o painel reforçado, a cada fluxo corresponde:

$$\tau_1 = \frac{P}{t}; \quad \tau_2 = \frac{3P}{2t}.$$

A análise de estabilidade é conduzida para cada célula do painel e uma hipótese adotada é que os reforços sejam tais que proporcionem uma vinculação rígida ('engastamento perfeito') para as chapas das células.

Considerando-se, inicialmente, a célula de fluxo q_1 , os dados geométricos de interesse para aplicação da relação (5) são os seguintes: $a = 0,6$; $b = 0,4$.

Segue daí, que: $\left(\frac{a}{b}\right) = 1,5$ e do gráfico da Figura 5, $K = 10,5$. Com esses valores, conclui-se que:

$$\tau_{fl}^1 = K E \left(\frac{t}{b}\right)^2 = 10,5 \cdot 20000 \cdot \left(\frac{0,2}{40}\right)^2$$

$$\tau_{fl}^1 = 5,25 \text{ kN/cm}^2$$

Portanto:

$$\tau_1 = \frac{P}{t} = 5,25 \rightarrow P_1 = 1,05 \text{ kN}$$

Para a segunda célula, de fluxo q_2 , os dados geométricos de interesse para aplicação da relação (5) são os seguintes: $a = 0,4$; $b = 0,4$. Segue daí, que:

$\left(\frac{a}{b}\right) = 1,0$, e numa estimativa conservadora obtida do gráfico da Figura 5: $K = 13,5$. Com esses valores, conclui-se que:

$$\tau_{fl}^2 = K E \left(\frac{t}{b}\right)^2 = 13,5 \cdot 20000 \cdot \left(\frac{0,2}{40}\right)^2$$

$$\tau_{fl}^2 = 6,75 \text{ kN/cm}^2$$

Portanto:

$$\tau_2 = \frac{3P}{2t} = 6,75 \rightarrow P_2 = 0,9 \text{ kN}$$

A resposta é: $P_{máx} = 0,9 \text{ kN}$.

Exemplo 2. Determinar o menor valor para a dimensão a de tal modo que uma abertura introduzida no painel indicado na Figura 7 não provoque perda de estabilidade na parte 1 da chapa.

Dados complementares: espessura da chapa $t = 0,1 \text{ cm}$; módulo de elasticidade $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$; tensão crítica de flambagem $\tau_{cr} = 5E \left(\frac{t}{b} \right)^2$, onde b é a menor dimensão da área retangular.

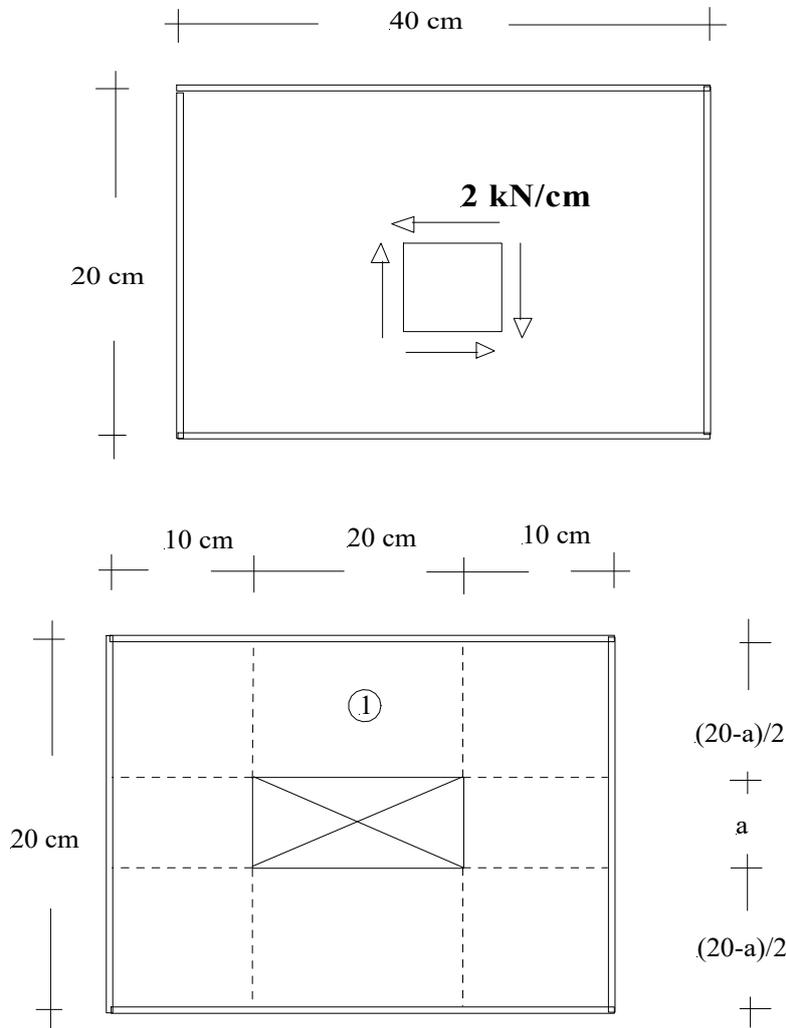


Figura 7 – Abertura imposta na chapa

Como se sabe, a abertura impõe redistribuição de fluxos para as áreas vizinhas. No caso, interessa a redistribuição para a subárea 1 . Empregando-se a regra apresentada no capítulo anterior, que a variação de fluxo é auto-equilibrada, do equilíbrio de forças segundo um corte vertical passando pela área 1 , obtém-se:

$$\Delta q_1 \cdot (20 - a) - 2a = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta q_1 = \frac{2a}{(20 - a)}$$

O fluxo final naquela área por efeito da abertura resulta:

$$q_1 = 2 + \frac{2a}{(20-a)} = \frac{40}{(20-a)}.$$

Pode-se, então, aplicar a condição de estabilidade:

$$\frac{40}{(20-a)} \cdot \frac{1}{t} \leq 5.20000 \cdot \left(\frac{2t}{20-a} \right)^2 \quad \therefore a \geq 10 \text{ cm}.$$

3. Breve comentário sobre os painéis curvos.

Os painéis curvos na forma de setores cilíndricos, ou cascas de simples curvatura, quando submetidos a fluxos de cisalhamento possuem maior resistência à flambagem que os painéis planos com mesmas dimensões externas. Novamente, a teoria da estabilidade elástica das cascas, aonde se enquadra os painéis curvos, apresenta complexidade que extrapola os limites de abrangência definidos para este texto.

Em termos sucintos, a relação que permite o cálculo da tensão de flambagem dos painéis curvos pode ser expressa pela soma de uma parcela relativa à tensão de flambagem do painel plano de mesmas dimensões externas, mais uma parcela envolvendo um segundo parâmetro K_1 e um fator que contém o raio de curvatura do painel em seu denominador:

$$\tau_{fl} = K E \left(\frac{t}{b} \right)^2 + K_1 E \frac{t}{r} \quad (8)$$

Em termos de um cálculo expedito, quando não houver disponibilidade de ábaco que permita uma melhor estimativa, recomenda-se o valor 0,1 para o parâmetro K_1 .

4. Análise pós-flambagem.

A ocorrência de flambagem numa célula de um painel reforçado pode comprometer seriamente a resistência do conjunto pela redistribuição de esforços a ela associada. Uma estimativa desta redistribuição pode ser importante para a realização de um projeto seguro, no qual mesmo apresentando flambagem de algumas chapas a estrutura possa suportar a nova configuração de esforços sem comprometer sua integridade global.

O tema é aqui introduzido mediante a análise de uma longarina de asa, mostrada na Figura 8 e idealizada na sua dimensão longitudinal como um painel reforçado.

Na mesma figura dois estados de tensão são representados, cada um deles comuns a todas as células e existentes em duas situações distintas: cisalhamento puro antes de ocorrer a flambagem e um estado de tração simples após a flambagem.

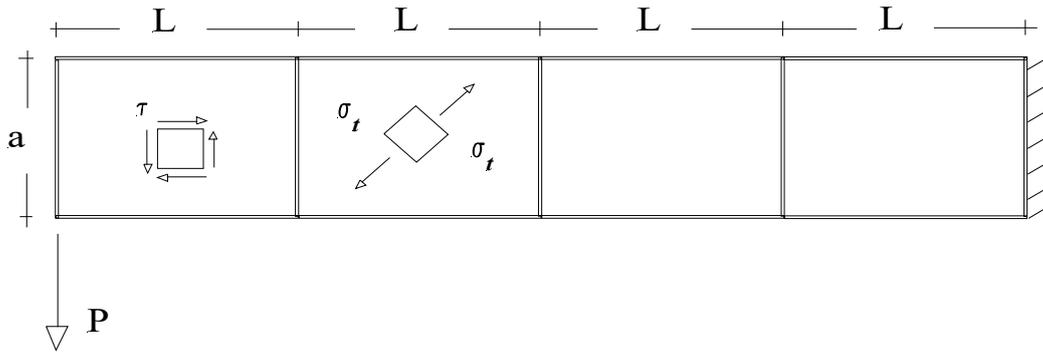


Figura 8 – Estados de tensão pré e pós-flambagem

A intensidade da tensão de cisalhamento na situação pré-flambagem é determinada por equilíbrio com a força P aplicada pela relação:

$$\tau_{xy} = \frac{P}{(ta)} \quad (9)$$

onde t é a espessura da chapa; x e y são coordenadas segundo as direções longitudinal e transversal à longarina, respectivamente.

Nesta mesma situação toda a flexão é resistida pelos reforços horizontais, superior e inferior, conforme indicado na Figura 9, de modo que em cada um deles a força normal correspondente resulta:

$$F_t = \frac{Px}{a}; \quad F_c = -\frac{Px}{a}. \quad (10)$$

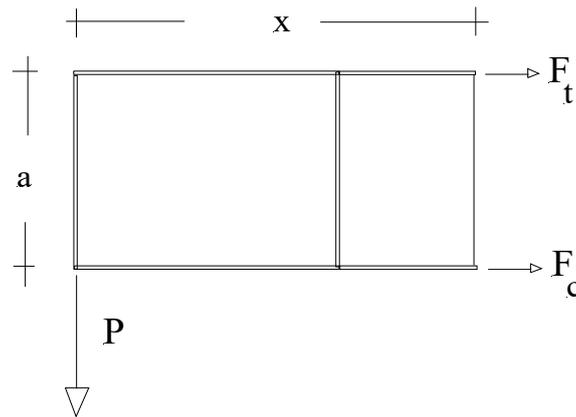


Figura 9 – Esforços resistentes à flexão

Na situação pós-flambagem, o estado de tensão na chapa se altera para um regime de tração simples, como indicado na Figura 8. A este regime, nas direções de referência do painel corresponde um estado de tensão como o ilustrado na Figura 10.

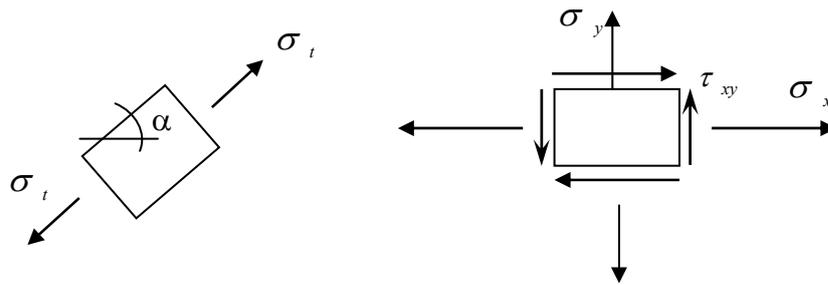


Figura 10 – Estados de tensão em correspondência

As relações entre as componentes de tensão nas duas situações podem ser representadas a partir de expressões gerais conhecidas dos estados planos de tensão:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha \quad (11a,b)$$

No caso em análise: $\sigma_{\alpha} = \sigma_t$; $\tau_{\alpha} = 0$ e $\sigma_{(\alpha+\pi/2)} = 0$. Com essas três condições determinam-se:

$$\sigma_x = \sigma_t \cos^2 \alpha; \quad \sigma_y = \sigma_t \sin^2 \alpha; \quad \tau_{xy} = \sigma_t \sin \alpha \cos \alpha \quad (12)$$

Como a (9) continua válida mesmo na situação pós-flambagem, substituindo-a nas (12), segue que:

$$\sigma_t = \frac{2P}{(ta)\text{sen } 2\alpha}; \quad \sigma_x = \frac{P}{(ta)\tan \alpha}; \quad \sigma_y = \frac{P}{(ta)} \tan \alpha \quad (13)$$

As forças resistidas pelos reforços horizontais se alteram em função da nova condição de equilíbrio que deve ser verificada. A Figura 11 mostra o novo conjunto de forças envolvidas na situação pós-flambagem.

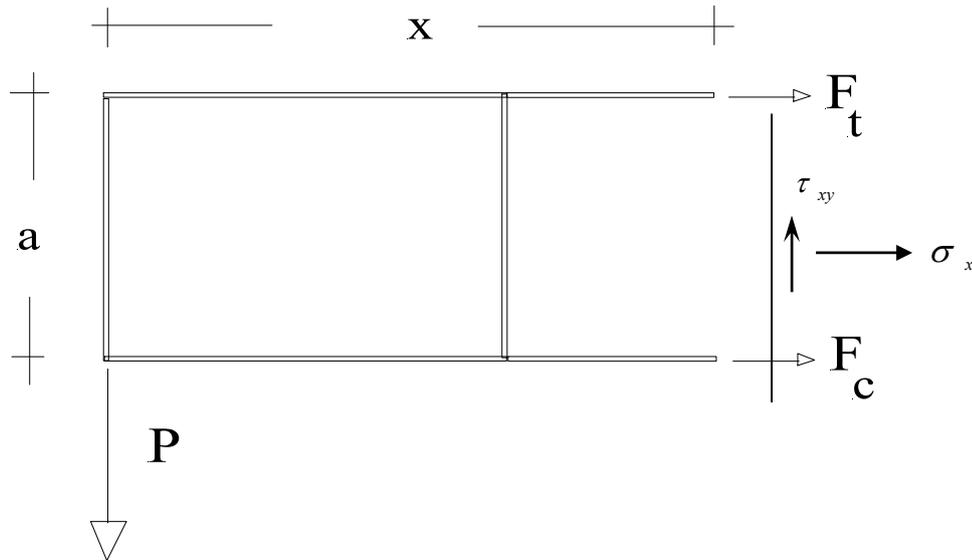


Figura 11 – Equilíbrio de forças na situação pós-flambagem

Do equilíbrio de forças indicado na Figura 11, obtém-se:

$$F_t = \frac{Px}{a} - \frac{P}{2 \tan \alpha}; \quad F_c = -\frac{Px}{a} - \frac{P}{2 \tan \alpha} \quad (14)$$

Por outro lado, as tensões σ_y atuam em planos horizontais da alma da longarina e acabam por induzir flexão nos reforços horizontais, conforme procura ilustrar a Figura 12.

Os reforços horizontais podem ser assimilados como vigas contínuas apoiadas nos reforços verticais e submetidas a força uniformemente distribuída de valor: $\sigma_y t$. Os momentos fletores junto às ligações com os reforços verticais podem ser estimados pela relação que fornece o momento de engastamento perfeito de viga bi-engastada de vão L :

$$M = \frac{(\sigma_y t)L^2}{12} \quad (15)$$

Já o momento no meio do vão em cada célula pode ser estimado pela metade do valor determinado pela (15).

Por sua vez, os reforços verticais recebem forças de compressão definidas pelas resultantes da força distribuída ($\sigma_y t$) em cada célula (correspondentes às reações de apoio na viga contínua); a relação seguinte apresenta o valor dessas forças de compressão:

$$F = \sigma_y L t \quad (16)$$

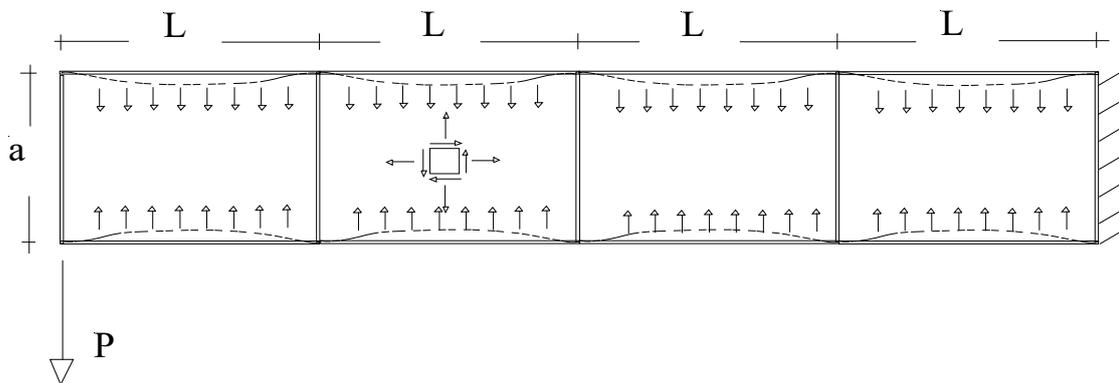


Figura 12 – Solicitações nos reforços provenientes das chapas

Aos reforços verticais cabe, ainda, uma análise de estabilidade, pois a depender da intensidade da força F poderá ocorrer flambagem dos mesmos. Grosso modo, para fins dessa análise os reforços podem ser entendidos como colunas bi-articuladas comprimidas, o que é razoável quando a dimensão L for maior do que a dimensão a , algo como: $L > 1,5a$; caso contrário, uma relação sugerida na bibliografia para a definição do comprimento de flambagem é a seguinte:

$$L_{fl} = \frac{a}{\sqrt{4 - 2\left(\frac{L}{a}\right)}} \quad (17)$$

Deve-se também alertar que o regime de cisalhamento puro admitido no modelo simplificado para a análise das chapas pressupõe a indeformabilidade dos reforços, o que é razoável no regime pré-flambagem. A deformabilidade dos reforços invalida em parte aquela hipótese e tem como conseqüência mais significativa uma alteração no valor do ângulo α segundo o qual se alinha a tensão σ_t no regime pós-flambagem. Tal ângulo, que inicialmente seria determinado como 45° , tem seu valor melhor estimado pela seguinte relação sugerida na bibliografia:

$$\tan^4 \alpha = \frac{1 + \frac{ta}{2A_h}}{1 + \frac{tL}{A_v}} \quad (18)$$

Onde A_h diz respeito à área da seção transversal do reforço horizontal e A_v à área da seção transversal do reforço vertical.

Exemplo 3. Para o painel mostrado na Figura 8 admitam-se os seguintes dados:

$P = 5 \text{ kN}$; $L = 30 \text{ cm}$; $a = 40 \text{ cm}$; $A_h = 3,5 \text{ cm}^2$; $A_v = 3,0 \text{ cm}^2$; $t = 0,2 \text{ cm}$. Além disso, o momento de inércia do reforço para fins de análise de sua estabilidade é: $I = 0,2 \text{ cm}^4$ e o módulo de elasticidade do material tanto da chapa quanto do reforço vale $E = 7000,0 \text{ kN/cm}^2$. Pede-se determinar os esforços nos reforços na hipótese de flambagem das chapas e verificar a estabilidade dos reforços verticais nesta situação.

Trata-se, numa primeira etapa, de aplicar as relações (14) para determinar as forças normais nos reforços. A pior situação corresponde à ligação com a extremidade fixa, para a qual: $x = 120 \text{ cm}$.

Inicialmente, a relação (18) fornece:

$$\tan^4 \alpha = \frac{1 + \frac{ta}{2A_h}}{1 + \frac{tL}{2A_v}} = \frac{1 + \frac{(0,2 \cdot 40)}{(2 \cdot 3,5)}}{1 + \frac{(0,2 \cdot 30)}{3}} \rightarrow \alpha = 42,6^\circ$$

As relações (14) fornecem:

$$F_t = \frac{Px}{a} - \frac{P}{2 \tan \alpha} = \frac{5 \cdot 120}{40} - \frac{5}{2 \tan(42,6)} = 12,3 \text{ kN};$$

$$F_c = -\frac{Px}{a} - \frac{P}{2 \tan \alpha} = -\frac{5 \cdot 120}{40} - \frac{5}{2 \tan(42,6)} = -17,7 \text{ kN};$$

O momento fletor na altura da ligação dos reforços horizontais com os verticais determina-se pela (15):

$$M = \frac{(\sigma_y t)L^2}{12} = \frac{PL^2 \tan \alpha}{12a} = \frac{5 \cdot (30)^2 \tan(42,6)}{12 \cdot 40} = 8,6 \text{ kNcm}$$

A força normal nos reforços transversais determina-se pela (16):

$$F = \sigma_y Lt = \frac{PL \tan \alpha}{a} = \frac{5 \cdot 30 \cdot \tan(42,6)}{40} = 3,45 \text{ kN}$$

Para a verificação da flambagem, determina-se a carga crítica de flambagem. Nesse sentido, o comprimento de flambagem fica dado pela (17):

$$L_{fl} = \frac{a}{\sqrt{4 - 2\left(\frac{L}{a}\right)}} = \frac{40}{\sqrt{4 - 2\left(\frac{30}{40}\right)}} = 25,3 \text{ cm}$$

A carga crítica resulta pela aplicação da relação de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 7000 \cdot 0,2}{(25,3)^2} = 21,6 \text{ kN}$$

Como $F < P_{cr}$, os reforços transversais não perdem estabilidade.

CAPÍTULO 4 FLEXO-TORÇÃO

Neste capítulo o tema da torção não-uniforme, ou flexo-torção, é abordado em seus aspectos essenciais, uma vez que um desenvolvimento mais detalhado e rigoroso foge aos limites de abrangência propostos para estas notas.

Na *torção livre* de barra prismática, por hipótese a projeção da seção transversal sobre o seu plano inicial mantém-se invariável durante a deformação. Assim sendo, a deformação da barra caracteriza-se pelo giro relativo entre suas seções transversais, observadas segundo as projeções nos seus planos iniciais (giro este de variação constante ao longo do comprimento da barra), e por deslocamentos axiais relativos dos pontos das seções, (estes deslocamentos são também invariáveis ao longo do comprimento). Os deslocamentos axiais constituem o efeito de *empenamento* das seções e são decorrentes da existência de tensões de cisalhamento nos seus planos. Observa-se que inexistem tensões normais nas seções, pois na torção livre o empenamento é irrestrito.

O cálculo do empenamento das seções submetidas à torção livre (ou *uniforme*) e o seu entendimento é importante porque do seu impedimento, por imposição de vinculação externa, decorre um regime mais geral dito de *torção não-uniforme* ou *flexo-torção* da barra. Este regime tem particular destaque nas barras com seções delgadas abertas, sendo sua denominação associada à ocorrência de flexões de partes da barra, para que se possam compatibilizar os giros de torção das seções com a restrição ao empenamento.

A propósito das conseqüências de eventual restrição ao empenamento, mostra-se que nas barras em regime de torção não-uniforme *tensões de flexo-torção*, dos tipos: normal e de cisalhamento, são induzidas nos planos das seções transversais.

Às tensões normais de flexo-torção não corresponde uma força axial resultante, mas sim um esforço interno auto-equilibrado, denominado *bimomento*, que possui a dimensão de momento multiplicado por comprimento. É interessante notar que as tensões normais em questão apresentam característica semelhante às tensões normais do regime de flexão pura, as quais também não possuem resultante axial e estão associadas a um momento (de flexão) na seção.

Por outro lado, as tensões de cisalhamento aparecem na flexo-torção para equilibrar as variações, de seção para seção, das tensões normais, e são adicionais àquelas induzidas na torção uniforme. Essas tensões passam a colaborar, em parte, na resistência ao efeito de torção solicitante, uma vez que realizam um *momento* dito *de flexo-torção* em relação ao centro de torção da seção. Assim, o momento de flexo-torção compõe juntamente com uma parcela de momento de torção uniforme o momento de torção total na seção.

O desenvolvimento teórico deste capítulo tem por objetivo uma introdução ao estudo do regime de flexo-torção. A abordagem inicia-se pela determinação do empenamento na torção livre. Em seguida, apresenta-se a equação diferencial que permite determinar o giro da seção e as componentes de tensão normal e de cisalhamento no regime de torção não-uniforme. O tema se completa com a conceituação do bimomento. Chama-se a atenção para o fato que, ao contrário da torção livre, o giro por unidade de comprimento já não é mais uma constante na flexo-torção.

1. Cálculo do empenamento em seções delgadas abertas sob torção uniforme

É interessante recordar as condições essenciais para que um regime de torção uniforme, ou livre (ou, ainda, de Saint-Venant), ocorra numa barra prismática:

- O momento de torção provocado pelo carregamento externo é constante ao longo do comprimento (direção longitudinal) da barra;
- As seções possuem forma invariável no seu plano;
- Inexistem restrições externas que impeçam deslocamentos longitudinais, ou seja: a livre deformação das seções na direção axial da barra.

O momento de torção solicitante impõe giro relativo entre as seções e uma distribuição de tensões de cisalhamento nos seus planos. No caso das seções delgadas abertas, sabe-se que a tensão de cisalhamento possui variação linear segundo a dimensão da espessura da parede, passando por um valor nulo na linha do esqueleto.

Sendo T o momento de torção solicitante, a variação do giro relativo entre seções e a maior tensão de cisalhamento ao longo da espessura, podem ser determinados pelas seguintes relações:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi' = \frac{T}{GI_T} \quad (1)$$

$$\tau_t = \frac{T}{I_T} t = G t \varphi' \quad (2)$$

Nas relações anteriores, G é o módulo de elasticidade transversal do material da barra, t é a espessura da parede medida perpendicularmente à linha do esqueleto e I_T é o momento de inércia à torção. Esta característica geométrica, no caso de seção aberta de paredes finas, calcula-se mediante a seguinte relação:

$$I_T = \frac{1}{3} \int_{l.e.} t^3 ds \quad (3)$$

onde s é uma coordenada com origem (s_0) arbitrária sobre a linha do esqueleto (*l.e.*) da seção e a integral indicada é definida sobre todo o comprimento dessa linha, incluindo-se suas eventuais ramificações.

A relação (2), em particular, mostra que na seção a maior intensidade da tensão de cisalhamento ocorre onde a parede é mais espessa.

Considerando-se, portanto, a deformação de uma barra prismática submetida à torção uniforme, um ponto qualquer de uma seção arbitrária desloca-se com componentes segundo a direção tangencial à linha do esqueleto e segundo a direção longitudinal, paralela ao eixo da barra. A componente tangencial decorre do giro da seção em torno do centro de rotação, ou de torção. Já a componente longitudinal é associada ao efeito de *empenamento*, nome dado à deformação induzida na seção transversal pela existência das tensões de cisalhamento; portanto, a seção deixa de ser plana. Aliás, de um modo geral, sempre que houver tensões de cisalhamento no plano da seção, sejam elas associadas à flexão ou à torção, as seções inicialmente planas tendem a deixar de sê-lo por efeito do empenamento¹.

A cinemática construída no que segue tem por base a hipótese essencial que os deslocamentos são sempre muito pequenos em relação às dimensões da própria seção.

Restringindo-se, inicialmente, a representação geométrica ao plano indeformado da seção, no sentido de caracterizar a componente tangencial do deslocamento, a Figura 1 mostra um trecho de seção delgada aonde se

¹ Na teoria clássica de flexão de barras o empenamento é desprezado, porém assume papel importante na torção.

destacam um ponto P arbitrário sobre a linha do esqueleto e sua posição r em relação ao centro de rotação (c.r.) da seção.

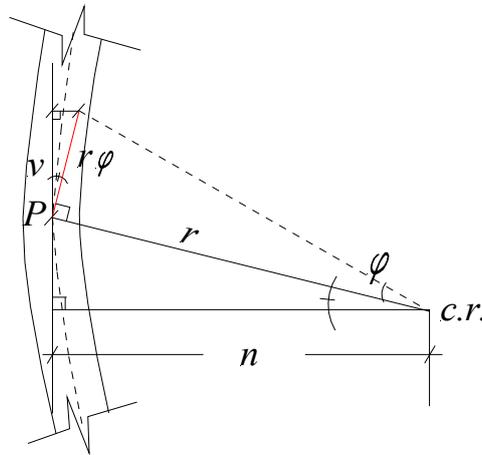


Figura 1 – Trecho de seção delgada submetida à torção

Sendo φ o giro da seção, medido em radianos, o deslocamento $r \varphi$ do ponto P possui uma componente v , tangencial à linha do esqueleto em P . Tal componente pode ser determinada em função do ângulo de giro e da distância (n) do ponto ao centro de rotação, mediante a seguinte relação (decorrente, por exemplo, de semelhança de triângulos, indicados na Figura 1):

$$\frac{v}{r \varphi} = \frac{n}{r} \rightarrow v = n \varphi \quad (4)$$

Uma relação útil no que segue é a derivada da (4) em relação à coordenada longitudinal x :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = n(s) \frac{d\varphi}{dx} = n \varphi' \quad (5)$$

A componente axial do deslocamento, por definição associada ao empenamento, é então caracterizada, em termos genéricos, a partir da consideração da distorção induzida pelas tensões de cisalhamento na seção. Entretanto, como a componente de deslocamento em questão se dá na direção ortogonal ao plano da seção, explora-se a reciprocidade das tensões de cisalhamento e observa-se a distorção induzida pelas tensões recíprocas num elemento infinitesimal, com dimensões (dx) de comprimento e (ds) de altura, representado num plano longitudinal, ortogonal ao plano da seção. Essas dimensões são definidas, respectivamente, segundo a direção paralela

ao eixo longitudinal da barra e a direção tangencial, paralela ao deslocamento v caracterizado na (4).

Para emprestar maior generalidade à dedução, considere-se que tal plano seja definido arbitrariamente, isto é, não necessariamente contendo o ponto P sobre a linha do esqueleto, mas sim outro ponto qualquer (P') na linha da espessura da parede.

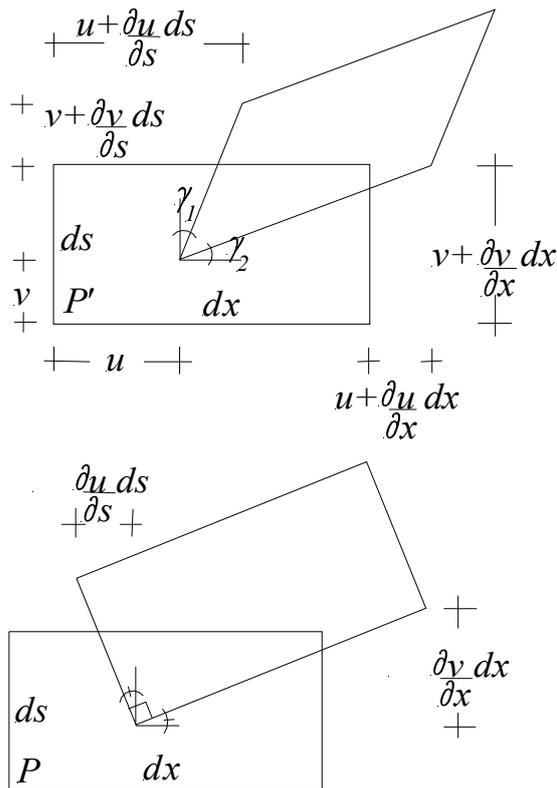


Figura 2 – Elementos de barra contidos em planos longitudinais

Conforme ilustra a Figura 2, sendo u e v as componentes do deslocamento do ponto de referência (P') segundo as direções longitudinal e tangencial, respectivamente, e consideradas também suas variações no plano, a distorção provocada no elemento é dada por uma relação de compatibilidade conhecida:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6)$$

Passando, agora, a considerar o plano particular que contém ponto P sobre a linha do esqueleto, porque no elemento infinitesimal correspondente as tensões de cisalhamento recíprocas são nulas, a aplicação direta da lei de Hooke implica em distorção nula. Assim sendo, da (6) conclui-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (7)$$

Combinando-se a (7) com a (5), e lembrando que $u = u(s)$, obtém-se:

$$\frac{d u}{d s} = -n(s) \frac{d \varphi}{d x} \rightarrow u(s) = -\varphi' \int_{s_0}^s n ds \quad (8)$$

Note-se que o elemento em consideração apenas gira, mantendo-se indeformado no seu plano, conforme ilustra a Figura 2. Outra observação é que a última relação é estendida para todos os pontos da espessura, o que é justificável por ser muito pequena a sua dimensão.

Ainda da relação (8), como: $u = u(s)$, fica implícito que o empenamento é invariável com x , uma vez que φ' é constante na torção uniforme; além disso, aquele deslocamento é medido de forma relativa, isto é, entre dois pontos posicionados na linha do esqueleto pelas coordenadas locais s_0 e s . Aliás, em razão do caráter relativo do deslocamento axial, a origem s_0 adotada para a coordenada local tem definição totalmente arbitrária. Por outro lado, observa-se que a integral que aparece na (8) possui um significado geométrico claro, conforme mostra a Figura 3.

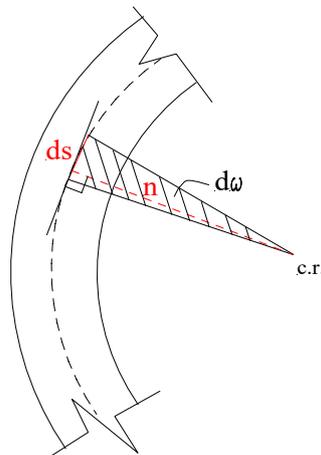


Figura 3 – Interpretação geométrica da integral de linha

De fato o fator $(n ds)$ representa o dobro da área do setor triangular elementar $(d\omega)$ definido entre o lado ds e o centro de rotação. Já a integral desse fator sobre um determinado trecho de linha do esqueleto define a chamada *área setorial* ω do trecho, uma grandeza puramente geométrica. Assim, a relação para o cálculo da área setorial escreve-se:

$$\omega(s) = \int_{s_0}^s n ds \quad (9)$$

Outra forma de interesse resulta da combinação das (9) e (8) com a (1):

$$u(s) = -\frac{T}{GI_t} \omega(s) \quad (10)$$

Seja empregando-se a (8) ou, então, a (10), entende-se que ao ponto posicionado na origem s_0 corresponde um deslocamento axial de referência, em relação ao qual se medem os deslocamentos de todos os outros pontos da seção. À parte a origem escolhida para a coordenada local, o cálculo da área setorial depende da distância n do ponto sobre a linha do esqueleto ao centro de rotação da seção. Aliás, em relação ao centro de rotação vale destacar o comentário que segue.

Uma tendência natural para a identificação do posicionamento do centro de rotação seria confundi-lo com o centro de cisalhamento da seção. No entanto, o centro de cisalhamento é consistentemente caracterizado como o ponto por onde deve passar a resultante dos fluxos de cisalhamento da seção. Ora, na torção uniforme não há fluxos de cisalhamento e, portanto, o centro de rotação pode ser um ponto qualquer da seção, inclusive o centro de gravidade, por exemplo. Assim sendo, é mais adequado se referir ao centro de rotação como *centro de torção*.

Pode-se mostrar que os resultados obtidos com a relação (8), ou a (10), para distintos pontos escolhidos como centros de torção, diferem entre si de valores que podem ser interpretados como deslocamentos rígidos de translação. Porém, para não deixar indefinida a questão do posicionamento do centro de torção e, também, para contemplar o caso da torção não-uniforme², mesmo na torção livre adota-se para centro de rotação o ponto coincidente com o centro de cisalhamento da seção.

Há, finalmente, que se adequar uma convenção para a (10), de tal modo que um sinal positivo indique empenamento no sentido do eixo x de referência, de direção axial.

Por um lado, em relação ao momento de torção solicitante, ele será considerado positivo quando seu vetor (dupla flecha) apontar para a seção. Decorre dessa convenção que o giro de torção será positivo se anti-horário para um observador olhando a seção no sentido do eixo x de referência.

² Mediante o teorema da reciprocidade de Maxwell, pode-se verificar que na torção não-uniforme necessariamente o centro de torção coincide com o centro de cisalhamento.

Por outro lado, quanto à área setorial, seu sinal será definido não por n , mas sim pelo sentido de giro, em relação ao centro de torção, dos vetores posição de pontos da linha do esqueleto percorridos seqüencialmente a partir da origem da coordenada local s . Como este sentido pode variar de acordo com o trecho de parede considerado, convencionou-se que a contribuição de um trecho de parede para a área setorial da seção será positiva se o sentido de giro dos vetores posição de seus pontos for horário para um observador olhando a seção no sentido do eixo longitudinal x .

Uma vez definida a convenção de sinais, pode-se escrever a seguinte relação para o cálculo do empenamento de qualquer ponto da seção:

$$u(s) = \omega(s)\varphi' \quad \text{ou} \quad u(s) = \frac{T}{GI_T} \omega(s) \quad (11)$$

a,b)

com área setorial determinada pela (9).

Exemplo 1. Determinar a distribuição do empenamento da seção com um eixo de simetria, representada na Figura 4.

A posição do centro de cisalhamento foi determinada previamente e está indicada na figura. A origem da coordenada local s na linha do esqueleto está sobre o eixo de simetria.

Admitindo-se que a representação da seção indicada na figura coincide com a visão de um observador olhando no sentido positivo do eixo longitudinal da barra, a área setorial pode, então, ser determinada, percorrendo-se os trechos de parede e observando-se a convenção de sinais, atrelada aos giros dos vetores-posição.

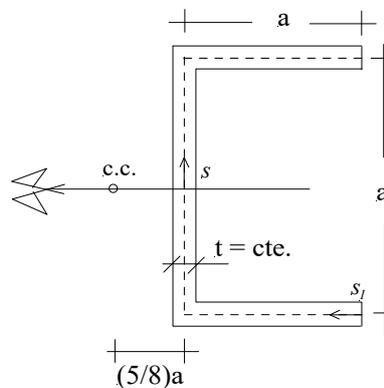


Figura 4 – Seção delgada aberta de espessura constante

Portanto, da definição da área setorial deduzem-se as seguintes relações:

$$\omega(s) = -\frac{5}{8}a \cdot s \quad p/ \quad 0 \leq s \leq a/2$$

$$\omega(s) = -\frac{9}{16}a^2 + \frac{a}{2} \cdot s \quad p/ \quad a/2 \leq s \leq 3a/2$$

$$\omega(s) = -\frac{5}{8}a \cdot s \quad p/ \quad -a/2 \leq s \leq 0$$

$$\omega(s) = \frac{9}{16}a^2 + \frac{a}{2} \cdot s \quad p/ \quad -3a/2 \leq s \leq -a/2$$

O ponto coincidente com a origem da coordenada local serve como referência e em relação a ele medem-se os outros deslocamentos. Por exemplo, aplicando-se a (11b) para os pontos extremos, nas bordas do perfil, resultam as seguintes relações:

$$u(3a/2) = \frac{T}{GI_t} \frac{3a^2}{16}$$

$$u(-3a/2) = -\frac{T}{GI_t} \frac{3a^2}{16}$$

Conclui-se que o deslocamento relativo entre aqueles pontos é: $\frac{T}{GI_t} \frac{3a^2}{8}$.

Uma análise equivalente pode ser conduzida se outra posição for escolhida para origem da coordenada local, como, por exemplo, a borda inferior da seção, conforme indicado na Figura 4.

Nesta situação, as relações para o cálculo da área setorial resultam:

$$\omega(s) = \frac{a}{2} \cdot s_1 \quad p/ \quad 0 \leq s_1 \leq a$$

$$\omega(s) = \frac{a^2}{2} - \frac{5a}{8} \cdot (s_1 - a) \quad p/ \quad a \leq s_1 \leq 2a$$

$$\omega(s) = -\frac{a^2}{8} + \frac{a}{2}(s_1 - 2a) \quad p / 2a \leq s_1 \leq 3a$$

Tomando-se, então, o ponto na borda superior da seção, conclui-se que o deslocamento relativo resulta: $u(3a) = \frac{T}{GI_t} \frac{3a^2}{8}$. Este valor coincide com o deslocamento relativo, entre os pontos de borda, calculado com a origem da coordenada local na posição anterior.

Já para o ponto sobre o eixo de simetria, vale o resultado: $u(3a/2) = \frac{T}{GI_t} \frac{3a^2}{16}$.

Dando-se a todos os pontos da seção uma translação negativa, de intensidade tal a anular esse deslocamento do ponto sobre o eixo de simetria, as mesmas respostas do caso anterior são recuperadas.

É importante mais uma vez chamar a atenção que os resultados obtidos com as relações (11) são sempre de deslocamentos relativos ao de um ponto arbitrário sobre a linha do esqueleto.

2. Tensões normal e tensão de cisalhamento na flexo-torção. O momento de flexo-torção

No regime de flexo-torção o empenamento não é livre, entretanto considera-se que a relação (11a), que o determina continua válida em forma, com a ressalva que o giro por unidade de comprimento (φ') não é mais constante, ou $\varphi' = \varphi'(x)$ ³.

Nessa condição também a componente de deslocamento axial resulta variável ao longo do comprimento da barra, seguindo daí uma deformação axial, definida pela relação usual de compatibilidade:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \tag{12}$$

Considerando-se a relação constitutiva da elasticidade linear, e levando-se em conta a (11a), conclui-se que ao regime de deformação acima caracterizado correspondem tensões normais:

³ A justificativa para esses comentários apresenta-se mais adiante.

$$\sigma_{ft}(x,s) = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \varphi''(x) \omega(s) \quad (13)$$

Essas tensões só aparecem no regime de torção não-uniforme e, por este motivo, são denominadas *tensões normais de flexo-torção*; além disso, elas não proporcionam esforços internos (dos tipos força normal ou momento de flexão) como resultantes nas seções, pois, se considerado aquele regime exclusivamente, não existem solicitações externas de outra natureza que não momento de torção.

De fato, a condição de resultante nula das tensões normais na seção escreve-se como:

$$\int_{s_1}^{s_2} \sigma_{ft} t ds = E \varphi'' \int_{s_1}^{s_2} \omega t ds = 0 \quad (14 a)$$

A última igualdade pode ser satisfeita escolhendo-se para a coordenada local s uma origem tal que:

$$\int_{s_1}^{s_2} \omega t ds = 0 \quad (14 b)$$

Naturalmente, subentende-se que a integral está sendo realizada sobre todo o comprimento da linha do esqueleto, incluindo-se suas ramificações. À propósito, é possível verificar no exemplo 1, desenvolvido no item anterior, que a origem da coordenada local sobre o eixo de simetria proporciona uma distribuição de áreas setoriais na seção que verificam a condição (14b).

Por outro lado, considerando-se no plano da seção dois eixos ortogonais, Y e Z , em princípio com origem arbitrária, momentos de flexão associados à σ_{ft} podem ser assim definidos:

$$M_Z = \int_{s_1}^{s_2} \sigma_{ft} y t ds; \quad M_Y = \int_{s_1}^{s_2} \sigma_{ft} z t ds \quad (15 a,b)$$

Levando-se em conta a (13), obtêm-se das relações anteriores as seguintes condições para que tais momentos sejam nulos:

$$\int_{s_1}^{s_2} \omega y t ds = 0; \quad \int_{s_1}^{s_2} \omega z t ds = 0 \quad (16 \text{ a,b})$$

Pode-se mostrar que as igualdades anteriores são satisfeitas se a origem dos eixos de referência coincidir com o centro de cisalhamento da seção⁴.

Assim sendo, no que segue admite-se que o sistema cartesiano de referência no plano da seção tem origem no centro de cisalhamento e que a origem da coordenada local que percorre a linha do esqueleto satisfaz o requisito de momento estático setorial nulo da seção. Além disso, os exemplos de aplicação tratarão preferencialmente de seções com um eixo de simetria, o qual será adotado para um dos eixos de referência no plano da seção; tal escolha implicará que os momentos de inércia serão principais.

Para equilibrar a variação da tensão normal de flexo-torção, de ponto a ponto ao longo da direção longitudinal da barra, aparecem tensões de cisalhamento, ditas de flexo-torção, conforme mostra a Figura 5.

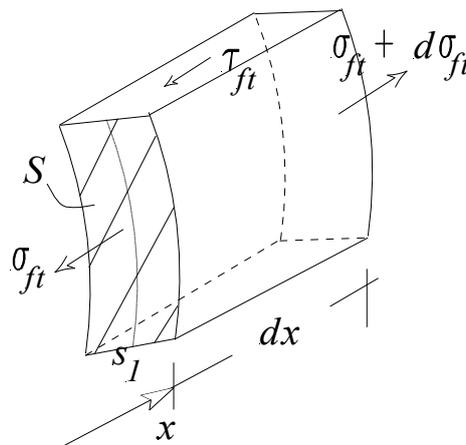


Figura 5 – Tensão de cisalhamento de flexo-torção

Considere-se, então, que a resultante da tensão normal atuante na parte \$S\$ da área da face do elemento, pertencente à seção \$x\$ da barra, seja definida, com a ajuda da (13), por⁵:

$$R_\sigma = E \varphi'' \int_{s_1}^s \omega t ds \quad (17)$$

⁴ Na verdade, essas relações podem ser empregadas genericamente para o cálculo da posição do c.c. em seções delgadas abertas.

⁵ \$s_1\$ refere-se à coordenada local do ponto posicionado numa extremidade da linha do esqueleto.

Segue da (17) que a variação da resultante fica dada por:

$$\frac{d R_{\sigma}}{d x} = E \varphi''' \int_{s_1}^s \omega t ds \quad (18)$$

A relação de equilíbrio de forças no elemento, segundo a direção longitudinal, resulta:

$$-R_{\sigma} + (R_{\sigma} + dR_{\sigma}) - \tau_{ft} t dx = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{ft} = \frac{d R_{\sigma}}{t dx} \quad (19)$$

Ou ainda:

$$\tau_{ft}(x, s) = \frac{E \varphi'''(x)}{t(s)} \int_{s_1}^s \omega t ds = \frac{E \varphi'''(x)}{t(s)} S_{\omega}(s) \quad (20)$$

Genericamente, $S_{\omega} = \int_{s_1}^s \omega t ds$ determina o *momento estático setorial* da parte de seção englobada no intervalo definido para a coordenada local, com início à partir da borda (s_1) da seção.

Por reciprocidade, a tensão de cisalhamento de flexo-torção também aparece no plano da seção transversal. Nesta situação, porque as tensões normais de flexo-torção são uniformes na espessura, também a distribuição da tensão de cisalhamento resulta uniforme na espessura. Decorre desta consideração o fluxo de cisalhamento da flexo-torção: $q_{ft} = \tau_{ft} t$, determinado a partir da (20) como:

$$q_{ft}(x, s) = E \varphi'''(x) S_{\omega}(s) \quad (21)$$

Cabe aqui um comentário importante: sendo τ_{ft} não-nula na linha do esqueleto, a rigor o cálculo do empenamento pela (7) deixaria de ser válido, pois agora há distorção do elemento num plano longitudinal tangencial à linha do esqueleto. No entanto, considera-se que essa distorção seja muito pequena e que o cálculo do empenamento pela (11a) resulte suficientemente aproximado.

Uma vez conceituado o fluxo de cisalhamento da flexo-torção, segue que em relação ao centro de cisalhamento o fluxo realiza um momento de flexo-torção, definido pela seguinte relação:

$$M_{ft}(x) = \int_{s_1}^{s_2} q_{ft} n ds \quad (22)$$

Novamente os limites s_1 e s_2 indicam que todo o comprimento da linha do esqueleto está sendo percorrido, inclusive suas ramificações.

Considerando-se a definição do fluxo e também a (20), após algum desenvolvimento, pode-se mostrar que⁶:

$$M_{ft}(x) = -E \varphi'''(x) \underbrace{\int_{s_1}^{s_2} \omega^2 t ds}_{I_\omega} \quad (23)$$

A integral que aparece na relação anterior define o chamado *momento de inércia setorial* da seção, sendo representada por: I_ω .

Observa-se, finalmente, que a combinação das relações (20) e (23) fornece outra relação útil para o cálculo da tensão de cisalhamento:

$$\tau_{ft}(x,s) = -\frac{M_{ft}(x) \cdot S_\omega(s)}{t(s) \cdot I_\omega} \quad (24)$$

3. A equação diferencial fundamental da torção não-uniforme

A depender do tipo de vinculação, ao longo de uma barra os regimes de torção uniforme e não-uniforme podem se manifestar com intensidades distintas. Por exemplo, no caso de uma barra em balanço, na qual o empenamento é impedido na extremidade engastada, o efeito da vinculação torna-se menor na medida em que se tomam seções mais afastadas do vínculo. Segue que na região próxima ao vínculo o regime de torção não-uniforme é mais efetivo, enquanto que nas vizinhanças da extremidade livre predomina um regime de torção-livre.

De uma maneira geral, portanto, com boa aproximação pode-se afirmar que as tensões de cisalhamento no plano de uma seção arbitrária podem ser

⁶ Em particular usa-se: $\int_{s_1}^{s_2} \left(\int_0^s \omega t ds \right) n ds = - \int_{s_1}^{s_2} \omega^2 t ds$, resultado este obtido mediante integração por partes.

descritas por uma parcela que não depende do empenamento e outra que depende do empenamento.

Definindo o momento das tensões de cisalhamento em relação ao centro de torção como sendo o momento de torção total na seção (M_T), conclui-se que este momento fica composto por duas parcelas: uma é dada pelo momento de torção uniforme (T), enquanto que a outra é representada pelo momento de flexo-torção (M_{ft}). Vale, portanto, a relação:

$$M_T = T + M_{ft} \quad (25)$$

Tendo-se em vista as relações (1) e (20), a sobreposição anterior assume a forma:

$$M_T = G I_T \varphi' - E \varphi''' I_\omega \quad (26)$$

a qual constitui a equação diferencial fundamental da flexo-torção.

No sentido de explicitar a solução da equação diferencial fundamental, reescreve-se a mesma para a seguinte forma:

$$\varphi''' - \mu^2 \varphi' = -\mu^2 \frac{M_T}{G I_T} \quad (27)$$

onde: $\mu^2 = \frac{G I_T}{E I_\omega}$.

A forma obtida facilita a dedução de uma solução geral para φ' , que pode ser escrita como:

$$\varphi'(x) = \frac{M_T}{G I_T} + A \cosh(\mu x) + B \sinh(\mu x) \quad (28 a)$$

Para fins de imposição de condições de contorno interessa, ainda, a relação seguinte:

$$\varphi''(x) = A \mu \sinh(\mu x) + B \mu \cosh(\mu x) \quad (28 b)$$

As constantes A e B dependem das condições de contorno do problema, observando-se que o empenamento se relaciona diretamente com φ' , conforme mostra a (11a).

Por exemplo, seja o caso de uma barra de comprimento L , em balanço, com restrição ao empenamento na extremidade engastada e sem força axial aplicada externamente na extremidade livre (o que implica em tensão normal de flexo-torção nula). Estando a origem dos eixos de referência na extremidade fixa e explorando as relações (11a) e (13), as condições de contorno escrevem-se como:

- $\varphi'(0) = 0$;
- $\varphi''(L) = 0$.

Impondo as condições anteriores, usando as (28), determinam-se:

$$A = -\frac{M_T}{GI_T}; \quad B = \frac{M_T}{GI_T} \operatorname{tgh}(\mu L).$$

Com as constantes obtidas, resultam:

$$\varphi'(x) = \frac{M_T}{GI_T} \left[1 - \frac{\cosh \mu(L-x)}{\cosh(\mu L)} \right] \quad (29 \text{ a})$$

$$\varphi''(x) = \frac{M_T}{GI_T} \mu \left[\frac{\sinh \mu(L-x)}{\cosh(\mu L)} \right] \quad (29 \text{ b})$$

Claramente a parcela hiperbólica da relação (29a) representa a variação imposta ao giro por unidade de comprimento pelo efeito da restrição ao empenamento.

Pode-se obter uma expressão para o cálculo do giro absoluto mediante integração da (29a). Neste caso, sendo a seção em $x = 0$ impedida de girar, segue que:

$$\varphi(x) = \frac{M_T}{GI_T} \left[x + \frac{\sinh \mu(L-x)}{\mu \cosh(\mu L)} - \frac{\sinh(\mu L)}{\mu \cosh(\mu L)} \right] \quad (30)$$

As parcelas de momento de torção livre e momento de flexo-torção variam ao longo do comprimento da barra, sendo que esta diminui na medida em que se avança em direção à extremidade livre, devido à redução do efeito de restrição ao empenamento. Das relações (1) e (23), e considerando-se a

derivada da (29b), pode-se deduzir as seguintes relações, que permitem quantificar cada uma das parcelas:

$$T(x) = M_T \left[1 - \frac{\cosh \mu(L-x)}{\cosh(\mu L)} \right]; M_{fi}(x) = M_T \left[\frac{\cosh \mu(L-x)}{\cosh(\mu L)} \right] \quad (31 \text{ a,b})$$

Exemplo 2. Para barra indicada na Figura 6, determinar as expressões para o cálculo das parcelas do momento de torção, além dos valores máximos para o empenamento, o giro absoluto e as tensões de flexo-torção.

Os dados complementares sobre o material são: $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$; $G = 8000 \text{ kN/cm}^2$.

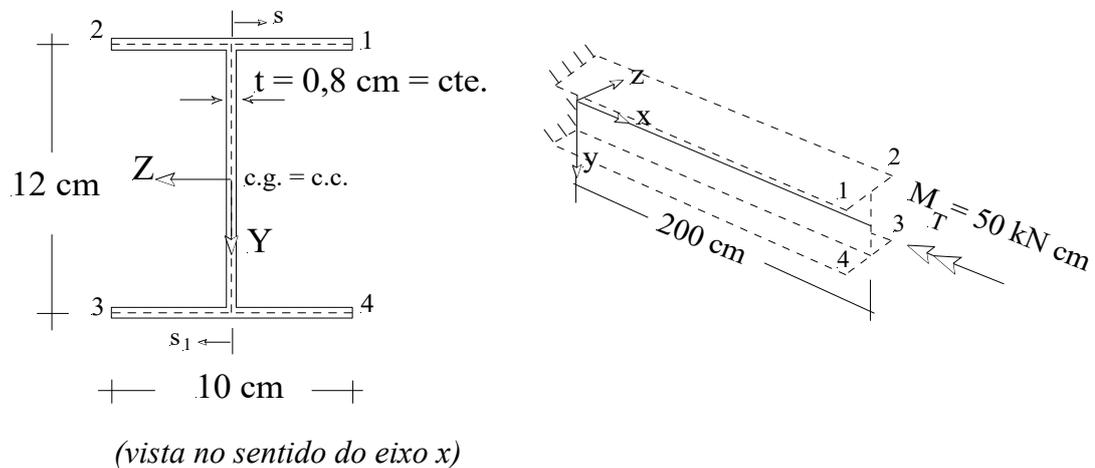


Figura 6 – Barra em balanço sob torção não-uniforme

Usando os dados geométricos da seção, calculam-se o momento de inércia à torção, a área setorial e o momento setorial de inércia:

$$I_T = \frac{1}{3} \int_{l.e.} t^3 ds = \frac{1}{3} (0,8)^3 (12 + 20) = 5,46 \text{ cm}^4$$

$$\omega = \int_0^{s,s_1} n ds = \begin{cases} 6.s & -5 \leq s \leq 5 \\ 6.s_1 & -5 \leq s_1 \leq 5 \end{cases}$$

O diagrama de área setorial resultante está mostrado na Figura 7, mais adiante.

$$I_\omega = \int_{l.e.} \omega^2 t ds = 2.t \int_{-5}^5 (6.s)^2 ds = 4800 \text{ cm}^4$$

Com os resultados anteriores e as propriedades do material, determina-se:

$$\mu^2 = \frac{G I_T}{E I_\omega} = \frac{8000 \cdot 5,46}{20000 \cdot 4800} = 0,000455 \rightarrow \mu \cong 0,0213$$

Em função da vinculação da barra (fixamente engastada numa extremidade e livre na outra), podem ser aplicadas diretamente as relações (31) para o cálculo das parcelas de momento de torção:

$$T(x) = M_T \left[1 - \frac{\cosh \mu(L-x)}{\cosh(\mu L)} \right] = 50 \left[1 - \frac{\cosh 0,0213(200-x)}{35,41} \right]$$

$$M_{ft}(x) = M_T \left[\frac{\cosh \mu(L-x)}{\cosh(\mu L)} \right] = 50 \left[\frac{\cosh 0,0213(200-x)}{35,41} \right]$$

Tomando-se, em particular, as seções nas extremidades da barra, obtêm-se para cada uma das parcelas:

$$T(0) = 50 \left[1 - \frac{\cosh 0,0213(200-0)}{35,41} \right] = 0; \quad T(200) \cong 48,6 \text{ kN cm};$$

$$M_{ft}(0) = 50 \left[\frac{\cosh 0,0213(200-0)}{35,41} \right] = 50 \text{ kN cm}; \quad M_{ft}(200) \cong 1,4 \text{ kN cm}$$

O giro absoluto da seção da ponta do balanço calcula-se com a relação (30):

$$\varphi(200) = \frac{50}{8000 \cdot 5,46} \left[200 - \frac{\sinh(0,0213 \cdot 200)}{0,0213 \cdot 35,41} \right] = 0,175 \text{ rd} \cong 10^\circ$$

Note-se que a convenção para o giro positivo é de sentido anti-horário para o observador olhando a seção no sentido do eixo x . Do ponto de vista contrário, tendo o momento aplicado como referência, conclui-se, como esperado, que o giro calculado concorda com o sentido do momento aplicado.

Para o cálculo do empenamento, emprega-se a relação (11a), observando-se que no caso da torção não-uniforme $\varphi' = \varphi'(x)$. Em primeiro lugar, particularizando a (29a) para o exemplo em análise, resulta:

$$\varphi'(x) = \frac{M_T}{GI_T} \left[1 - \frac{\cosh \mu(L-x)}{\cosh(\mu L)} \right] = \frac{50}{8000.5,46} \left[1 - \frac{\cosh 0,0213(200-x)}{35,41} \right]$$

Pode-se, então, generalizar a (11a), $u(x,s) = \omega(s) \varphi'(x)$, para a torção não-uniforme. Para o ponto 1 da seção da extremidade livre ($x = 200; s = 5$), determina-se o seguinte resultado para o empenamento (o sinal positivo indica deslocamento relativo no sentido do eixo x):

$$u(200,5) = \omega(5) \varphi'(200) = 0,0334 \text{ cm.}$$

A tensão normal de flexo-torção pode ser calculada com a (13). Para o seu emprego, no entanto, é necessária a expressão para $\varphi''(x)$, dada pela (29b). Segue, portanto, que:

$$\sigma_{ft}(x,s) = E \varphi''(x) \omega(s) = E \frac{M_T}{GI_T} \mu \left[\frac{\sinh \mu(L-x)}{\cosh(\mu L)} \right] \omega(s)$$

Naturalmente, os pontos mais solicitados à tensão normal estarão na seção pertencente à extremidade fixa e, nela, serão aqueles com maior área setorial associada. Assim sendo, os resultados que seguem dizem respeito aos pontos 1, 2, 3 e 4 (indicados na Figura 6) da seção do engaste fixo.

$$\sigma_{ft1} = 20000 \cdot \frac{50}{8000.5,46} \cdot 0,0213 \left[\frac{\sinh 0,0213(200)}{35,41} \right] \cdot 30 \cong 14,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{ft2} = 20000 \cdot \frac{50}{8000.5,46} \cdot 0,0213 \left[\frac{\sinh 0,0213(200)}{35,41} \right] \cdot (-30) \cong -14,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{ft3} \cong 14,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{ft4} \cong -14,6 \text{ kN/cm}^2$$

A tensão de cisalhamento da flexo-torção é dada pela relação (24):

$$\tau_{ft}(x,s) = - \frac{M_{ft}(x) \cdot S_{\omega}(s)}{t(s) \cdot I_{\omega}}$$

Recuperando a definição do momento estático setorial: $S_{\omega}(s) = \int_{s_1}^s \omega t ds$, observa-se que a integral indicada deve ser feita de um ponto (s_1), na borda,

para o interior da seção, até o ponto de interesse. Geometricamente, a integral representa a área sob o diagrama de área setorial. No caso deste exemplo, o percurso de integração é contrário ao percurso usado para definir o valor da área setorial e, em razão disto, tem-se a seguinte adequação de sinal e limites de integração:

$$S_{\omega}(s) = -\int_5^s 6st \, ds \quad p / 0 \leq s \leq 5$$

Em particular: $S_{\omega}(0) = 60 \text{ cm}^4$.

Na Figura 7 ilustram-se os diagramas de área e momento estático.

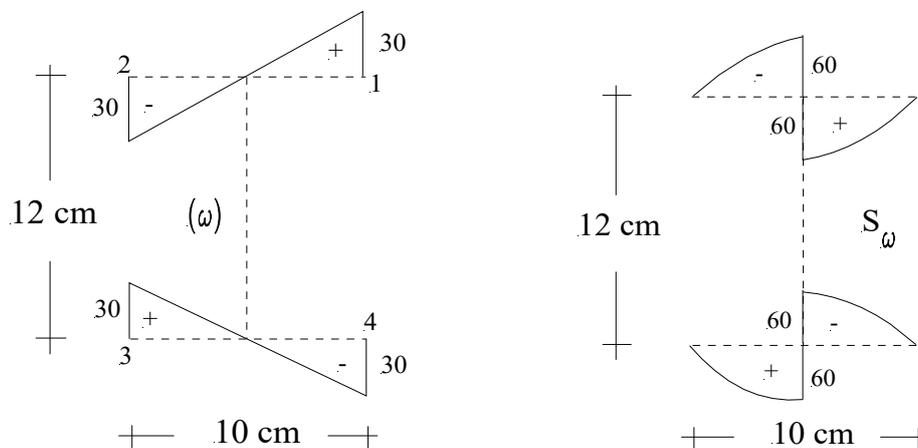


Figura 7 – Diagramas de área e momento estático setorial

O máximo valor para esta tensão encontra-se na seção do engaste fixo, porque ali se encontra o maior momento de flexo-torção, e no ponto de maior momento estático setorial. Em módulo, os pontos posicionados nas origens das coordenadas locais s e s_1 , mostrados na Figura 6, possuem os mesmos valores extremos:

$$|\tau_{f1,2}| = \frac{50.60}{0,8.4800} \cong 0,78 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

4. O bimomento

As tensões de flexo-torção são auto-equilibradas, uma vez que não proporcionam esforço interno resultante dos tipos força normal ou cortante.

Considerando-se, por outro lado, uma situação mais complexa de solicitação externa, tal que combine força normal, flexão oblíqua e torção não-uniforme, num ponto qualquer de uma seção arbitrária da barra aparecem parcelas de tensão normal associadas à força normal, ao momento de flexão e à flexo-torção. Assim, por exemplo, numa representação geral, a tensão normal num ponto sobre a linha do esqueleto, para a seção posicionada em x , fica determinada por:

$$\sigma(x, y, z, s) = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \sigma_{ft}(x, s) \quad (32)$$

onde x , y e z referem-se às coordenadas do ponto em relação a um referencial global (neste referencial Y e Z são eixos principais de inércia da seção), I_z e I_y são os momentos principais de inércia, A é a área da seção, M_z e M_y são as componentes do momento de flexão oblíqua.

É possível, no entanto, dar à parcela de tensão normal de flexo-torção, na (32), uma representação semelhante às outras parcelas. Para isso, introduz-se a definição do *bimomento* (B):

$$B(x) = \int_{s_1}^{s_2} \sigma_{ft}(x, s) \omega(s) t ds \quad (33)$$

O bimomento possui a dimensão de momento multiplicado por uma distância. Nesse particular, há aqui uma analogia que pode ser construída entre o conceito de bimomento e o de binário de forças. Este é definido pelo produto entre a intensidade atribuída à forças paralelas pela distância entre elas, já o bimomento pode ser interpretado como o produto entre a intensidade atribuída à momentos atuantes em planos paralelos pela distância entre os planos.

Voltando à consideração da relação (33), substituindo-se nela a (13), e ainda introduzindo uma conveniente mudança de variável ($dA = t ds$) para melhor indicar a integração na área A da seção, obtém-se:

$$B(x) = E \varphi''(x) \int_A \omega^2 dA \quad (34)$$

Reconhecendo, na relação anterior, o momento setorial de inércia da seção (I_ω), e multiplicando-se ambos os lados da igualdade pela área setorial associada ao ponto arbitrário no qual se deseja determinar a tensão normal de flexo-torção, obtém-se:

$$\sigma_{ft}(x, s) = \frac{B(x)}{I_\omega} \omega(s) \quad (35)$$

A relação (35) apresenta a forma procurada para o emprego na (32).

É importante observar que a (33) admite uma representação mais geral. De fato, sendo verificadas as condições impostas pelas relações (14) e (16), sobre o posicionamento dos eixos de referência e a origem da coordenada local na seção, a definição do bimomento pode ser escrita como função da tensão normal total (σ), expressa na (32). Assim sendo, de forma equivalente à (33), vale a seguinte relação:

$$B(x) = \int_{s_1}^{s_2} \sigma(x, s) \omega(s) t ds \quad (36)$$

Nota-se, ainda, que uma estimativa numérica da última integral pode ser feita mediante a seguinte somatória:

$$B(x) = \sum_{i=1}^n \sigma(x, s_i) \omega(s_i) t_i \Delta s_i \quad (37)$$

onde fica subentendido que a seção foi discretizada num número (n) suficientemente grande de pontos, a cada um dos quais correspondem valores de tensão normal e área setorial, além de uma pequena área adjacente definida por: $t_i \Delta s_i$. Nessa forma, o produto $\sigma(x, s_i) t_i \Delta s_i$ pode ser interpretado como uma força concentrada P_i atuando num ponto de discretização da seção. Assim sendo, a somatória da (37) pode ser indicada por:

$$B = \sum_{i=1}^n P_i \omega_i \quad (38)$$

onde $\omega_i = \omega(s_i)$. Essa concepção numérica permite introduzir a idéia inversa que um bimomento pode ser associado a um dado conjunto de forças axiais aplicadas em pontos de uma seção de extremidade da barra, aos quais correspondam áreas setoriais ω_i . Portanto, uma vez determinado tal bimomento e observada sua relação com o giro de torção da seção, expressa pela (34), conclui-se que forças externas axiais podem provocar giro de torção na seção. Trata-se de um aspecto ‘dual’ ao fato que um

momento de torção pode provocar empenamento (ou deslocamentos axiais) nas seções.

Há, naturalmente, um sinal para o bimomento. Analisando, particularmente, a relação (38), o sinal depende da combinação dos sinais de P_i e ω_i (o sinal da força será positivo quando de tração sobre a seção).

Por outro lado, o bimomento guarda uma relação com o momento de flexo-torção definido pela (23). De fato, tomando-se a primeira derivada da (34) em relação à coordenada longitudinal x , e comparando-a com a (23), pode-se facilmente concluir que:

$$M_{ft} = -B' \quad (39)$$

A relação anterior permite estender o estudo anterior, restrito às situações de momento de torção constante na barra, para o caso de barra submetida à sollicitação externa caracterizada por torção variável ao longo do comprimento. Neste caso, a equação diferencial do problema da torção não-uniforme de barra prismática, representada pela (26), assume forma mais geral:

$$\frac{d(M_T)}{dx} = G I_T \varphi'' - \frac{d(E \varphi''' I_\omega)}{dx} \quad (40)$$

Levando-se em conta tanto a definição do bimomento dada pela (33) quanto sua relação com o momento de flexo-torção expressa na (39), a equação diferencial passa a ser escrita como:

$$\frac{d(M_T)}{dx} = \mu^2 B(x) - B''(x) \quad (41)$$

A parcela à esquerda da igualdade representa a carga de torção distribuída $m=m(x)$, definida de tal modo a caracterizar uma variação contínua da torção ao longo da barra, isto é:

$$dM_T = m dx \quad (42)$$

A solução geral da equação (41), para o caso de m constante, tem a forma:

$$B(x) = C_1 \sinh(\mu x) + C_2 \cosh(\mu x) + \frac{m}{\mu^2} \quad (43)$$

As condições de contorno devem, agora, ser expressas em função do bimomento. Nesse particular, interessa também a seguinte relação:

$$B'(x) = C_1 \mu \cosh(\mu x) + C_2 \mu \sinh(\mu x) \quad (44)$$

O próximo exemplo ilustra uma aplicação que envolve o cálculo do bimomento.

Exemplo 3. A barra indicada na Figura 8 está solicitada na extremidade livre por um sistema auto-equilibrado de forças axiais, que configura um bimomento externo naquela seção. Determinar as expressões para o cálculo das parcelas do momento de torção, do bimomento e dos valores máximos para o giro absoluto, o empenamento e as tensões de flexo-torção. Os dados complementares sobre o material são: $E = 20000 \text{ kN} / \text{cm}^2$; $G = 8000 \text{ kN} / \text{cm}^2$.

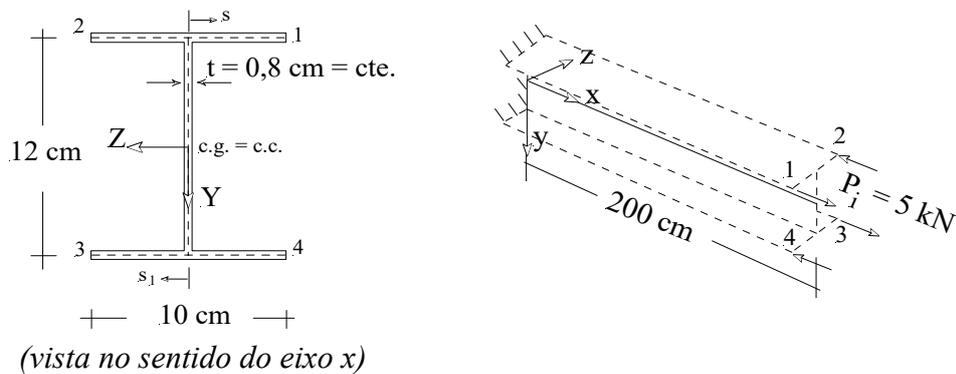


Figura 8 – Barra em balanço sob bimomento

Inicialmente, usando os dados geométricos da seção, calculam-se o momento de inércia à torção, a área setorial e o momento setorial de inércia, cujos equacionamentos são os mesmos do exemplo anterior:

$$I_T = \frac{1}{3} \int_{l.e.} t^3 ds = \frac{1}{3} (0,8)^3 (12 + 20) = 5,46 \text{ cm}^4$$

$$\omega = \int_0^{s, s_1} n ds = \begin{cases} 6.s & -5 \leq s \leq 5 \\ 6.s_1 & -5 \leq s_1 \leq 5 \end{cases}$$

$$I_\omega = \int_{l.e.} \omega^2 t ds = 2.t \int_{-5}^5 (6.s)^2 ds = 4800 \text{ cm}^4$$

Pode-se determinar, também, o seguinte resultado:

$$\mu^2 = \frac{G I_T}{E I_\omega} = \frac{8000 \cdot 5,46}{20000 \cdot 4800} = 0,000455 \rightarrow \mu \cong 0,0213$$

Para a determinação do bimomento ao longo da barra, emprega-se a solução geral dada pela (43), a qual assume a seguinte forma em função dos dados do exemplo:

$$B(x) = C_1 \sinh(0,0213 \cdot x) + C_2 \cosh(0,0213 \cdot x)$$

Uma relação útil no que segue é a (44), particularizada para este caso:

$$B'(x) = C_1 0,0213 \cdot \cosh(0,0213 \cdot x) + C_2 0,0213 \cdot \sinh(0,0213 \cdot x)$$

Em função da vinculação da barra (fixamente engastada e em balanço), devem ser impostas as seguintes condições de contorno:

- Na extremidade livre, em razão da existência das forças axiais aplicadas, o bimomento deve coincidir com o bimomento aplicado.

Para aplicação dessa condição é necessário determinar o valor do bimomento na extremidade livre. Neste sentido, emprega-se a relação (38):

$$B(200) = \sum_{i=1}^4 P_i \omega_i = 4 \cdot 50 \cdot 30 = 6000 \text{ kNcm.cm}$$

- Na extremidade fixa o empenamento é impedido. Assim sendo, considerando-se a relação entre o empenamento e φ' (relação (10)), e deste com o momento de torção livre T (relação (1)), segue que: $u(0) = \varphi'(0) = T(0) = 0$. Tendo-se em vista, ainda, que o momento de torção na seção é constituído de duas parcelas, sendo, neste caso, uma delas nula, resulta que: $M_T(0) = M_{ft}(0)$. Finalmente, com a (37), conclui-se que: $M_T(0) = -B'(0)$.

As duas condições proporcionam o seguinte sistema:

$$C_1 \sinh(0,0213 \cdot 200) + C_2 \cosh(0,0213 \cdot 200) = 6000$$

$$C_1 0,0213 \cosh(0,0213 \cdot 0) + C_2 0,0213 \sinh(0,0213 \cdot 0) = 0$$

A solução do sistema fornece:

$$C_1 = 0,0; \quad C_2 = 169,5.$$

Assim sendo, para o bimomento escreve-se a seguinte solução:

$$B(x) = 169,5 \cdot \cosh(0,0213 \cdot x)$$

Os valores nas seções das extremidades são:

$$B(0) = 169,5 \text{ kN cm.cm}; \quad B(200) = 6000 \text{ kNcm.cm}$$

A parcela de momento de flexo-torção resulta:

$$M_{ft}(x) = -B'(x) = -3,6 \cdot \sinh(0,0213 \cdot x)$$

Os valores limites são:

$$M_{ft}(0) = 0,0 \text{ kN.cm}; \quad M_{ft}(200) = -127,4 \text{ kN.cm}$$

A parcela de torção livre é simplesmente igual à parcela do momento de flexo-torção com sinal trocado; portanto, seus valores limites resultam:

$$T(0) = 0,0; \quad T(200) = 127,4 \text{ kN.cm}$$

Para o cálculo do giro absoluto da seção da ponta do balanço, parte-se da relação (34), reproduzida na forma:

$$\varphi''(x) = \frac{1}{EI_\omega} B(x)$$

Integrando-se uma primeira vez, obtém-se:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{EI_\omega} [7957,7 \cdot \sinh(0,0213 \cdot x)] + C_3$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI_\omega} [373603,1 \cdot \cosh(0,0213 \cdot x)] + C_3 x + C_4$$

As novas constantes de integração podem ser determinadas pelas condições:

$$\varphi'(0) = 0 \text{ e } \varphi(0) = 0.$$

Segue que: $C_3 = 0,0$; $C_4 \cong -0,00389$.

Para o giro na extremidade do balanço resulta:

$$\varphi(200) = 0,1378 \text{ rd} \cong 7,9^\circ.$$

O empenamento pode ser determinado com a relação:

$$u(x, s) = \omega(s) \varphi'(x)$$

Para o ponto 1 da seção da extremidade livre ($x = 200$; $s = 5$), determina-se o seguinte resultado para o empenamento (o sinal positivo indica deslocamento relativo no sentido do eixo x):

$$u(200,5) = \omega(5) \varphi'(200) \cong 0,09 \text{ cm}.$$

A tensão normal de flexo-torção pode ser calculada com a (35):

$$\sigma_{ft}(x, s) = \frac{B(x)}{I_\omega} \omega(s)$$

Os pontos mais solicitados à tensão normal estarão na seção com maior bimomento e, nela, serão aqueles com maior área setorial associada. Assim sendo, os resultados que seguem dizem respeito aos pontos 1, 2, 3 e 4 (indicados na Figura 8) da seção da extremidade livre.

$$\sigma_{ft1} = \frac{6000}{4800} \cdot 30 \cong 37,5 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\sigma_{ft2} = \frac{6000}{4800} \cdot -30 \cong -37,5 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\sigma_{ft3} \cong 37,5 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\sigma_{ft4} \cong -37,5 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

A tensão de cisalhamento da flexo-torção é dada pela relação (24):

$$\tau_{ft}(x, s) = -\frac{M_{ft}(x) \cdot S_\omega(s)}{t(s) \cdot I_\omega}$$

O máximo valor para esta tensão encontra-se na seção da extremidade livre, porque ali se encontra o maior momento de flexo-torção, e no ponto de maior momento estático setorial. Em módulo os pontos posicionados nas origens das coordenadas locais s e s_1 , mostrados na Figura 8, possuem os mesmos valores extremos. Analogamente ao exemplo anterior, tem-se nesses pontos: $S_\omega(0) = 60 \text{ cm}^4$. Finalmente:

$$|\tau_{f1,2}| = \frac{12,7 \cdot 60}{0,8 \cdot 4800} \cong 0,2 \text{ kN/cm}^2$$

Exemplo 4. A barra indicada na Figura 9, de comprimento 300 cm, está fixamente engastada na extremidade à qual está atrelado o sistema de referência. Na extremidade livre atua uma força concentrada axial de valor 100 kN. Pede-se determinar o valor do giro na extremidade livre e as tensões normais na seção fixa.

Dados complementares do material: $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$; $G/E = 0,36$.

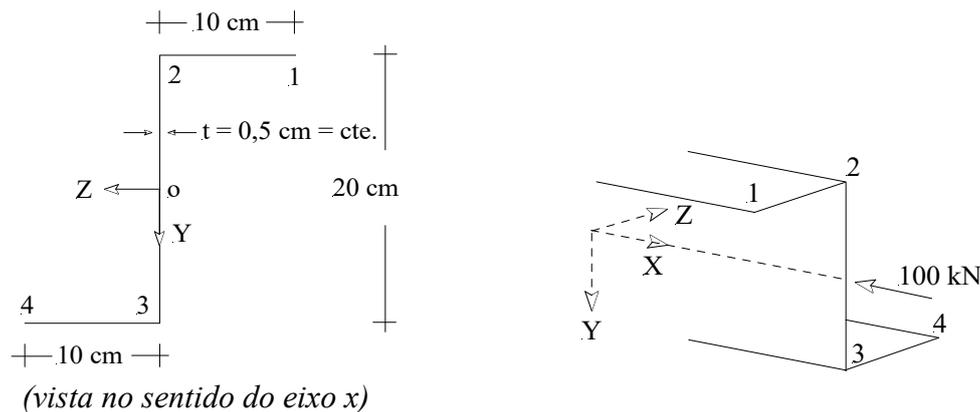


Figura 9 – Barra sob força concentrada axial

Inicialmente, com os dados geométricos da seção, calculam-se o momento de inércia à torção, a área setorial e o momento setorial de inércia.

Para o momento de inércia à torção resulta:

$$I_T = \frac{1}{3} \int_{l.e.} t^3 ds = \frac{1}{3} (0,5)^3 (10 + 10 + 20) = 1,667 \text{ cm}^4$$

Para a área setorial, pode-se, em princípio, adotar para origem local o ponto O indicado na Figura 9, que coincide com o c.g. e o c.c. da seção. Neste caso, obtém-se o diagrama de área setorial ilustrado na Figura 10, à esquerda.

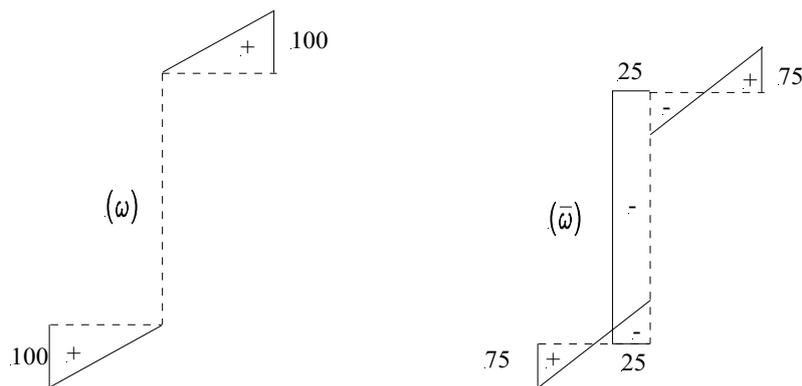


Figura 10 – Diagramas de área setorial

Entretanto, o diagrama obtido não satisfaz a condição: $\int_{l.e.} \omega t ds = 0$ e, assim sendo, a origem escolhida para a origem local não é adequada. Como os valores de área setorial correspondentes à duas origens distintas para a coordenada local diferem entre si de uma constante, pode-se escrever que:

$$\omega = \bar{\omega} + C \text{ ou } \bar{\omega} = \omega - C$$

onde $\bar{\omega}$ indica a nova área setorial que atende à condição: $\int_{l.e.} \bar{\omega} t ds = 0$.

Segue o desenvolvimento:

$$\int_{l.e.} \bar{\omega} t ds = \int_{l.e.} (\omega - C) t ds = 0 \rightarrow C = \frac{\int_{l.e.} \omega t ds}{\int_{l.e.} t ds}$$

Claramente $\int_{l.e.} \omega t ds$ representa a área sobre o diagrama de área setorial e, portanto:

$$C = 2 \cdot \frac{100 \cdot 10}{2} \cdot \frac{t}{20} = 25$$

Resulta que o novo diagrama de área setorial é obtido do anterior descontando-se o valor de C calculado. A Figura 10, à direita, ilustra o novo diagrama.

O momento setorial de inércia determina-se pelo seguinte desenvolvimento:

$$I_{\omega} = \int_{l.e.} \omega^2 t ds = 25^2 \cdot t \cdot 20 + 2 \cdot \int_0^{10} (10 \cdot s - 25)^2 \cdot t \cdot ds = 20833,3 \text{ cm}^6$$

Com os resultados anteriores, calcula-se:

$$\mu = \frac{G I_T}{E I_{\omega}} = \sqrt{\frac{0,36 \cdot 1,667}{20833,3}} \cong 0,0054$$

Para a determinação do bimomento ao longo da barra, emprega-se a solução geral dada pela (43), a qual assume a seguinte forma:

$$B(x) = C_1 \sinh(0,0054 \cdot x) + C_2 \cosh(0,0054 \cdot x)$$

Uma relação útil no que segue é a (42):

$$B'(x) = C_1 \cdot 0,0054 \cdot \cosh(0,0054 \cdot x) + C_2 \cdot 0,0054 \cdot \sinh(0,0054 \cdot x)$$

Em função da vinculação da barra (fixamente engastada em balanço), devem ser impostas as seguintes condições de contorno:

- Na extremidade livre, em razão da existência das forças axiais aplicadas, o bimomento deve coincidir com o bimomento aplicado.

Para aplicação dessa condição é necessário determinar o valor do bimomento na extremidade livre. Neste sentido, emprega-se a relação (38):

$$B(200) = P_1 \omega_1 = -100 \cdot -25 = 2500 \text{ kNcm}^2$$

- Na extremidade fixa o empenamento é impedido. Analogamente ao exemplo anterior, conclui-se que: $M_T(0) = -B'(0) = 0$.

As duas condições proporcionam o seguinte resultado:

$$C_1 = 0,0; \quad C_2 = 952,2$$

Assim sendo, para o bimomento escreve-se a seguinte solução:

$$B(x) = 952,2 \cdot \cosh(0,0054 \cdot x)$$

Para o cálculo do giro absoluto da seção da ponta do balanço, parte-se da relação (35), reproduzida na forma:

$$\varphi''(x) = \frac{1}{EI_{\omega}} B(x)$$

Integrando-se uma primeira vez, obtém-se:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{EI_{\omega}} [176333,3 \cdot \sinh(0,0054 \cdot x)] + C_3$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI_{\omega}} [32654321 \cdot \cosh(0,0054 \cdot x)] + C_3 x + C_4$$

As novas constantes de integração podem ser determinadas pelas condições:

$$\varphi'(0) = 0 \text{ e } \varphi(0) = 0.$$

Segue que: $C_3 = 0,0$; $C_4 \cong -0,0784$.

Para o giro na extremidade do balanço (o comprimento da barra é 300 cm) resulta:

$$\varphi(200) = 0,1274 \text{ rd} \cong 7,3^{\circ}.$$

A tensão normal de flexo-torção pode ser calculada com a (35):

$$\sigma_{ft}(x, s) = \frac{B(x)}{I_{\omega}} \omega(s)$$

Escolhendo-se, em particular, o ponto coincidente com o c.g. da seção da extremidade fixa, determina-se:

$$\sigma_{fto} = \frac{952,2}{20833,3} \cdot (-25) \cong -1,14 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

A tensão normal total no mesmo ponto é obtida sobrepondo-se os efeitos da força normal aplicada (P) e da flexo-torção:

$$\sigma(s) = -\frac{P}{A} + \sigma_{ft}(s)$$

A área da seção transversal possui valor: 20 cm^2 . Assim sendo, resulta:

$$\sigma = -6,14 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

CAPÍTULO 5 NERVURAS E O EFEITO DE ABERTURAS EM ASAS

1. Introdução

Este capítulo vem complementar a abordagem simplificada, inicialmente desenvolvida quando se tratou da determinação dos fluxos de cisalhamento nas chapas e das forças axiais nos reforços de arranjos que compõem as estruturas das asas e fuselagens. Tal abordagem teve continuidade na análise de painéis reforçados. Trata-se, agora, da análise das nervuras de asas e do efeito de aberturas inseridas nas cascas de revestimento das asas sobre a distribuição dos fluxos de cisalhamento e forças axiais nas barras de reforço longitudinal.

A Figura 1a mostra um trecho de asa e os elementos estruturais que a compõem, com destaque para a nervura ('rib'), as longarinas ('spar') e as barras de reforço ('stringer').

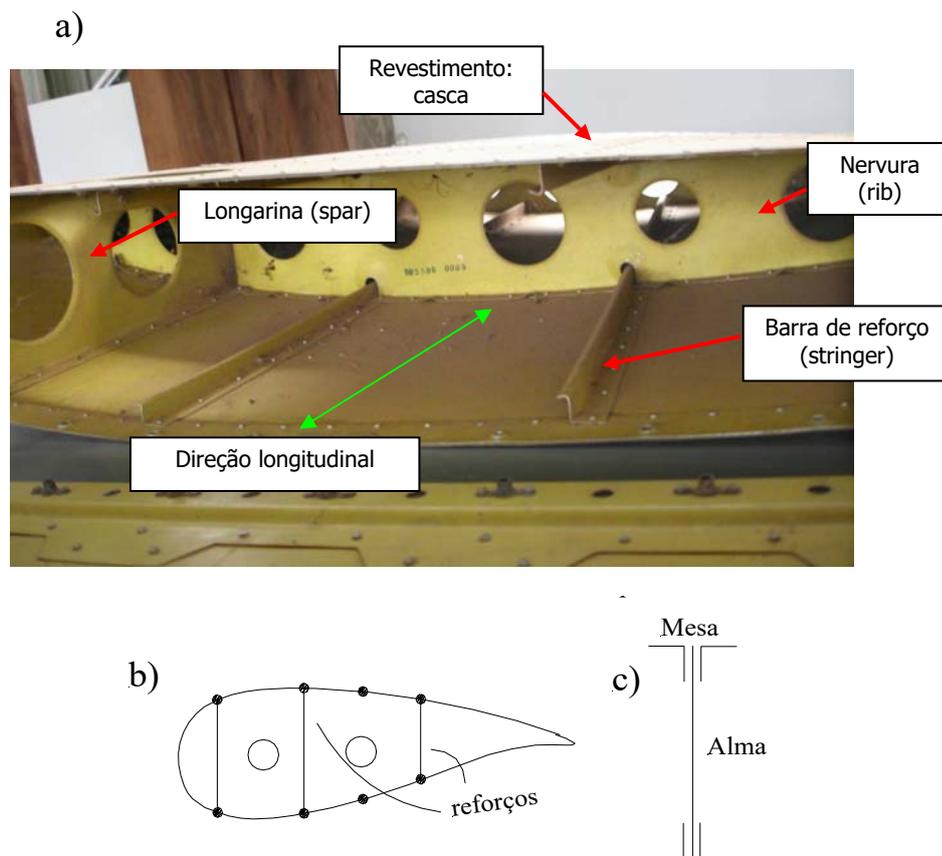


Figura 1 – Trecho de asa com nervura

As nervuras são elementos que contribuem para a estabilização das longarinas e barras de reforço; de fato, elas introduzem um travamento

transversal sobre aqueles elementos, diminuindo seus ‘comprimentos de flambagem’; estes passam a ser definidos pelas distâncias entre nervuras. Além disso, as nervuras podem receber forças concentradas aplicadas no seu plano.

Esquemáticamente, as nervuras podem ser idealizadas como painéis reforçados, de contornos curvos, como ilustrado na Figura 1b. Naquela ilustração, os reforços verticais indicados decorrem da intersecção do plano da nervura com as almas das longarinas; já os reforços de contorno resultam da intersecção com as cascas de revestimento. Na mesma figura mostram-se, também, alguns pontos em negrito que resultam das idealizações tanto das cantoneiras que formam as mesas das longarinas e das seções transversais das barras longitudinais de reforço, quanto da parcela de resistência à tensão normal das longarinas e cascas de revestimento.

Por outro lado, a Figura 1c mostra um esquema da seção transversal de uma longarina, com destaque para as mesas formadas por cantoneiras. Observando-se as longarinas num trecho entre nervuras, elas também podem ser representadas no seu plano na forma de um painel reforçado.

2. Análise simplificada de nervura

O primeiro exemplo trata da análise de uma nervura que foi posicionada em determinada seção da asa para receber forças externas concentradas aplicadas no seu plano.

Exemplo 1. Determinar os fluxos nas células e as forças normais nos reforços da nervura idealizada ilustrada na Figura 2.

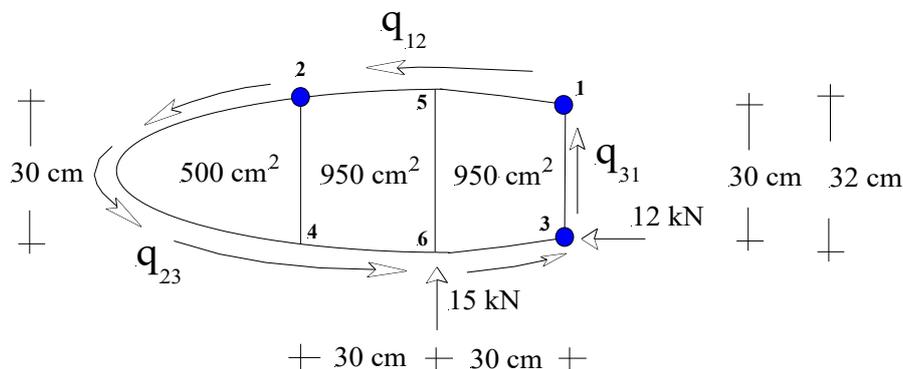


Figura 2 – Nervura idealizada

Entendendo, por um lado, a nervura como um elemento inserido na asa e ligado ao restante da estrutura, as forças concentradas nela aplicadas são

transmitidas pelas suas bordas para as cascas de revestimento e, à direita, para a alma da longarina. Por esse motivo, quando se considera a nervura isolada do sistema, para fins de sua análise estrutural, o diagrama de corpo livre deve indicar não somente as forças aplicadas no seu plano, mas também os fluxos recebidos nas bordas, por efeito de reação das cascas de revestimento e da alma da longarina.

Tais fluxos são admitidos como constantes entre os pontos de reforço que idealizam as áreas resistentes à flexão; suas resultantes horizontais e verticais devem ser tais a estabelecer um sistema em equilíbrio com as forças concentradas aplicadas. Portanto, para a determinação dos fluxos valem as seguintes condições de equilíbrio em forças:

$$-60.q_{12} + 60.q_{23} = 12$$

$$-30.q_{31} + 30.q_{23} = 15$$

Nota-se que os valores que aparecem multiplicando os fluxos referem-se às projeções horizontais das distâncias entre os pontos extremos dos trechos aonde se definem cada um deles.

Pelo equilíbrio dos momentos das forças em torno do ponto 3, resulta:

$$2.950.q_{12} + 2.(500 + 950).q_{23} = 15.30$$

Neste caso, aplicou-se a definição conhecida do momento de um fluxo em relação a um ponto: multiplicação do fluxo por duas vezes a área definida entre o ponto de referência e os pontos extremos do trecho aonde se define o fluxo.

A solução do sistema formado pelas relações de equilíbrio fornece:

$$q_{12} = -0,027 \text{ kN/cm}; \quad q_{23} = 0,173 \text{ kN/cm}; \quad q_{31} = -0,327 \text{ kN/cm}.$$

Uma vez determinados os fluxos nas bordas é possível passar ao cálculo dos fluxos em cada célula, bem como das forças normais nos reforços. Uma observação importante, neste sentido, é que a existência dos fluxos nas bordas impõe variações sobre os fluxos no interior de cada célula; por conta dessa variação, opta-se por determinar os valores dos mesmos nas regiões de fronteira entre células.

Assim, por exemplo, o diagrama de corpo livre da célula situada na ponta da nervura, isolada do restante da estrutura mediante um corte transversal

imediatamente à esquerda do reforço (2-4), está ilustrado na Figura 3. Destaca-se, neste diagrama, a indicação das forças normais nos reforços, cujos sentidos foram adotados, à partida, de modo a equilibrar os momentos dos fluxos de cisalhamento, considerando-se um ponto arbitrário no interior da célula.

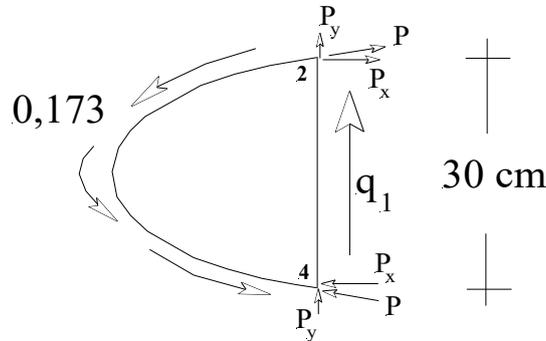


Figura 3 – Parte da nervura idealizada

Em particular, tomando-se como referência um ponto situado, por exemplo, na parte central do trecho aonde atua q_1 , as componentes horizontais das forças normais no reforço de contorno compõem um binário que deve equilibrar o momento dos fluxos. Por simetria, essas forças são iguais, valendo, então, a seguinte relação:

$$P_x \cdot 30 = 0,173 \cdot 2 \cdot 500 \quad \rightarrow \quad P_x = 5,77 \text{ kN}.$$

As correspondentes componentes verticais podem ser determinadas por:

$$P_y = P_x \cdot \text{tg}(15) = 1,54 \text{ kN}.$$

Consequentemente, as forças normais tangenciando os reforços na posição do corte resultam:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = 6,0 \text{ kN}.$$

O fluxo q_1 pode, então, ser determinado considerando-se a resultante das forças verticais:

$$q_1 \cdot 30 + 2P_y = 0,173 \cdot 30 \quad \rightarrow \quad q_1 = 0,07 \text{ kN/cm}.$$

Na Figura 4, mostra-se o diagrama de corpo livre da parte de nervura situada à esquerda do reforço vertical 5-6.

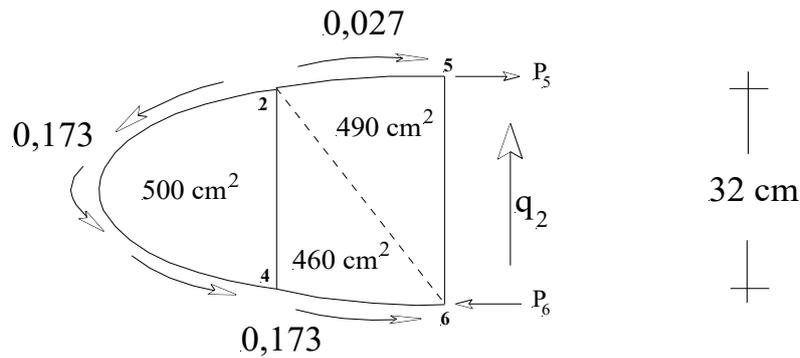


Figura 4 – Parte da nervura idealizada

As forças normais P_5 e P_6 (iguais) nos reforços de contorno, são, agora, horizontais. A força P_5 , por exemplo, pode ser determinada tomando-se os momentos das forças com relação ao ponto 6. Resulta, portanto, que:

$$P_5 \cdot 32 = -0,027 \cdot 2 \cdot 490 + 2 \cdot (500 + 460) \cdot 0,173$$

$$P_5 = 9,55 \text{ kN}.$$

Por outro lado, do equilíbrio de forças na vertical obtém-se:

$$32 \cdot q_2 = 0,173 \cdot 31 - 0,027 \cdot 1$$

$$q_2 = 0,1667 \text{ kN/cm}$$

Na Figura 5, mostra-se o diagrama de corpo livre da parte de nervura situada à esquerda do reforço vertical 1-3.

Nota-se que, neste caso, apesar da simetria geométrica não há mais simetria de forças, o que induz forças normais diferentes nos reforços de contorno.

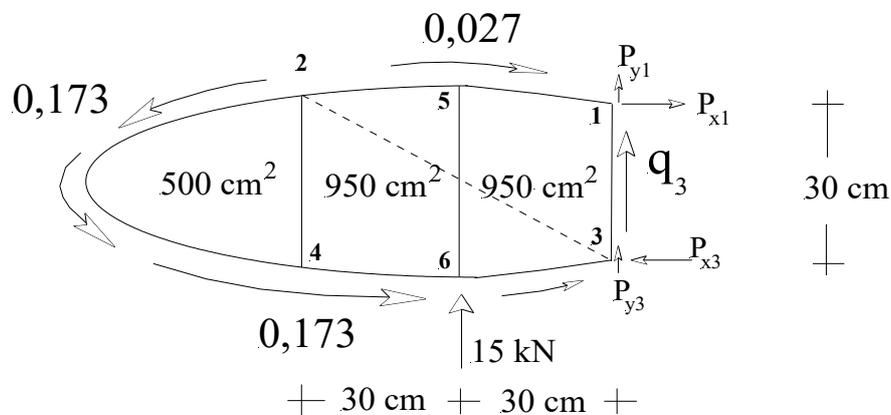


Figura 5 – Parte da nervura idealizada

Em primeiro lugar, o momento das forças em relação ao ponto 3 resulta:

$$-0,027 \cdot 2.950 + 2 \cdot (500 + 950) \cdot 0,173 - 15 \cdot 30 - P_{x1} \cdot 30 = 0$$

$$P_{x1} = 0,0133 \text{ kN}.$$

A componente P_{y1} resulta muito pequena e pode ser desconsiderada.

Do equilíbrio de forças na horizontal, calcula-se:

$$(0,173 + 0,027) \cdot 60 - P_{x1} + P_{x3} = 0$$

$$P_{x3} = 12 \text{ kN}.$$

Segue que:

$$P_{y3} = P_{x3} \cdot \text{tg}(15) = 3,216 \text{ kN}.$$

Consequentemente, a força normal (de compressão) no reforço de contorno na altura do ponto 3 resulta:

$$P = \sqrt{P_{x3}^2 + P_{y3}^2} = 12,4 \text{ kN}.$$

Finalmente, por equilíbrio de forças na vertical, determina-se:

$$30 \cdot q_3 = -15 + 0,173 \cdot 30 + 3,216$$

$$q_3 = -0,22 \text{ kN/cm}.$$

3. Efeito de aberturas no revestimento das asas

O exemplo deste item pretende ilustrar o efeito de aberturas ou vazios, introduzidos nas asas, sobre os fluxos de cisalhamento nas chapas que compõem tanto a casca revestimento, quanto as almas das longarinas e das nervuras. Estuda-se em particular o caso de fluxo provocado por torção.

Além das hipóteses simplificadoras usuais relativas aos comportamentos das chapas e reforços, admite-se que os efeitos de uma abertura numa célula da asa (parte limitada por pares de longarinas e nervuras) se limitam, de modo mais significativo, às células vizinhas. Por este motivo, o exemplo apresentado considera um trecho de asa contendo três células com abertura na célula central.

Exemplo 2. A Figura 6 ilustra um arranjo estrutural simplificado de asa compreendendo três células, sendo que a intermediária apresenta uma abertura (ausência de revestimento) na sua parte inferior. O conjunto está submetido à torção.

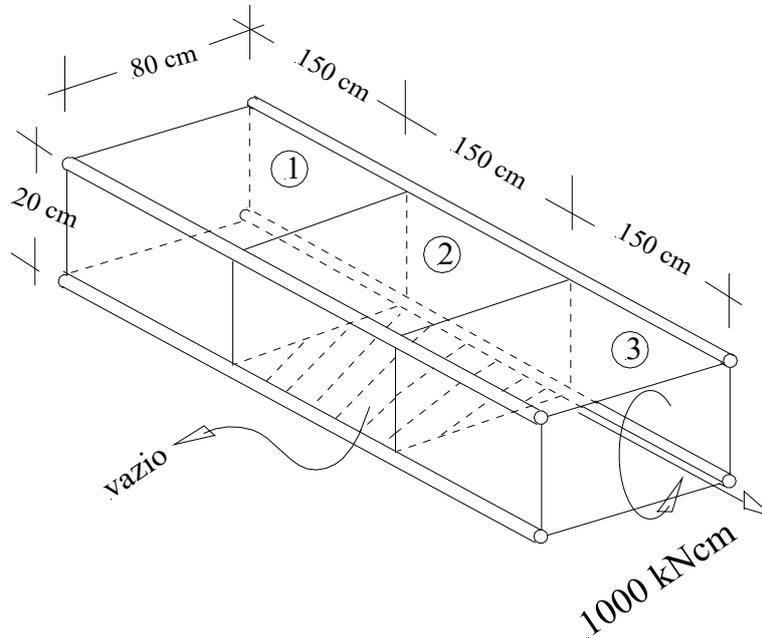


Figura 6 – Trecho de asa com abertura inferior

Uma avaliação inicial, e que ajudará no entendimento do efeito da abertura, consiste em determinar os fluxos nas chapas, por efeito da torção, na hipótese de inexistência de abertura. Nesta condição a análise se resume ao cálculo do fluxo por torção em seção fechada de uma célula, conforme indica a Figura 7.

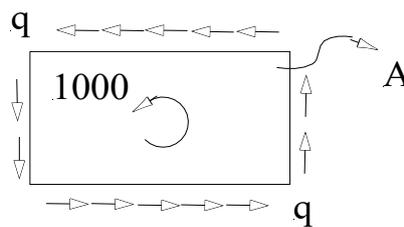


Figura 7 – Fluxos por torção em seção fechada

A relação de equivalência, já deduzida em capítulo anterior, fornece:

$$q \cdot 2A = 1000 \quad \therefore \quad q = \frac{1000}{2 \cdot 80 \cdot 20} = 0,3125 \text{ kN/cm}$$

Portanto, na ausência de aberturas tanto as chapas de revestimento quanto as das almas das longarinas ficariam submetidas a fluxos de iguais

intensidades. Além disso, a análise do equilíbrio dos reforços longitudinais permite concluir que os mesmos não ficariam solicitados por forças normais.

Na situação com abertura, as células passam a apresentar rigidezes à torção distintas. De fato, as células 1 e 3 permanecem com seções transversais fechadas e, por este motivo, apresentam grande rigidez à torção. Ao contrário, a abertura introduzida na célula 2 confere às suas seções transversais uma rigidez à torção muito inferior em comparação com a seção fechada. Entre as células fechadas, portanto, configura-se um trecho de asa caracterizado por seções transversais abertas. Entretanto, independente da rigidez relativa das células, a torção deve se transmitir ao longo da asa e o mecanismo responsável por esta transmissão na célula 2 é a flexão induzida nas longarinas, conforme indica a Figura 8.

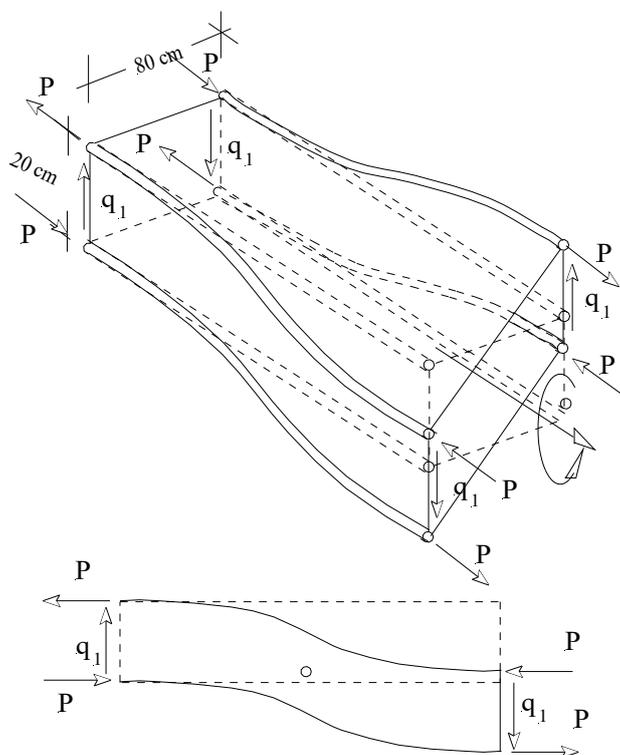


Figura 8 – Flexão das longarinas induzida pela torção na célula 2

De fato, idealizando o trecho central como uma barra de seção delgada aberta, o regime que se estabelece é o de flexo-torção, uma vez que o empenamento é impedido nas seções de extremidade do trecho pelas células fechadas adjacentes. Conforme visto no capítulo anterior, a flexo-torção em barras de seção delgada aberta se caracteriza por flexões de partes da seção, as quais aparecem de modo a compatibilizar o

impedimento ao empenamento como giro de torção. Neste exemplo, porém, a abordagem do fenômeno é propositalmente simplificada.

O que essencialmente se deseja enfatizar é a flexão assimétrica das longarinas por efeito do giro relativo entre as seções das extremidades da célula 2 (supostamente muito pequeno e, por este motivo, a deformação é representada desconsiderando-se o empenamento longitudinal). Tal flexão caracteriza-se pelo aparecimento de momentos solicitantes iguais nas extremidades e por um ponto de inflexão, ou de mudança de curvatura, na seção central da célula.

Porque, por hipótese, somente os reforços longitudinais são capazes de contribuir para a resistência à flexão, os momentos associados à flexão de cada longarina ficam caracterizados por binários formados por forças normais P , como ilustra a Figura 8¹. Como as flexões nas duas longarinas são invertidas, os esforços correspondentes em cada uma delas resultam também invertidos, comparativamente.

Ao mesmo tempo, nas almas das longarinas aparecem fluxos de cisalhamento q_l ; as forças normais P nos reforços e os fluxos q_l devem ter intensidades tais a verificar o equilíbrio de momentos no plano longitudinal da longarina.

Nota-se que a chapa de revestimento superior, da célula com abertura, resulta sem fluxo, pois sua existência seria incompatível com o equilíbrio de forças da seção aberta submetida à torção. No confronto com a seção fechada, conclui-se que a abertura na célula central induz fluxos de cisalhamento que se restringem somente às chapas que compõem as almas das longarinas.

Considerando-se, portanto, uma seção transversal da célula com abertura, os fluxos q_l , nas duas longarinas, devem produzir um momento equivalente ao momento de torção aplicado:

$$q_l \cdot 20 \cdot 80 = 1000 \quad \therefore q_l = 0,625 \text{ kN/cm}$$

As intensidades das forças normais P nos reforços ficam determinadas pelo equilíbrio de momentos no plano longitudinal da longarina (*):

$$2P \cdot 20 = q_l \cdot 20 \cdot 150 \quad \therefore P = 46,875 \text{ kN}$$

¹ Na flexo-torção o par de momentos caracterizados quando se observam as duas longarinas configura um bimomento.

(*) O equilíbrio do reforço isolado também leva à mesma conclusão sobre o valor de P .

Passando à célula 3, a análise do seu equilíbrio permite determinar os fluxos nas chapas que a formam.

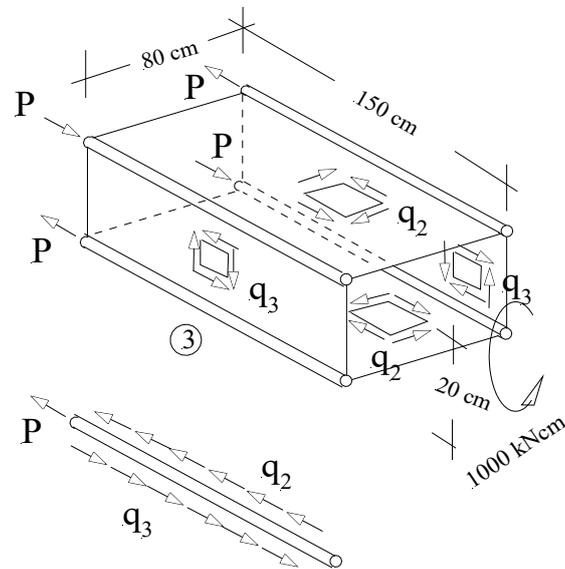


Figura 9 – Forças nos reforços e fluxos nas chapas da célula 3

A Figura 9 ilustra as forças e fluxos envolvidos nessa análise (estes com sentidos arbitrários). O equilíbrio de um dos reforços fornece:

$$(q_2 - q_3) \cdot 150 = P \quad \therefore \quad (q_2 - q_3) = 0,3125$$

A equivalência entre o momento de torção aplicado e os fluxos da seção transversal (fechada) da célula fica expressa por:

$$q_3 \cdot 20 \cdot 80 + q_2 \cdot 80 \cdot 20 = 1000 \quad \therefore \quad (q_2 + q_3) = 0,625$$

Das duas condições anteriores resultam:

$$q_2 = 0,46875 \text{ kN/cm}; \quad q_3 = 0,15625 \text{ kN/cm}$$

Finalmente, com relação às nervuras, por exemplo, aquela entre as células 2 e 3, os fluxos nos seus contornos ficam determinados pelas contribuições dos fluxos das chapas a elas adjacentes, conforme ilustra a Figura 10.

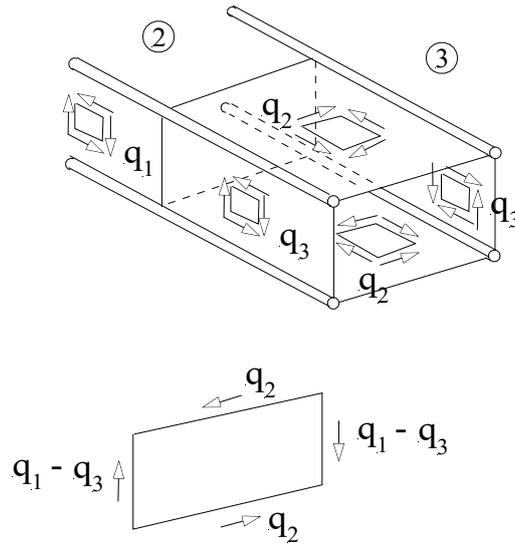


Figura 10 – Fluxos externos na nervura

Uma última análise interessante a fazer neste exemplo é comparativa, isto é, o confronto entre os fluxos determinados no início da resolução, para a situação sem abertura, com os determinados por efeito da abertura. Conclui-se que na célula que contém a abertura, ocorre solicitação adicional nas chapas das longarinas e alívio de solicitação nas chapas de revestimento; efeito inverso acontece nas células vizinhas, sem abertura.

CAPÍTULO 6 MEF NA ANÁLISE BIDIMENSIONAL

1. Introdução.

Já foi visto anteriormente que o Princípio dos Trabalhos Virtuais oferece uma metodologia eficiente para a análise de estruturas.

A depender da forma como o P.T.V. é expresso, à ele equivale a satisfação da condição de equilíbrio ou da condição de compatibilidade. Neste último caso, a construção dos trabalhos virtuais envolve os produtos de deslocamentos e deformações *reais* compatíveis por forças externas e esforços internos virtuais em equilíbrio, respectivamente. No capítulo dedicado ao cálculo de deslocamentos em estruturas planas de barras, a forma do princípio que equivale à condição de compatibilidade foi explorada.

Já na forma do princípio que equivale à condição de equilíbrio, a construção dos trabalhos virtuais envolve os produtos de deslocamentos e deformações virtuais compatíveis entre si por forças externas e esforços internos *reais* em equilíbrio, respectivamente.

É importante destacar que tanto numa quanto noutra forma os campos virtuais adotados, apesar da independência teórica em relação aos campos reais, são determinantes em relação à qualidade das respostas obtidas. Por exemplo, o grau de regularidade dos campos virtuais internos de tensão ou deformação restringe, a um grau semelhante, a regularidade dos respectivos campos reais.

Em termos relativos, quando considerada a questão da implementação computacional, a forma do P.T.V. equivalente à condição de equilíbrio é mais interessante que a de compatibilidade, pois é mais simples elaborar rotinas computacionais para a geração de campos de deformações virtuais compatíveis do que campos de tensões virtuais equilibrados, particularmente quando se analisam estruturas hiperestáticas.

O método dos elementos finitos, em particular, oferece uma eficiente maneira de geração sistemática de funções de aproximação, e que pode ser facilmente implementada computacionalmente. A aplicação do MEF sobre o P.T.V. na forma equivalente à condição de equilíbrio, permite obter soluções aproximadas de grande representatividade para problemas em

engenharia de estruturas. Este tema foi abordado na disciplina Mecânica das Estruturas Aeronáuticas I na análise de estruturas planas de barras.

Neste capítulo, o tema é estendido para a obtenção de soluções aproximadas de problemas estruturais que envolvem sólidos bidimensionais.

2. O MEF em problemas planos.

Para um sólido cuja geometria (volume V e superfície de contorno Γ ¹), vinculação e forças aplicadas possam ser representadas no plano (x - y), conforme indicado na Figura 1, as grandezas envolvidas, em geral variáveis de ponto a ponto, são as seguintes:

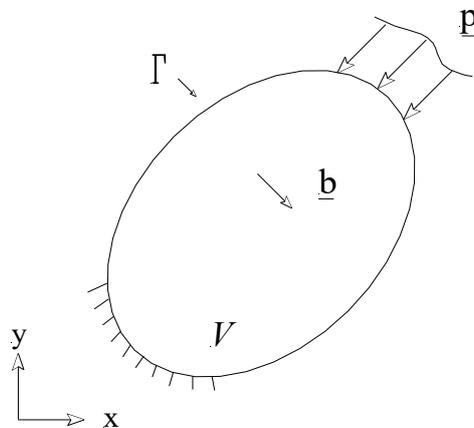


Figura 1 – Sólido com representação contida no plano x - y

- Grandeza primária (*vetorial*): campo² de deslocamentos, com componentes nas direções dos eixos de referência x e y , representadas, respectivamente, por $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$. Esse campo pode ser expresso em notação matricial por:

$$\underline{d} = \underline{d}(x, y) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (1)$$

- Grandeza secundária (*vetorial*): campo de deformações

¹ O contorno é composto por regiões complementares onde se prescrevem forças ou deslocamentos.

² A palavra "campo" indica uma grandeza cuja definição vale ponto a ponto do corpo.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

- Grandeza secundária (*vetorial*): campo de tensões

$$\underline{T} = \underline{T}(x, y) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Em conjunto, as grandezas arroladas devem, em cada ponto, obedecer às restrições de equilíbrio, compatibilidade e modelo constitutivo.

A rigor, há que se diferenciar entre estado plano de tensão e estado plano de deformação.

O primeiro se caracteriza quando a dimensão da estrutura na direção ortogonal ao plano (no caso, a direção z) for muito pequena em comparação às dimensões do sólido no plano. Nesta condição, são desprezíveis eventuais componentes de tensão normal ou de cisalhamento, $(\sigma_z, \tau_{xz}$ e $\tau_{yz})$, naquela direção.

No estado plano de deformação a dimensão na direção ortogonal ao plano é muito maior do que as dimensões do sólido no plano. Outra característica particular deste estado é que o carregamento aplicado apresenta-se invariável segundo aquela direção. Nessas condições as componentes de deformação linear e angular, $(\varepsilon_z, \gamma_{xz}$ e $\gamma_{yz})$, associadas à direção ortogonal ao plano são desprezíveis.

O fato de não existirem componentes de tensão (ou deformação) na direção ortogonal ao plano não significa que não possam existir componentes de deformação (ou tensão) segundo aquela direção. Quando existirem, as componentes não-nulas de deformação ou de tensão na direção ortogonal ao plano, respectivamente para os estados planos de tensão e de deformação, poderão ser determinadas ‘à posteriori’ em função das componentes no plano.

Voltando à análise do conjunto de restrições, que deve ser obedecido pelas grandezas envolvidas no problema plano, a restrição de compatibilidade, ou

de consistência, estabelece que a variação espacial do campo de deslocamentos define o campo de deformações:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Introduzindo a matriz B dos operadores de derivadas parciais, a relação anterior pode ser escrita matricialmente como:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{\underline{B}} \underline{d} \quad (5)$$

Quanto ao modelo constitutivo (representativo da resposta do material), o que se adota aqui é a Lei de Hooke Generalizada (material apresentando comportamento elástico-linear) com isotropia. Assim sendo, a relação entre os vetores de tensão e deformação pode ser colocada matricialmente na forma:

$$\underline{T} = \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon} \quad (6)$$

Se o estado plano considerado for o de tensão, a matriz constitutiva tem as seguintes componentes:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (7a)$$

Já se o estado plano considerado for o de deformação, a matriz constitutiva tem as seguintes componentes:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (7b)$$

O equilíbrio é expresso mediante o Princípio dos Trabalhos Virtuais e a relação que o define, usando de notação matricial, é a seguinte:

$$\int_V \underline{\underline{\delta \varepsilon}}^T \underline{T} dV = \int_V \underline{\underline{\delta d}}^T \underline{b} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\underline{\delta d}}^T \underline{p} d\Gamma \quad \forall \underline{\underline{\delta d}} \quad (8)$$

sendo V o volume ocupado pelo sólido, Γ_σ a parte da superfície de contorno com forças externas prescritas, \underline{b} o vetor das forças de corpo (por unidade de volume), \underline{p} o vetor das forças distribuídas por unidade de superfície, $\underline{\underline{\delta d}}$ o campo de deslocamentos virtuais admissíveis e $\underline{\underline{\delta \varepsilon}}$ o campo de deformações virtuais compatíveis com $\underline{\underline{\delta d}}$. Em particular, a compatibilidade do campo de deformações virtuais se exprime pela relação:

$$\underline{\underline{\delta \varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\delta d}} \quad (9)$$

As condições de compatibilidade (5) e (9), bem como a relação constitutiva (6), podem ser inseridas na relação do P.T.V. Nessas condições a relação do Princípio assume a forma:

$$\int_V \underline{\underline{\delta d}}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{d} dV = \int_V \underline{\underline{\delta d}}^T \underline{b} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\underline{\delta d}}^T \underline{p} dS \quad \forall \underline{\underline{\delta d}} \quad (10)$$

O Método dos Elementos Finitos propõe a construção de aproximações para o campo de deslocamentos (considerando cada uma de suas componentes) a partir da combinação linear de valores discretos destes mesmos deslocamentos associados a um número finito (n) de pontos definidos no sólido, conforme indicam as relações que seguem:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2 + \dots + u_n \phi_n \\ \tilde{v} &= v_1 \phi_1 + v_2 \phi_2 + \dots + v_n \phi_n \end{aligned} \quad (11 \text{ a,b})$$

Essas relações podem ser reunidas numa única forma matricial que representa a aproximação sobre o campo de deslocamentos:

$$\underline{\tilde{d}} = \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{u}} \\ \underline{\tilde{v}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \cdots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\phi}} \underline{d}_n \quad (12)$$

As mesmas funções de aproximação podem ser adotadas para o campo de deslocamentos virtuais, ou seja:

$$\underline{\delta \tilde{d}} = \underline{\underline{\phi}} \underline{\delta d}_n \quad (13)$$

A partir das aproximações adotadas também os campos de deformações e deformações virtuais podem ser aproximados, conforme indicam as relações seguintes:

$$\underline{\tilde{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\phi}} \underline{d}_n$$

$$\underline{\delta \tilde{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\phi}} \underline{\delta d}_n \quad (14a,b)$$

Todos os campos aproximativos do MEF podem ser então, inseridos na expressão do P.T.V., que passa a ser interpretada como uma representação ‘discretizada’ do equilíbrio. A relação resultante escreve-se:

$$\int_V \underline{\delta d}_n^T \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\phi}} \underline{d}_n dV = \int_V \underline{\delta d}_n^T \underline{\underline{\phi}}^T \underline{b} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\delta d}_n^T \underline{\underline{\phi}}^T \underline{p} dS \quad \forall \underline{\delta d}_n \quad (15)$$

A condição para que a relação anterior seja válida para qualquer que seja $\underline{\delta d}_n$ é a seguinte:

$$\int_V \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\phi}} \underline{d}_n dV = \int_V \underline{\underline{\phi}}^T \underline{b} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\underline{\phi}}^T \underline{p} dS \quad (16)$$

Notando-se que o vetor \underline{d}_n é uma constante na primeira integral, a (16) pode ainda ser escrita como:

$$\left[\int_V \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\phi}} dV \right] \underline{d}_n = \int_V \underline{\underline{\phi}}^T \underline{b} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\underline{\phi}}^T \underline{p} dS \quad (17)$$

A relação anterior define um sistema de equações lineares cujas incógnitas são as componentes do vetor \underline{d}_n . A matriz dos coeficientes do sistema recebe o nome de *matriz de rigidez da estrutura* e tem a seguinte representação:

$$\underline{K} = \int_V (\underline{B}\underline{\phi})^T \underline{D} (\underline{B}\underline{\phi}) dV \quad (18)$$

Já o vetor independente recebe o nome de *vetor das forças nodais equivalentes*, sendo determinado por:

$$\underline{F} = \int_V \underline{\phi}^T \underline{b} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\phi}^T \underline{p} dS \quad (19)$$

O sistema linear pode finalmente ser expresso na forma:

$$\underline{K} \underline{d}_n = \underline{F} \quad (20)$$

sendo constituído por um conjunto de $2n$ equações, onde n é o número de parcelas que compõem cada uma das combinações lineares que aparecem nas (11).

Novamente é importante salientar que de acordo com o Método dos Elementos Finitos os valores discretos que compõem o vetor \underline{d}_n , e que são utilizados na construção das aproximações do campo de deslocamentos, são atrelados a nós distribuídos arbitrariamente no domínio e sobre o contorno do sólido em análise. O conjunto de nós pode então ser interligado caracterizando uma rede cujas malhas, regulares ou não, podem ser formadas por elementos finitos triangulares ou quadrangulares, conforme ilustra a Figura 2a.

O MEF propõe ainda que as funções aproximativas ϕ_i ($i=1, \dots, n$) sejam geradas em cada nó, conforme indicado na figura 2b, pelas contribuições de funções definidas exclusivamente sobre os domínios de cada um dos elementos que tem o nó em questão como vértice comum. Cada função contribuinte possui valor unitário no nó base e valor nulo nos outros nós do elemento.

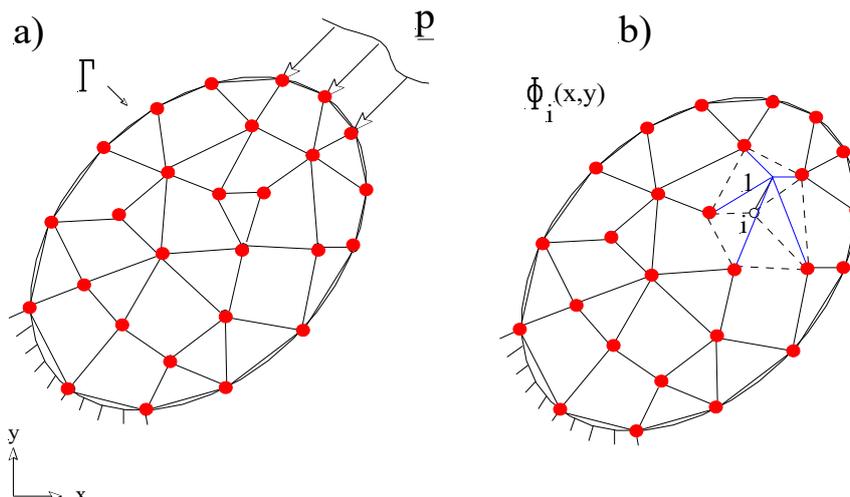


Figura 2 – Discretização do domínio: rede de malhas irregulares

A idéia de formação da função aproximativa em cada nó pela composição de funções definidas nos elementos que o contém tem implicações sobre a construção do próprio sistema resolvente (20). Na verdade, passa-se a entender que o sistema final resulta das contribuições de cada elemento. Naturalmente o P.T.V. vale para cada elemento e , neste sentido, definem-se, para cada elemento finito (e), uma matriz de rigidez e um vetor de forças nodais, respectivamente indicados por \underline{K}^e e \underline{F}^e . Assim sendo, a contribuição do conjunto de elementos para o sistema final fica representada na forma:

$$\underline{K} = \sum_e \underline{A}_e^T \underline{K}^e \underline{A}_e ; \quad \underline{F} = \sum_e \underline{A}_e^T \underline{F}^e \quad (21a,b)$$

onde \underline{A}_e são matrizes que fazem o gerenciamento das posições assumidas pelas componentes das matrizes de cada elemento no sistema global, de acordo com a correspondência entre as numerações (previamente estabelecidas) global e local dos nós.

A construção da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais de cada elemento segue a mesma metodologia anterior que levou à matriz e ao vetor de forças nodais de todo o sistema. Essencialmente, admite-se que um elemento finito, triangular³, por exemplo, seja um sólido discretizado por três nós, posicionados nos seus vértices (v. Figura 3).

Em cada nó definem-se dois graus de liberdade com o significado de componentes de deslocamento segundo as direções dos eixos de referência. Os deslocamentos de um ponto qualquer do elemento são então

³ Este é o elemento plano mais simples.

aproximados a partir de combinações lineares ('interpolação') dos valores nodais:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^e &= u_1^e \psi_1 + u_2^e \psi_2 + u_3^e \psi_3 \\ \tilde{v}^e &= v_1^e \psi_1 + v_2^e \psi_2 + v_3^e \psi_3 \end{aligned} \quad (22a,b)$$

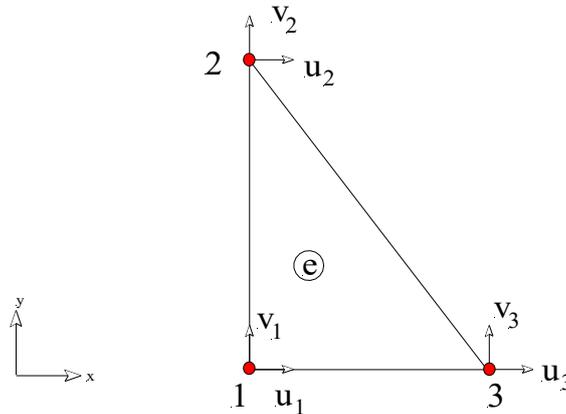


Figura 3 – Elemento triangular com três nós

Essas aproximações podem ser reunidas numa forma matricial:

$$\underline{\tilde{d}}^e = \begin{Bmatrix} \tilde{u}^e \\ \tilde{v}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\psi}} \underline{\underline{d}}_n^e \quad (23)$$

As funções ψ_i ($i = 1,2,3$) são polinômios lineares completos em x e y , genericamente representados na forma:

$$\psi_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i \quad (24)$$

sendo que as constantes são determinadas pela imposição das restrições sobre os valores (unitário ou nulo) que cada função deve assumir nos nós do elemento. Essas restrições podem ser resumidas na forma:

$$\psi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j=i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases} \quad c / i, j = 1,2,3 \quad (25)$$

As restrições acima, aplicadas a cada função ψ_i geram um conjunto de três equações que permitem identificar as correspondentes constantes: a_i , b_i e c_i . As expressões que determinam as constantes podem ser arranjadas na seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \\ (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{bmatrix} \quad (26)$$

onde em cada uma das três colunas reúnem-se os valores das constantes para as funções ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 , respectivamente. Na relação anterior A indica a área do elemento triangular e, em função das coordenadas dos nós, pode ser calculada mediante o seguinte determinante:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (27)$$

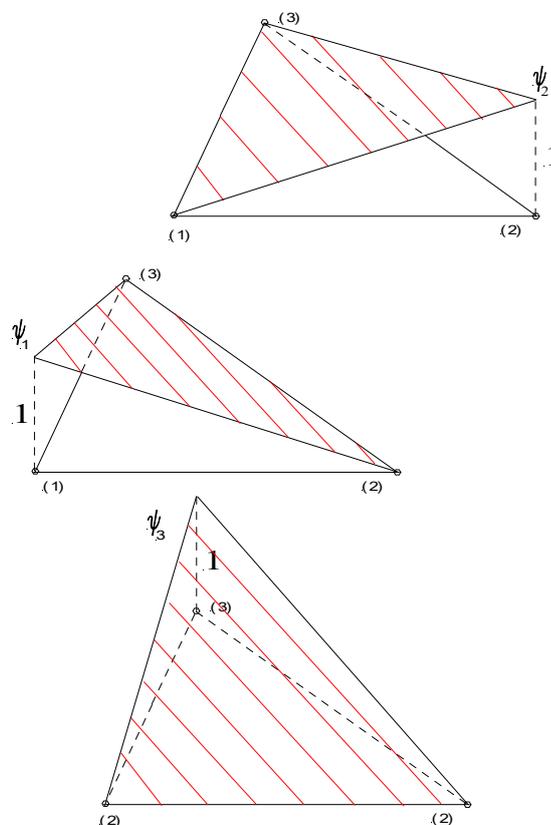


Figura 4 – Funções de forma lineares

Na Figura 4 representam-se as chamadas *funções de forma* definidas pela (24).

A *matriz de rigidez do elemento* pode ser obtida a partir de uma definição análoga àquela indicada na (18), restringindo-se a integração ao domínio do elemento:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{V_e} \underline{\underline{\psi}}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\psi}} dV_e \quad (28)$$

Nota-se que a matriz de rigidez apresenta ordem (6x6). Por outro lado, tendo-se em vista que a aproximação adotada para os deslocamentos é linear e que as deformações, conforme define a relação (5), decorrem de derivadas em primeira ordem da aproximação, conclui-se que o regime de deformações no interior do elemento resulta constante. Consequentemente, mediante a relação constitutiva linear, conclui-se que também o regime de tensões resulta constante. Assim, o elemento triangular em questão é ainda referenciado como *elemento triangular de deformação constante*.

Por sua vez, o *vetor de forças nodais equivalentes* do elemento, de ordem (6x1), resulta da seguinte relação:

$$\underline{\underline{F}}^e = \int_{V_e} \underline{\underline{\psi}}^T \underline{\underline{b}} dV_e + \int_{\Gamma_{\sigma_e}} \underline{\underline{\psi}}^T \underline{\underline{p}} d\Gamma_e \quad (29)$$

Cabe observar que uma vantagem da aproximação linear no elemento é garantir a continuidade dos deslocamentos também na fronteira entre elementos (neste caso, a aproximação é dita *conforme*); a desvantagem é que não se preserva continuidade através das fronteiras entre elementos já na primeira ordem de derivada.

Objetivando gerar aproximações globais com maior grau de continuidade, seguindo um procedimento análogo, porém com custo algébrico maior, é possível obter aproximações descritas por polinômios de grau superior. Por exemplo, um polinômio completo do segundo grau envolve seis parâmetros a determinar. Considerando-se que cada uma das componentes de deslocamento, u e v , venham a ser aproximadas por um polinômio deste grau, doze graus de liberdade estarão envolvidos, sendo dois por nó. Assim sendo, para construir esta aproximação é preciso distribuir seis nós no elemento triangular, por exemplo, dispendo-os nos vértices e nos meios dos lados.

Uma observação interessante é que o triângulo de Pascal fornece a regra para a construção de polinômios completos de qualquer grau em duas

variáveis, conforme indica a Figura 5. Nota-se que o próprio posicionamento dos monômios guarda analogia com os nós a serem distribuídos nos vértices e lados dos elementos triangulares correspondentes.

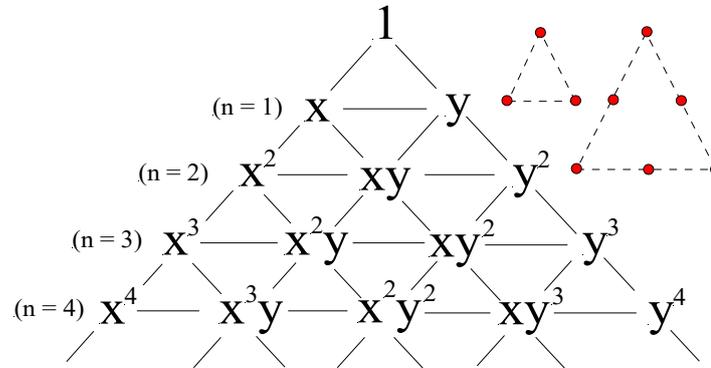


Figura 5 – Triângulo de Pascal

Por outro lado, o elemento quadrangular de quatro nós, ilustrado na Figura 6, consiste em alternativa simples para a geração de aproximações em análises planas e pode ser empregado em conjunto com o elemento triangular.

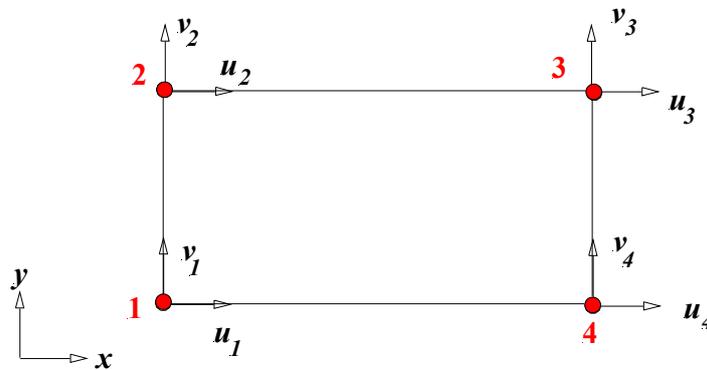


Figura 6 – Elemento quadrangular com quatro nós

Analogamente ao elemento triangular, dois graus de liberdade são definidos em cada nó, com o significado de componentes de deslocamento segundo as direções dos eixos de referência. Os deslocamentos num ponto qualquer do elemento são então aproximados a partir de combinações lineares dos valores nodais:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^e &= u_1^e \psi_1 + u_2^e \psi_2 + u_3^e \psi_3 + u_4^e \psi_4 \\ \tilde{v}^e &= v_1^e \psi_1 + v_2^e \psi_2 + v_3^e \psi_3 + v_4^e \psi_4 \end{aligned} \quad (30a,b)$$

Essas aproximações podem ser reunidas numa forma matricial:

$$\underline{\tilde{d}}^e = \begin{Bmatrix} \tilde{u}^e \\ \tilde{v}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\psi}} d_n^e \quad (31)$$

Obviamente o aumento no número de variáveis envolvidas, comparando-se com o elemento triangular, implica em aumento na ordem das matrizes obtidas com esta aproximação.

As funções ψ_i ($i=1,2,3,4$) são polinômios ditos bilineares em x e y , genericamente representados na forma:

$$\psi_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i x y + d_i \quad (32)$$

Analogamente ao elemento triangular, as constantes resultam da imposição dos valores (unitário ou nulo) que cada função deve assumir nos nós do elemento. Essas restrições podem ser resumidas na forma:

$$\psi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j=i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases} \quad c / i, j = 1, 2, 3 \quad (33)$$

As aproximações globais geradas com o emprego dos elementos quadrangulares são também conformes (com continuidade entre elementos), porém uma diferença em relação aos elementos triangulares de três nós é que as deformações resultam lineares no interior dos elementos.

A regra de geração das aproximações de grau superior em duas variáveis para o elemento quadrangular também pode ser obtida do triângulo de Pascal. No entanto, é mais simples de visualizá-la pela representação da matriz resultante do produto dos vetores formados pelos monômios em x e y , conforme indicado em seguida:

	1	x	x^2	x^3	x^4	...
1	1	x	x^2	x^3	x^4	...
y	y	xy	x^2y	x^3y	x^4y	...
y^2	y^2	xy^2	x^2y^2	x^3y^2	x^4y^2	...
y^3	y^3	xy^3	x^2y^3	x^3y^3	x^4y^3	...
y^4	y^4	xy^4	x^2y^4	x^3y^4	x^4y^4	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

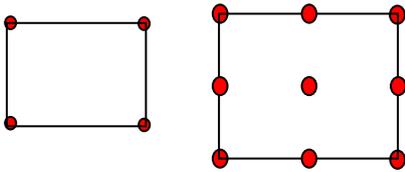


Figura 7 – Funções de aproximação do quadrilátero

Exemplo 1. Considerando um estado plano de tensão, obter a matriz de rigidez para o elemento triangular de deformação constante representado na Figura 8.

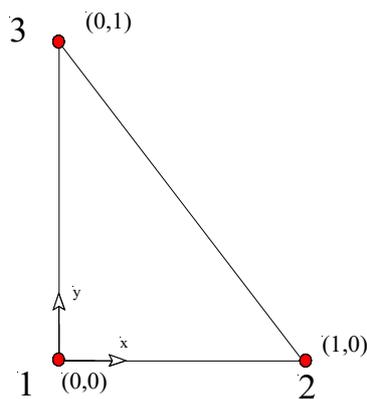


Figura 8 – Elemento triangular de área unitária

A definição da matriz de rigidez é a seguinte:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{V_e} \underline{\underline{\psi}}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\psi}} dV_e$$

Trata-se, inicialmente, de deduzir as matrizes que compõem a definição, considerando-se que as funções de aproximação são dadas por:

$$\psi_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i x y + d_i \quad (c / i = 1, 2, 3)$$

Segue, então, que:

$$\underline{\underline{B}}\underline{\underline{\psi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \psi_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_3}{\partial y} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Levando-se em conta que: $\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = a_i$; $\frac{\partial \psi_i}{\partial y} = b_i$; $2A=I$, os parâmetros da combinação linear são determinados por:

$$\begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, resulta:

$$\underline{\underline{B}}\underline{\underline{\psi}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma vez que:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

Todo o integrando que define a matriz de rigidez fica representado por uma matriz cujos componentes são constantes. Por outro lado, admitindo-se uma situação de espessura (ℓ) constante, a integral no volume do elemento se transforma numa integral na área vezes a espessura, de modo que resulta:

$$\underline{\underline{K}}^e = \frac{1}{2} \underline{\underline{\psi}}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\psi}} \ell$$

Ou

$$\underline{\underline{K}}^e = \frac{E \ell}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{(3-\nu)}{2} & \frac{(1-\nu)}{2} & -1 & -\frac{(1-\nu)}{2} & -\frac{(1-\nu)}{2} & -\nu \\ \frac{(1-\nu)}{2} & \frac{(3-\nu)}{2} & -\nu & -\frac{(1-\nu)}{2} & -\frac{(1-\nu)}{2} & -1 \\ \frac{2}{-1} & \frac{2}{-1} & 1 & \frac{2}{0} & \frac{2}{0} & \nu \\ -\frac{(1-\nu)}{2} & -\frac{(1-\nu)}{2} & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ -\frac{(1-\nu)}{2} & -\frac{(1-\nu)}{2} & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ \frac{2}{-1} & \frac{2}{-1} & \nu & \frac{2}{0} & \frac{2}{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2. Deduzir o vetor de forças nodais equivalentes do caso indicado na Figura 9.

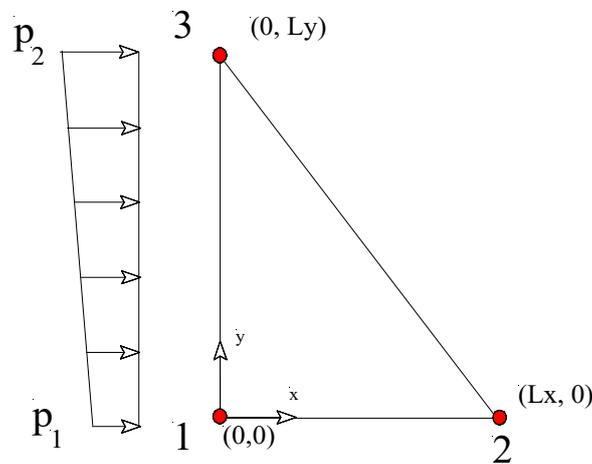


Figura 9 – Distribuição de força em elemento triangular

O vetor de forças nodais é definido por:

$$\underline{\underline{F}}^e = \int_{L_y} \underline{\underline{\psi}}^T \underline{\underline{p}} dL_y$$

Considerando-se que:

$$\underline{\underline{\psi}} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{p}} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix};$$

$$p_x = p_2 \frac{y}{L_y} + p_1 \left(1 - \frac{y}{L_y}\right); \quad p_y = 0;$$

$$\psi_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i x y + d_i \quad (c/ i = 1, 2, 3);$$

$$\begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \\ (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{bmatrix},$$

ou

$$\begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_x L_y} \begin{bmatrix} -L_y & L_y & 0 \\ -L_x & 0 & L_x \\ L_x L_y & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e que ao longo do lado 1-3: $\psi_2 = 0$, resultam:

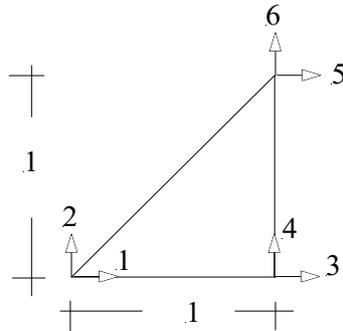
$$\underline{\underline{\psi}}^T \underline{p} = \begin{Bmatrix} \psi_1 p_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_3 p_x \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$\underline{F}^e = \begin{Bmatrix} \int_{L_y} \psi_1 p_x dL_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \int_{L_y} \psi_3 p_x dL_y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{L_y} (1 - \frac{y}{L_y}) \left[p_2 \frac{y}{L_y} + p_1 (1 - \frac{y}{L_y}) \right] dL_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \int_{L_y} (\frac{y}{L_y}) \left[p_2 \frac{y}{L_y} + p_1 (1 - \frac{y}{L_y}) \right] dL_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

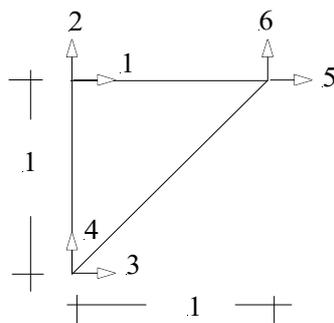
Finalmente:

$$\underline{F}^e = \left\{ \begin{array}{c} \left(p_2 \frac{L_y}{3} + p_1 \frac{L_y}{6} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left(p_2 \frac{L_y}{6} + p_1 \frac{L_y}{3} \right) \\ 0 \end{array} \right\}$$

Exemplo 3. Para os elementos finitos triangulares de deformação constante indicados a seguir são conhecidas as suas respectivas matrizes de rigidez, sendo que em cada elemento as numerações das linhas e colunas (esquerda para a direita e de cima para baixo) têm correspondência com os graus de liberdade numerados.

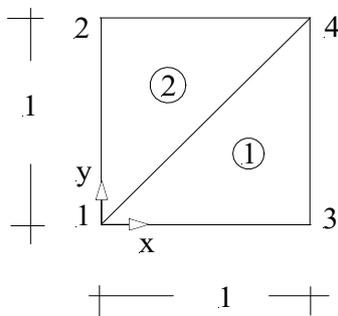


$$\frac{E \ell}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \nu & 0 & -\nu \\ 0 & (1-\nu)/2 & (1-\nu)/2 & -(1-\nu)/2 & -(1-\nu)/2 & 0 \\ -1 & (1-\nu)/2 & (3-\nu)/2 & -(1+\nu)/2 & -(1-\nu)/2 & \nu \\ \nu & -(1-\nu)/2 & -(1+\nu)/2 & (3-\nu)/2 & (1-\nu)/2 & -1 \\ 0 & -(1-\nu)/2 & -(1-\nu)/2 & (1-\nu)/2 & (1-\nu)/2 & 0 \\ -\nu & 0 & \nu & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

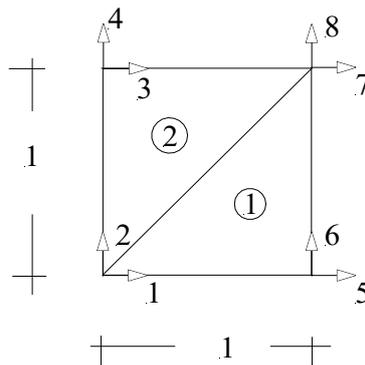


$$\frac{E \ell}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} (3-\nu)/2 & -(1+\nu)/2 & -(1-\nu)/2 & \nu & -1 & (1-\nu)/2 \\ -(1+\nu)/2 & (3-\nu)/2 & (1-\nu)/2 & -1 & \nu & -(1-\nu)/2 \\ -(1-\nu)/2 & (1-\nu)/2 & (1-\nu)/2 & 0 & 0 & -(1-\nu)/2 \\ \nu & -1 & 0 & 1 & -\nu & 0 \\ -1 & \nu & 0 & -\nu & 1 & 0 \\ (1-\nu)/2 & -(1-\nu)/2 & -(1-\nu)/2 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Adotando-se: $\nu = 0,2$; $E = 1$; $\ell = 1$, pede-se determinar a matriz de rigidez da chapa quadrangular discretizada por dois elementos triangulares conforme indicado na figura seguinte.



A matriz de rigidez procurada terá ordem: 8×8 , sendo que as seqüências de suas linhas e colunas terão correspondência com a ordem de numeração dos graus de liberdade nodais:



A montagem da matriz deveria seguir a relação (21 a), entretanto, o mesmo resultado pode ser obtido por um procedimento baseado na re-numeração dos graus de liberdade de cada elemento (e, portanto, das linhas e colunas de suas matrizes) de acordo com a correspondência com a numeração dos graus de liberdade globais.

Por exemplo, as linhas e colunas do elemento 1 passarão a ter a seguinte numeração seqüencial: 1,2,5,6,7 e 8. Já as linhas e colunas do elemento 2 passarão a ter a numeração: 3,4,1,2,7 e 8.

Uma vez definida a nova ordem de numeração, pode-se saber como os elementos das matrizes de cada elemento, de ordem (6X6), serão distribuídos na região (8X8) da matriz de rigidez da chapa.

Considerando, em primeiro lugar, o elemento 1, as componentes da matriz que ocupam as posições locais (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) e (6,6) ocuparão na matriz global as posições: (1,1), (2,2), (5,5), (6,6), (7,7) e (8,8); as componentes locais (2,3), (3,4), (4,6) e (7,8), por exemplo, ocuparão respectivamente as seguintes posições na matriz de rigidez da chapa: (2,5), (5,6), (6,8) e (7,8). As outras posições seguem definição análoga.

Para o elemento 2, as componentes da matriz que ocupam as posições locais (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) e (6,6) ocuparão na matriz global as posições: (3,3), (4,4), (1,1), (2,2), (7,7) e (8,8); as componentes locais (2,3), (3,4), (4,6) e (7,8), por exemplo, ocuparão respectivamente as seguintes posições na matriz de rigidez da chapa: (4,1), (1,2), (2,8) e (7,8).

Naturalmente, somam-se as componentes de cada elemento que sejam endereçadas para uma mesma posição na matriz global.

A matriz final está representada em seguida, levando-se em conta a simetria.

$$\underline{K}_G = \frac{E \ell}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{(3-\nu)}{2} & s & s & s & s & s & s & s \\ 0 & \frac{(3-\nu)}{2} & s & s & s & s & s & s \\ -\frac{(1-\nu)}{2} & \nu & \frac{(3-\nu)}{2} & s & s & s & s & s \\ \frac{(1-\nu)}{2} & -1 & -\frac{(1+\nu)}{2} & \frac{(3-\nu)}{2} & s & s & s & s \\ -1 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{(3-\nu)}{2} & s & s & s \\ \nu & -\frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & -\frac{(1+\nu)}{2} & \frac{(3-\nu)}{2} & s & s \\ 0 & -\frac{(1+\nu)}{2} & -1 & \nu & -\frac{(1-\nu)}{2} & \frac{(1-\nu)}{2} & \frac{(3-\nu)}{2} & s \\ -\frac{(1+\nu)}{2} & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & -\frac{(1-\nu)}{2} & \nu & -1 & 0 & \frac{(3-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

3. O MEF em Problemas Potenciais: análise térmica

Problemas de análise térmica podem ser arranjados em dois grandes grupos:

1 – *Problema estacionário*: o objetivo é descrever, num dado instante, a distribuição de temperatura num sólido cuja superfície de contorno se divide em parte onde a temperatura (T) é prescrita e parte onde se prescreve o fluxo de calor (q).

A Figura 1 ilustra um problema deste tipo. Mostra-se a seção transversal de um tubo submetido à temperaturas diferentes nas faces interna e externa, e com líquido para refrigeração preenchendo um conjunto de vazios circulares distribuídos na espessura. Trata-se de determinar a variação de temperatura ao longo da parede do tubo.

Tomando-se partido da simetria, o problema pode ser abordado considerando-se apenas um segmento, ou setor representativo, também indicado na Figura 10.

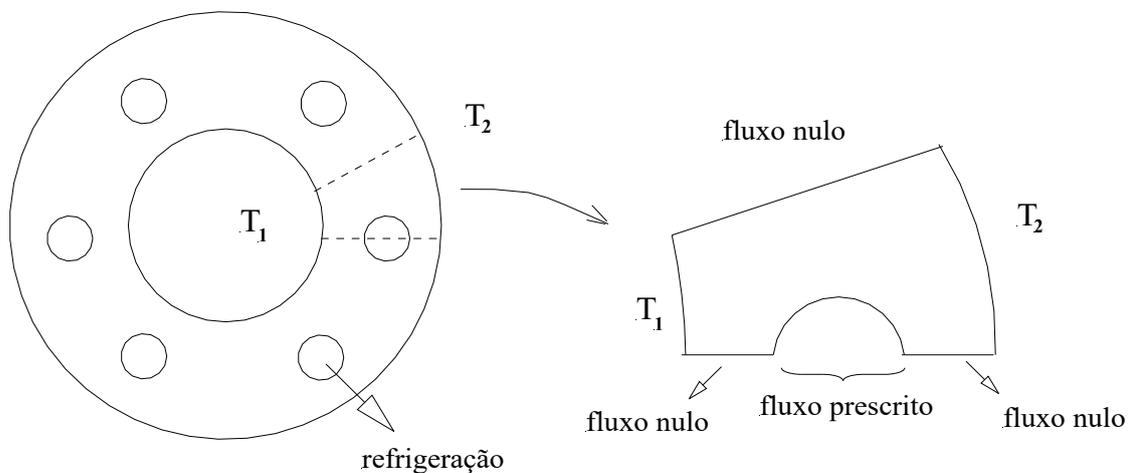


Figura 10 – *Problema estacionário*

O fluxo se relaciona com a perda ou ganho de calor pelo contorno do corpo, ou de uma porção do sólido, por unidade de tempo. Um contorno no qual se prescreve fluxo nulo é um contorno *adiabático*.

Neste tipo de problema, a constante física de interesse é representativa da condutividade térmica (k), com unidade, por exemplo, de: $Watt/m/^{\circ}C$. Em meio considerado isótropo essa constante é única.

2 – Problema de difusão de calor, ou transitório: o objetivo é descrever a variação de temperatura no tempo.

Um caso típico, por exemplo, é o de um sólido aquecido apresentando temperatura uniforme colocado num ambiente em outra temperatura. Ao longo do tempo a temperatura do sólido vai se modificando e o que se deseja é justamente descrever essa variação dentro de certo intervalo de tempo.

As grandezas envolvidas nos problemas mencionados, imaginando-se um domínio plano, são as seguintes:

- Grandeza primária (*escalar*): a temperatura $T = T(x, y)$.
- Grandeza secundária (*vetorial*): o fluxo de calor $\underline{q} = q(x, y) = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}$

A grandeza secundária será objeto de justificativa no que segue.

As seguintes condições devem ser obedecidas nos problemas descritos:

- Consistência;
- Lei de Fourier;
- Balanço de energia.

A condição aqui denominada de *consistência* estabelece que a variação espacial da temperatura componha o vetor gradiente de temperatura:

$$\underline{gradT} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

É possível mostrar que o vetor \underline{gradT} , num ponto arbitrário do sólido, aponta para a direção de maior crescimento da temperatura, conforme se procura ilustrar na Figura 11.

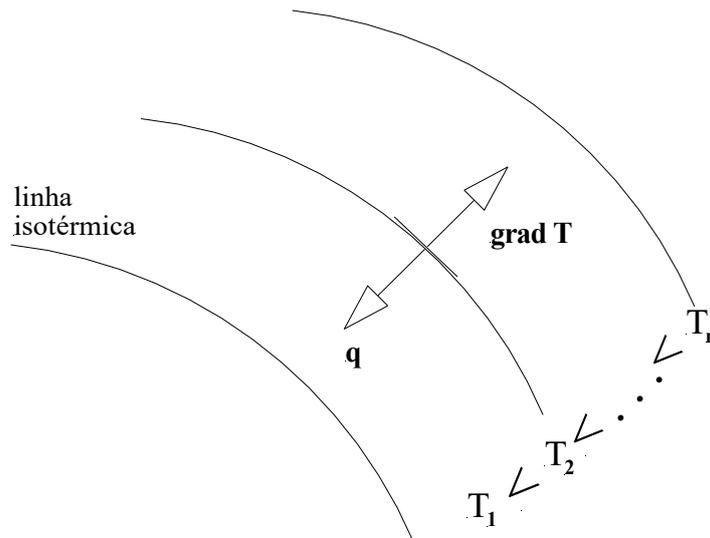


Figura 11 – Vetor gradiente de temperatura e vetor fluxo de calor

A lei de Fourier estabelece que, localmente, em consequência da existência de um gradiente de temperatura aparece um fluxo de calor. Para o caso isotrópico (situação à qual se limita este texto) a relação entre as grandezas envolvidas é de proporcionalidade e pode se exprimir na forma:

$$\underline{q} = -k \underline{\text{grad}T}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = -k \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Essencialmente o fluxo tem mesma direção, mas sentido contrário ao gradiente, conforme mostra a Figura 11 (trata-se de uma evidência experimental: o calor flui da região mais quente para a mais fria!).

Observa-se que a unidade de fluxo de calor pode ser: Watt/m^2 , enquanto que para a unidade do gradiente de temperatura pode-se adotar, por exemplo: $^{\circ}\text{C}/\text{m}$.

Uma definição particular é a do fluxo através do contorno do sólido (v.Fig.12). Trata-se de um valor escalar que corresponde ao valor da projeção do vetor fluxo na direção do versor normal (\underline{n}) ao contorno no ponto:

$$q_n = \underline{q} \cdot \underline{n} \quad (36)$$

onde $\underline{n} = \begin{Bmatrix} \ell \\ m \end{Bmatrix}$, com ℓ e m cossenos diretores.

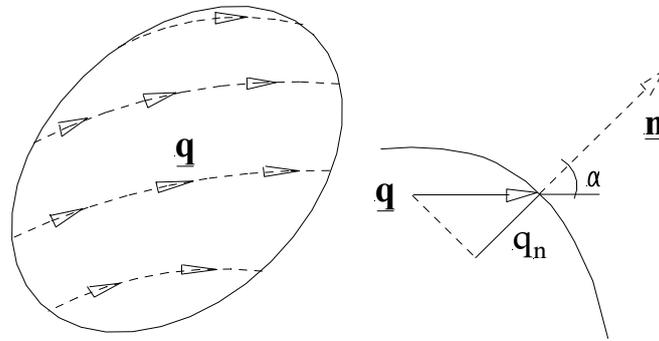


Figura 12 – Fluxo de calor e fluxo normal ao contorno

Balço de energia térmica: num volume elementar ($d\Omega$) do meio, em certo instante de tempo o balanço, ou diferença, entre a quantidade de energia que passa por condução através do contorno e a energia gerada internamente (por reação química, por exemplo) é igual à quantidade de energia que se acumula ou se perde por aquecimento ou resfriamento do meio.

A quantidade de energia que se perde ou se acumula (por ‘*inércia térmica*’) no volume elementar depende da sua capacidade térmica (calor específico) e pode ser medida em função dessa capacidade e da variação de temperatura no tempo.

Representando-se, conforme ilustra a Figura 13, o volume elementar por um paralelepípedo de lados dx e dy , e com espessura s , sendo ainda Q a quantidade de calor gerada internamente por unidade de volume e $c^* \dot{T}$ a taxa de calor medida por unidade de volume (onde c^* é o calor específico, por unidade de volume, com unidade de $Watt/m^3/^\circ C$), o balanço de energia se exprime na forma:

$$q_x s dy + Q s dx dy + q_y s dx - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) s dy - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) s dx = c^* \dot{T} s dx dy \quad (37)$$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + Q = c^* \dot{T} \quad (38)$$

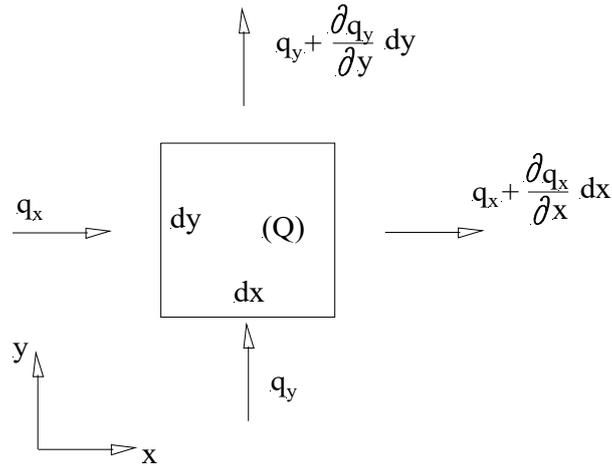


Figura 13 – Balanço de energia

Há casos particulares que podem ser considerados a partir da relação anterior. Se $\dot{T} = 0$, por exemplo, o regime é dito estacionário (ou de equilíbrio térmico); se $Q = 0$ não há produção interna de calor. Considerando-se, então, a situação em que essas duas condições particulares são satisfeitas, obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0$$

ou ainda, introduzindo-se a lei de Fourier,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{39}$$

Por outro lado, sendo $Q \neq 0$, mas limitando-se a abordagem que segue aos problemas de regime estacionário, tem-se:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = Q \text{ ou } k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q = 0 \tag{40 a,b}$$

As relações anteriores podem ser escritas em formas mais compactas empregando-se os operadores *divergente* e *gradiente*:

$$\text{div } \underline{q} = Q \text{ ou } \nabla^2 T = -\frac{Q}{k} \tag{41 a,b}$$

Com vistas à obtenção de soluções aproximadas geradas pelo Método dos Elementos Finitos, é mais conveniente exprimir o problema descrito pelas relações (40) em forma dita *variacional*. Nesse sentido, seja a função:

$$R(T) = \text{div } \underline{q} - Q \quad (42)$$

Pode-se, então, estabelecer que a (41a) seja satisfeita num sentido de média ponderada sobre o domínio do sólido mediante a seguinte condição:

$$\int_{\Omega} R(T) v d\Omega = 0 \quad (43)$$

onde Ω representa o volume do sólido e v é uma função penalidade com regularidade suficiente para que a integral faça sentido (tenha valor finito!). Tendo-se em vista a (42), a relação (43) passa a ser escrita na forma:

$$\int_{\Omega} \text{div } \underline{q} v d\Omega - \int_{\Omega} Q v d\Omega = 0 \quad (44)$$

Valendo-se ainda da representação de $\text{div } \underline{q}$, resulta:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial q_x}{\partial x} v d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial q_y}{\partial y} v d\Omega = \int_{\Omega} Q v d\Omega \quad (45)$$

Procedendo-se à integração por partes das parcelas do lado esquerdo da igualdade anterior, obtém-se:

$$- \int_{\Omega} q_x \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} q_y \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma} q_x v \ell d\Gamma + \int_{\Gamma} q_y v m d\Gamma = \int_{\Omega} Q v d\Omega \quad (46)$$

Introduzindo-se a (35), a relação anterior assume a forma:

$$\int_{\Omega} k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} (\underline{q}^T \underline{n}) v d\Gamma = \int_{\Omega} Q v d\Omega \quad (47)$$

Pode-se ainda definir o vetor grad v como sendo:

$$\underline{\text{grad}} v = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

Assim sendo, reconhecendo na primeira integral da (47) o produto interno dos vetores $\underline{grad} v$ e $\underline{grad} T$, aquela relação passa a ser escrita na forma:

$$\int_{\Omega} \underline{grad} v^T k \underline{grad} T d\Omega + \int_{\Gamma} (\underline{q}^T \underline{n}) v d\Gamma = \int_{\Omega} Q v d\Omega \quad (49)$$

Nesse ponto, nota-se que a relação anterior impõe uma nova exigência sobre a regularidade que a função v : o seu gradiente deve resultar contínuo (por partes), de modo que a primeira integral da relação anterior exista.

Num ‘espaço de dimensão finita’ a função v pode ser representada por uma combinação linear de uma base (em geral, polinomial) de funções contínuas:

$$v = \beta_1 \psi_1(x, y) + \beta_2 \psi_2(x, y) + \dots + \beta_n \psi_n(x, y) = \beta_j \psi_j \quad (c / j = 1, \dots, n) \quad (50)$$

A relação (50) pode também ser expressa nas seguintes notações:

$$v = \{\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_n\} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \underline{\psi}^T \underline{\beta} = \underline{\beta}^T \underline{\psi} \quad (51)$$

O gradiente definido na (48) pode ser então calculado por:

$$\underline{grad} v = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \underline{grad} \underline{\psi} \underline{\beta} = \underline{B} \underline{\beta} \quad (52)$$

Portanto, o gradiente transposto resulta:

$$\underline{grad} v^T = \underline{\beta}^T \underline{grad} \underline{\psi}^T = \underline{\beta}^T \underline{B}^T \quad (53)$$

As formas obtidas para v podem ser convenientemente substituídas na relação (49), obtendo-se:

$$\underline{\beta}^T \left[\int_{\Omega} \underline{B}^T k \underline{\text{grad}} T d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\psi} (\underline{q}^T \underline{n}) v d\Gamma - \int_{\Omega} Q \underline{\psi} d\Omega \right] = 0 \quad \forall \underline{\beta}_j \quad (54)$$

Para que a condição anterior resulte sempre verificada (para qualquer $\underline{\beta}_j$) é suficiente que o termo entre colchetes se anule.

Numa próxima etapa, a variável primária temperatura T pode ser expressa, em ‘dimensão finita’, como combinação linear de funções contínuas em x e y :

$$T = \alpha_i \phi_i = \underline{\phi}^T \underline{\alpha} \quad (55)$$

e, portanto,

$$\underline{\text{grad}} T = \underline{B}^* \underline{\alpha} \quad (56)$$

Assim sendo, da condição (54) resulta:

$$\left[\int_{\Omega} \underline{B}^T k \underline{B}^* d\Omega \right] \underline{\alpha} = - \int_{\Gamma} \underline{\psi} (\underline{q}^T \underline{n}) d\Gamma + \int_{\Omega} Q \underline{\psi} d\Omega \quad (57)$$

A chamada forma de Galerkin resulta da imposição das seguintes condições:

$$\underline{\psi} = \underline{\phi}; \quad \underline{B}^* = \underline{B}; \quad \underline{\alpha} = \underline{T} \quad (58)$$

A relação (57) passa a ser dada por:

$$\left[\int_{\Omega} \underline{B}^T k \underline{B}^* d\Omega \right] \underline{T} = - \int_{\Gamma} \underline{\phi} (\underline{q}^T \underline{n}) d\Gamma + \int_{\Omega} Q \underline{\phi} d\Omega \quad (59)$$

ou, em forma mais compacta,

$$\underline{K} \underline{T} = \underline{L} \quad \text{c/} \quad \underline{K} = \int_{\Omega} \underline{B}^T k \underline{B} d\Omega \quad \text{e} \quad \underline{L} = - \int_{\Gamma} \underline{\phi} (\underline{q}^T \underline{n}) d\Gamma + \int_{\Omega} Q \underline{\phi} d\Omega \quad (60)$$

De imediato é importante chamar a atenção para uma analogia entre a relação (59) e o Princípio dos Trabalhos Virtuais da Mecânica dos Sólidos.

Naquele princípio a variável primária é o campo de deslocamentos e a secundária o campo de tensões; há ainda integrais sobre o volume e o contorno do sólido que representam os trabalhos virtuais das forças aplicadas por unidade de volume e de superfície, respectivamente.

Basicamente o mesmo ocorre no problema térmico, resguardando-se, naturalmente, os significados de suas variáveis primária e secundária.

Considerando-se ainda a analogia com o P.T.V. e valendo a forma de Galerkin, a função ponderadora v assume o significado de um ‘campo de temperaturas virtuais’.

Tendo-se em vista as observações anteriores, conclui-se que o Método dos Elementos Finitos pode ser aplicado aos problemas térmicos de forma absolutamente similar àquela das análises estruturais. Nesse sentido, o domínio do sólido pode ser discretizado por pontos, ou nós, distribuídos arbitrariamente, aos quais se associam valores incógnitos de temperatura. Cada ponto e seus vizinhos configuram um suporte para uma função base a ele atrelada e que apresenta valores diferentes de zero somente no interior do suporte; tal função, aliás, tem valor unitário no nó.

Assim sendo, conforme indicam as (60), pode-se gerar uma ‘matriz de rigidez térmica’ e um ‘vetor de forças térmicas equivalentes’. Aliás, como nos problemas estruturais, esses elementos resultam das contribuições das matrizes (\underline{K}_e) e vetores (\underline{L}_e) de cada elemento finito resultante da discretização:

$$\underline{K} = \sum_e \underline{A}_e^T \underline{K}_e \underline{A}_e ; \quad \underline{L} = \sum_e \underline{A}_e \underline{L}_e \quad (61)$$

onde o índice e representa o número de elementos da discretização e \underline{A}_e são matrizes de correspondência entre as numerações global e local dos nós.

As Figuras 14 e 15 ilustram, respectivamente, as distribuições de temperaturas e fluxos obtidas com o programa ANSYS[®] para o problema estacionário indicado na Figura 10. Foram adotados os seguintes valores:

- Raio externo do tubo: 2 m.
- Raio interno: 1 m.
- Raio do duto de refrigeração: 0,4 m.
- Temperatura interna do tubo: 200°C.
- Temperatura externa do tubo: 15°C.
- Fluxo imposto na face do duto de refrigeração: $\overline{q}_n = 1000 W / m^2$.
- Constante de condutividade térmica: $k = 10 W / m / ^\circ C$.
- Não há geração interna de calor: $Q = 0$.

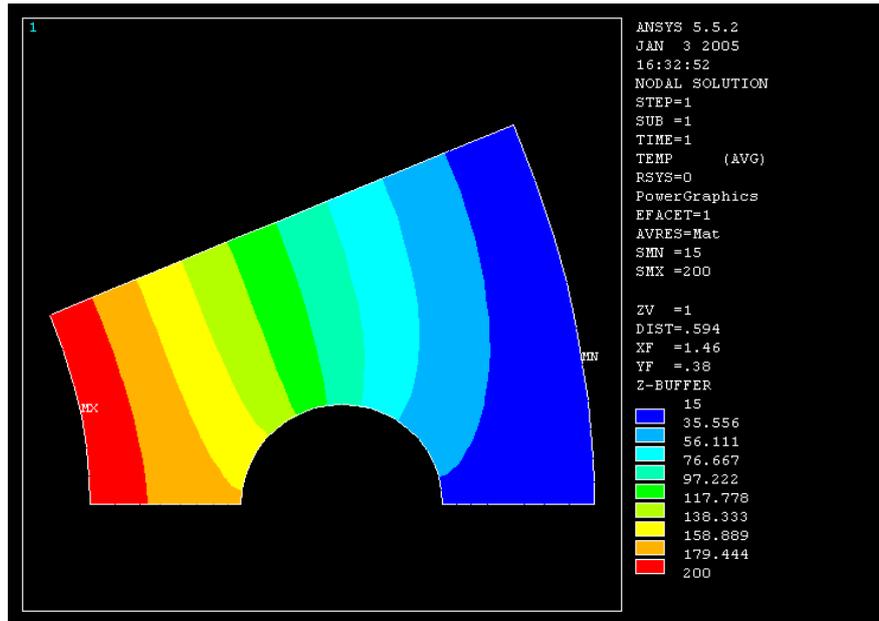


Figura 14 – Distribuição de temperatura

A figura do fluxo, em particular, mostra em vermelho a região de maior troca de calor.

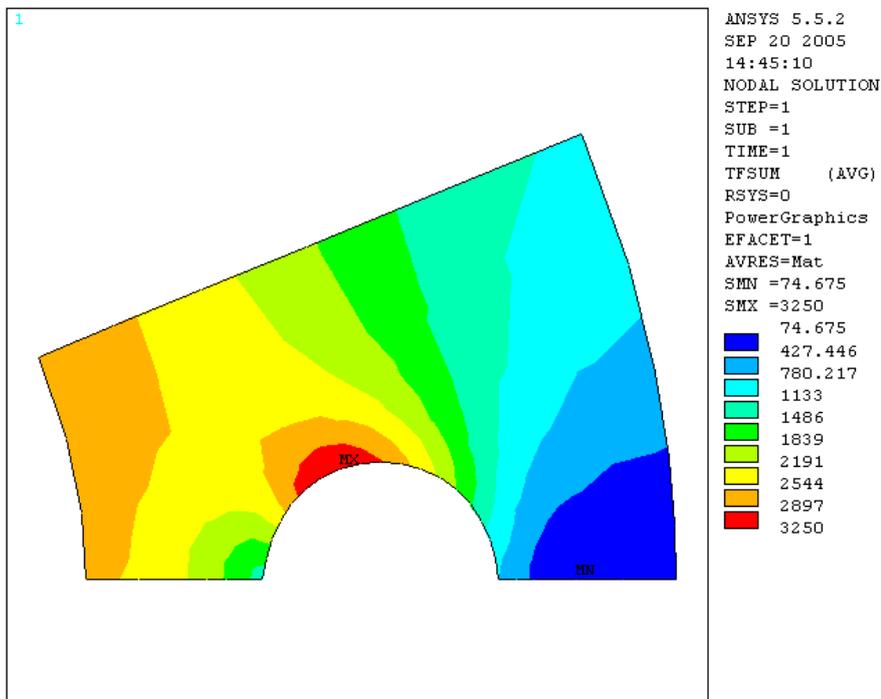


Figura 15 – Distribuição de fluxos

CAPÍTULO 7 PLACAS CIRCULARES

1. Introdução.

Neste capítulo, apresenta-se um conjunto de conceitos que resumem a teoria linear de placas naquilo que se pode considerar como essencial. As relações aqui reunidas referem-se às placas elásticas, isotrópicas e finas. A linearidade mencionada decorre das hipóteses de resposta elástica do material e regimes de pequenas deformações e deslocamentos, estes pequenos quando comparados à dimensão da espessura da placa.

O conteúdo do texto é propositadamente limitado e incompleto, de modo que é recomendada a consulta às referências mais específicas no tema.

2. Resumo das relações da teoria das placas finas retangulares.

Assim como a chapa, a placa pode ser definida geometricamente como um elemento estrutural laminar¹ de superfície média plana. Enquanto na chapa todo o conjunto, de forças externas e esforços internos, pode ser representado no seu plano médio, a placa admite componentes fora do seu plano médio.

2.1 Esforços internos.

Considere-se que um referencial cartesiano tenha sido adotado, de modo que seus eixos X e Y estejam contidos no plano médio da placa.

Na Figura 1 ilustram-se componentes de tensão, convencionadas como positivas em pontos de coordenadas z também positivas, e posicionados nas faces de um elemento prismático isolado do interior da placa; a altura h representa a dimensão da espessura.

As componentes de tensão têm por resultantes momentos de flexão, forças cortantes e momentos de torção, que constituem esforços internos distribuídos por unidade de comprimento ao longo do plano médio da placa² definidos pelas seguintes relações:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz; \quad q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz; \quad q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz;$$

¹ Um elemento laminar possui uma das dimensões muito menores do que as outras duas.

² Os momentos distribuídos de torção também recebem a denominação de “momentos volventes”.

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz; \quad m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz; \quad (1)$$

Observa-se que em razão da reciprocidade das tensões de cisalhamento:

$$m_{xy} = m_{yx}.$$

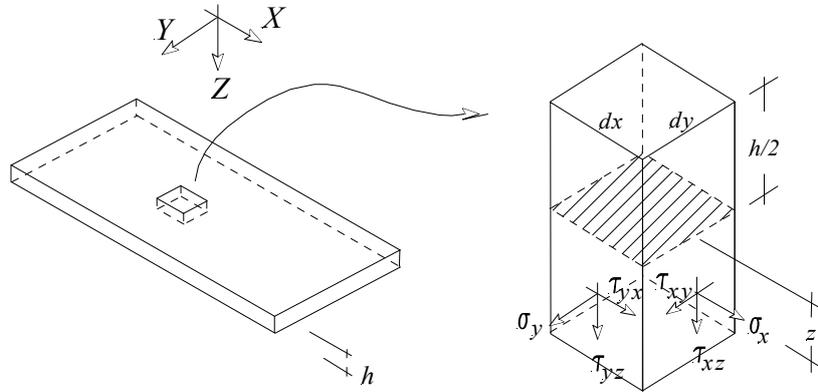


Figura 1 – Componentes de tensão

A Figura 2 mostra os esforços e suas variações, referidos a um elemento diferencial arbitrário do plano médio da placa.

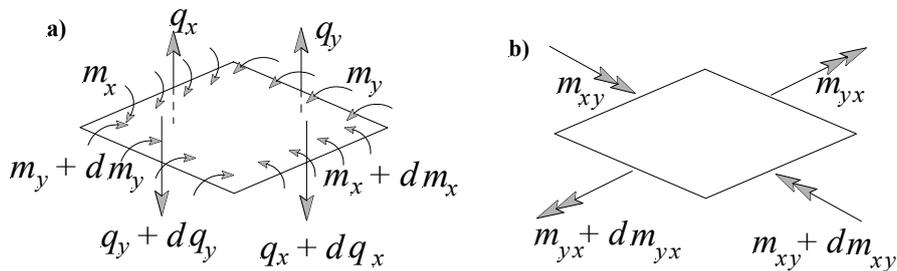


Figura 2 – Esforços internos

2.2 Relações de equilíbrio envolvendo esforços internos e carregamento transversalmente distribuído.

Admitindo-se que transversalmente ao plano médio atue uma força externa $p(x,y)^1$, distribuída por unidade de área, dos equilíbrios de forças e dos momentos de forças segundo duas direções do elemento indicado na Figura 2, resultam:

¹ O carregamento é necessariamente suposto de direção transversal ao plano médio da placa.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} &= -p(x, y) \\ q_y &= \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \\ q_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \end{aligned} \right\} \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p(x, y) \quad (2)$$

Nota-se, analisando as relações anteriores, que nas placas as forças cortantes se relacionam não somente com as derivadas dos momentos fletores (como na teoria de vigas), mas também com as variações dos momentos “volventes” ou de torção.

A equação diferencial resultante das condições de equilíbrio, (2), reúne três esforços internos solicitantes, de modo que não é possível determiná-los univocamente (o problema é, então, *internamente hiperestático!*); há, portanto, que se acrescentar ao modelo também as relações de compatibilidade e constitutiva.

2.3 Relações de compatibilidade e constitutiva.

Na teoria clássica de vigas, as relações de compatibilidade (entre deformações e deslocamentos) e constitutiva (representando a resposta elástico-linear do material), combinam-se na conhecida relação momento-curvatura.

Na teoria de placas em análise, uma combinação análoga é possível, entretanto deve-se levar em conta o efeito de Poisson, indutor de deformações transversais à direção da solicitação¹; o resultado é que um momento de flexão distribuído segundo certa direção de referência vem acompanhado de uma dupla curvatura na placa (segundo as direções de referência e ortogonal a ela).

Sem maiores demonstrações complementares, sendo $w(x,y)^2$ o deslocamento transversal (na direção Z de referência) ao plano médio, as relações seguintes estabelecem as correspondências entre momentos de flexão e curvaturas nas placas:

¹ Na teoria de vigas o modelo cinemático é de seção transversal indeformável no seu plano; de acordo com ela o efeito de Poisson é desprezado. Nas placas finas o efeito de Poisson não afeta a dimensão da espessura.

² Como a normal ao plano médio é indeformável, são iguais os deslocamentos w de pontos da espessura contidos numa mesma normal.

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (3)$$

Nas relações anteriores: $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$.

Por outro lado, ao momento de torção distribuído corresponde uma “curvatura” de torção, definida por uma derivada mista da função deslocamento, conforme indica o último fator que aparece na relação seguinte:

$$m_{xy} = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \quad (4)$$

Finalmente, relações complementares (porque ao contrário das (3) e (4) não interessam diretamente para serem substituídas na (2)) entre forças cortantes¹ e variações de curvaturas podem ser escritas nas formas:

$$q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right); \quad q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right); \quad (5)$$

2.4 Equação diferencial do problema das placas finas retangulares, formulado em deslocamentos.

Substituindo-se as (3) e (4) na (2), obtém-se a equação diferencial em derivadas parciais da teoria das placas finas, envolvendo como variável fundamental o deslocamento transversal ao plano médio:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \quad (6)$$

Uma solução para a equação diferencial acabará sempre por envolver quatro constantes de integração; no âmbito das placas retangulares duas dessas constantes estarão associadas à borda definida por $x=c^{te}$ e duas à borda $y=c^{te}$.

¹ Analogamente à teoria clássica de vigas, na teoria de placas aqui resumida, as deformações por cortante não são consideradas diretamente, de modo que as forças cortantes aparecem como variáveis secundárias.

2.5 Condições de contorno.

A depender do tipo de vinculação, a existência do momento e da curvatura de torção empresta alguma particularidade ao estabelecimento das condições de contorno nas placas retangulares; os casos das bordas simplesmente apoiada e livre são característicos nesse sentido.

2.5.1 Bordas $x = a$ e $y = b$ simplesmente apoiadas.

Claramente, para este tipo de vinculação, as duas condições de contorno a serem impostas em cada borda são mistas, isto é, envolvem um deslocamento e um esforço interno. No caso, em cada borda devem ser nulos o deslocamento transversal e o momento de flexão:

$$w|_{x=a} = 0; \quad m_x|_{x=a} = 0; \quad w|_{y=b} = 0; \quad m_y|_{y=b} = 0; \quad (7)$$

Nota-se, ainda, que ao apoiar toda a borda $x=a$, elimina-se a possibilidade de curvatura na direção y , isto é: $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$; analogamente na borda $y=b$,

resulta nula a curvatura na direção x : $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$. Assim sendo, observando as relações momento-curvatura aqui reproduzidas:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=a}; \quad m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=b}; \quad (8)$$

conclui-se que elas acabam por assumir uma forma mais simplificada nas bordas em questão.

Por outro lado, é interessante observar que analisando ao longo de qualquer uma das bordas apoiadas as variações das tangentes à superfície média deformada, tomadas perpendicularmente à borda, conclui-se que para uma situação geral de carregamento a curvatura de torção deve ser admitida

como diferente de zero, isto é: $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \neq 0$; por conseguinte, fazendo uso da

relação constitutiva (4): $m_{xy} \neq 0$ ou $m_{yx} \neq 0$, a depender da borda.

Nessas condições, o vínculo externo realizado pelo apoio simples, além de forças perpendiculares ao seu plano de deslizamento, também deve ser capaz de transmitir momentos distribuídos de torção. Um aspecto

importante a lembrar nesse sentido é que os apoios simples podem ser idealizados por barras simples indeformáveis e capazes de transmitir somente forças nas direções dos seus eixos.

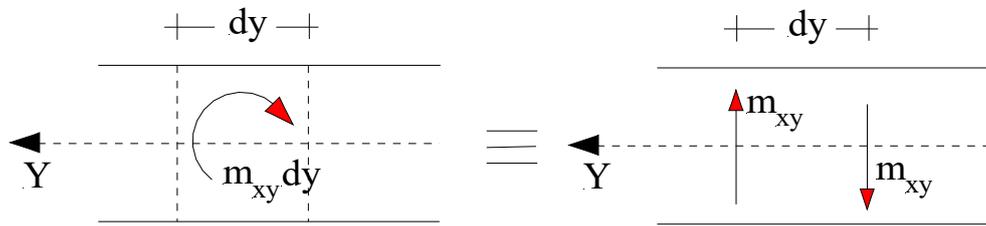


Figura 3 – Equivalência entre binário e momento volvente

Uma forma de entendimento do mecanismo segundo o qual tais barras, no caso idealmente dispostas paralelamente entre si segundo a direção Z de referência, sejam capazes de transmitir o momento volvente de borda, tem por base a hipótese de equivalência entre binário de forças e momento, conforme ilustra a Figura 3.

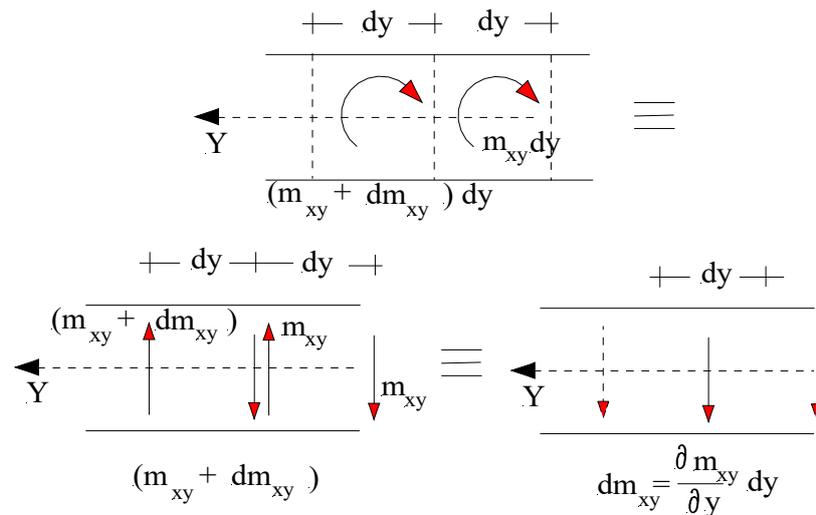


Figura 4 – Mecanismo de transmissão do momento volvente

Admite-se, então, que o momento volvente resultante num trecho de comprimento infinitesimal de borda, seja transmitido por um binário formado por forças axiais atuantes num par de barras vinculares vizinhas e com braço dy , conforme indicado na Figura 4. Nota-se que essas forças têm valores em módulo iguais aos valores dos momentos volventes.

Também como indica a Figura 4, a composição dos binários dos sucessivos trechos vizinhos de borda leva à definição de forças cortantes distribuídas adicionais, de valores:

$$q'_x = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \text{ e } q'_y = \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (9)$$

Conclui-se, assim, que a existência dos momentos volventes altera a definição das reações de apoio, que passam a ser determinadas pelas forças cortantes totais nas bordas, isto é, incluindo aquelas adicionais:

$$r_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} ; \quad r_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (10)$$

Além disso, como mostra a Figura 5, a existência dos momentos volventes nas bordas apoiadas e o mecanismo idealizado de transmissão pelas barras vinculares implica que nos cantos das placas retangulares apareçam forças concentradas com intensidades determinadas em função dos valores daqueles momentos:

$$R = -2m_{xy}|_{\text{cantos}} = -2(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_{\text{cantos}} \quad (11)$$

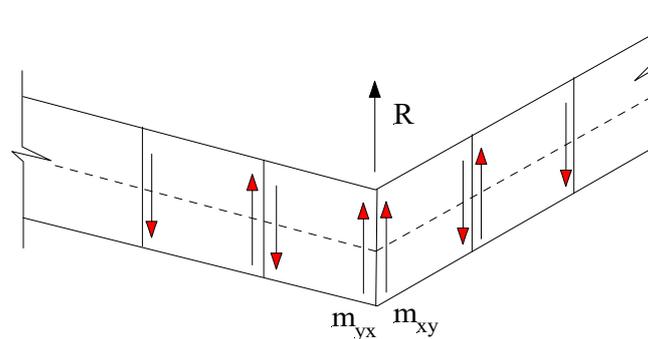


Figura 5 – Força de canto produzida pelos momentos volventes

2.5.2 Borda livre em $x = a$.¹

Na borda livre não pode haver qualquer tipo de esforço distribuído; a rigor isto implica em impor que o momento fletor, a força cortante e o momento volvente devam ser nulos.

Isto compõe três condições, porém, de forma consistente com o modelo matemático, seriam apenas duas as condições de contorno em cada borda. A questão pode ser resolvida considerando-se que a força cortante e o momento volvente possam estar combinados na forma de uma reação

¹ Condição análoga se aplica para borda livre em $y = b$.

vertical, nos moldes da relação (10), impondo-se, então, que esta reação seja nula.

Assim sendo, as relações que governam as condições de contorno na borda livre resultam:

$$m_y \Big|_{x=a} = 0 \quad ; \quad r_x \Big|_{x=a} = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Big|_{x=a} = 0 \quad (12)$$

2.5.3 Borda engastada em $x = a$.¹

Claramente as condições a serem impostas dizem respeito ao deslocamento vertical e ao giro da normal ao plano médio da placa na borda:

$$w \Big|_{x=a} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \quad (13)$$

Observa-se que ao longo da borda engastada não há curvatura de torção e, portanto, é nulo o momento volvente; conclui-se que neste caso a reação de apoio coincide diretamente em valor com a força cortante: $r_x \Big|_{x=a} = q_x \Big|_{x=a}$.

3. Resumo das relações para placas finas circulares.

As placas circulares aqui consideradas estão submetidas a solicitações externas com simetria axial. Nessas condições, pontos do plano médio, situados numa mesma circunferência em relação ao centro da placa apresentam iguais deslocamentos transversais e o comportamento da placa pode ser descrito por funções numa única variável radial. Naturalmente o sistema de coordenadas mais adequado a ser empregado no plano médio é o cilíndrico; a coordenada radial (r) tem origem no centro da placa e a angular (θ) é medida a partir de um diâmetro arbitrário de referência.

Em razão da simetria axial, segundo as direções coordenadas não há curvatura de torção, e as curvaturas de flexão caracterizam-se, portanto, como curvaturas normais principais². Resulta que um elemento de placa cujos lados sejam definidos por curvas coordenadas, como o ilustrado na Figura 6, não apresenta momentos volventes entre seus esforços internos. Há ainda que se notar que a axissimetria também elimina a possibilidade de

¹ Condição análoga se aplica para borda engastada em $y = b$.

² Trata-se de conceitos clássicos da Geometria Diferencial.

existirem forças cortantes (q_t) distribuídas na direção do raio; segue que são três os esforços internos distribuídos: dois momentos de flexão e uma força cortante.

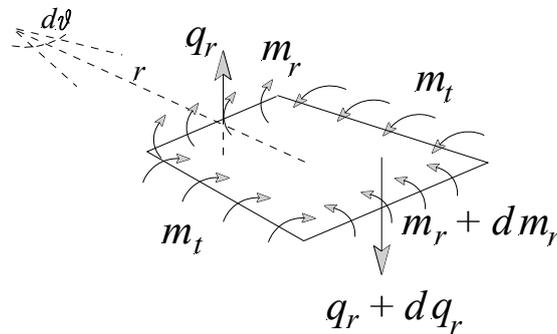


Figura 6 – Esforços internos

As condições de equilíbrio a serem verificadas são apenas duas, representando a somatória de forças na direção Z , ortogonal ao plano médio da placa, e a somatória dos momentos das forças segundo um plano radial (r - Z).

Admitindo-se que $p(r, \theta)$ representa a força transversal distribuída por unidade de área no sentido de Z , do equilíbrio de forças verticais obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{q_r}{r} + \frac{dq_r}{dr} = -p \tag{14}$$

A mesma relação pode ser escrita na forma:

$$\frac{1}{r} \frac{d(q_r r)}{dr} = -p \tag{15}$$

Com respeito ao equilíbrio dos momentos das forças segundo o plano radial de referência, é importante observar que o momento de flexão m_t apresenta componente nesse plano de valor: $m_t dr \frac{d\theta}{2}$. A representação indicada na Figura 7 permite deduzir essa relação.

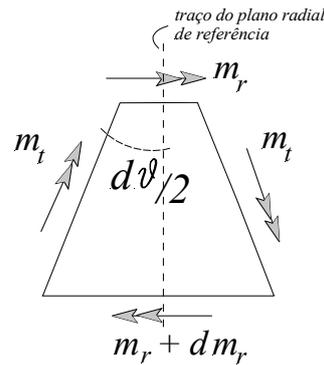


Figura 7 – Vetores de momentos de flexão

Finalmente, do equilíbrio de momentos obtém-se:

$$-\frac{dm_r}{dr}r + q_r r - m_r + m_t = 0 \quad (16)$$

As duas relações de equilíbrio, (15) e (16), combinadas resultam em:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{dm_r}{dr} r + m_r - m_t \right) = -p \quad (17)$$

O problema se configura como internamente hiperestático, de modo que o seu equacionamento completo inclui as relações de compatibilidade e constitutiva.

A exemplo das (3), tais condições combinadas, para este caso, resultam:

$$m_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right); \quad m_t = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (18)$$

Nas relações anteriores as derivadas parciais representam curvaturas normais (ou de flexão) definidas segundo dois planos ortogonais, ditos planos de curvaturas principais¹.

No caso da placa circular, observando-se sua superfície média deformada e nela identificando-se arbitrariamente um ponto e a correspondente normal à superfície, as curvaturas principais no ponto ficam definidas segundo dois

¹ Novamente, faz-se menção a um conceito da Geometria Diferencial: num ponto de uma superfície qualquer dois planos ortogonais podem ser sempre definidos, nos quais se medem as curvaturas normais principais.

planos: um radial e outro ortogonal a ele, contendo a normal. A Figura 8, procura ilustrar essas idéias.

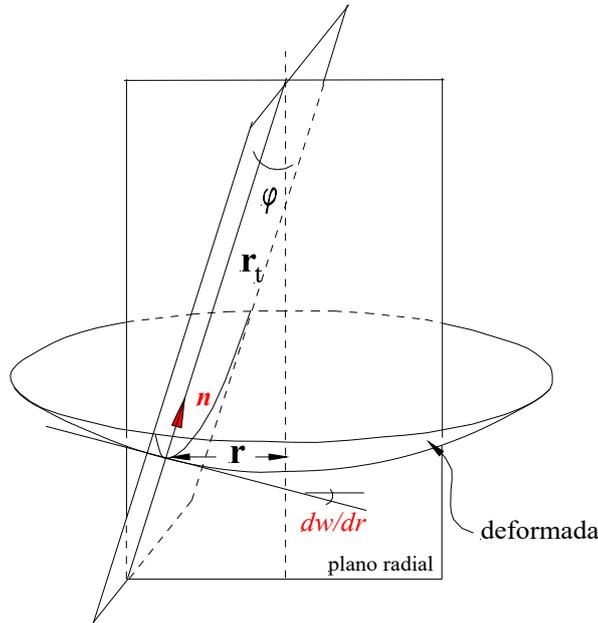


Figura 8 – Planos de curvaturas principais

Daquela figura, analisando-se um plano radial e levando-se em conta que:

$\varphi = \frac{dw}{dr}$, pode-se escrever a seguinte relação:

$$r_t \frac{dw}{dr} = r \quad (19)$$

Definindo-se a curvatura normal tangencial pelo inverso do raio r_t , da relação anterior obtém-se:

$$\frac{1}{r_t} = \frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \quad (20)$$

sendo que o sinal negativo foi introduzido para compatibilizar a convenção clássica de curvatura positiva com o sistema de referência adotado na placa.

Levando-se em conta a (20), as relações (18) passam a ser escritas nas formas:

$$m_r = -D \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad m_t = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} \right) \quad (21)$$

Segue a substituição das (21) na relação de equilíbrio (17). Num primeiro passo, da (16) tem-se que:

$$q_r r = \frac{dm_r}{dr} r + m_r - m_t = -Dr \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (22)$$

$$q_r r = -r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] D \quad (23)$$

Na seqüência resulta:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{p}{D} \quad (24)$$

A relação anterior pode ainda ser escrita numa forma mais conveniente:

$$\frac{d}{dr} \left\{ \underbrace{r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right]}_{\frac{q_r r}{D}} \right\} = \frac{p r}{D} \quad (25)$$

Exemplo 1. Determinar uma relação para o cálculo dos deslocamentos transversais no centro de uma placa circular, perfeitamente engastada nas bordas e submetida à pressão uniforme em toda a sua face superior (v.Fig.9).

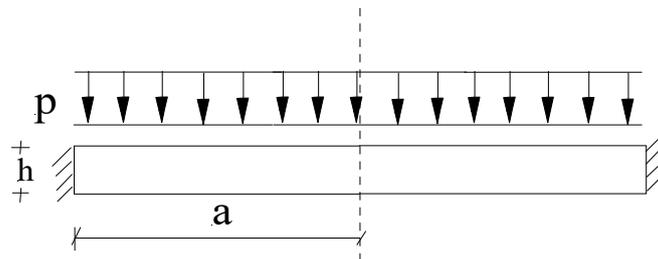


Figura 9 – Placa circular engastada na borda

Integrando-se uma primeira vez a (25), obtém-se:

$$r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{p r^2}{2D} + C_1 \quad (26)$$

Comparando-se este resultado com a (23), ou observando o detalhe da (25), resulta:

$$-\frac{q_r r}{D} = \frac{p r^2}{2D} + C_1 \quad \text{ou} \quad q_r = -\frac{p r}{2} - D \frac{C_1}{r}$$

No caso da placa engastada sob o carregamento prescrito, a cortante é nula no seu centro, e uma maneira de garantir esta condição é impor $C_1 = 0$.

Levando-se em conta a conclusão anterior e integrando-se uma vez a (26), determina-se:

$$\frac{d}{d r} \left(r \frac{d w}{d r} \right) = \frac{p r^3}{4D} + C_2 r \tag{27}$$

Uma nova integração fornece:

$$\frac{d w}{d r} = \frac{p r^3}{16D} + \frac{C_2 r}{2} + \frac{C_3}{r} \tag{28}$$

Como condições de contorno associadas aos giros das normais nas direções da espessura, tem-se que esses valores são nulos nas bordas e no centro da placa. Para garantir a nulidade no centro, a condição suficiente é $C_3 = 0$. Sendo a o raio da placa, da condição de nulidade nas bordas resulta:

$$C_2 = -\frac{p a^2}{8D} \tag{29}$$

Finalmente, a integração da (28) fornece:

$$w = \frac{p r^4}{64D} - \frac{p a^2 r^2}{32D} + C_4 \tag{30}$$

A última condição de contorno a ser imposta diz respeito à nulidade do deslocamento nas bordas, de onde resulta:

$$C_4 = \frac{p a^4}{64D} \quad (31)$$

Por fim, a função que descreve o deslocamento de um ponto no plano médio da placa fica dada por:

$$w = \frac{p(a^2 - r^2)^2}{64D} \quad (32)$$

O deslocamento no centro da placa pode, então, ser calculado pela relação:

$$w_{\max} = \frac{p a^4}{64D} \quad (33)$$

Exemplo 2. Obter expressões para o cálculo dos momentos de flexão na placa circular do exemplo anterior.

Com o auxílio das (28) e (29), ou diretamente da (32), tem-se que:

$$\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{p(r^2 - a^2)}{16D}; \quad \frac{d^2w}{dr^2} = \frac{p(3r^2 - a^2)}{16D} \quad (34)$$

Substituindo-se as relações anteriores nas (21), resultam:

$$m_r = \frac{p}{16} [a^2(1 + \nu) - r^2(3 + \nu)]; \quad m_t = \frac{p}{16} [a^2(1 - \nu) - r^2(1 - 3\nu)] \quad (35)$$

Em particular os momentos no engastamento ($r = a$) valem:

$$m_r = -\frac{p a^2}{8}; \quad m_t = \frac{p a^2 \nu}{8}$$

Exemplo 3. Para uma placa circular, engastada em todo o contorno, são conhecidos os seguintes dados: $a = 49,5 \text{ cm}$ (raio); $E = 21000,0 \text{ kN/cm}^2$; $\nu = 0,3$; $h = 0,8 \text{ cm}$ (espessura). Determinar os valores do deslocamento máximo e dos momentos de flexão no centro da placa submetida a uma pressão uniforme de valor: $p = 0,0013 \text{ kN/cm}^2$.

Como os dados de geometria e material fornecidos, calcula-se:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \cong 984,6 \text{ kN cm}$$

Com a relação (33), determina-se o deslocamento máximo:

$$w_{\text{máx}} = \frac{p a^4}{64D} = \frac{0,0013 \cdot (49,5)^4}{64 \cdot 984,6} \cong 0,12 \text{ cm.}$$

Os momentos no centro da placa resultam:

$$m_r = m_t = \frac{p}{16} [a^2(1+\nu)] = \frac{0,0013 [49,5^2 \cdot 1,3]}{16} \cong 0,26 \text{ kN}.$$

Exemplo 4. Deduzir as expressões para o deslocamento transversal e para os momentos de flexão de uma placa circular sob pressão uniforme, simplesmente apoiada em toda a borda (v.Fig.10).

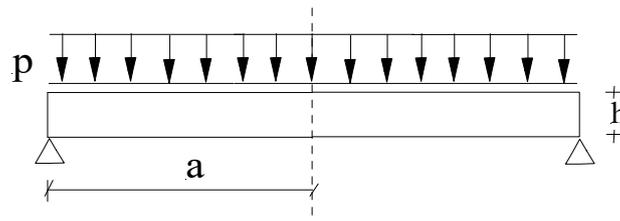


Figura 10 – Placa circular apoiada na borda

No caso da vinculação em questão, as condições de contorno se caracterizam como: deslocamento transversal e momento de flexão m_r nulos na borda; giro da normal e força cortante q_r nulos no centro da placa.

O procedimento é análogo ao realizado no exemplo 1, partindo da integração da relação (25). Os mesmos passos se repetem até a relação (28), repetida em seguida:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{p r^3}{16D} + \frac{C_2 r}{2} + \frac{C_3}{r}$$

A constante C_3 resulta nula em função da condição de contorno referente ao giro nulo da normal no centro da placa, de modo que:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{pr^3}{16D} + \frac{C_2 r}{2} \quad (36)$$

Para a imposição da condição de contorno relativa ao momento de flexão m_r , interessam as relações derivadas da (36):

$$\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{pr^2}{16D} + \frac{C_2}{2}; \quad \frac{d^2w}{dr^2} = \frac{3pr^2}{16D} + \frac{C_2}{2} \quad (37)$$

Empregando-se, então, a primeira das (21), determina-se:

$$C_2 = -\frac{pa^2}{8D} \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} \quad (38)$$

Integrando-se a (36) mais uma vez, obtém-se:

$$w = \frac{pr^4}{64D} + \frac{C_2 r^2}{4} + C_3 \quad (39)$$

Com o auxílio da (38) e impondo-se a condição de contorno relativa à nulidade do deslocamento transversal na borda, resulta, após as simplificações:

$$w = \frac{p(a^2 - r^2)}{64D} \left[\frac{(5+\nu)}{(1+\nu)} a^2 - r^2 \right] \quad (40)$$

E para o deslocamento no centro da placa:

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{p(a^4)}{64D} \left[\frac{(5+\nu)}{(1+\nu)} \right] \quad (41)$$

Combinando-se as (37) e (38) e substituindo-as nas (21), deduzem-se as seguintes relações para os momentos de flexão:

$$m_r = \frac{p}{16} (3+\nu) [a^2 - r^2]; \quad m_t = \frac{p}{16} [a^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu)] \quad (42)$$

Exemplo 5. Com os mesmos dados do exemplo 3, determinar os valores do deslocamento e dos momentos de flexão no centro da placa simplesmente apoiada.

Da (41) segue que:

$$w_{\max} = \frac{0,0013(49,5^4)}{64.984,6} \left[\frac{(5+0,3)}{(1+0,3)} \right] = 0,5 \text{ cm}$$

Da (42), calcula-se:

$$m_r = \frac{0,0013}{16} (3+0,3) [49,5^2] = 0,65 \text{ kN}.$$

Exemplo 6. Deduzir as expressões para o deslocamento transversal e para os momentos de flexão de uma placa circular simplesmente apoiada sob a ação de um momento uniforme distribuído em toda a borda (v.Fig.11).

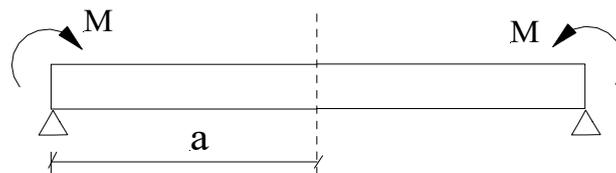


Figura 11 – Placa circular sob momento distribuído na borda

No caso da vinculação em questão, as condições de contorno se caracterizam como: na borda, deslocamento transversal nulo e momento de flexão m_r igual ao momento aplicado M ; giro da normal e força cortante q_r nulos no centro da placa.

O procedimento de dedução parte da integração da relação (25), podendo-se levar em conta, de imediato que a força cortante q_r é nula em toda a placa¹. Assim sendo, a constante de integração associada ao primeiro passo de integração pode ser considerada nula e o problema efetivamente pode ser tratado a partir da relação:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = 0 \quad (43)$$

¹ Basta verificar o equilíbrio de um disco central isolado do restante da placa (a resultante da força cortante no contorno do disco deve se anular).

Segue de uma primeira integração da (43) que:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = C_1 \quad (44)$$

Na seqüência, resulta:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{2} \quad (45)$$

Impondo-se, neste ponto, a condição de contorno relativa ao giro nulo no centro da placa, conclui-se que: $C_2 = 0$. A última integração, então fornece:

$$w(r) = \frac{C_1 r^2}{4} + C_3 \quad (46)$$

Da condição de contorno relativa ao deslocamento nulo na borda da placa, conclui-se que:

$$C_3 = -\frac{C_1 a^2}{4} \quad (47)$$

As relações seguintes são de interesse para equacionar o momento radial de flexão:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}; \quad \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{C_1 \nu}{2} + \nu \frac{C_2}{r^2}; \quad (48)$$

Impondo-se a condição de contorno relativa ao momento fletor na borda, resulta:

$$C_3 = -\frac{2M}{D(1+\nu)} \quad (49)$$

E, finalmente, a solução para os deslocamentos escreve-se na forma:

$$w(r) = \frac{M(a^2 - r^2)}{2D(1 + \nu)} \quad (50)$$

Exemplo 7. Aplicando o princípio da sobreposição, determinar a expressão para o cálculo do momento de flexão radial junto ao engastamento de uma placa circular sob a ação de uma pressão uniforme em toda a sua superfície.

Na Figura 12 representa-se a idéia da sobreposição dos casos resolvidos nos exemplos 4 e 6 para encontrar a solução desejada.

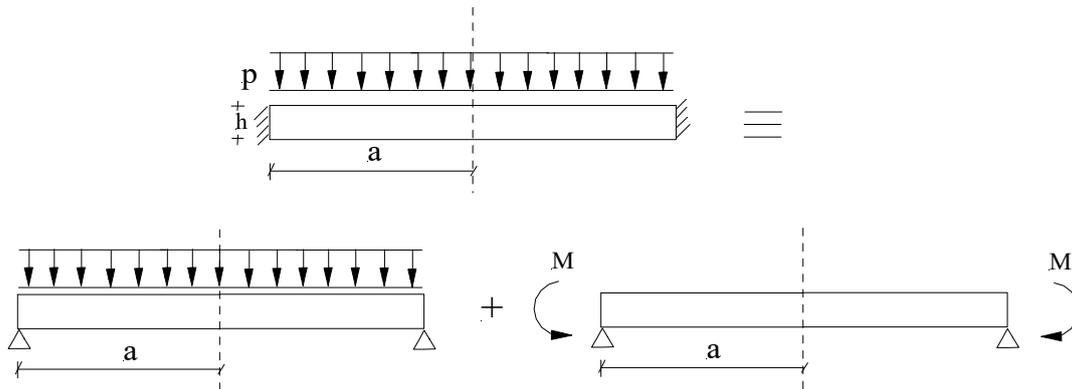


Figura 12 – Sistemas equivalentes para placa circular

Essencialmente a placa engastada pode ser analisada sobrepondo-se os casos da placa simplesmente apoiada submetida ao carregamento uniformemente distribuído e da placa sob um momento distribuído ao longo da borda. A intensidade do momento de borda (coincidente com o momento de engastamento) deve ser tal que anula o giro na borda provocado pelo carregamento distribuído na situação de placa apoiada.

Da relação (40), obtida na resolução do exemplo 4 (para placa simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído), pode-se derivar uma expressão para o cálculo dos giros das normais ao plano médio da placa:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{-pr}{32D} \left[\frac{(5 + \nu)}{(1 + \nu)} a^2 - r^2 \right] - \frac{pr(a^2 - r^2)}{32D} \quad (51)$$

Em particular, na borda:

$$\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=a} = -\frac{p a^3}{8D(1+\nu)} \quad (52)$$

Por outro lado, a solução do exemplo 6, expressa pela relação (50), permite determinar o giro da normal na borda por efeito do momento distribuído¹:

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{M r}{D(1+\nu)} \quad \rightarrow \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=a} = -\frac{M a}{D(1+\nu)} \quad (53)$$

Impondo-se, então, que os giros das relações (52) e (53) sejam de mesmo valor, porém com sentidos contrários, resulta:

$$-\frac{p a^3}{8D(1+\nu)} = \frac{M a}{D(1+\nu)} \quad \rightarrow \quad M = -\frac{p a^2}{8}$$

A expressão anterior coincide com o resultado obtido no exemplo 2, comprovando a efetividade do procedimento de sobreposição.

4. Efeito de temperatura em placa circular engastada na borda.

A situação que se pretende analisar, indicada na Figura 13, corresponde a uma distribuição de temperatura que se apresenta constante na dimensão do raio, porém linearmente variável ao longo da espessura. Desse modo, pontos pertencentes à superfície inferior da placa ficam submetidos à certa temperatura t_1 , enquanto pontos da superfície superior ficam sujeitos à temperatura t_2 .

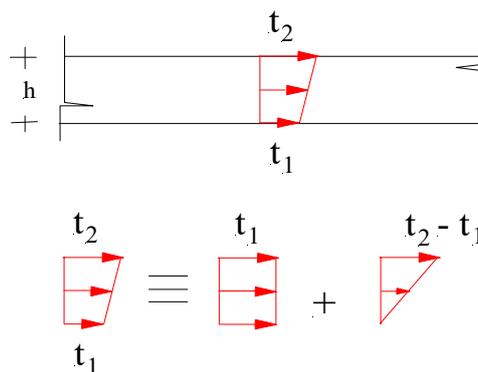


Figura 13 – Distribuição de temperatura através da espessura

¹ No caso do exemplo 6, o momento de borda é aplicado com sentido contrário ao indicado na figura 12.

Numa condição de placa circular simplesmente apoiada na borda, o efeito da variação de temperatura é de natureza puramente geométrica, uma vez que as deformações decorrentes não são impedidas pela vinculação e, portanto, nenhum esforço interno é gerado¹.

Mesmo em relação ao efeito geométrico, há que se considerar que a parcela uniforme que compõe a distribuição de temperatura, de acordo com a decomposição do seu diagrama mostrada na Figura 13, não introduz variação de forma, pois implica em dilatação ou contração uniforme de toda a placa. Já a parcela de variação linear impõe variação de forma, conforme ilustra a Figura 14.

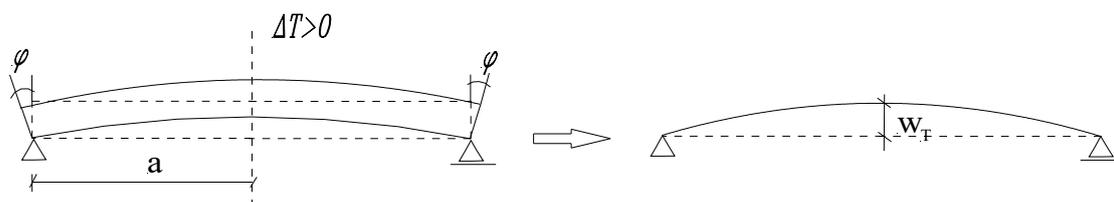


Figura 14 – Efeito geométrico da variação de temperatura

A curvatura induzida pela parcela de variação linear de temperatura é coerente com a hipótese cinemática de retas, inicialmente normais ao plano médio da placa, manterem-se indeformáveis² e normais à superfície média deformada. A deformação assumida pela placa fica, então, caracterizada por duas medidas: os giros (φ) das normais associadas às bordas e o deslocamento (w_T) do seu ponto central.

A relação para a determinação do giro pode ser deduzida com o auxílio do esquema ilustrado na Figura 15a. De acordo com esse esquema, o giro decorre da variação também linear dos alongamentos das fibras radiais, os quais, para uma variação positiva de temperatura, aumentam progressivamente em direção à face externa da placa.

Da análise da figura, conclui-se que o giro na borda da placa fica dado pela relação:

$$\varphi = \frac{\alpha \Delta T a}{h} \quad (54)$$

¹ Esta é uma característica comum a todas as estruturas isostáticas.

² A variação de temperatura não induz, portanto, deformação na dimensão da espessura da placa.

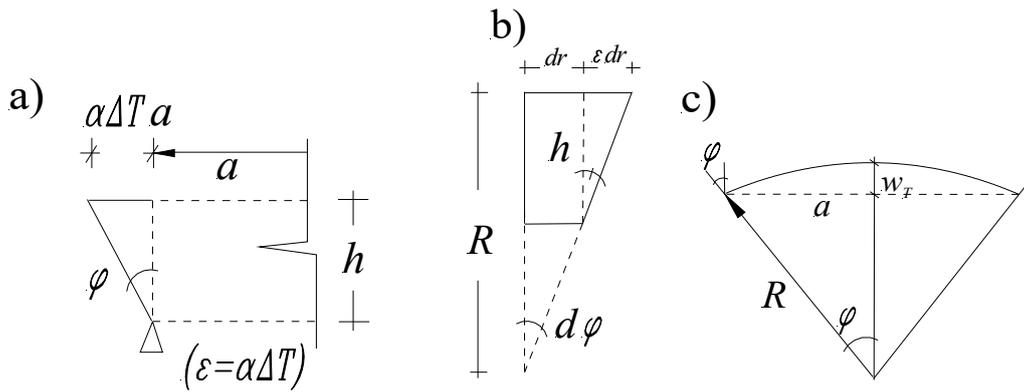


Figura 15 – Elementos geométricos de interesse

Na Figura 15b está representado o giro relativo entre duas normais vizinhas, infinitamente próximas¹. Levando-se em conta a semelhança de triângulos e que no regime de pequenas deformações: $\varepsilon \ll 1$, pode-se deduzir a seguinte relação para a curvatura assumida pela placa deformada:

$$\frac{1}{R} \cong \frac{\varepsilon}{h} = \frac{\alpha \Delta T}{h} \quad (55)$$

A Figura 15c ilustra a placa deformada, podendo ser deduzido que:

$$w_T = R(1 - \cos \varphi) \quad (56)$$

Tendo-se em vista que os giros são muito pequenos, o desenvolvimento em série da função cosseno fornece:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} \quad (57)$$

Finalmente, com a (57) e empregando-se também a (54), da (56) obtém-se a seguinte relação para o cálculo do deslocamento do ponto central da placa:

$$w_T = R \frac{\varphi^2}{2} = \frac{\alpha \Delta T a^2}{2h} \quad (58)$$

¹ É importante lembrar que as representações geométricas tomam por referência a situação inicial indeformada, pois a hipótese fundamental é que os deslocamentos e as deformações são pequenos.

Exemplo 8. Deduzir uma relação para o cálculo do momento de flexão radial junto ao engastamento de uma placa circular sujeita a uma variação de temperatura linear ao longo da espessura.

O problema pode ser abordado pela técnica de sobreposição de efeitos, conforme ilustra a Figura 16.

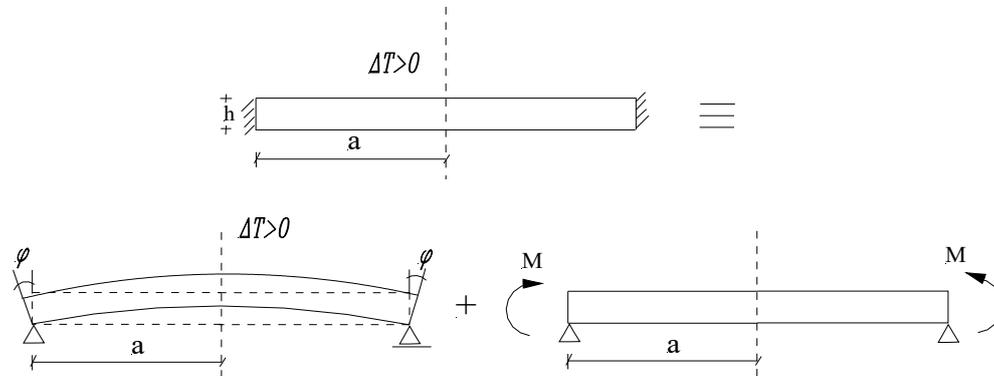


Figura 16 – Sobreposição de casos

Claramente, percebe-se que a intensidade do momento na borda deve ser tal a anular o giro que seria provocado pela variação de temperatura na hipótese do vínculo permitir tal giro. Por um lado, o giro por efeito da variação de temperatura pode ser calculado pela relação (54); por outro lado, a solução do exemplo 6 fornece a relação para o cálculo do momento de borda. As duas relações de interesse são, portanto¹:

$$\varphi = \frac{\alpha \Delta T a}{h};$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{M r}{D(1 + \nu)} \quad \rightarrow \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=a} = \frac{M a}{D(1 + \nu)}$$

Impondo-se, então, que: $\varphi = \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=a}$, determina-se:

$$M = D(1 + \nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \tag{59}$$

Observa-se que, ainda explorando a solução do exemplo 6, particularmente a relação (50), o deslocamento no centro da placa, agora submetida a um momento de borda de valor dado pela (59), resulta:

¹ Neste caso, optou-se por não associar sinais às relações, pois o momento indicado na figura já apresenta o sentido correto resultante.

$$w(0) = D(1 + \nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \frac{a^2}{2D(1 + \nu)} = \frac{\alpha \Delta T a^2}{2h} \quad (60)$$

Tal valor coincide com o valor dado pela relação (58), relativa ao deslocamento no centro da placa simplesmente apoiada devido à variação de temperatura. Assim, conclui-se que a placa circular engastada na borda não apresenta curvatura quando submetida a uma variação linear de temperatura, mantendo-se, portanto, a curvatura nula do seu plano médio.

Exemplo 9. Determinar o valor da tensão normal máxima numa placa circular, em aço, submetida a uma variação linear de temperatura de valor: $\Delta T = 40^\circ C$. Dados adicionais: $E = 21000,0 \text{ kN/cm}^2$; $\nu = 0,3$; $a = 30 \text{ cm}$; $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} / ^\circ C$; $h = 0,8 \text{ cm}$.

A tensão normal máxima por efeito do momento de flexão radial dado pela relação (59), resulta no engaste e no ponto mais afastado do plano médio; trata-se, portanto, de calcular, inicialmente, o valor daquele momento.

A rigidez D resulta:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{21000(0,8)^3}{12(1 - 0,3^2)} = 984,6 \text{ kN cm.}$$

Segue que:

$$M = D(1 + \nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} = \frac{984,6 \cdot (1 + 0,3) \cdot 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 40}{0,8} = 0,704 \text{ kN.}$$

A tensão normal máxima determina-se, então, com a relação:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{h^2} \cdot 6 = \frac{6 \cdot 0,704}{(0,8)^2} = 6,6 \text{ kN/cm}^2. ^1$$

¹ Esta relação é a mesma da teoria clássica de flexão, para uma seção retangular de largura unitária.

CAPÍTULO 8 PLACAS FINAS RETANGULARES

1. Introdução.

A relação fundamental das placas finas retangulares foi apresentada no capítulo anterior e escreve-se na forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (1)$$

Soluções analíticas para a equação fundamental são possíveis de serem obtidas em casos muito particulares de distribuição de forças aplicadas e de vinculação. Um deles é o da placa simplesmente apoiada em toda a borda submetida a um carregamento de distribuição senoidal, com valor máximo p_0 no centro da placa e definido pela relação:

$$p(x, y) = p_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (2)$$

Na relação anterior a representa a dimensão da placa na direção x e b a dimensão na direção y ; a origem do referencial encontra-se num dos cantos da placa.

Nessa condição, uma solução afim do carregamento, isto é, também caracterizada por uma distribuição *bi-senoidal*, satisfaz diretamente as condições de contorno, referentes à nulidade dos deslocamentos e dos momentos de flexão perpendiculares às bordas. De fato, sendo a solução dada por:

$$w(x, y) = C \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3)$$

claramente os deslocamentos são nulos nas linhas de borda caracterizadas por: $x = a$ e $y = b$. Além disso, os momentos m_x e m_y envolvem as segundas derivadas parciais da relação (3) e também se anulam nas linhas de borda. A solução da equação diferencial depende, então, da determinação da constante C e isto pode ser feito pela substituição da solução proposta na (1), considerando-se, evidentemente, o carregamento definido pela (2).

As derivadas parciais envolvidas na substituição em questão resultam:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = C \frac{\pi^4}{a^4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right);$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = C \frac{\pi^4}{b^4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right);$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = C \pi^4 \left(\frac{1}{a^2 b^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Segue que:

$$C \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) = \frac{p_0}{D} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Ou,

$$C = \frac{p_0}{D \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \quad (4)$$

Dessa forma, a solução em deslocamentos, bem como os esforços internos¹ ficam caracterizados por:

$$w(x, y) = \frac{p_0}{D \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (5)$$

$$m_x = \frac{p_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (6)$$

$$m_y = \frac{p_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (7)$$

¹ Estes determinados com as relações (3), (4), (5), (10) e (11) do capítulo anterior.

$$m_{xy} = \frac{p_0(1-\nu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 ab} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (8)$$

$$q_x = \frac{p_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (9)$$

$$q_y = \frac{p_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (10)$$

$$r_x = -\frac{p_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (11)$$

$$r_y = -\frac{p_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (12)$$

$$R = \frac{2p_0(1-\nu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 ab} \quad (13)$$

Observa-se que para as reações de apoio r_x e r_y , e também para a força de reação concentrada R nos cantos, o sinal positivo indica coincidência com o sentido do eixo Z de referência (para baixo!).

Um procedimento análogo pode ser aplicado quando o termo independente da (1) apresenta uma forma mais geral², do tipo:

$$p(x, y) = p_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (14)$$

onde m e n são números inteiros e caracterizam o número de semi-ondas nas direções x e y , respectivamente, sendo p_0 o valor da amplitude máxima

² Não há, neste caso, um compromisso que a função represente, necessariamente, um carregamento aplicado na placa; trata-se, em princípio, de uma expressão puramente matemática.

que se repete em cada semi-onda. Neste caso, a solução em deslocamento escreve-se na forma:

$$w(x, y) = \frac{p_0}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (15)$$

2. Soluções de Navier.

Quando o carregamento aplicado possui uma distribuição qualquer, o procedimento anterior pode ser estendido uma vez que se represente o carregamento $p(x, y)$ em forma de uma série dupla de senos:

$$p(x, y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (16)$$

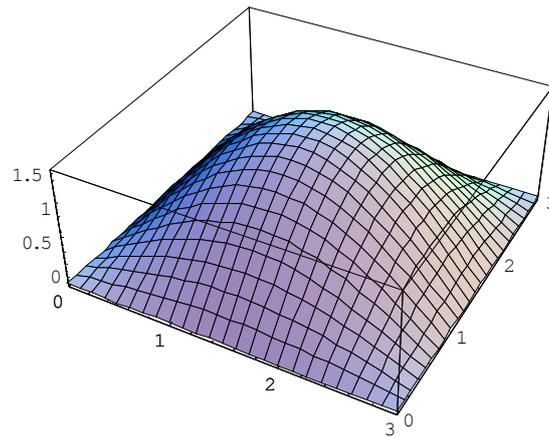
Os coeficientes p_{mn} da série podem ser determinados pela seguinte relação:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dx dy \quad (17)$$

Assim, cada termo da série resulta com uma forma similar àquela da relação (14) e a solução pode ser expressa por uma somatória de termos, cada um deles semelhante à (15). A solução, então, resulta:

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_m \sum_n \frac{p_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (18)$$

A seqüência de figuras seguintes ilustra as aproximações de um carregamento uniformemente distribuído sobre toda a superfície de uma placa quadrada de lado $a = 3$, obtidas com diferentes números de termos da série (16).



Vista frontal:

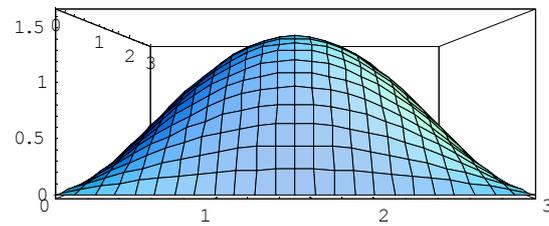
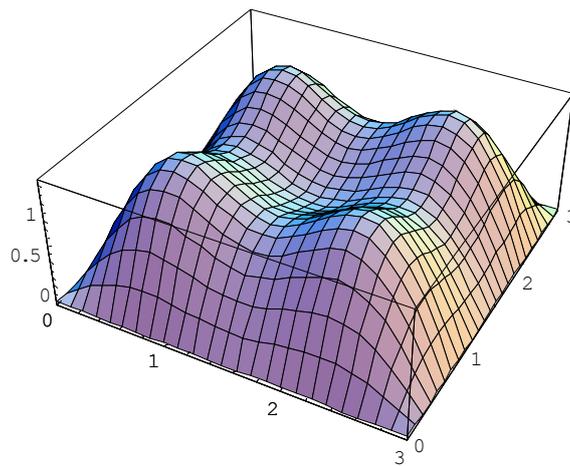


Figura 1 - Distribuição obtida com $m = 1$ e $n = 1$



Vista frontal:

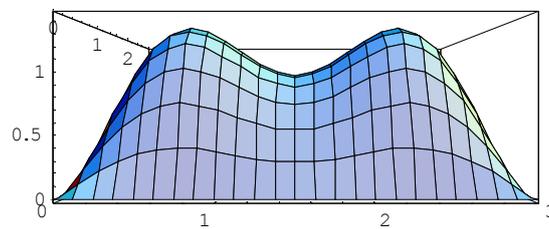
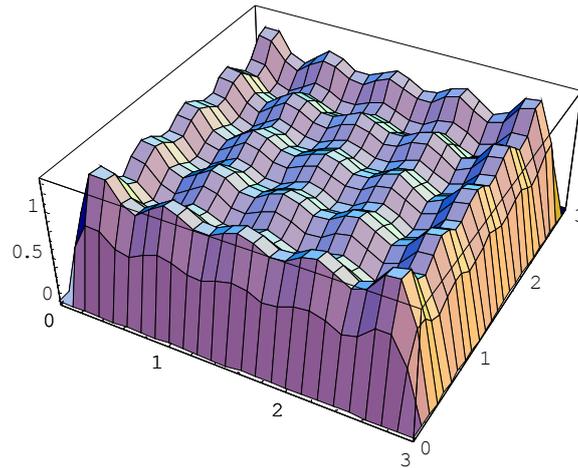


Figura 2 - Distribuição obtida com $m = 1, 3$ e $n = 1, 3$



Vista frontal:

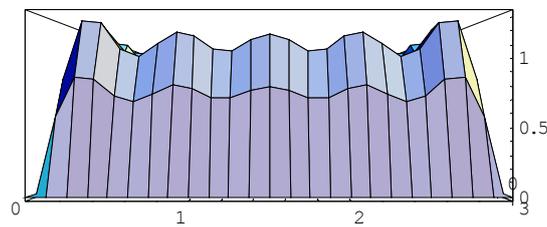
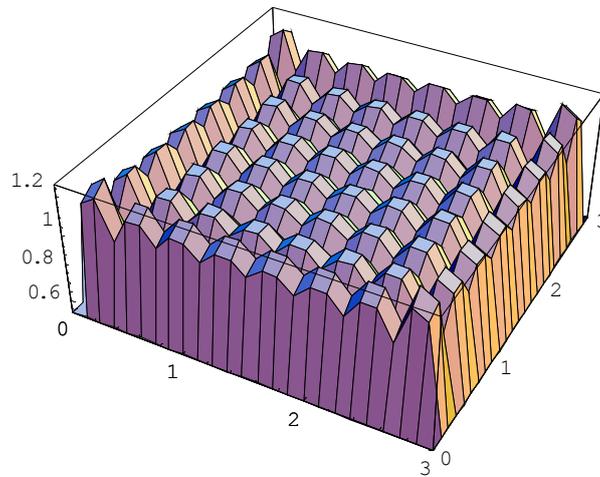


Figura 3 - Distribuição obtida com $m = 1, 3, \dots, 9$ e $n = 1, 3, \dots, 9$



Vista frontal:

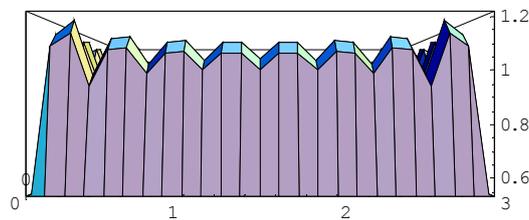
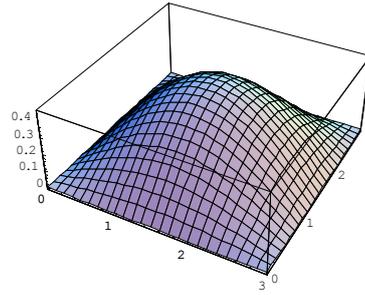


Figura 4 - Distribuição obtida com $m = 1, 3, \dots, 15$ e $n = 1, 3, \dots, 15$

A próxima seqüência de figuras mostra as aproximações geradas pelo desenvolvimento em série de uma força concentrada aplicada no centro da placa quadrada de lado $a = 3$.

- $m=1$
- $n=1$



- $m=1,3$
- $n=1,3$

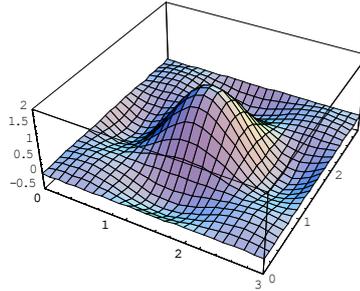


Figura 5 – Aproximações obtidas com até quatro termos da série

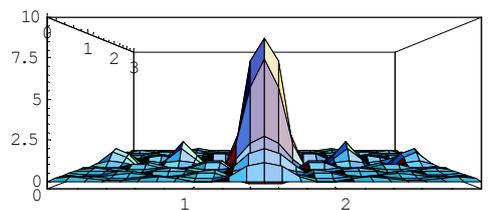
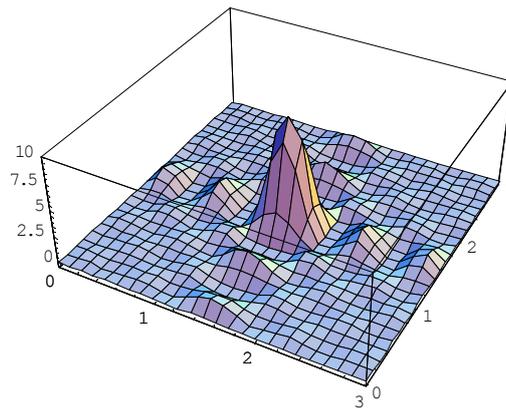


Figura 6 – Aproximações obtidas com até vinte e cinco termos da série

2.1 Caso particular de força aplicada uniformemente distribuída $p(x,y) = \bar{p}$ sobre placa retangular.

Neste caso, a relação (17) se simplifica para a seguinte forma:

$$p_{mn} = \frac{16\bar{p}}{\pi^2 mn} \quad (19)$$

onde m e n passam a ser somente números ímpares, pois aos valores pares correspondem coeficientes nulos na integração indicada pela (17).

A solução para os deslocamentos transversais fica dada por:

$$w = \frac{16\bar{p}}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{1}{(mn) \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (20)$$

Para os esforços internos e reações de apoio valem as seguintes expressões:

$$m_y = \frac{16\bar{p}}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{(ab)^2 (b^2 m^2 + \nu a^2 n^2)}{(mn) (b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (21)$$

$$m_x = \frac{16\bar{p}}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{(ab)^2 (a^2 n^2 + \nu b^2 m^2)}{(mn) (b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (22)$$

$$m_{xy} = -\frac{16\bar{p}}{\pi^4} (1-\nu) \frac{1}{(ab)} \sum_m \sum_n \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (23)$$

$$q_x = \frac{16\bar{p}ab^2}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{(b^2 m^2 + a^2 n^2)}{(n) (b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (24)$$

$$q_y = \frac{16\bar{p}a^2 b}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{(b^2 m^2 + a^2 n^2)}{(m) (b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (25)$$

$$r_x = \frac{16\bar{p}}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{(ab^4 m^2 + 2n^2 b^2 a^3 - \nu n^2 b^2 a^3)}{n (b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (26)$$

$$r_y = \frac{16\bar{p}}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{(ba^4 n^2 + 2m^2 a^2 b^3 - \nu m^2 a^2 b^3)}{m (b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (27)$$

2.2 Caso particular de força aplicada uniformemente distribuída sobre placa quadrada.

Neste caso as relações anteriores se simplificam para:

$$w = \frac{16 \bar{p} a^4}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{1}{(mn)(m^2 + n^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{a}\right) \quad (28)$$

$$m_y = \frac{16 \bar{p} a^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{(m^2 + \nu n^2)}{(mn)(m^2 + n^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{a}\right) \quad (29)$$

$$m_x = \frac{16 \bar{p} a^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{(n^2 + \nu m^2)}{(mn)(m^2 + n^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{a}\right) \quad (30)$$

$$m_{xy} = -\frac{16 \bar{p}}{\pi^4} (1 - \nu) a^2 \sum_m \sum_n \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{a}\right) \quad (31)$$

$$q_x = \frac{16 \bar{p} a}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{1}{n(m^2 + n^2)} \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{a}\right) \quad (32)$$

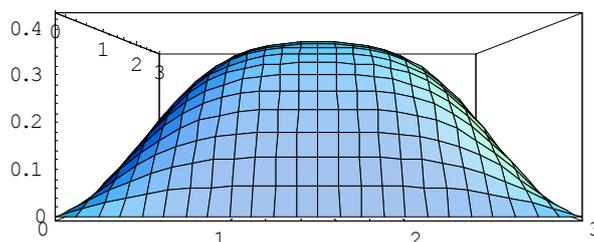
$$q_y = \frac{16 \bar{p} a}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{1}{m(m^2 + n^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{a}\right) \quad (33)$$

$$r_x = \frac{16 \bar{p} a}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{(m^2 + 2n^2 - \nu n^2)}{n(m^2 + n^2)^2} \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{a}\right) \quad (34)$$

$$r_y = \frac{16 \bar{p} a}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{(2m^2 + n^2 - \nu m^2)}{m(m^2 + n^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{a}\right) \quad (35)$$

As figuras que seguem ilustram as distribuições de esforços obtidas com diferentes termos da série em placa quadrada de lado $a = 3$.

- $m = 1, 3$ e $n = 1, 3$ (vista frontal)



- $m = 1, 3, \dots, 9$ e $n = 1, 3, \dots, 9$ (vista frontal)

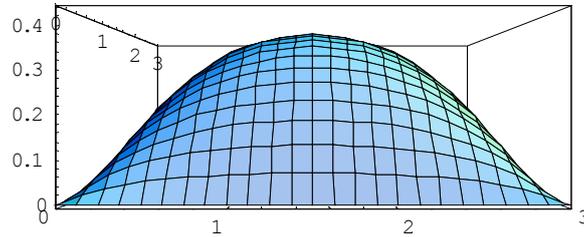
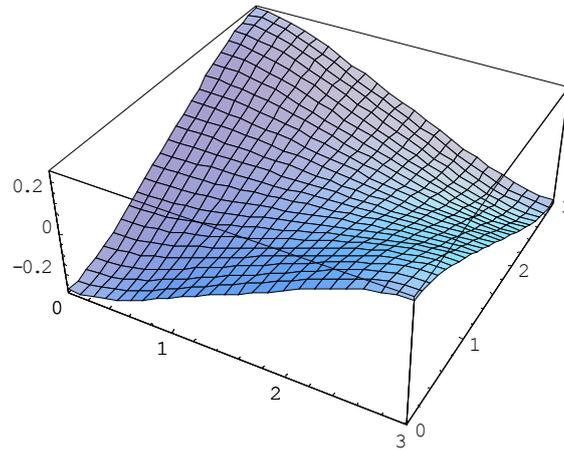


Figura 7 – Distribuições de momentos fletores

- $m = 1, 3$ e $n = 1, 3$



- $m = 1, 3, \dots, 9$ e $n = 1, 3, \dots, 9$

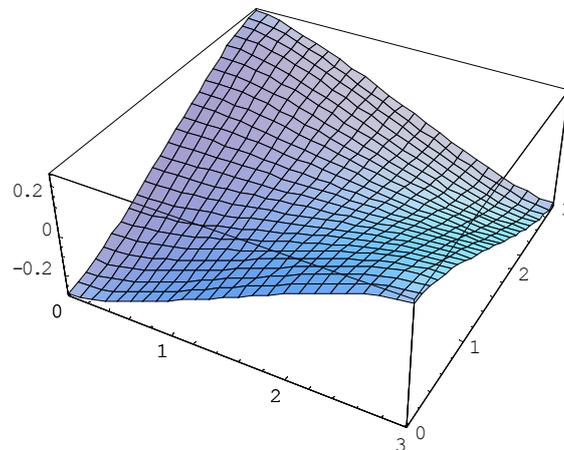
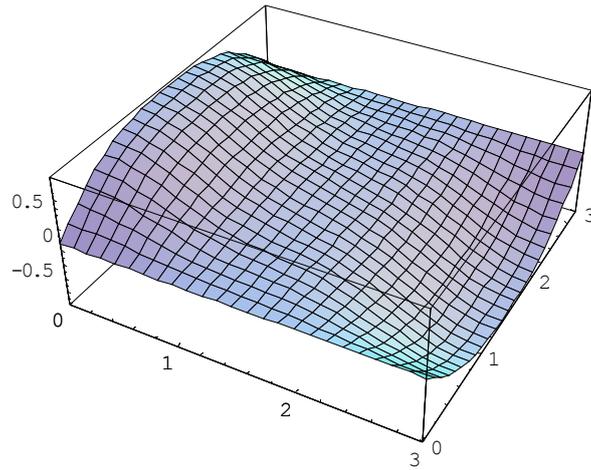
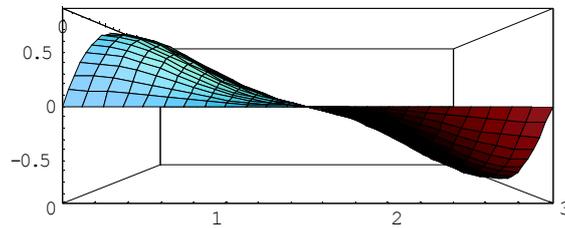


Figura 8 – Distribuições de momentos volventes

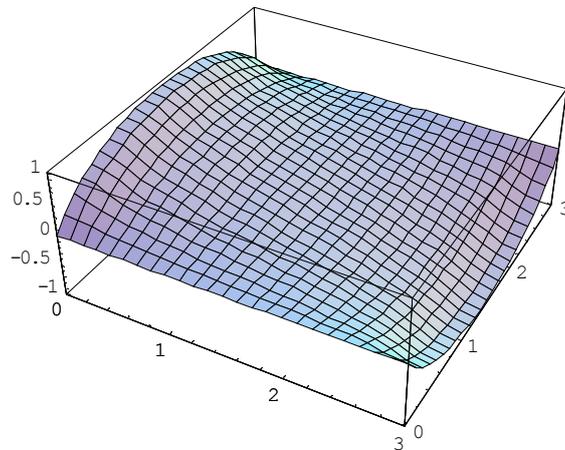
- $m = 1, 3$ e $n = 1, 3$



Vista frontal:



- $m = 1, 3, \dots, 9$ e $n = 1, 3, \dots, 9$



Vista frontal:

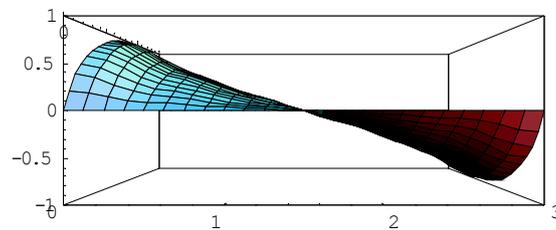
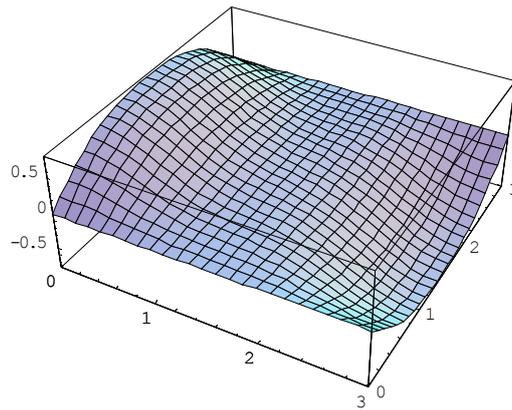
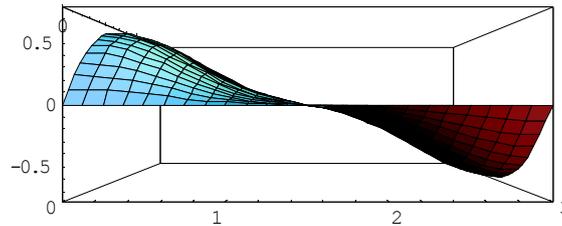


Figura 9 – Distribuições de forças cortantes

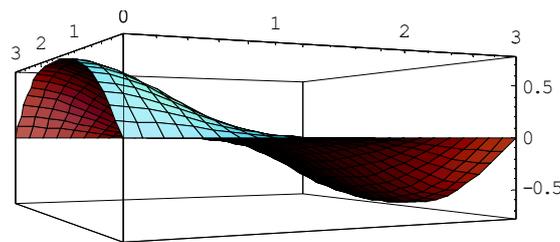
- $m = 1, 3$ e $n = 1, 3$



Vista frontal:



Vista sob direção defasada em relação à direção frontal:



Vista sob outra direção defasada em relação à direção frontal:

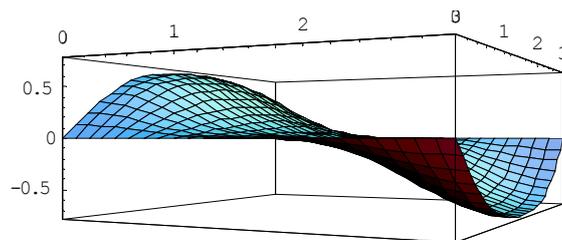


Figura 10 – Diferentes vistas da distribuição de reação r_x

2.3 Caso particular de força aplicada uniformemente distribuída sobre área retangular.

A solução em série trigonométrica para o deslocamento transversal de um ponto da placa retangular, de lados a e b , respectivamente segundo os eixos x e y , simplesmente apoiada no contorno e submetida a um carregamento p

uniformemente distribuído numa região retangular de lados a_0 e b_0 ³, é dada por:

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_m \sum_n \frac{p_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

sendo

$$p_{mn} = \frac{16p}{\pi^2 mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi \xi}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi \eta}{b}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi a_0}{2a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi b_0}{2b}\right) \quad (36)$$

com ξ e η as coordenadas do centro da região de carregamento.

2.4 Caso particular de força concentrada P aplicada no ponto de coordenadas: $x = \xi$ e $y = \eta$.

A diferença para o caso anterior é o cálculo dos coeficientes p_{mn} :

$$p_{mn} = \frac{4P}{ab} \text{sen}\left(\frac{m\pi \xi}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi \eta}{b}\right) \quad (37)$$

Exemplo 1. Determinar o valor do deslocamento no ponto central de uma placa quadrada de lado 60 cm e espessura $0,8 \text{ cm}$, considerando-se os desenvolvimentos em série resultantes de: $(m = n = 1)$ e $(m = n = 3)$. Dados complementares: $E = 7000,0 \text{ kN/cm}^2$; $\nu = 0,3$; $\bar{p} = 0,001 \text{ kN/cm}^2$.

Sendo no ponto central: $x = 30$; $y = 30$, a relação (28) assume a seguinte forma:

$$w_{\text{máx}} = \frac{16\bar{p}a^4}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}}{(mn)(m^2 + n^2)^2}$$

Seguem os resultados intermediários:

$$\sum_{m=1} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}}{(mn)(m^2 + n^2)^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

³ Os lados são também paralelos aos eixos de referência.

$$\sum_{m=1,3} \sum_{n=1,3} \frac{(-1)^{\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}}{(mn)(m^2+n^2)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{300} - \frac{1}{300} + \frac{1}{2916} = 0,2437$$

As relações para o cálculo e os valores do deslocamento máximo resultam:

$$w_{máx.1} = \frac{0,00416 \bar{p} a^4}{D} = 0,164 \text{ cm}; \quad w_{máx.2} = \frac{0,004056 \bar{p} a^4}{D} = 0,16 \text{ cm}$$

Exemplo 2. A placa quadrada, indicada em planta na Figura 11, está simplesmente apoiada em todo o contorno e submetida a um carregamento (p) uniformemente distribuído, exceto na região central, também quadrada, representada em linha tracejada. Determinar o deslocamento no centro da placa considerando-se soluções trigonométricas em série com $m=1$ e $n=1,3$.

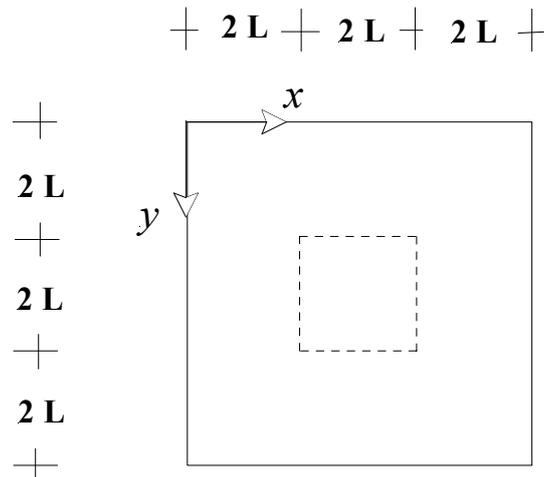


Figura 11 – Placa quadrada

O problema pode ser resolvido por sobreposição de dois casos: o primeiro em que a força dada (p) aplica-se sobre toda a face superior da placa e o segundo em que uma força ($-p$) aplica-se somente na região quadrada central que deverá resultar livre. Este segundo caso corresponde, então, a um problema onde a força aplicada distribui-se numa região (quadrada, no caso) interna à placa, cuja solução é dada pela relação (36).

As relações a serem empregadas para a solução são as seguintes:

- Placa retangular com carregamento aplicado uniformemente em toda a sua superfície

$$w_1 = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{1}{(mn) \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

- Placa retangular com carregamento aplicado uniformemente numa região retangular de lados a_0 e b_0

$$w_2 = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_m \sum_n \frac{p_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

sendo

$$p_{mn} = \frac{16p}{\pi^2 mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi \xi}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi \eta}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi a_0}{2a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi b_0}{2b} \right)$$

Procedendo aos desenvolvimentos, a parcela de deslocamento w_1 resulta:

$$w_1 = \frac{16p}{\pi^6 D} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{300} \right) = \frac{5,32 p L^4}{D}$$

Para a parcela de deslocamento w_2 resultam:

$$p_{11} = \frac{16p}{\pi^2} \frac{1}{4} = \frac{4p}{\pi^2}$$

$$p_{13} = \frac{16p}{\pi^2} \frac{1}{3} (1)(-1) \left(\frac{1}{2} \right) (1) = -\frac{2,667 p}{\pi^2}$$

$$w_2 = \frac{4pa^4}{\pi^6 D} \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{2,667 pa^4}{\pi^6 D} \left(-\frac{1}{100} \right) = \frac{1,0267 pa^4}{\pi^6 D} = \frac{1,384 p L^4}{D}$$

Considerando que as parcelas de deslocamentos possuem sentidos contrários, segue que o deslocamento final fica dado por:

$$w = w_1 - w_2 = \frac{3,94 p L^4}{D}$$

CAPÍTULO 9 CASCAS EM REGIME DE MEMBRANA

1. Introdução

Por casca denomina-se o elemento estrutural laminar de superfície média não-plana¹. Ainda sob o ponto de vista geométrico, a superfície média pode apresentar simples ou dupla-curvatura, e uma classificação de acordo com essas características pode ser feita, de forma mais rigorosa, empregando-se uma medida denominada *curvatura gaussiana*.

Da Geometria Diferencial, ou geometria das superfícies, sabe-se que em qualquer ponto de uma superfície é possível identificar duas direções ortogonais, correspondentes às tangentes às linhas particulares contidas na superfície que apresentam, no ponto, valores de curvatura extremos (ou principais)². A curvatura gaussiana é então definida pelo inverso do produto dos raios principais de curvatura. Ocorre que os correspondentes centros locais de curvatura podem estar posicionados de um mesmo lado ou em lados opostos em relação ao plano definido por aquelas tangentes; quando estiverem de um mesmo lado a curvatura gaussiana apresentará sinal positivo, quando em lados opostos a curvatura gaussiana será negativa. Pode ocorrer, ainda, que uma das linhas tenha curvatura nula e, neste caso, também será nula a curvatura gaussiana.

O estudo apresentado neste e nos próximos capítulos limita-se às cascas de superfície média com curvatura gaussiana positiva ou nula, e que apresentam simetria axial de geometria e forças aplicadas. Essa característica de *simetria de revolução* confere ao problema estrutural a simplificação de poder descrevê-lo matematicamente em função de uma única variável independente.

Não obstante a limitação introduzida ao assunto, cascas com simetria de revolução aparecem com grande frequência em diversas aplicações em engenharia, sendo que na aeronáutica elas são particularmente finas. Por este motivo, do ponto de vista estrutural as componentes de tensão alinhadas com a direção da normal à superfície média podem ser desprezadas; quanto às componentes nos planos tangentes àquela superfície, suas distribuições podem ser consideradas praticamente

¹ Este aspecto, em particular, a diferencia de uma placa.

² Tais linhas são referenciadas como linhas de curvatura.

uniformes ao longo da espessura. Idealmente, portanto, as cascas finas caracterizam-se pela resistência às ações aplicadas mediante movimentação de esforços internos generalizados contidos, sobretudo, em planos tangentes à sua superfície média: trata-se de um comportamento típico de *membrana*.

Entretanto, perturbações do ‘*regime de membrana*’ podem ser induzidas por variações bruscas ou pontuais do carregamento aplicado e de geometria, além do efeito de vinculação externa ou interna. As perturbações se identificam pelo aparecimento de flexões localizadas na região adjacente à sua causa. Nessas regiões as distribuições de tensão ao longo da espessura deixam de ser uniformes e o equilíbrio passa a exigir a movimentação de esforços generalizados de flexão e torção.

Neste capítulo, após uma breve apresentação de alguns conceitos da geometria das superfícies e da definição dos esforços solicitantes em cascas de geometria qualquer, coloca-se em destaque o tema das cascas de revolução e, em particular, da análise das cascas em regime de membrana. A modelagem descrita limita-se ao comportamento linear físico e geométrico.

2. Definição geral dos esforços solicitantes em cascas de geometria qualquer

2.1 Alguns preliminares da geometria das superfícies

Uma superfície pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos do espaço tridimensional cujo vetor posição \mathbf{r} , definido com relação a um referencial cartesiano posicionado com origem arbitrária, é função de dois parâmetros independentes: ξ_1 e ξ_2 . Tais parâmetros podem, ainda, ser interpretados como coordenadas naturais de pontos num domínio bidimensional. Diz-se, então, que ξ_1 e ξ_2 constituem um sistema de coordenadas curvilíneas intrínseco à superfície, conforme ilustra a Figura 1.

Atrelando ao referencial um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) , as coordenadas de um ponto sobre a superfície passam a ser funções conhecidas de ξ_1 e ξ_2 , e podem ser colocadas na forma paramétrica: $x = f_1(\xi_1, \xi_2)$, $y = f_2(\xi_1, \xi_2)$ e $z = f_3(\xi_1, \xi_2)$.

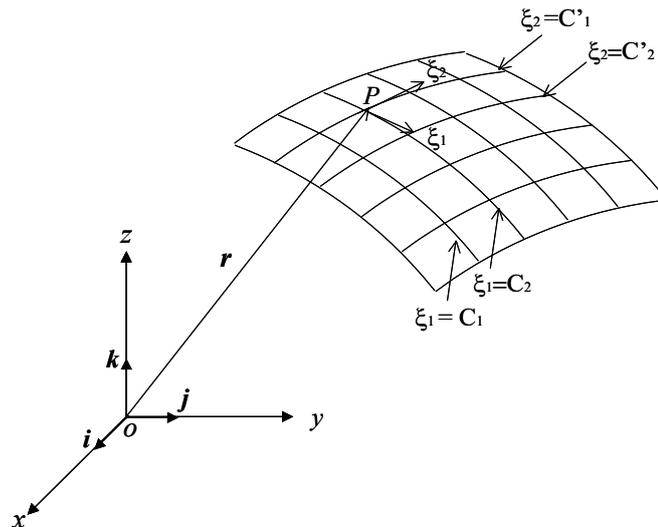


Figura 1- Ponto P da superfície definida por coordenadas paramétricas

Curvas sobre a superfície ao longo das quais um parâmetro permanece constante são denominadas curvas paramétricas. Uma superfície pode, então, ser definida completamente por dois conjuntos de curvas paramétricas. Assim sendo, escolhendo-se as linhas de curvatura como curvas paramétricas, pode-se usá-las para definir um sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas atrelado à superfície.

Para ilustrar o conceito anterior, considere-se um ponto P sobre a superfície de uma esfera. Neste caso, é mais convenientemente identificá-lo por coordenadas esféricas (R, φ, θ) , em lugar das cartesianas, conforme mostra a Figura 2.

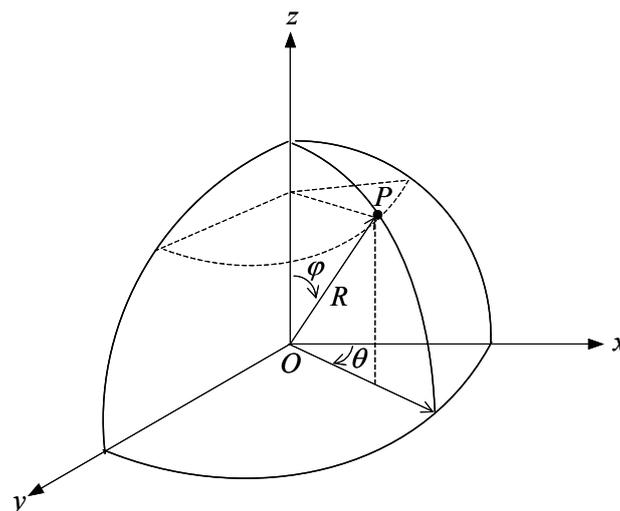


Figura 2 - Octante de superfície esférica.

Sendo R o raio da esfera, as coordenadas cartesianas do ponto sobre a esfera são:

$$x = R \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \quad (1)$$

$$y = R \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \quad (2)$$

$$z = R \cos(\varphi) \quad (3)$$

Neste caso, φ e θ podem ser interpretados como os parâmetros ξ_1 e ξ_2 , pois fixados um ou outro, definem-se meridianos e paralelos sobre a superfície.

Sejam, agora, P e Q pontos vizinhos sobre a superfície, com vetores posição \mathbf{r} e $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, respectivamente, e aos quais correspondem os pares de coordenadas paramétricas (ξ_1, ξ_2) e $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2)$, (ver Fig. 3). Então, sendo por hipótese \mathbf{r} uma função regular de ξ_1 e ξ_2 , tem-se:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} d\xi_2 \quad (4)$$

onde $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}$ são vetores tangentes às curvas paramétricas em P . O comprimento ds do elemento de arco, sobre a superfície, que une P a Q é dado pelo módulo de $d\mathbf{r}$ quando P tende para Q .

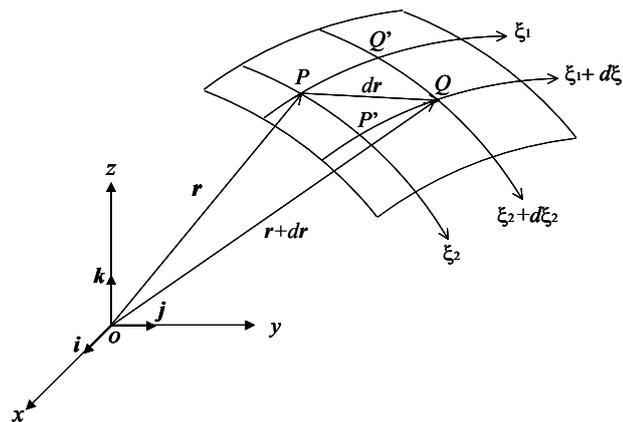


Figura 3 - Elemento diferencial de arco $d\mathbf{r}$ de comprimento ds .

Ainda observando a Figura 3, tomando-se, em particular, os pontos vizinhos P' e Q' , sobre as linhas paramétricas $\xi_1 = cte.$ e $\xi_2 = cte.$, respectivamente, os comprimentos dos elementos de arco correspondentes escrevem-se como particularizações da (4):

$$ds_1 = \alpha_1 d\xi_1; \quad ds_2 = \alpha_2 d\xi_2$$

onde α_1 e α_2 são, respectivamente, os módulos dos vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}$, denominados, genericamente, por coeficientes métricos.

Por outro lado, sendo a casca uma estrutura laminar, geometricamente ela pode ter sua espessura gerada fazendo-se percorrer ao longo de curvas paramétricas, de sua superfície média, um vetor de módulo variável (por generalidade) e direção normal à superfície.

Assim, a posição de um ponto qualquer da casca pode ser determinada por três parâmetros: dois dos quais variam sobre a superfície média da casca enquanto o terceiro varia na direção da normal a esta superfície. Sendo, por exemplo, z a posição em relação à superfície média, medida na direção do versor normal à ela, tal ponto terá coordenadas curvilíneas: ξ_1 , ξ_2 e z , ortogonais no caso de se associar os parâmetros à linhas de curvatura.

2.2 Os esforços internos solicitantes

Considere-se o elemento de casca ilustrado na Figura 4, limitado na superfície média pelas linhas: $\xi_1 = cte.$, $\xi_1 + d\xi_1 = cte.$, $\xi_2 = cte.$, $\xi_2 + d\xi_2 = cte.$, e nas direções ortogonais aos planos tangentes pela dimensão: $z = \pm \frac{h}{2}$, sendo h a espessura da casca. Os lados do elemento correspondentes às posições: $(\xi_1 = 0; \xi_2 = cte.)$ e $(\xi_1 = cte.; \xi_2 = 0)$ possuem comprimentos $\alpha_1 d\xi_1$ e $\alpha_2 d\xi_2$, onde α_1 e α_2 são os coeficientes métricos descritos no item anterior.

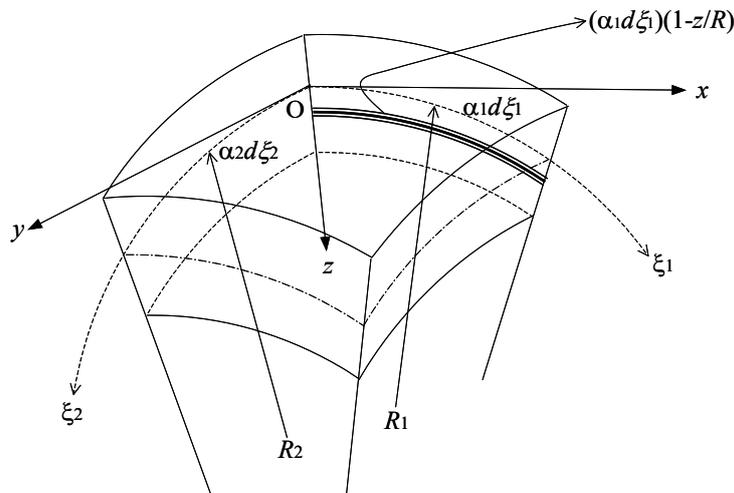


Figura 4 - Descrição geométrica de um elemento diferencial de casca

Sejam x e y as direções das tangentes às coordenadas curvilíneas ξ_1 e ξ_2 no ponto O mostrado na Figura 4. Sejam, ainda, R_1 e R_2 os raios de curvatura em O , medidos nos planos xz e yz , respectivamente. O ângulo correspondente ao arco de comprimento $\alpha_2 d\xi_2$ é então $\frac{\alpha_2 d\xi_2}{R_2}$ e o comprimento do arco genérico do elemento situado a uma distância z da superfície média segundo o plano yz resulta:

$$\frac{(R_2 - z)\alpha_2 d\xi_2}{R_2} = \left(1 - \frac{z}{R_2}\right)\alpha_2 d\xi_2 \quad (5)$$

As componentes de tensão normal e de cisalhamento segundo os planos das faces do elemento são σ_1 , σ_2 , $\tau_{12} = \tau_{21}$, τ_{1z} , τ_{2z} ³. Chamando de N_1 a resultante da tensão normal atuando na face yz , tem-se:

$$N_1 \alpha_2 d\xi_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \alpha_2 d\xi_2 dz \quad (6)$$

ou, considerando-se sua distribuição por unidade de comprimento,

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (7)$$

Da mesma forma, obtêm-se as expressões para as outras forças e momentos, distribuídas por unidade de comprimento, atuantes nas seções normais. Tais esforços são mostrados na Figura 5.

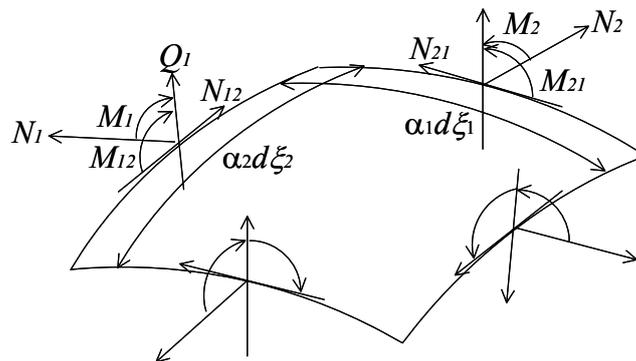


Figura 5 - Esforços internos no elemento de casca

Então, têm-se:

³ Vale aqui uma convenção de sinais análoga àquela introduzida no estudo das placas.

$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \quad (8)$$

$$N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (9)$$

$$N_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \quad (10)$$

$$Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{1z} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (11)$$

$$Q_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{2z} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \quad (12)$$

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) z dz \quad (13)$$

$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) z dz \quad (14)$$

$$M_{12} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) z dz \quad (15)$$

$$M_{21} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) z dz \quad (16)$$

Das definições acima, conclui-se que apesar de, por reciprocidade, $\tau_{12} = \tau_{21}$, N_{12} não é necessariamente igual a N_{21} , pois, geralmente, $R_1 \neq R_2$. Pela mesma razão, M_{12} não é igual a M_{21} . Entretanto para as cascas finas, h é pequeno se comparado com R_1 e R_2 , e os termos $\frac{z}{R_1}$ e $\frac{z}{R_2}$ nas expressões de (8) a (16) podem ser desprezados se comparados com a unidade. Assim, pode-se admitir que: $N_{12} = N_{21}$ e $M_{12} = M_{21}$.

3. Cascas de revolução

3.1 Geometria

Geometricamente as cascas de revolução têm sua superfície média, de simples ou dupla curvatura, descrita pela rotação de um segmento de reta ou curva plana qualquer (‘meridiano’) em torno de um eixo de rotação contido no seu plano (Fig. 6).

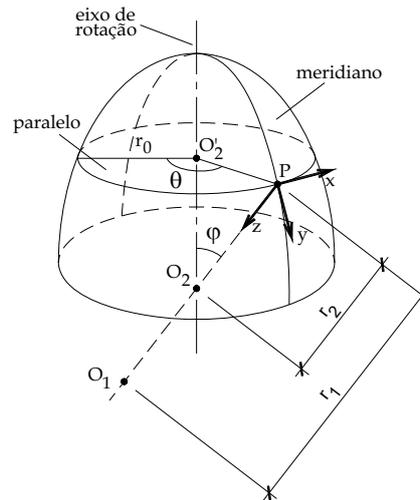


Figura 6 - Geometria de uma casca de revolução de dupla curvatura

A intersecção da superfície média com um plano normal ao eixo de rotação define uma circunferência ou ‘paralelo’.

Por um ponto P qualquer desta superfície pode-se orientar um sistema de referência ortogonal dextrorso (com os sentidos positivos indicados na Fig. 6), tendo por eixos:

- x : tangente ao paralelo;
- y : tangente ao meridiano;
- z : normal à superfície.

Pode-se ainda introduzir os seguintes elementos geométricos, também indicados na Figura 6:

- $r_1 (= \overline{O_1 P})$: raio de curvatura do meridiano no ponto P , medido segundo o eixo z de referência;
- $r_0 (= \overline{O_2' P})$: raio de curvatura do paralelo;
- φ : ângulo no plano meridional que contém P , definido entre o eixo de rotação e a normal à superfície no ponto P .

- θ : ângulo no plano do paralelo, definido entre uma direção r_0 tomada como referência e o raio do paralelo no ponto P .

Assim, pode-se adotar para coordenadas da superfície média o seguinte conjunto de variáveis: (θ, φ, z) .

3.2 Ações

As ações (forças aplicadas por unidade de área) são indicadas por um vetor \vec{p} , que pode ser representado em função dos seus componentes na forma:

$$\vec{p} = \vec{p}_\theta + \vec{p}_\varphi + \vec{p}_z \quad (17)$$

De um modo geral, alguns tipos de ações e efeitos frequentes que dão origem às solicitações internas nas cascas têm por origem:

- Peso próprio;
- Sobrecarga acidental;
- Ações de natureza aerodinâmica;
- Efeito de variação de temperatura;
- Deslocamentos impostos de apoio;
- ...

Neste texto, ao se considerar as ações, tratam-se em particular aquelas que apresentam simetria de revolução, portanto: $\vec{p}_\theta = 0$.

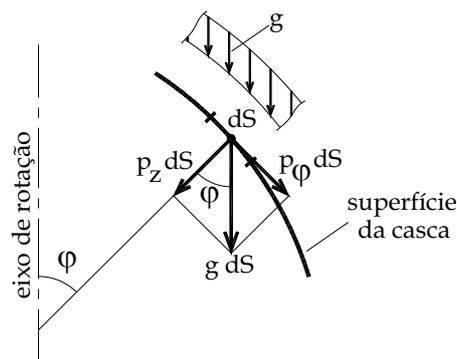


Figura 7 - Elemento de casca com carga do tipo permanente (peso próprio).

Para representar o caso de peso próprio, a força aplicada (g) é uniformemente distribuída por unidade de área de superfície média da casca (ver Fig.7); já a força (q) representativa de ação de sobrecarga, indicada na Fig.8, pode ser considerada como uniformemente distribuída em relação à projeção horizontal da superfície.

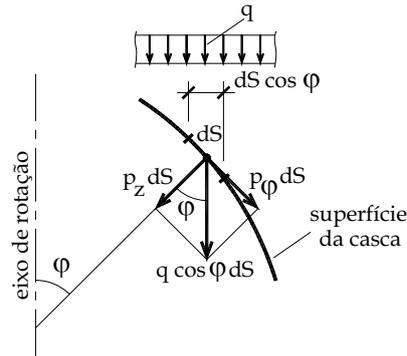


Figura 8 - Elemento de casca sob ação de sobrecarga.

O caso de pressão interna ou externa caracteriza-se por sua ação ortogonal ao plano tangente à superfície média da casca, coincidente, portanto, com a componente p_z .

3.3 Esforços internos generalizados

Considere-se um elemento genérico de superfície média da casca, delimitado por dois paralelos e dois meridianos, de área $dS = r_o d\theta r_1 d\varphi$, (ver Fig. 9). Por uma questão de conceituação geral, ainda neste ponto definem-se ações e esforços internos sem levar em conta simplificações decorrentes da restrição de axissimetria.

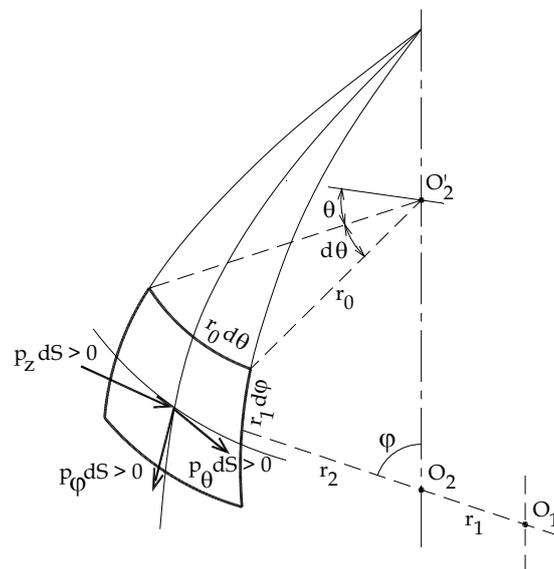


Figura 9 - Componentes das forças externas no elemento de casca.

Em relação ao referencial posicionado no ponto central do elemento, representam-se as resultantes das componentes do carregamento externo, denotadas por $p_\theta dS$, $p_\varphi dS$ e $p_z dS$.

Mesmo sendo a casca de espessura fina, considera-se que as distribuições de tensões normais e de cisalhamento ao longo dela são tais que configuram como resultantes esforços internos generalizados, (distribuídos por unidade de comprimento) dos tipos: forças normais e tangenciais às faces ($N_\theta, N_\varphi, N_{\theta\varphi}$ e $N_{\varphi\theta}$), momentos de flexão e volventes ($M_\theta, M_\varphi, M_{\theta\varphi}$ e $M_{\varphi\theta}$). Além disso, as componentes de tensão normal na direção da normal à superfície média são desprezadas, entretanto não se desprezam tensões de cisalhamento naquela direção, as quais proporcionam forças cortantes (Q_θ, Q_φ) como resultantes. Todos os esforços são definidos por unidade de comprimento e têm seus sentidos convencionados positivos indicados nas figuras 10a e 10b. Ainda nas mesmas figuras indicam-se as variações que os esforços apresentam ao se percorrerem de face a face do elemento as linhas de paralelo ou de meridiano.

Os esforços normais e tangenciais são denominados *esforços de membrana*, dado ao fato de pertencerem ao plano tangente à superfície média; os momentos e forças cortantes restantes são ditos *esforços de flexão*.

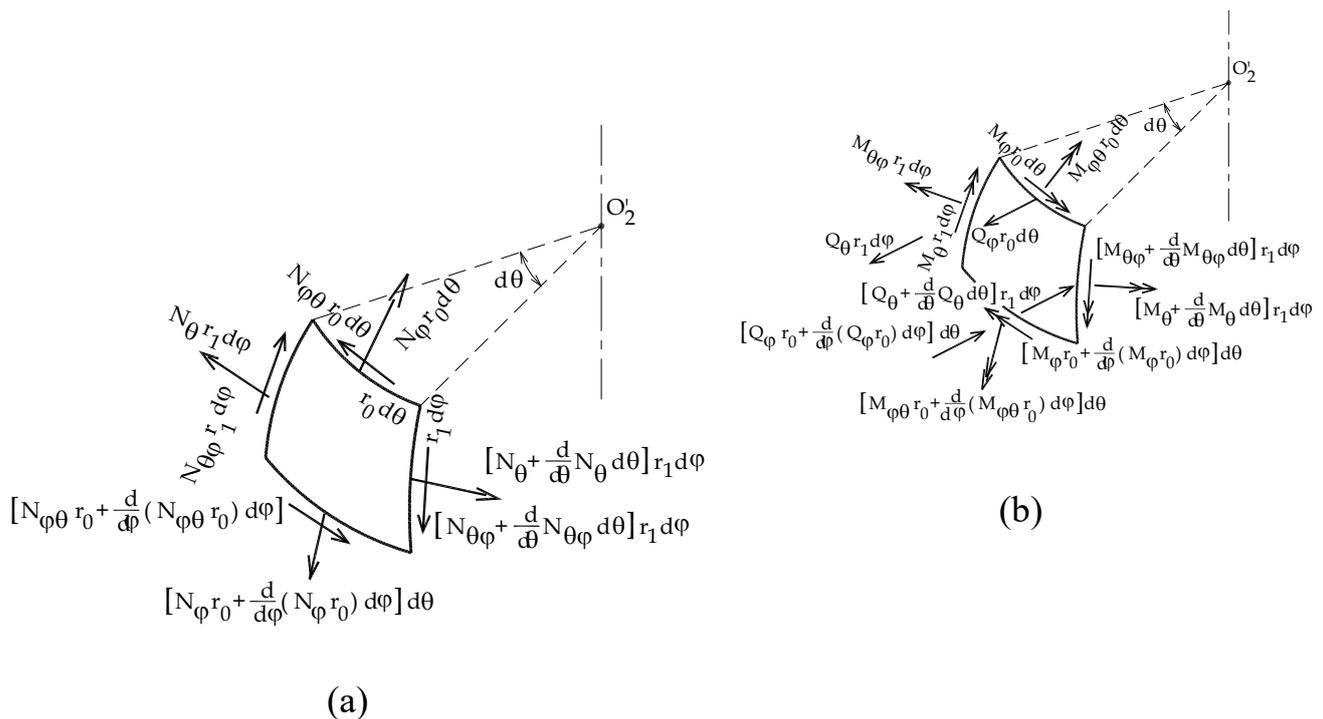


Figura 10 - a) Esforços solicitantes de membrana; b) Esforços solicitantes de flexão.

3.4 Equações de Equilíbrio

Introduzindo a hipótese de simetria axial, o carregamento externo não deve apresentar componente em relação ao eixo tangencial ao paralelo (p_θ , que aparece na Figura 9, é nulo). Essa mesma condição de simetria leva a concluir pela inexistência de forças tangenciais, momentos volventes e forças cortantes em relação ao paralelo. Em conjunto, tal simplificação implica em:

$$p_\theta \equiv N_{\phi\theta} \equiv N_{\theta\phi} \equiv M_{\phi\theta} \equiv M_{\theta\phi} \equiv Q_\theta \equiv 0 \quad (18)$$

Os esforços N_θ e M_θ existem, porém, com valor constante ao longo do paralelo. Nesse sentido, acrescentam-se as restrições:

$$\frac{dN_\theta}{d\theta} \equiv \frac{dM_\theta}{d\theta} \equiv 0 \quad (19)$$

Em virtude da simplificação descrita, restam 5 esforços internos a serem considerados num elemento de casca esférica (todos somente em função de φ):

$$N_\theta; N_\phi; Q_\phi; M_\phi; M_\theta \quad (20)$$

O conjunto de esforços internos e ações externas atuantes no elemento devem obedecer à condição geral de equilíbrio, detalhada no que segue.

- Equilíbrio segundo a tangente ao meridiano (definida no ponto central do elemento). Em razão da curvatura do elemento, para o equilíbrio nesta direção contribuem não somente o esforço N_ϕ , mas também as componentes de N_θ e Q_ϕ .

A relação de equilíbrio correspondente resulta:

$$p_\phi r_o r_1 d\theta d\varphi - N_\phi r_o d\theta \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + \left[N_\theta r_o d\theta + \frac{d}{d\varphi}(N_\theta r_o) d\varphi d\theta \right] \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - N_\theta r_1 d\varphi d\theta \cos(\varphi) - 2\left(\frac{1}{2} Q_\phi r_o d\theta d\varphi\right) = 0 \quad (21)$$

ou, após as simplificações,

$$\frac{d}{d\varphi}(N_{\varphi}r_o) - N_{\theta}r_1 \cos(\varphi) - Q_{\varphi}r_o = -p_{\varphi}r_o r_1 \quad (22)$$

As Figuras 11a e 12 ilustram a obtenção das componentes dos esforços envolvidos na última relação. Chama-se a atenção para a interpretação, mostrada nas figuras 11b e 12, da componente N_{θ} segundo o meridiano.

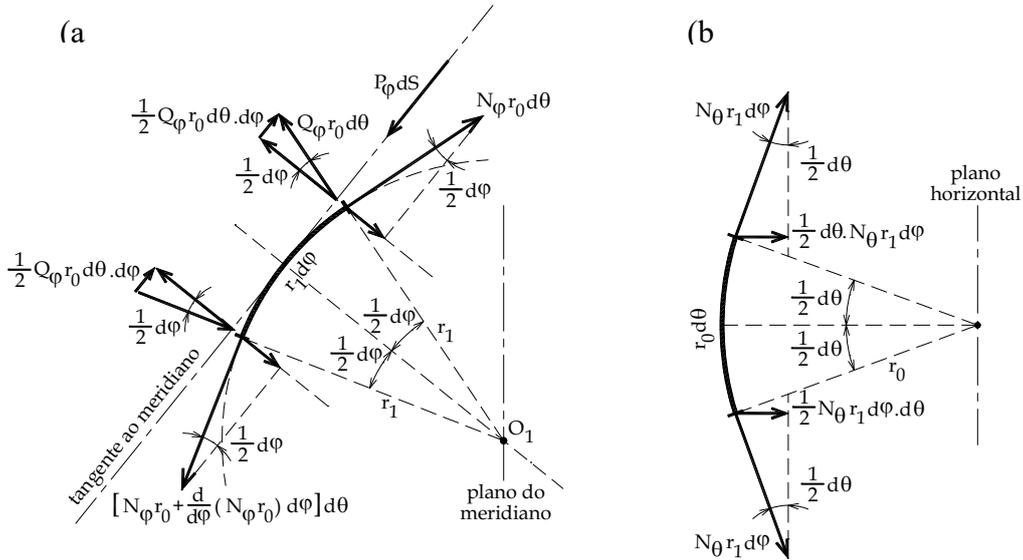


Figura 11 - a) Componentes dos esforços internos segundo o plano meridiano; b) Componentes do esforço N_{θ} no plano do paralelo.

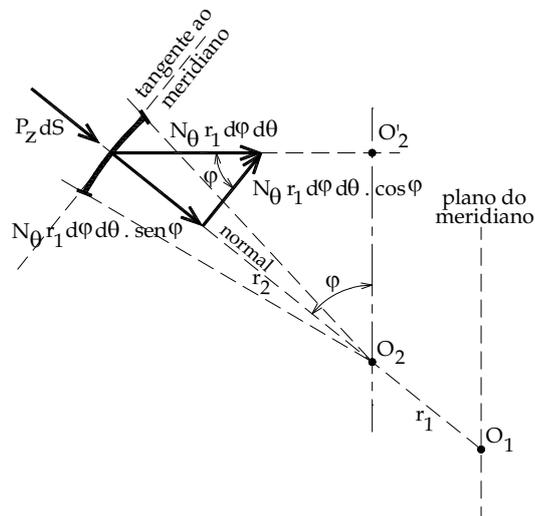


Figura 12 - Componentes de N_{θ} no plano meridiano.

- Equilíbrio segundo a direção da normal à superfície (definida no ponto central do elemento): também devido à curvatura do elemento, os esforços N_{φ} , N_{θ} e Q_{φ} possuem componentes nessa direção.

Novamente recorre-se às Figuras 11 e 12 para visualizar a obtenção de tais componentes. A relação de equilíbrio correspondente resulta:

$$p_z r_o r_1 d\theta d\varphi + N_{\theta} r_1 d\varphi d\theta \cdot \text{sen}(\varphi) + N_{\varphi} r_o d\theta \cdot \frac{d\varphi}{2} + \left[N_{\varphi} r_o + \frac{d}{d\varphi} (N_{\varphi} r_o) d\varphi \right] d\theta \cdot \frac{d\varphi}{2} - Q_{\varphi} r_o d\theta \cdot \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + \left[Q_{\varphi} r_o + \frac{d}{d\varphi} (Q_{\varphi} r_o) d\varphi \right] d\theta \cdot \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0 \quad (23)$$

ou, após as simplificações,

$$N_{\varphi} r_o + N_{\theta} r_1 \text{sen}(\varphi) + \frac{d}{d\varphi} (Q_{\varphi} r_o) = -p_z r_o r_1 \quad (24)$$

- Equilíbrio à rotação, ou de momentos em torno da tangente ao paralelo. Neste caso, como os meridianos não são paralelos entre si, os momentos M_{θ} apresentam contribuição para o equilíbrio; tal contribuição está ilustrada na Figura 13.

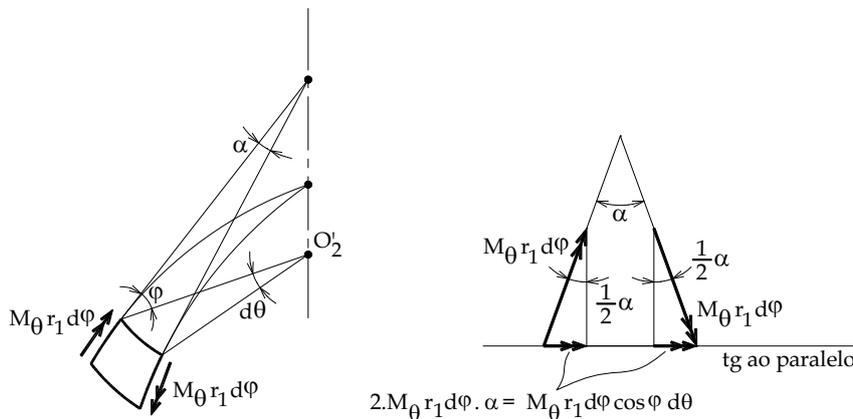


Figura 13 - Componentes de momentos fletores M_{θ} segundo a tangente ao paralelo.

A relação correspondente resulta:

$$\left[\frac{d}{d\varphi} (M_{\varphi} r_o) d\varphi \right] d\theta - M_{\theta} r_1 \cos(\varphi) d\theta d\varphi - (Q_{\varphi} r_o d\theta) r_1 d\varphi = 0 \quad (25)$$

$$\frac{d}{d\varphi} (M_{\varphi} r_o) - M_{\theta} r_1 \cos(\varphi) - Q_{\varphi} r_o r_1 = 0 \quad (26)$$

4. Cascas de revolução em regime de membrana

As cascas apresentam um regime de comportamento dito de membrana se as ações externas puderem ser equilibradas somente por esforços internos contidos em planos tangentes à superfície média, isto é, sem que se movimentem momentos fletores, volventes e forças cortantes:

$$Q_\varphi \equiv M_\varphi \equiv M_\theta \equiv 0 \quad (27)$$

Numa conceituação geral, para que de fato uma casca possa ser admitida em ‘regime de membrana’ as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- a. A casca deve ter espessura suficientemente fina para que as tensões normais e tangenciais de direção paralela à superfície média do elemento possam ter suas distribuições consideradas como uniformes ao longo da espessura (proporcionando, portanto, como resultantes, somente forças normais e tangenciais à superfície média). Além disso, também em razão da espessura fina, em cada ponto desconsideram-se componentes de tensão na direção ortogonal ao plano tangente local à superfície média da casca.
- b. O carregamento aplicado deve ser distribuído e com variação suave sobre a superfície da casca.
- c. Os vínculos devem impor somente reações compatíveis com os esforços de membrana, isto é, forças com direções normais e tangenciais à superfície média da casca.

Em razão das distribuições de tensões normais e de cisalhamento das quais resultam, os esforços normais e tangenciais generalizados são agora ditos puros de membrana, para diferenciar daqueles apresentados no item anterior, que coexistem com momentos de flexão, momentos volventes e forças cortantes. No sentido de destacá-los em relação aos outros, os esforços puros de membrana serão aqui representados com um traço superior.

Voltando a considerar o equilíbrio de forças segundo as direções da tangente ao meridiano e da normal à superfície média da membrana, as relações correspondentes resultam:

$$\frac{d}{d\varphi}(\bar{N}_\varphi r_o) - \bar{N}_\theta r_1 \cos(\varphi) = -p_\varphi r_o r_1 \quad (28)$$

$$\bar{N}_\varphi r_0 + \bar{N}_\theta r_1 \text{sen}(\varphi) = -p_z r_0 r_1 \quad (29)$$

Combinando-se as relações anteriores no sentido de eliminar \bar{N}_θ , obtém-se, após algumas passagens algébricas simples:

$$\frac{d}{d\varphi}(\bar{N}_\varphi r_0) \text{sen}(\varphi) + \bar{N}_\varphi r_0 \cos(\varphi) = -p_\varphi r_0 r_1 \text{sen}(\varphi) - p_z r_0 r_1 \cos(\varphi) \quad (30)$$

Para realizar a integração da relação anterior garantindo maior generalidade para sua aplicação, considere-se que a membrana genérica apresente uma abertura superior num paralelo definido pelo ângulo $\bar{\varphi}$. Assim, após multiplicar e dividir o segundo membro da (30) por 2π , obtém-se a seguinte forma integral:

$$\int_{\bar{\varphi}}^{\varphi} \text{sen}(\varphi) \frac{d}{d\varphi}(\bar{N}_\varphi r_0) d\varphi + \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi} \bar{N}_\varphi r_0 \cos(\varphi) d\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi} (p_\varphi \text{sen}(\varphi) + p_z \cos(\varphi))(2\pi r_0) r_1 d\varphi \quad (31)$$

Operando-se uma integração por partes sobre a primeira integral da (31), todo o termo à esquerda da igualdade simplifica-se para a seguinte forma:

$$\left[\text{sen}(\varphi) \bar{N}_\varphi r_0 \right]_{\bar{\varphi}}^{\varphi} = \text{sen}(\varphi) \bar{N}_\varphi r_0 - \text{sen}(\bar{\varphi}) \bar{N}_\varphi(\bar{\varphi}) r_0(\bar{\varphi}) \quad (32)$$

Por sua vez é possível interpretar a expressão $(p_\varphi \text{sen}(\varphi) + p_z \cos(\varphi))(2\pi r_0)$, que aparece no segundo membro da (31), como a representação da resultante da componente vertical do carregamento distribuído ao longo de um paralelo. Segue daí que:

$$R_\varphi = \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi} (p_\varphi \text{sen}(\varphi) + p_z \cos(\varphi))(2\pi r_0) r_1 d\varphi \quad (33)$$

é a resultante das cargas verticais acima do paralelo definido pelo ângulo φ .

Considerando-se as conclusões anteriores, a relação (31) pode ser finalmente reescrita como:

$$\bar{N}_\varphi = -\frac{R_\varphi}{2\pi r_0 \text{sen}(\varphi)} + \frac{\bar{N}_\varphi(\bar{\varphi}) 2\pi r_0(\bar{\varphi}) \text{sen}\bar{\varphi}}{2\pi r_0 \text{sen}\varphi} \quad (34)$$

Cabe, neste ponto, um comentário sobre o esforço $\bar{N}_\varphi(\bar{\varphi})$, que aparece na relação anterior. De forma compatível com o regime de membrana, a existência de um carregamento externo distribuído ao longo do paralelo $\bar{\varphi}$ pode ser admitida desde que o mesmo tenha direção tangencial ao meridiano, pois qualquer outra possibilidade irá provocar uma perturbação com indução local de flexão.

Em outras palavras, sempre que houver um carregamento vertical distribuído prescrito no paralelo correspondente à abertura superior, para a compatibilização com o regime de membrana o mesmo deverá entendido como a componente vertical de um esforço $\bar{N}_\varphi(\bar{\varphi})$ de direção tangencial ao meridiano. Nessa situação, a relação entre carregamento vertical e esforço a ser prescrito na (34) será dada por: $\bar{N}_\varphi(\bar{\varphi}) = -\frac{P}{\text{sen}\bar{\varphi}}$.

Por outro lado, pode-se, dar ao termo $-\bar{N}_\varphi(\bar{\varphi}) 2\pi r_0(\bar{\varphi}) \text{sen}(\bar{\varphi})$ a interpretação de resultante $P_{\bar{\varphi}}$ da força vertical distribuída sobre o paralelo $\bar{\varphi}$ e, assim sendo, a (34) assume a seguinte redação:

$$\bar{N}_\varphi = -\frac{R_\varphi}{2\pi r_0 \text{sen}\varphi} - \frac{P_{\bar{\varphi}}}{2\pi r_0 \text{sen}\varphi} = -\frac{T_{\varphi-\bar{\varphi}}}{\text{sen}\varphi} \frac{1}{2\pi r_0} \quad (35)$$

onde $T_{\varphi-\bar{\varphi}}$ representa a resultante total das cargas aplicadas acima do paralelo φ .

Para $\bar{\varphi} = 0$ a relação (34) tem seu significado interpretado na Figura 14.

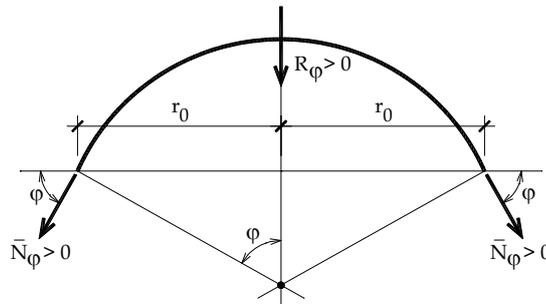


Figura 14 - Esforços internos de membrana que devem equilibrar a resultante vertical de força externa aplicada.

Finalmente, as (29) e (34) compõem o conjunto de relações para a determinação dos esforços de membrana.

Exemplo 1. Membrana esférica

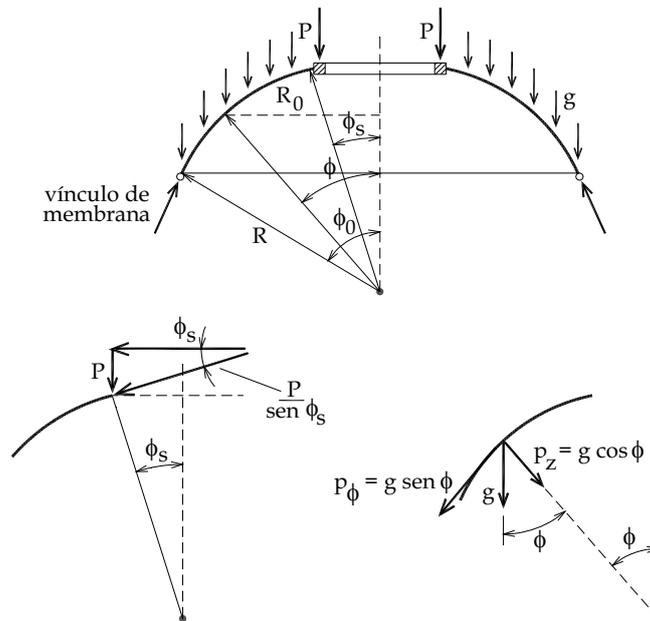


Figura 15 - Membrana esférica com abertura central, carga de peso próprio e força vertical distribuída na borda superior.

O exemplo trata de uma membrana esférica de raio R , com abertura central superior (definida pelo ângulo ϕ_s em relação ao eixo vertical), submetida a uma ação distribuída do tipo peso-próprio (g) e a uma força vertical (P) distribuída ao longo da borda da abertura, como indicado na Figura 15.

Neste caso, as relações entre a carga de peso-próprio e as componentes p_ϕ e p_z são: $p_z = g \cos \phi$ e $p_\phi = g \sin \phi$. Levando-se em conta que $r_0 = R \sin \phi$, segue que a integral que define R_ϕ resulta:

$$R_\phi = - \int_{\bar{\phi}}^{\phi} (g \sin^2 \phi + g \cos^2 \phi) (2\pi R^2 \sin \phi) d\phi \quad (36)$$

de onde se obtém:

$$R_\phi = 2\pi R^2 g [\cos \phi]_{\bar{\phi}}^{\phi} = 2\pi R^2 g (\cos \phi - \cos \bar{\phi}) \quad (37)$$

Por outro lado, para $\varphi = \varphi_s$, interpretando-se P como a componente de uma força aplicada de direção tangencial à borda, tem-se que:

$\bar{N}_{\varphi_s} = -\frac{P}{\text{sen}(\varphi_s)}$ e a expressão para o esforço \bar{N}_φ resulta:

$$\bar{N}_\varphi = \frac{gR}{\text{sen}^2(\varphi)}(\cos(\varphi) - \cos(\varphi_s)) - \frac{P\text{sen}(\varphi_s)}{\text{sen}^2(\varphi)} \quad (38)$$

Com a relação (29) e o resultado anterior chega-se a:

$$\bar{N}_\theta = -gR \left[\cos(\varphi) + \frac{\cos(\varphi) - \cos(\varphi_s)}{\text{sen}^2(\varphi)} \right] + \frac{P\text{sen}(\varphi_s)}{\text{sen}^2(\varphi)} \quad (39)$$

Para membrana esférica com abertura central e solicitada somente por efeito de seu peso próprio ($P = 0$), as relações anteriores se tornam:

$$\bar{N}_\varphi = \frac{gR}{\text{sen}^2(\varphi)}(\cos(\varphi) - \cos(\varphi_s)) \quad (40)$$

$$\bar{N}_\theta = -gR \left[\cos(\varphi) + \frac{\cos(\varphi) - \cos\varphi_s}{\text{sen}^2(\varphi)} \right] \quad (41)$$

Para membrana esférica fechada ($\varphi_s = 0$) solicitada somente por peso próprio valem as relações:

$$\bar{N}_\varphi = -gR \left(\frac{1}{1 + \cos(\varphi)} \right) \quad (42)$$

$$\bar{N}_\theta = -gR \left(\cos(\varphi) - \frac{1}{1 + \cos(\varphi)} \right) \quad (43)$$

Exemplo 2. *Membrana esférica fechada sob pressão interna*

Neste caso, as relações entre a pressão interna (\bar{p}) e as componentes p_φ e p_z são: $p_z = -\bar{p}$ e $p_\varphi = 0$. Levando-se em conta que $r_\varphi = R \text{sen}\varphi$, segue que a integral que define R_φ resulta:

$$R_\varphi = -\int_0^\varphi \bar{p} \cos \varphi (2\pi R^2 \operatorname{sen} \varphi) d\varphi = \frac{\pi R^2 \bar{p}}{2} \int_0^\varphi -2 \operatorname{sen}(2\varphi) d\varphi \quad (44)$$

de onde se obtém:

$$R_\varphi = \frac{\pi R^2 \bar{p}}{2} [\cos 2\varphi]_0^\varphi = \frac{\pi R^2 \bar{p}}{2} (\cos 2\varphi - 1) \quad (45)$$

Por outro lado, a expressão para o esforço \bar{N}_φ resulta:

$$\bar{N}_\varphi = -\frac{R \bar{p}}{4 \operatorname{sen}^2(\varphi)} (\cos(2\varphi) - 1) = \frac{\bar{p} r}{2} \quad (46)$$

Com a relação (29) e o resultado anterior, para o esforço \bar{N}_θ chega-se a:

$$\bar{N}_\theta = -N_\varphi + \bar{p} r = \frac{\bar{p} r}{2} \quad (47)$$

Claramente, toda a membrana fica sujeita a um estado homogêneo de sollicitação por tração.

Exemplo 3. Membrana tronco-cônica

Trata-se neste exemplo de uma membrana tronco-cônica sollicitada por peso-próprio (g) e com força vertical distribuída (P) aplicada na borda superior.

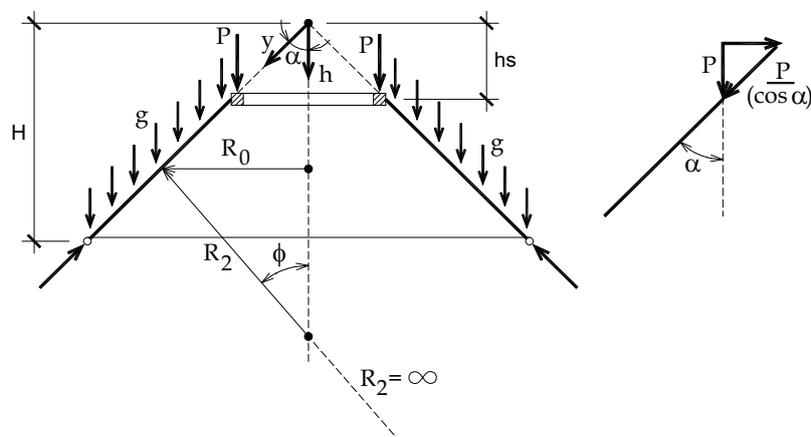


Figura 16 - Membrana tronco-cônica

A membrana possui simples curvatura e, nesse caso, é mais conveniente empregar uma coordenada y para medir comprimentos ao longo do meridiano e o ângulo α , que mede a inclinação do meridiano em relação ao eixo de simetria; esses elementos estão indicados na Figura 16.

Um elemento infinitesimal de superfície de membrana, definido entre dois paralelos e dois meridianos, tem área determinada por: $dS = r_0 d\theta dy$. As relações de equilíbrio passam a apresentar as seguintes formas:

$$\frac{d}{dy}(\bar{N}_\varphi r_0) - \bar{N}_\theta \operatorname{sen}\alpha = -p_\varphi r_0 \quad (48)$$

$$\bar{N}_\theta \cos\alpha = -p_z r_0 \quad (49)$$

Por outro lado, as componentes p_φ e p_z do carregamento se relacionam com g por:

$$p_\varphi = g \cos\alpha \quad (50)$$

$$p_z = g \operatorname{sen}\alpha \quad (51)$$

Nessas condições as relações (48) e (49) passam às formas:

$$\int_{\bar{y}}^y \frac{d}{dy}(\bar{N}_\varphi y) dy = - \int_{\bar{y}}^y (g y \cos\alpha + g y \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\alpha) dy \quad (52)$$

$$\bar{N}_\theta = -g y \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\alpha \quad (53)$$

As expressões gerais dos esforços internos para esta situação resultam:

$$\bar{N}_\varphi = -\frac{1}{y \cos\alpha} \left[\frac{g}{2} (y^2 - \bar{y}^2) - P \bar{y} \right] \quad (54)$$

$$\bar{N}_\theta = -g y \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\alpha \quad (55)$$

Alternativamente é possível escrever as expressões para os esforços internos, tomando-se como referência uma coordenada que mede a posição do paralelo em relação ao vértice do cone, conforme indicado na Figura 16. As relações de transformação de coordenadas a considerar são as seguintes:

$$y = h / \cos \alpha \quad (56)$$

$$\bar{y} = \bar{h} / \cos \alpha \quad (57)$$

e os esforços resultam de:

$$\bar{N}_\varphi = -\frac{1}{h \cos^2 \alpha} \left[\frac{g}{2} (h^2 - \bar{h}^2) - P \bar{h} \cos \alpha \right] \quad (58)$$

$$\bar{N}_\theta = -g h \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (59)$$

Uma variante do problema original é a da membrana cônica fechada solicitada por peso próprio. Para esta situação se têm as seguintes expressões para os esforços solicitantes:

$$\bar{N}_\varphi = -\frac{g h}{2 \cos^2 \alpha} \quad (60)$$

$$\bar{N}_\theta = -g h \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (61)$$

Exemplo 4. Determinar os esforços internos para a membrana esférica, indicada na Figura 17, submetida à pressão hidrostática.

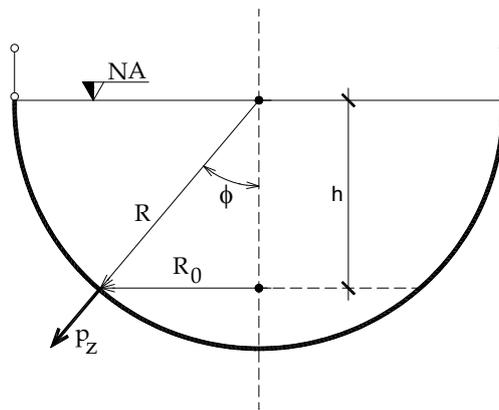


Figura 17 - Membrana esférica sujeita a carga hidrostática.

1. Componentes do carregamento

$$p_z = -\gamma h = -\gamma R \cos \varphi \quad (62)$$

$$p_\phi = 0 \quad (63)$$

2. Esforços internos

$$\bar{N}_\phi = -\frac{1}{2\pi R \operatorname{sen}^2(\phi)} \left[\int_0^\phi -\gamma R^3 \cos^2 \phi \operatorname{sen} \phi 2\pi d\phi \right] \quad (64)$$

$$\bar{N}_\theta = \gamma R^2 \cos \phi - N_\phi \quad (65)$$

A expressão (64) integrada fornece:

$$\bar{N}_\phi = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \phi} \frac{\gamma R^2}{3} \left[\cos^3 \phi \right]_0^\phi \quad (66)$$

de onde resultam

$$\bar{N}_\phi = \frac{\gamma R^2}{3} \left[\frac{1 - \cos^3 \phi}{\operatorname{sen}^2 \phi} \right] \quad (67)$$

$$\bar{N}_\theta = \frac{\gamma R^2}{3} \left[3 \cos \phi - \frac{1 - \cos^3 \phi}{\operatorname{sen}^2 \phi} \right] \quad (68)$$

Pode-se considerar, ainda, a transformação trigonométrica seguinte:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1 - \cos^3(\phi)}{\operatorname{sen}^2(\phi)} &= \frac{\operatorname{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi) - \cos(1 - \operatorname{sen}^2(\phi))}{\operatorname{sen}^2(\phi)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2(\phi)(1 + \cos(\phi)) - \cos(\phi)(1 - \cos(\phi))}{\operatorname{sen}^2(\phi)} = \\ &= 1 + \cos(\phi) - \frac{\cos(\phi)(1 - \cos(\phi))}{(1 + \cos(\phi))(1 - \cos(\phi))} = 1 + \cos(\phi) - \frac{\cos(\phi)}{1 + \cos(\phi)} \\ \frac{1 - \cos^3(\phi)}{\operatorname{sen}^2(\phi)} &= \frac{(1 + \cos(\phi))^2 - \cos \phi}{1 + \cos(\phi)} = \\ &= \frac{1 + 2 \cos(\phi) + \cos^2(\phi) - \cos(\phi)}{1 + \cos(\phi)} = \frac{\cos(\phi) + \cos(\phi) + 1}{1 + \cos(\phi)} \end{aligned}$$

e as relações anteriores passam a ser dadas por:

$$\bar{N}_\varphi = \frac{\gamma R^2}{3} \left[\frac{\cos^2 \varphi + \cos \varphi + 1}{1 + \cos \varphi} \right] \quad (69)$$

$$\bar{N}_\theta = \frac{\gamma R^2}{3} \left[\frac{2 \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi - 1}{1 + \cos \varphi} \right] \quad (70)$$

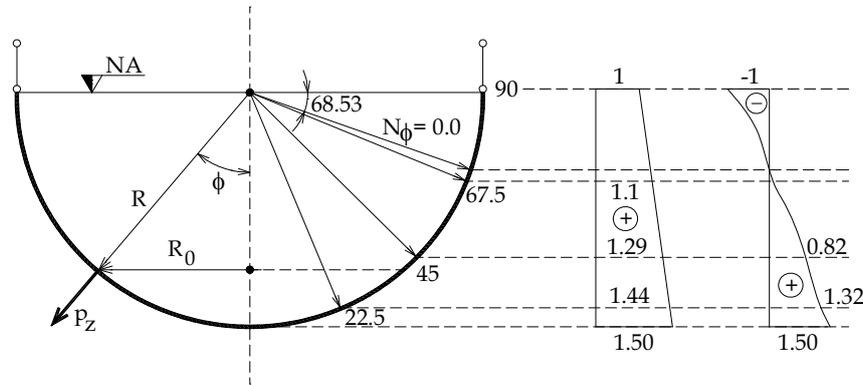


Figura 18 - Distribuição dos esforços \bar{N}_φ e \bar{N}_θ ao longo do arco em radianos.

A Figura 18 apresenta os diagramas das variações dos esforços ao longo do meridiano. Os valores principais estão descritos na tabela 1. Nota-se que o esforço ‘anular’ \bar{N}_θ apresenta troca de sinal, indicando que os paralelos de borda estarão comprimidos!

Tabela 1: Esforços internos \bar{N}_φ e \bar{N}_θ em função do arco em radianos.

φ	$\bar{N}_\varphi / (\gamma R^2 / 3)$	$\bar{N}_\theta / (\gamma R^2 / 3)$
90°	1.00	-1
67.5°	1.10	0.04
45°	1.29	0.83
22.5°	1.44	1.33
0°	1.50	1.50

Exemplo 5. Determinar os esforços internos de uma membrana cônica, com as características geométricas indicadas na Figura 19, submetida à pressão hidrostática.

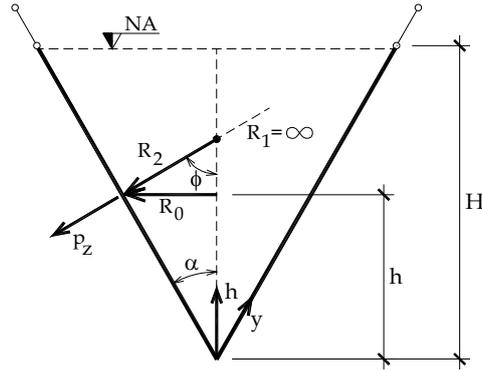


Figura 19 - Membrana cônica sujeita a pressão hidrostática.

1. Componentes do carregamento externo aplicado

$$p_z = -\gamma(H - h) = \gamma(h - H) = \gamma[y \cos \alpha - H] \quad (71)$$

$$p_\phi = 0 \quad (72)$$

2. Esforços internos

$$\bar{N}_\phi = -\frac{1}{y \sin \alpha \cos \alpha} \int_0^y (p_z r_0 \sin \alpha + p_\phi r_0 \cos \alpha) dy \quad (73)$$

$$\bar{N}_\theta = -\frac{p_z r_0}{\cos \alpha} \quad (74)$$

Sendo, neste caso, $r_0 = y \sin \alpha$ e com as (71) e (72), resultam:

$$\bar{N}_\phi = -y \left(\frac{y \cos \alpha}{3} - \frac{H}{2} \right) \gamma \operatorname{tg} \alpha \quad (75)$$

$$\bar{N}_\theta = -y (y \cos \alpha - H) \gamma \operatorname{tg} \alpha \quad (76)$$

ou, em função de $h = y \cos \alpha$,

$$\bar{N}_\phi = -h \left(\frac{h}{3} - \frac{H}{2} \right) \gamma \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \quad (77)$$

$$\bar{N}_\theta = -h (h - H) \gamma \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \quad (78)$$

CAPÍTULO 10 - DEFORMAÇÕES EM MEMBRANAS DE REVOLUÇÃO

1. Introdução

Os deslocamentos de pontos da superfície média das membranas podem ser descritos por suas componentes (w) e (v), segundo as direções normal e tangencial, respectivamente, conforme ilustra a Figura 1 no ponto a do meridiano, por exemplo. Variações dos deslocamentos de ponto para ponto implicam, naturalmente, em variações das dimensões dos meridianos e paralelos.

Este capítulo é dedicado à definição das medidas de deformação e sua relação com as componentes de deslocamento para as membranas de revolução.

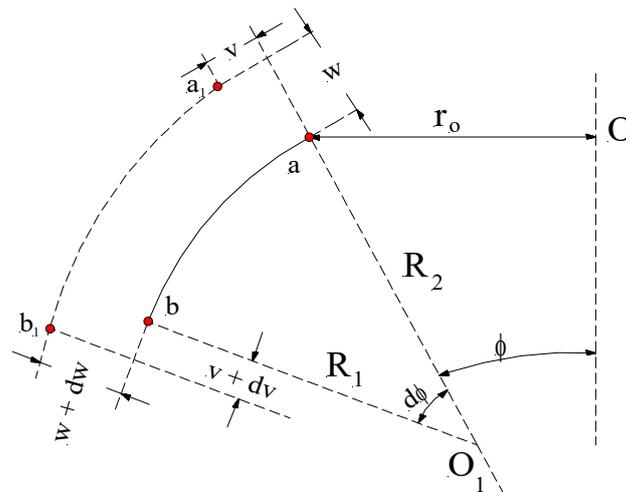


Figura 1 - Variações dos campos de deslocamento v e w correspondentes a pontos de extremidade de um arco elementar ab .

2. Relações entre as deformações e os deslocamentos

A partir de um ponto 'a' posicionado sobre um meridiano da superfície média da casca pelo ângulo ϕ medido à partir do eixo de simetria, considere-se um elemento de meridiano, $ab = r d\phi$, que depois da deformação se transforma em a_1b_1 (Fig.1).

As componentes de deslocamento do ponto a , respectivamente segundo a tangente e a normal ao meridiano, são convencionadas da seguinte forma: v positivo no sentido de φ crescente; w positivo no sentido da normal externa à superfície.

Os valores, computando-se os acréscimos, que cada uma dessas componentes apresenta quando referidas ao ponto b são indicados por: $v + dv = v + (dv/d\varphi) d\varphi$ e $w + dw = w + (dw/d\varphi) d\varphi$.

Naturalmente, por efeito dos deslocamentos aparecem variações de dimensões segundo os meridianos e paralelos e, portanto, medidas de deformação linear podem ser definidas.

Com relação aos meridianos, em função dos deslocamentos tangenciais v e $v + dv$ de a e b , respectivamente, a dimensão de ab aumenta em $dv = (dv/d\varphi) d\varphi$. Por outro lado, os deslocamentos radiais w impõem um acréscimo no raio e, portanto, também uma variação no comprimento ab ; tal variação é dada por: $(r + w)d\varphi - r d\varphi = w d\varphi$ (a variação de ab devido à diferença dw entre os deslocamentos radiais nos pontos a e b é um infinitésimo de ordem superior). Conseqüentemente, a variação da dimensão ab e a deformação ε_φ segundo o meridiano ficam dados por:

$$\Delta \bar{ab} = \frac{dv}{d\varphi} d\varphi + w d\varphi \quad (1)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta \bar{ab}}{\bar{ab}} = \frac{\Delta \bar{ab}}{r d\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{dv}{d\varphi} + w \right) \quad (2)$$

Por efeito dos deslocamentos v e w , mais especificamente suas projeções no plano do paralelo, o raio (r_o) do paralelo aumenta em $v \cos \varphi + w \sin \varphi$. Portanto, o comprimento inicial do paralelo também sofre um acréscimo de: $2\pi(v \cos \varphi + w \sin \varphi)$. Segue daí a deformação 'anular' ε_θ segundo o paralelo:

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi \Delta r_o}{2\pi r_o} = \frac{\Delta r_o}{r_o} = \frac{1}{r_o} (v \cos \varphi + w \sin \varphi) \quad (3)$$

As relações (2) e (3) podem ser combinadas, eliminando-se w entre elas e obtendo-se a seguinte equação diferencial na incógnita $v(\varphi)$:

$$\frac{dv}{d\varphi} - \nu \cot g \varphi = r \varepsilon_{\varphi} - \frac{r_0 \varepsilon_{\theta}}{\operatorname{sen} \varphi} \quad (4)$$

As deformações: ε_{φ} e ε_{θ} podem ser relacionadas aos esforços \bar{N}_{φ} e \bar{N}_{θ} pela lei de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{Eh} (\bar{N}_{\varphi} - \nu \bar{N}_{\theta}) \quad (5)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{Eh} (\bar{N}_{\theta} - \nu \bar{N}_{\varphi}) \quad (6)$$

Substituindo-se (5) e (6) em (4) resulta:

$$\frac{dv}{d\varphi} - \nu \cot g \varphi = \frac{1}{Eh} \left[\bar{N}_{\varphi} \left(r + \frac{\nu r_0}{\operatorname{sen} \varphi} \right) - \bar{N}_{\theta} \left(\frac{r_0}{\operatorname{sen} \varphi} + \nu r \right) \right] \quad (7)$$

Em cada caso particular os esforços \bar{N}_{φ} e \bar{N}_{θ} , e os raios r e r_0 são funções determinadas de φ . Indicando com $f(\varphi)$ o segundo membro da (7), tem-se que:

$$f(\varphi) = \frac{1}{Eh} \left[\bar{N}_{\varphi} \left(r + \frac{\nu r_0}{\operatorname{sen} \varphi} \right) - \bar{N}_{\theta} \left(\frac{r_0}{\operatorname{sen} \varphi} + \nu r \right) \right] \quad (8)$$

A relação (7) se transforma em:

$$\frac{dv}{d\varphi} - \nu \cot g \varphi = f(\varphi) \quad (9)$$

e sua integral geral é:

$$v = \operatorname{sen} \varphi \left[\int \frac{f(\varphi)}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi + C \right] = \operatorname{sen} \varphi A(\varphi) \quad (10)$$

A constante de integração C pode ser determinada por condições de contorno em v .

A relação (3) pode ser então empregada para se obter a componente w :

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{Eh} \frac{r_0}{\text{sen } \varphi} \left[\bar{N}_\theta - \nu \bar{N}_\varphi \right] - \cos \varphi \left[\int \frac{f(\varphi)}{\text{sen } \varphi} d\varphi + C \right] \\
 &= B(\varphi) - \cos \varphi \left[\int \frac{f(\varphi)}{\text{sen } \varphi} d\varphi + C \right]
 \end{aligned} \tag{11}$$

A partir das expressões (10) e (11) pode-se obter as componentes de deslocamento no sistema global cartesiano de coordenadas (ver Fig.2), mediante operações de rotação, como segue:

$$\xi = v \cos \varphi + w \text{sen } \varphi \tag{12}$$

$$\eta = v \text{sen } \varphi - w \cos \varphi \tag{13}$$

Substituindo-se os resultados dados pelas (11) e (10), obtêm-se:

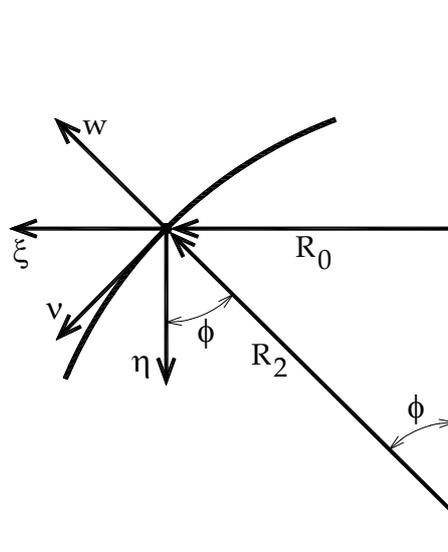


Figura 2 - Componente de deslocamento ξ e η no sistema global de coordenadas.

$$\xi = \Delta R_o = B(\varphi) \text{sen } \varphi = \frac{r_0}{Eh} (\bar{N}_\theta - \nu \bar{N}_\varphi) = \varepsilon_\theta r_0 \tag{14}$$

$$\eta = A(\varphi) - \frac{r_0 \cot g \varphi}{Eh} (\bar{N}_\theta - \nu \bar{N}_\varphi) = A(\varphi) - (\cot g \varphi) \xi \tag{15}$$

3. Rotação da tangente ao meridiano

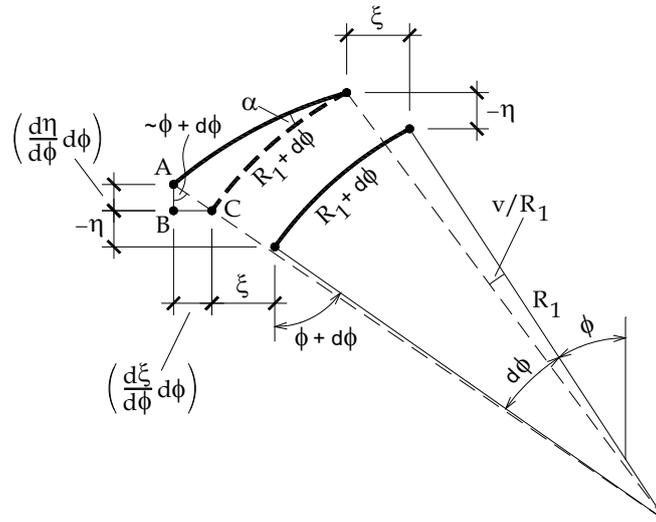


Figura 3 - Rotação da tangente ao arco $r d\phi$ de meridiano.

Na figura 3 ilustra-se a rotação da tangente ao arco de meridiano, simbolizada pelo ângulo α . Daquela figura, desconsiderando-se os infinitésimos de ordem superior e, naturalmente, admitindo-se pequenas rotações, tem-se:

$$\operatorname{tg} \alpha \cong \alpha = \overline{AC} / r d\phi \quad (16)$$

$$\overline{AC} = \frac{d\xi}{d\phi} \operatorname{sen} \phi d\phi - \frac{d\eta}{d\phi} \cos \phi d\phi \quad (17)$$

$$\alpha = \frac{\overline{AC}}{r d\phi} = \frac{1}{r} \left[\frac{d\xi}{d\phi} \operatorname{sen} \phi - \frac{d\eta}{d\phi} \cos \phi \right] \quad (18)$$

Efetuada-se as derivações indicadas, obtém-se:

$$\alpha = \frac{1}{r} \left[\frac{dw}{d\phi} - v \right] \quad (19)$$

Considerando-se as relações (10) e (11) resulta:

$$\alpha = -\frac{1}{r} \left[\cos \phi \frac{f(\phi)}{\operatorname{sen} \phi} - \frac{d}{d\phi} \left(\frac{r_0 \varepsilon_\theta}{\operatorname{sen} \phi} \right) \right] \quad (20)$$

Como $\frac{r_o \varepsilon_\theta}{\text{sen } \varphi} = \frac{\xi}{\text{sen } \varphi}$, tem-se:

$$\alpha = \frac{1}{r} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\xi}{\text{sen } \varphi} \right) - \frac{f(\varphi)}{\text{tg } \varphi} \right] \quad (21)$$

4. Variação de curvatura

Os deslocamentos sofridos pelos pontos da casca impõem variações sobre as curvaturas iniciais. As Figuras 4 e 5 ilustram os elementos geométricos de interesse para a determinação dessas variações.

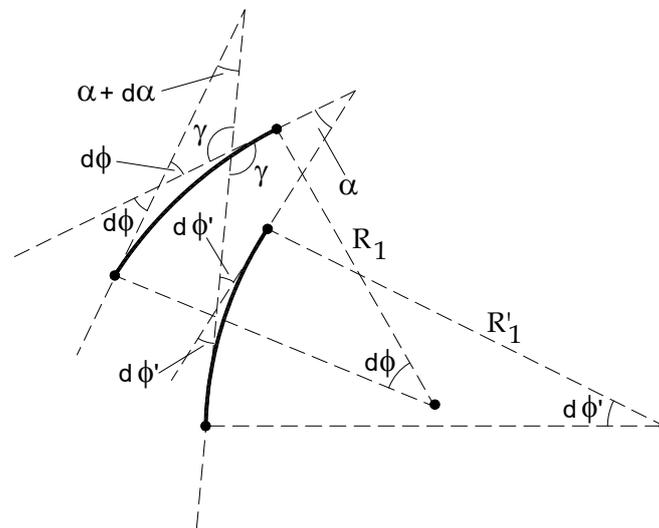


Figura 4 - Variação entre tangentes ao arco de meridiano

Desprezando-se a variação do comprimento do elemento, pode-se exprimi-lo, usando da nomenclatura indicada na Figura 4, pelas seguintes formas:

$$ds = R_1 d\varphi \quad (26)$$

$$ds = R'_1 d\varphi' \quad (27)$$

Ainda da Figura 1, a relação entre os ângulos $d\varphi$, $d\varphi'$ e $d\alpha$ resulta de:

$$\gamma + d\varphi' + \alpha = 180 \rightarrow \gamma = 180 - (\alpha - d\varphi') \quad (28)$$

$$d\varphi + (\alpha + d\alpha) + [180 - (\alpha + d\varphi')] = 180 \quad (29)$$

$$d\varphi + d\alpha - d\varphi' = 0 \quad (30)$$

$$d\varphi' = (d\varphi + d\alpha) \quad (31)$$

Levando-se em conta as relações anteriores, a definição da mudança de curvatura χ_φ segue de:

$$\chi_\varphi = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} = -\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{d\alpha}{R_1 d\varphi} = -\frac{1}{R_1} \left(\frac{d\alpha}{d\varphi} \right) \quad (32)$$

onde, reescrevendo a (19),

$$\alpha = \frac{1}{R_1} \left(\frac{dw}{d\phi} - v \right) \quad (33)$$

Por outro lado, com os elementos da Figura 5 pode-se deduzir uma relação para a curvatura normal χ_θ :

$$O_2C = R_2\alpha \quad (34)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi + \alpha) \cong \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{O_2C}{\Delta R_2} = \frac{R_2\alpha}{\Delta R_2} \therefore \Delta R_2 = R_2\alpha \cot g(\varphi) \quad (35)$$

$$\chi_\theta = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2 - \Delta R_2} \cong -\frac{\Delta R_2}{R_2^2} = -\frac{\alpha \cot g(\varphi)}{R_2} \quad (36)$$

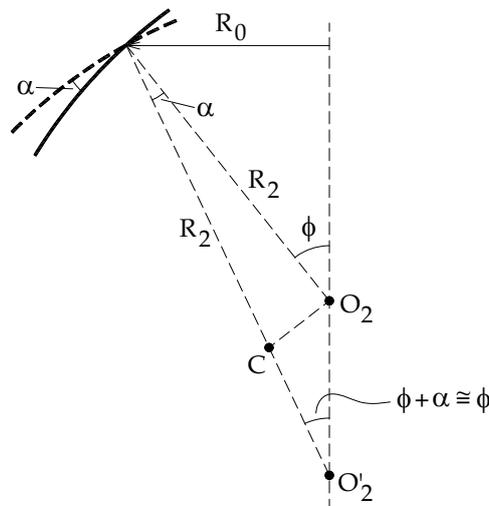


Figura 5 - Mudança da curvatura normal inicial por rotação do arco do meridiano

5. Caso da membrana esférica

Para o caso de uma membrana esférica de raio R solicitada ao peso próprio (g), as principais relações anteriores assumem as formas:

$$\bar{N}_\phi = -g R \left(\frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) \quad (37)$$

$$\bar{N}_\theta = -g R \left(\cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) \quad (38)$$

$$f(\phi) = \frac{1}{Eh} [\bar{N}_\phi (R + \nu R) - \bar{N}_\theta (R + \nu R)] = \frac{R(1 + \nu)}{Eh} (\bar{N}_\phi - \bar{N}_\theta) \quad (39)$$

$$f(\varphi) = \frac{g R^2 (1 + \nu)}{Eh} \left(\cos \varphi - \frac{2}{1 + \cos \varphi} \right) \quad (40)$$

$$\xi = \Delta r = r_o \varepsilon_\theta = \frac{r_o}{Eh} (\bar{N}_\theta - \nu \bar{N}_\phi) \quad (41)$$

$$\xi = \frac{g R^2 \text{sen } \varphi}{Eh} \left[\frac{1 + \nu}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right] \quad (42)$$

$$\int \frac{f(\varphi)}{\text{sen } \varphi} d\varphi = \frac{g R^2 (1 + \nu)}{Eh} \int \frac{[\cos \varphi (1 + \cos \varphi) - 2]}{\text{sen } \varphi (1 + \cos \varphi)} d\varphi \quad (43)$$

$$\int \frac{f(\varphi)}{\text{sen } \varphi} d\varphi = \frac{g R^2 (1 + \nu)}{Eh} \left[\log_e (1 + \cos \varphi) - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right] \quad (44)$$

$$v = \text{sen } \varphi \left\{ \frac{g R^2}{Eh} (1 + \nu) \left[\log_e (1 + \cos \varphi) - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right] + C \right\} \quad (45)$$

$$w = \frac{g R^2}{Eh} \left(\frac{1 + \nu}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right) - \cos \varphi \left\{ \frac{g R^2 (1 + \nu)}{Eh} \left[\log_e (1 + \cos \varphi) - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right] + C \right\} \quad (46)$$

$$\eta = \frac{g R^2}{E h} \left\{ (1 + \nu) \left[\log_e (1 + \cos(\phi)) - 1 \right] + \cos^2(\phi) \right\} + C \quad (47)$$

$$\alpha = \frac{g R^2}{E h} (2 + \nu) \text{sen } \phi \quad (48)$$

Exemplo 1. A casca esférica cujas características geométricas estão indicadas na Figura 6 tem as seguintes propriedades: $g = 25.10^{-5} \text{ kN/cm}^2$; $\nu = 0.3$; $E = 2000,0 \text{ kN/cm}^2$. Pede-se calcular: ξ_A , α_A , ν_A , w_A , η_A , η_B .

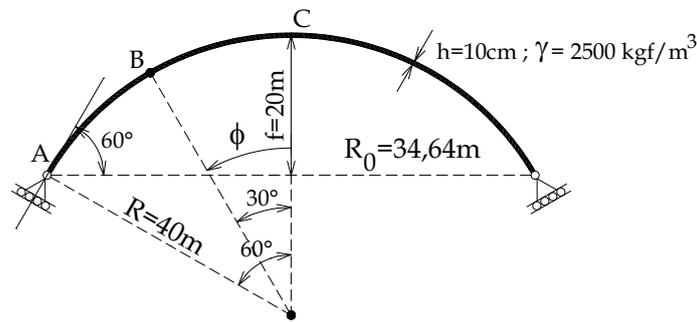


Figura 6 - Setor de membrana esférica.

$$\xi_A = \frac{25.10^{-5} \times (4000)^2}{2000 \times 10} \left[\frac{1 + 0,3}{1 + \cos(60^\circ)} - \cos(60^\circ) \right] \text{sen}(60^\circ) = 0,0635 \text{ cm}$$

$$\alpha_A = \frac{25.10^{-5} \times 4000}{2000 \times 10} (2 + 0,3) \text{sen}(60^\circ) = 0,0001 \text{ rad}$$

$$\nu|_{\phi=60^\circ} = 0 \rightarrow C = -\frac{g R^2}{E h} (1 + \nu) \left[\log_e (1 + \cos(60^\circ)) - \frac{1}{1 + \cos(60^\circ)} \right] = 0,068$$

$$w_A = \frac{25.10^{-5} \times (4000)^2}{2000 \times 10} \left[\frac{1 + 0,3}{1 + \cos(60^\circ)} - \cos(60^\circ) \right] - \cos(60^\circ) \left\{ \frac{25.10^{-5} \times (4000)^2 (1 + 0,3)}{2000 \times 10} \left[\log_e (1 + \cos(60^\circ)) - \frac{1}{1 + \cos(60^\circ)} \right] + 0,068 \right\}$$

$$w_A = 0,0733 \text{ cm}$$

$$\eta_A = \frac{25 \cdot 10^{-5} \times (4000)^2}{2000 \times 10} \left\{ (1 + 0,3) \left[\log_e (1 + \cos(60^\circ)) - 1 \right] + \cos^2(60^\circ) \right\} \\ + 0,068 = -0,0366 \text{ cm}$$

$$\eta_B = \frac{25 \cdot 10^{-5} \times (4000)^2}{2000 \times 10} \left\{ (1 + 0,3) \left[\log_e (1 + \cos(30^\circ)) - 1 \right] + \cos^2(30^\circ) \right\} \\ + 0,068 = 0,12 \text{ cm}$$

CAPÍTULO 11 – FLEXÃO NAS CASCAS DE REVOLUÇÃO

1 Introdução

Nas cascas finas o comportamento de flexão constitui perturbação do regime de membrana limitada às regiões de vinculação imposta ou de descontinuidade geométrica e de carregamento.

O principal aspecto a ser enfatizado neste capítulo é a perturbação do regime de membrana por efeito de vinculação de borda da casca, admitindo-se como suaves eventuais variações de geometria e carregamento. O regime de membrana predomina, então, nas regiões afastadas das bordas, porém, mostra-se que nessas regiões aquele regime passa a se constituir em solução particular do problema de flexão.

Propositadamente, limita-se o desenvolvimento do tema ao caso das cascas esféricas de espessura constante.

2 Cascas esféricas de espessura constante

O problema das cascas de revolução, em regime de flexão, requer a combinação das relações de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva. Ao todo são doze variáveis a serem determinadas: os esforços N_φ , N_θ , M_φ , M_θ e Q_φ ; as deformações ε_φ , ε_θ , χ_φ e χ_θ ; e os deslocamentos v , w e α .

As relações envolvendo essas variáveis também são doze: três de equilíbrio, cinco de compatibilidade e quatro constitutivas.

As relações de equilíbrio são as (22), (24) e (26), deduzidas no capítulo *X*, mas, agora, particularizadas para as cascas esféricas. As relações de compatibilidade correspondem às: (2), (3), (19), (32) e (36), deduzidas no capítulo *XI*. As relações constitutivas passam a ser descritas no que segue.

2.1 Relações entre esforços e deformações

Admite-se que o material que constitui a casca apresenta resposta elástico-linear valendo, portanto, a lei de Hooke generalizada na relação entre deformações e esforços generalizados (diretamente considerados uma vez que se tome partido da hipótese cinemática que idealiza o comportamento em flexão nas cascas finas).

A hipótese sobre a deformação pressupõe que as normais à superfície média permanecem retas, de módulo e ortogonais à superfície média deformada (modelo de deformação de Kirchhoff-Love). Desconsideram-se, portanto, deformações por cisalhamento, razão pela qual o esforço cortante Q_φ aparece somente na análise do equilíbrio.

A relação constitutiva exprime-se, portanto, na forma:

$$N_\phi = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\phi + \nu\varepsilon_\theta) \quad (1)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_\phi) \quad (2)$$

$$M_\phi = -D(\chi_\phi + \nu\chi_\theta) \quad (3)$$

$$M_\theta = -D(\chi_\theta + \nu\chi_\phi) \quad (4)$$

onde $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

2.2 O problema de flexão

É possível combinar o sistema composto pelas relações de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva, de modo a reduzi-lo à apenas duas equações envolvendo duas incógnitas. A escolha sobre as variáveis remanescentes no sistema reduzido recai sobre aquelas que impliquem em menor trabalho algébrico; nesse sentido, um par conveniente de variáveis é formado por Q_φ e α .

Mas, no sentido de reduzir ainda mais o trabalho algébrico, pode-se limitar a análise ao caso das cascas esféricas de espessura constante. Nesse caso o sistema reduzido apresenta-se na forma:

$$\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} \cot g(\varphi) - Q_\varphi \cot^2 g(\varphi) + \nu Q_\varphi = -Eh\alpha + R \left[(1-\nu) p_\varphi - \frac{d}{d\varphi} (p_z) \right] \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{d\varphi^2} + \frac{d\alpha}{d\varphi} \cot g(\varphi) - \alpha \cot^2 g(\varphi) - \nu \alpha = \frac{R^2}{D} Q_\varphi \quad (6)$$

onde R representa o raio da casca.

Como recurso de simplificação da notação pode-se introduzir o operador diferencial linear $L(\dots)$, com a seguinte definição:

$$L(\dots) = \frac{d^2}{d\varphi^2}(\dots) + \frac{d}{d\varphi}(\dots) \cot g(\varphi) - (\dots) \cot g^2(\varphi) \quad (7)$$

Assim, o sistema passa a ser escrito na forma:

$$\begin{cases} L(Q_\varphi) + \nu Q_\varphi = -Eh\alpha + R \left[(1-\nu) p_\varphi - \frac{d}{d\varphi}(p_z) \right] \\ L(\alpha) - \nu\alpha = \frac{R^2}{D} Q_\varphi \end{cases} \quad (8)$$

A solução geral do sistema é composta pela soma de uma solução particular e da solução do sistema homogêneo. O sistema homogêneo é aquele que contém somente os termos dependentes das variáveis principais (no caso os termos independentes são aqueles associados ao carregamento externo). Portanto, a solução particular reúne os efeitos das cargas externas aplicadas e a solução do sistema homogêneo reúne os efeitos de condições de vinculação ou de esforços aplicados às bordas.

Para fins de ilustrar a obtenção da solução particular, no que segue admite-se que o carregamento aplicado seja representado por uma função do tipo peso próprio.

Assim sendo, as componentes do carregamento externo são dadas por:

$$p_\varphi = g \operatorname{sen}(\varphi) \quad (9)$$

$$p_z = g \operatorname{cos}(\varphi) \quad (10)$$

Substituindo-se no sistema (8) resultam:

$$L(Q_\varphi) + \nu Q_\varphi = -Eh\alpha + (2 + \nu)gR \operatorname{sen}(\varphi) \quad (11)$$

$$L(\alpha) - \nu\alpha = \frac{12(1-\nu^2)R^2 Q_\varphi}{Eh^3} \quad (12)$$

Resolvendo o sistema anterior é possível obter as seguintes expressões para Q_φ e α :

$$Q_\varphi = \rho g R \operatorname{sen}(\varphi) \quad (13)$$

$$\alpha = \frac{gR}{Eh} [2 + \nu - \rho(1 - \nu)] \operatorname{sen}(\varphi) \quad (14)$$

Nas relações anteriores ρ é dado pela expressão:

$$\rho = \frac{2 + \nu}{1 - \nu} \frac{1}{1 + 12R^2/h^2} \cong \frac{2 + \nu}{1 - \nu} \cdot \frac{h^2}{12R^2} \quad (15)$$

Nota-se que ρ aproxima-se de zero para cascas finas.

Conhecendo α , é possível determinar os momentos fletores M_ϕ e M_θ com as relações (3) e (4), naturalmente empregando-se as mudanças de curvatura dadas pelas definições já apresentadas e aqui reproduzidas:

$$\chi_\varphi = -\frac{1}{R} \left(\frac{d\alpha}{d\varphi} \right) \quad (16)$$

$$\chi_\theta = -\frac{\alpha \cot g(\varphi)}{R} \quad (17)$$

Com as duas primeiras equações de equilíbrio obtém-se N_ϕ e N_θ em função de Q_φ conhecido:

$$N_\varphi = gR \left[\rho \cos(\varphi) - \frac{1}{1 + \cos(\varphi)} \right] \quad (18)$$

$$N_\theta = gR \left[\rho \cos(\varphi) - \frac{1 - \cos(\varphi) - \cos^2(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} \right] \quad (19)$$

Não está aqui demonstrado, mas é importante notar que as expressões dos momentos fletores, que resultam da combinação das relações (3), (4), (16) e (17), também acabam por envolver o parâmetro ρ , na forma de uma multiplicação direta. Assim sendo, os esforços obtidos com a solução particular em questão passam a coincidir com os esforços de membrana no caso das cascas finas (quando $\rho \rightarrow 0$). De fato, nessas condições os

esforços de flexão se anulam e os esforços normais se igualam aos de membrana.

Como a modelagem aqui tratada refere-se às cascas finas, por simplificação ao resolver um problema de casca em regime de flexão será adotada, como solução particular, a solução de membrana (soluções de membrana já foram deduzidas no primeiro capítulo).

O exemplo que segue procura ilustrar a aproximação entre as soluções, particular e de membrana, no caso de casca fina.

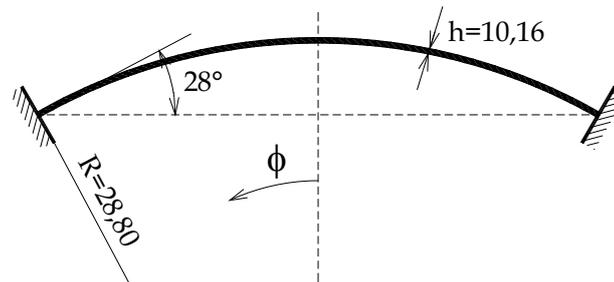


Figura 1 - Casca abatida engastada nas bordas

Com os dados geométricos ilustrados na Figura 1, e considerando-se $\nu=1/6$, resultam:

$$\rho = \frac{2+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{h^2}{12R^2} = \frac{2+1/6}{1-1/6} \cdot \frac{(10,16)^2}{12(2880)^2} = 2,6964 \times 10^{-6}$$

$$\varphi = 0 \begin{cases} N_{\varphi} = 457,20 \times 28,80 \left[2,6964 \times 10^{-6} - \frac{1}{1+1} \right] = -6583,64449 \\ N'_{\varphi} = -457,20 \times 28,80 \left[\frac{1}{1+1} \right] = -6583,6800 \end{cases}$$

$$(N_{\varphi} / N'_{\varphi} = 5,39 \times 10^{-4})$$

$$\varphi = 28^{\circ} \begin{cases} N_{\varphi} = 457,20 \times 28,80 \left[2,6964 \times 10^{-6} \cos(28^{\circ}) - \frac{1}{1+\cos(28^{\circ})} \right] = -6992,919519 \\ N'_{\varphi} = -457,20 \times 28,80 \left[\frac{1}{1+\cos(28^{\circ})} \right] = -6992,95086 \end{cases}$$

$$(N_{\varphi} / N'_{\varphi} = 4,4827 \times 10^{-4})$$

Quanto à solução do sistema homogêneo, a dedução que se apresenta no que segue é caracterizada por nova simplificação.

Inicialmente o sistema homogêneo (levando em conta apenas os efeitos de vinculação ou de forças distribuídas aplicadas nas bordas) apresenta a seguinte redação:

$$\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} \cot g(\varphi) - Q_\varphi (\cot^2 g(\varphi) - \nu) = -Eh\alpha \quad (20)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{d\varphi^2} + \frac{d\alpha}{d\varphi} \cot g(\varphi) - \alpha (\cot^2 g(\varphi) + \nu) = \frac{R^2 Q_\varphi}{D} \quad (21)$$

Nas cascas finas um caso consistente e que pode ser resolvido com as relações anteriores está ilustrado na Figura 2

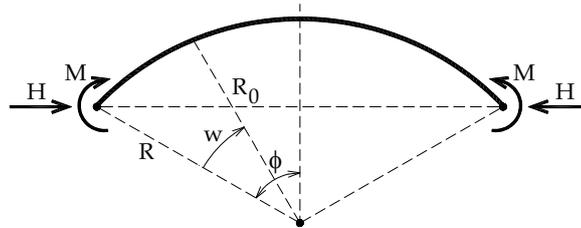


Figura 2 - Forças aplicadas de forma distribuída ao longo da borda da casca

Trata-se de uma casca esférica submetida a forças horizontais H , uniformemente distribuídas, e a momentos M , também uniformemente distribuídos, aplicados nas bordas.

Os efeitos de flexão provocados por essas solicitações amortecem rapidamente ao longo do meridiano, na medida em que se tomam pontos mais afastados da borda.

Esse ‘amortecimento’ dos esforços localizados de flexão pode ser mais bem interpretado imaginando-se a idealização de uma casca em forma de tubo cilíndrico, ilustrado em corte à esquerda na Figura 3, como resultado do arranjo de uma infinidade de colunas verticais apoiadas sobre anéis transversais.

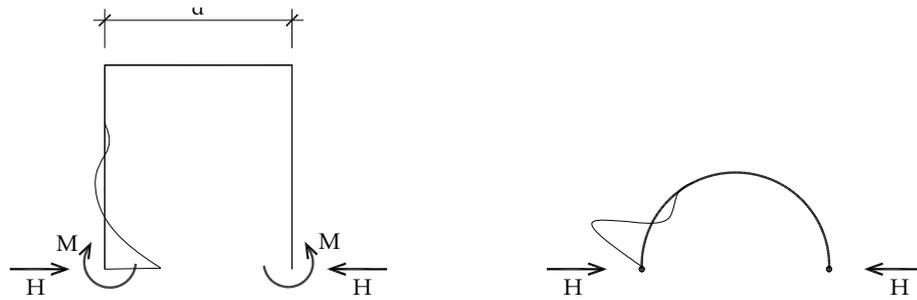


Figura 3 - Amortecimento das perturbações de flexão nas bordas

Por serem elementos deformáveis no seu plano os anéis funcionam como apoios elásticos para as colunas, gerando o efeito de amortecimento. Já no caso das cascas esféricas são os paralelos que fazem o papel dos anéis, isto é, funcionando como apoios elásticos aos meridianos, promovendo um efeito de amortecimento análogo, como procura indicar a Figura 3 à direita.

A solução matemática do sistema homogêneo descreve o efeito de amortecimento mediante um multiplicador do tipo $e^{-a\varphi}$, sendo a uma constante de valor elevado. Considerando-se as cascas esféricas, onde o raio é constante, a existência de tal parcela implica em:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}(\dots) \gg \frac{d}{d\varphi}(\dots) \gg (\dots) \tag{22}$$

e, nesse sentido, pode-se simplificar o sistema resolutivo para a seguinte forma:

$$\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} = -Eh\alpha \tag{23 a}$$

$$\frac{d^2 \alpha}{d\varphi^2} = \frac{R^2}{D} Q_\varphi \tag{23 b}$$

Essa aproximação é suficientemente precisa desde que a casca esférica a ser analisada não seja muito abatida (nas cascas abatidas o efeito de amortecimento pode ser muito menos pronunciado).

A resolução do sistema (23) se baseia na combinação das duas relações de forma a eliminar uma das incógnitas. Nesse sentido, derivando-se duas vezes a (23 a), tem-se:

$$\frac{d^4 Q_\varphi}{d\varphi^4} = -Eh \frac{d^2 \alpha}{d\varphi^2} \quad (24)$$

e, portanto combinando-se com a (23 b) resulta

$$\frac{d^4 Q_\varphi}{d\varphi^4} = -\left(Eh \frac{R^2}{D}\right) Q_\varphi \quad (25)$$

Introduzindo-se a definição:

$$\frac{EhR^2}{D} = 4\gamma^4 \quad \text{ou} \quad \gamma = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{\frac{R}{h}} \quad (26)$$

segue que:

$$\frac{d^4 Q_\varphi}{d\varphi^4} + (4\gamma^4) Q_\varphi = 0 \quad (27)$$

A solução da equação anterior apresenta a forma:

$$Q_\varphi = C_1 e^{\gamma\varphi} \operatorname{sen}(\gamma\varphi) + C_2 e^{-\gamma\varphi} \operatorname{cos}(\gamma\varphi) + C_3 e^{-\gamma\varphi} \operatorname{sen}(\gamma\varphi) + C_4 e^{\gamma\varphi} \operatorname{cos}(\gamma\varphi) \quad (28)$$

onde as constantes de integração determinam-se a partir de condições de contorno do problema específico. O papel das constantes de integração pode ser mais bem caracterizado inserindo-se uma oportuna mudança de variável ilustrada pela Figura 4.

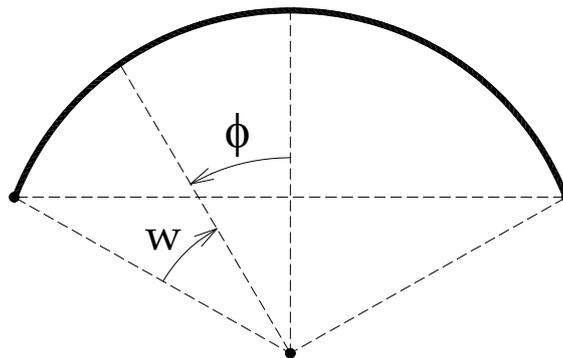


Figura 4 - Coordenadas w e φ de definição do arco

Introduz-se, então, um ângulo medido a partir da borda, mediante a seguinte relação,:

$$\omega = \varphi_c - \varphi \rightarrow \varphi = \varphi_c - \omega \quad (29)$$

A relação (28) passa a ser dada por:

$$Q_\varphi = C_1 e^{\gamma(\varphi_c - \omega)} \operatorname{sen}(\gamma(\varphi_c - \omega)) + C_2 e^{\gamma(\varphi_c - \omega)} \operatorname{cos}(\gamma(\varphi_c - \omega)) + C_3 e^{-\gamma(\varphi_c - \omega)} \operatorname{sen}(\gamma(\varphi_c - \omega)) + C_4 e^{-\gamma(\varphi_c - \omega)} \operatorname{cos}(\gamma(\varphi_c - \omega)) \quad (30)$$

ou

$$Q_\varphi = C'_1 e^{\gamma(\varphi_c - \omega)} \operatorname{sen}(\gamma\omega) + C'_2 e^{\gamma(\varphi_c - \omega)} \operatorname{cos}(\gamma\omega) + C'_3 e^{-\gamma(\varphi_c - \omega)} \operatorname{sen}(\gamma\omega) + C'_4 e^{-\gamma(\varphi_c - \omega)} \operatorname{cos}(\gamma\omega) \quad (31)$$

Tendo-se em vista o efeito de amortecimento, a força cortante deve ter sua intensidade diminuída, tendendo a desaparecer na medida em que o ângulo ω aumenta (ou em que se afasta da borda). Para que essa condição seja sempre verificada impõe-se a nulidade das constantes C'_3 e C'_4 .

Outra maneira de apresentar a mesma solução resulta da introdução de duas outras constantes: $C'_1 = C \operatorname{cos}(\psi)$ e $C'_2 = C \operatorname{sen}(\psi)$. Nessas condições obtém-se finalmente:

$$Q_\varphi = C e^{-\gamma\omega} \operatorname{sen}(\gamma\omega + \psi) \quad (32)$$

Obtido Q_φ podem ser determinadas as outras variáveis de interesse:

$$N_\varphi = -\cot g\varphi C e^{-\gamma\omega} \operatorname{sen}(\gamma\omega + \psi) \quad (33)$$

$$H = -(1/\operatorname{sen}\varphi) C e^{-\gamma\omega} \operatorname{sen}(\gamma\omega + \psi) \quad (34)$$

$$N_\theta = -\sqrt{2}\gamma C e^{-\gamma\omega} \operatorname{sen}(\gamma\omega + \psi - \pi/4) \quad (35)$$

$$M_\varphi = \left(\frac{R}{\sqrt{2}\gamma} \right) C e^{-\gamma\omega} \operatorname{sen}(\gamma\omega + \psi + \pi/4) \quad (36)$$

$$M_\theta = \left(\frac{R\nu}{\sqrt{2}\gamma} \right) C e^{-\gamma\omega} [\operatorname{sen}(\gamma\omega + \psi + \pi/4)] \quad (37)$$

$$\alpha = \left(\frac{2\gamma^2}{Eh} \right) C e^{-\gamma\omega} \operatorname{cos}(\gamma\omega + \psi) \quad (38)$$

$$\xi = \left(\frac{R \operatorname{sen}(\varphi_c - \omega)}{Eh} \right) [-\sqrt{2} \gamma C e^{-\gamma \omega} \operatorname{sen}(\gamma \omega + \psi - \pi / 4) + \nu \cot g(\varphi_c - \omega) C e^{-\gamma \omega} \operatorname{sen}(\gamma \omega + \psi)] \quad (39)$$

Em cada problema específico as constantes C e ψ podem ser determinadas mediante condições de contorno envolvendo duas das funções anteriores.

Os exemplos de aplicação que seguem referem-se a aplicações diretas das soluções do problema homogêneo.

Exemplo 1. Calcular os esforços gerados em uma casca semi-esférica de raio 10 m e espessura 10 cm quando se provoca na borda um deslocamento de 1 mm sem rotação ($\nu = 0.1$; $E = 2000 \text{ kN/cm}^2$). A figura 5 ilustra o caso em estudo.

Com os dados fornecidos, calcula-se:

$$\gamma = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt[4]{R/h} = \sqrt[4]{3(1-0,1^2)} \frac{1000}{10} = 13,128$$

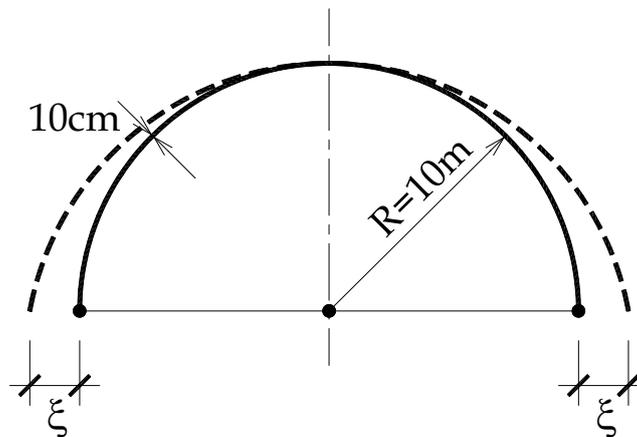


Figura 5 - Deslocamento ξ imposto na base de uma casca esférica

Condições de contorno para a determinação das constantes C e ψ :

$$\phi = \pi / 2 \rightarrow \begin{cases} \xi = 1\text{mm} ; \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow (g) \rightarrow \psi = \frac{\pi}{2};$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \xi = 1mm \rightarrow (h) \rightarrow C = \frac{Eh}{\gamma R} \xi = \frac{2000 \times 10 \times 0,1}{13,128 \times 1000};$$

$$C = 0,15;$$

Conhecidos ψ e C pode-se determinar o conjunto de esforços e deslocamentos em toda a casca. Em particular, para a borda, resultam:

$$Q = -0,15 \text{ kN/cm};$$

$$N_{\phi} = 0;$$

$$H = 0,15 \text{ kN/cm};$$

$$N_{\theta} = 2,0 \text{ kN/cm};$$

$$M_{\phi} = -5,80 \text{ kNcm/cm};$$

$$M_{\theta} = -0,50 \text{ kNcm/cm};$$

$$\alpha = 0;$$

$$\xi = 0,1 \text{ cm}.$$

Exemplo 2. Calcular os esforços da cúpula do exemplo anterior quando ocorre uma variação uniforme de temperatura de $-20^{\circ}C$ em toda a casca (adotar para coeficiente de dilatação térmica linear: $\alpha = 10^{-5} / ^{\circ}C$).

A variação de temperatura em questão implica numa dilatação uniforme de toda a casca com aumento linear do comprimento do paralelo, ou do próprio raio. A variação do raio do paralelo da borda da cúpula hemisférica pode ser estimada pela seguinte relação:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\Delta R_o}{R_o} = -\alpha \Delta t \therefore \Delta R_o = -R_o \alpha \Delta t$$

$$\Delta R_o = \xi = -1000 \times 10^{-5} \times 20 = 0,20 \text{ cm} = 2 \text{ mm}$$

Dado o caráter de dilatação uniforme da casca, essa variação se dá sem rotação da tangente ao meridiano. Assim sendo, as condições de contorno

deste exemplo são as mesmas do exemplo anterior, apenas com outro valor de $\xi (= 2\text{ mm})$.

Os esforços deste exemplo resultam com valores iguais ao dobro dos calculados no primeiro exemplo.