

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

MECÂNICA DAS ESTRUTURAS AERONÁUTICAS

VOLUME I

Sergio Persival Baroncini Proença

São Carlos, março de 2015.

Descrever o comportamento de uma estrutura ou de um elemento estrutural é tema central da *Mecânica das Estruturas* e consiste em determinar deslocamentos, tensões e deformações em qualquer um de seus pontos, e em qualquer instante, para dada condição de forças aplicadas e vinculação imposta.

Nesta publicação, em dois volumes, reúnem-se notas de aulas das disciplinas dedicadas ao tema da ‘Mecânica das Estruturas’, oferecidas pelo Departamento de Engenharia de Estruturas para o curso de graduação em Engenharia Aeronáutica da EESC/USP.

O conteúdo do texto prioriza aspectos conceituais associados tanto à formulação de modelos simplificados dedicados à representação e ao entendimento dos mecanismos resistentes e de transmissão de forças, quanto à aplicação de métodos numéricos para a obtenção de soluções de problemas estruturais de interesse para a Engenharia Aeronáutica.

Os tópicos principais que denotam os títulos de cada capítulo podem ser reunidos em dois grandes grupos. No primeiro estão os modelos simplificados. Apesar dessa característica inerente, tais modelos permitem uma análise suficientemente precisa do comportamento estrutural, servindo muito bem para os propósitos de uma abordagem preliminar de projeto. Além disso, os modelos simplificados podem servir como diretriz para a correta interpretação de respostas numéricas obtidas com programas de análise estrutural que permitem maior grau de complexidade na modelagem.

Justamente, proporcionar uma introdução aos modelos mais complexos de análise estrutural é o objetivo do segundo grupo de temas abordados. O texto trata deste assunto enfatizando a combinação do Princípio dos Trabalhos Virtuais com uma técnica numérica para a geração de soluções aproximadas. Tal metodologia, formalizada como o Método dos Elementos Finitos é, com maior ênfase, desenvolvida para as estruturas de barras, porém mostra-se ao longo do texto que a mesma pode ser estendida aos arranjos estruturais mais complexos que incluem elementos de superfície, como chapas, placas e cascas.

Em cada um dos volumes destas notas o contexto mencionado quanto ao agrupamento dos tópicos pode ser identificado. O primeiro volume reúne

os assuntos que compõem a ementa da disciplina Mecânica das Estruturas Aeronáuticas I.

No seu capítulo inicial apresentam-se as equações gerais da elasticidade linear, uma vez que o regime de comportamento linear das estruturas é regido por aquelas equações. Aplicações dessa abordagem geral são exemplificadas pelos problemas das barras simples e tubos sob pressão interna e/ou externa.

Em seguida, introduzem-se os modelos simplificados, iniciando com o cálculo de deslocamentos em estruturas *isostáticas* de barras pelo teorema de Castigliano e pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Os modelos simplificados são então estendidos para a determinação de tensões normais e fluxos de cisalhamento em seções de paredes delgadas abertas e fechadas; neste particular, algum destaque é dado à idealização das seções.

O Método dos Elementos Finitos para estruturas de barras (treliças e pórticos planos) constitui o tema central dos últimos capítulos. O assunto é introduzido a partir da formulação em forma fraca dos problemas estruturais. Neste texto a forma fraca é prioritariamente obtida pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, entretanto, a sua obtenção pelo Método da Energia é também abordada com certo nível de detalhe.

O segundo volume é relacionado à ementa da disciplina Mecânica das Estruturas Aeronáuticas II.

Inicialmente, estende-se a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais ao cálculo de deslocamentos em estruturas *hiperestáticas* de barras. Nas aplicações consideram-se arranjos estruturais formados por barras simples e gerais, incluindo-se o caso particular das cavernas.

Em seguida, apresenta-se um método simplificado para análise estática de chapas com reforços, incluindo, também de forma simplificada, a questão da perda de estabilidade. Estendem-se as aplicações desse modelo para a determinação dos esforços em nervuras e arranjos estruturais de asas e fuselagens com aberturas.

O grupo dos modelos mais complexos do comportamento estrutural é tratado quando da aplicação do Método dos Elementos Finitos para problemas da elasticidade plana ('estados planos de tensão') e problemas potenciais

(‘análise térmica’). Destacam-se soluções aproximativas que podem ser geradas por elementos finitos quadrangulares e triangulares.

O modelo teórico clássico das placas delgadas elásticas em flexão é apresentado na seqüência. Entre os tópicos relacionados estão: as soluções analíticas para placas circulares e retangulares submetidas a forças de natureza distribuída e concentrada.

Os dois últimos capítulos constituem uma introdução ao estudo das estruturas em membrana e cascas de revolução.

De uma maneira geral, em relação aos modelos aqui descritos, admite-se a linearidade geométrica, isto é: os deslocamentos são sempre pequenos, de modo que as aproximações em primeira ordem (que confundem o ângulo com o seu seno, por exemplo) são válidas. Além disso, a resposta dos materiais é restrita ao comportamento elástico-linear.

A publicação tem intencionalmente um caráter de suporte e informação complementar aos tópicos e exercícios apresentados em sala de aula, na medida em que os desenvolve com maior grau de profundidade. No entanto, é importante lembrar que o conteúdo foi elaborado a partir de consultas à textos muito mais completos. Assim sendo, a consulta aos trabalhos sugeridos na bibliografia é essencial e fortemente recomendada.

Finalmente, é importante destacar que, se por um lado a publicação resulta de uma sistematização, tanto quanto possível organizada, dos apontamentos feitos por ocasião do preparo das aulas, por outro lado, para a sua composição final há uma grande contribuição dos alunos que freqüentaram as aulas. De fato, muitos dos itens e exemplos numéricos tiveram seu conteúdo elaborado a partir de tentativas de esclarecimento de dúvidas manifestadas em sala de aula e que, não raro, serviram de aprendizado para o autor. Evidentemente, não há como mencionar nomes, mas fica aqui registrado o sincero agradecimento a todos os alunos por sua valiosa colaboração.

O autor.

São Carlos, julho de 2009.

Bibliografia sugerida:

- [1] ALLEN, D. H.; HAISLER, W. E. *Introduction to aerospace structural analysis*. John Wiley & Sons, 1985.
- [2] ASSAN, A. E. *Método dos elementos finitos: primeiros passos*. UNICAMP, 1999.
- [3] MARTINELLI, D. A. O.; MONTANARI, I.; SAVASSI, W. *Placas elásticas*. EESC/USP, 2003. (Public.01137).
- [4] MEGSON, T. H. G. *Aircraft structures for engineering students*. Edward Arnold, 1990.
- [5] NIU, M. C. Y. *Airframe structural design*. Hong Kong Co. Press, 1988.
- [6] PEERY, D. J.; AZAR, J. J. *Aircraft structures*. McGraw-Hill, 1982.
- [7] POPOV, E. P. *Introdução à mecânica dos sólidos*. Edgard Blücher, 1978.
- [8] PROENÇA, S. P. B. *Curso de resistência dos materiais*. EESC/USP, 2004. 2 v. (Public. 01133).
- [9] RICARDO, O. G. S. *Teoria das estruturas*. McGraw-Hill do Brasil, 1978.
- [10] RIVELLO, R. M. *Theory and analysis of flight structures*. McGraw-Hill, 1969.
- [11] SAVASSI, W. *Introdução ao método dos elementos finitos em análise linear de estruturas*. EESC/USP, 2000.
- [12] TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, 1959.
- [13] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. *The finite element method*. McGraw-Hill, 1989. 2 v.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

<i>1. Introdução à análise estrutural</i>	1
<i>2. Componentes estruturais de aviões</i>	5

CAPÍTULO 2 – SOBRE A ELASTICIDADE PLANA

<i>1. Condições gerais de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva: relações principais e notação.</i>	13
<i>2. Aplicação à análise da barras sob força normal</i>	21
<i>3. Aplicação à análise de tubos</i>	25
<i>Exemplo 1</i>	31
<i>Exemplo 2</i>	32
<i>Exemplo 3</i>	33

CAPÍTULO 3 – TEOREMA DE CASTIGLIANO E O P.T.V.

<i>1. Energia de deformação em barras sob força normal</i>	37
<i>2. Teorema de Castigliano</i>	38
<i>Exemplo 1</i>	41
<i>Exemplo 2</i>	43
<i>Exemplo 3</i>	48
<i>3. Extensão do teorema de Castigliano para incluir as deformações por corte e torção</i>	49
<i>Exemplo 4</i>	53
<i>4. O Princípio dos Trabalhos Virtuais</i>	55
<i>Exemplo 5</i>	57

CAPÍTULO 4 – TENSÕES EM ASAS E FUSELAGENS

1. Tensões nas estruturas de asas e fuselagens	61
2. A idealização e o cálculo das tensões normais em seções de asas e fuselagens	64
Exemplo 1	66
Exemplo 2	68
Exemplo 3	71
Exemplo 4	75
3. Caracterização do fluxo por análise do equilíbrio	76
Exemplo 5	82
Exemplo 6	84
4. Caracterização do fluxo em seções fechadas com uma célula	86
5. Giros de seções fechadas por efeito de fluxos de cisalhamento	89
6. Determinação do centro de cisalhamento	93
Exemplo 7	94
7. Fluxos e centro de cisalhamento de seções fechadas com mais de uma célula	96
Exemplo 8	98
Exemplo 9	99
8. Fluxos e centro de cisalhamento de seções idealizadas abertas de geometria qualquer: comentários gerais	102
Exemplo 10	105

CAPÍTULO 5 – ASAS COM SEÇÕES VARIÁVEIS

1. Análise simplificada para a determinação de fluxos de cisalhamento em asas com dimensões variáveis ao longo do comprimento	117
---	-----

Exemplo 1	118
Exemplo 2	121
Exemplo 3	125

CAPÍTULO 6 – FORMAS FRACAS DO P.V.C.

1. O problema da barra sob força normal em Forma Forte . .	131
2. O problema da barra sob força normal em Forma Fraca . .	133
3. Formas fracas construídas pela Energia Potencial	137
3.1. Energia Potencial e Forma Fraca: barras sob força normal	139
3.2. Energia Potencial e Forma Fraca: barras sob flexão .	140
4. A Forma Fraca e as soluções aproximativas	143
Exemplo 1	146
Exemplo 2	147

CAPÍTULO 7 – MEF EM ESTRUTURAS DE BARRAS

1. O Métodos dos Elementos Finitos	151
1.1. Aproximações com continuidade de ordem zero	152
Exemplo 1	165

CAPÍTULO 8 – TRELIÇAS PLANAS PELO MEF

1. Extensão do MEF para a análise de treliças planas	175
Exemplo 1	179
2. Montagem da matriz de rigidez global por numeração dos graus de liberdade	183
3. Barra de treliça tridimensional	186

<i>4. Imposição de condições de contorno não-homogêneas . . .</i>	<i>188</i>
---	------------

CAPÍTULO 9 – *MEF PARA BARRAS EM FLEXÃO*

<i>1. Aproximações com continuidade de ordem um para vigas em flexão</i>	<i>191</i>
<i>2. Elemento finito de viga</i>	<i>196</i>
<i>3. Discretização de estruturas em viga</i>	<i>199</i>

CAPÍTULO 10 – *PÓRTICOS PLANOS PELO MEF*

<i>1. Extensão do MEF para a análise de pórticos planos</i>	<i>201</i>
<i>Exemplo 1</i>	<i>208</i>

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

1. Introdução à análise estrutural

Descrever o comportamento de uma estrutura ou de um sólido é tema central da *Mecânica das Estruturas* e consiste em determinar deslocamentos, tensões e deformações em qualquer um de seus pontos, e em qualquer instante, para dada condição de forças aplicadas e vinculação imposta.

Formalmente, define-se por *estrutura* o corpo ou arranjo de corpos formando um sistema capaz de propiciar o equilíbrio estático ou dinâmico de certo conjunto de forças aplicadas (ativas). A Figura 1 ilustra um complexo arranjo estrutural de aeronave.

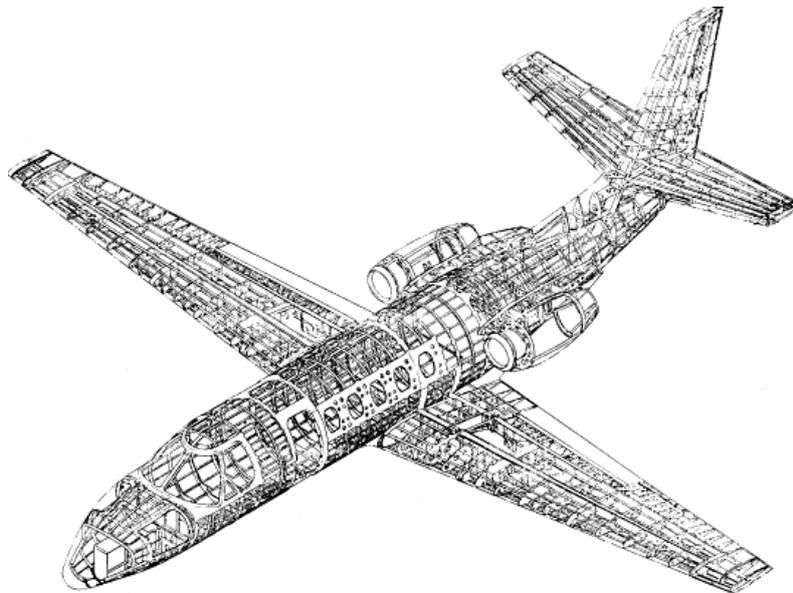


Figura 1 – *Estrutura de aeronave* (Fonte: <http://adg.stanford.edu/aa241/structures/structuraldesign.html>)

Já a Figura 2 mostra ações externas típicas em situação de vôo, representadas de modo simplificado mediante forças resultantes ou distribuídas por unidade de comprimento.

A chamada ‘modelagem teórica’, que constitui o conjunto de procedimentos da Mecânica das Estruturas, deve partir de uma avaliação conceitual preliminar sobre o tipo de abordagem que será mais representativa do problema em questão: análise plana ou tridimensional, estática ou dinâmica, linear ou não-linear, por exemplo.

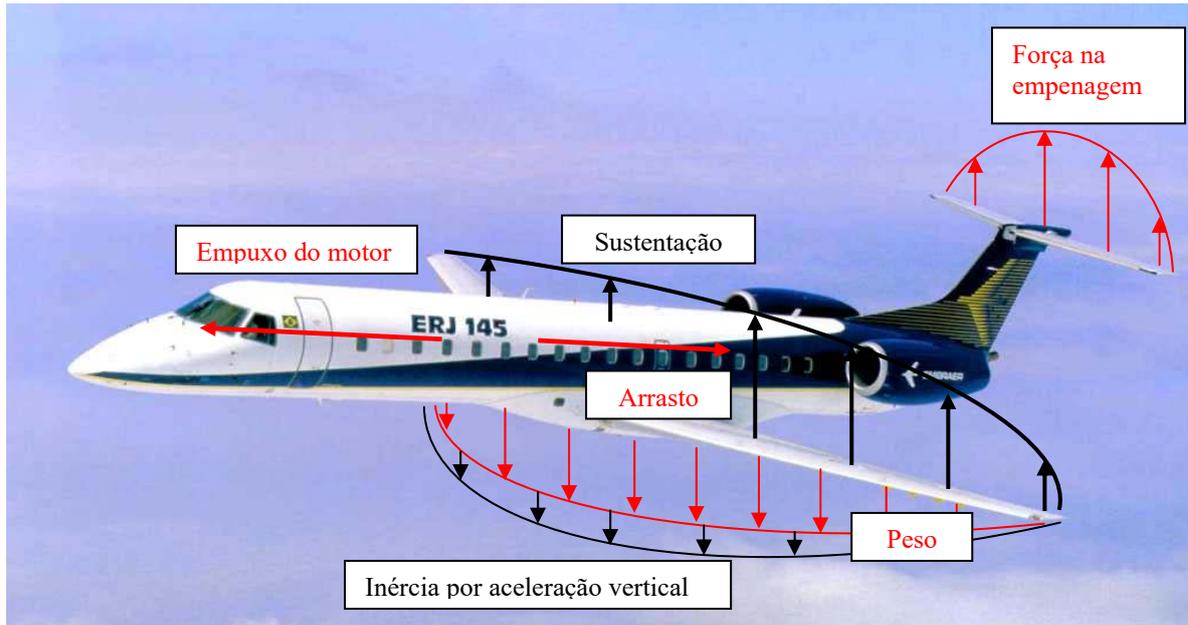


Figura 2 – Ações sobre a aeronave

A etapa de modelagem propriamente dita compõe-se pela idealização tanto da geometria da estrutura quanto das forças aplicadas e pela representação matemática de restrições gerais de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva, além das condições de contorno. As restrições gerais e as condições de contorno, quando expressas por equações diferenciais parciais nas variáveis de interesse, constituem o que se denomina por forma forte do problema de valor de contorno.

Uma hipótese fundamental na passagem para o modelo matemático é a *continuidade* material dos elementos estruturais. Tal hipótese tem a seguinte idealização implícita: qualquer porção de volume do elemento, por menor que seja, é totalmente preenchida por certa quantidade de massa, de modo que qualquer um dos seus pontos pode ser individualizado por um conjunto de coordenadas. Uma implicação matemática dessa hipótese é que a função solução, que descreve, por exemplo, o campo de deslocamentos, deve possuir regularidade estendida às suas ordens superiores de derivação.

Na etapa de representação matemática, com o objetivo de viabilizar a obtenção de resultados independente da eventual complexidade dos problemas de interesse, normalmente se adotam hipóteses simplificadoras que quase sempre levam a uma idealização, mais ou menos aproximada, tanto da geometria quanto dos fenômenos estudados. De um modo geral, em todos os modelos descritos nestas notas, admite-se que as deformações e deslocamentos ‘*compatíveis*’ são sempre pequenos, de tal forma que aproximações geométricas em primeira ordem (que confundem o ângulo

com o seu seno, por exemplo) são válidas. Os modelos cinemáticos adotados para descrever as deformações por flexão e torção das seções transversais dos elementos estruturais de barra possuem coerência com essas idealizações. Além disso, a resposta dos materiais é restrita ao comportamento elástico-linear.

Em relação às restrições representadas pelas condições de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva pode-se conceituá-las de forma bastante sucinta.

A condição de equilíbrio pressupõe que uma parte arbitrária da estrutura (idealizada por um diagrama de corpo livre) deve estar submetida, em qualquer instante de análise, a um conjunto equilibrado de forças, e se isso valer para todas as suas partes então toda a estrutura estará em equilíbrio.

O equilíbrio de forças se estabelece na estrutura mediante um mecanismo que pode ser interpretado como de *resistência* ou de *transmissão*. De fato, por um lado o conjunto de forças aplicadas deve ser transmitido ao longo dos elementos estruturais até os vínculos e, por outro lado, os elementos estruturais precisam oferecer resistência às forças aplicadas, desenvolvendo em cada seção esforços internos que equilibram seus efeitos.

A existência dos esforços internos tem suporte no fato que os elementos estruturais são deformáveis e suas partes internas interagem entre si. Nessas condições, as intensidades dos esforços internos dependem da *rigidez* dos elementos estruturais, de modo simplificado entendida como a oposição oferecida às deformações induzidas pelo carregamento.

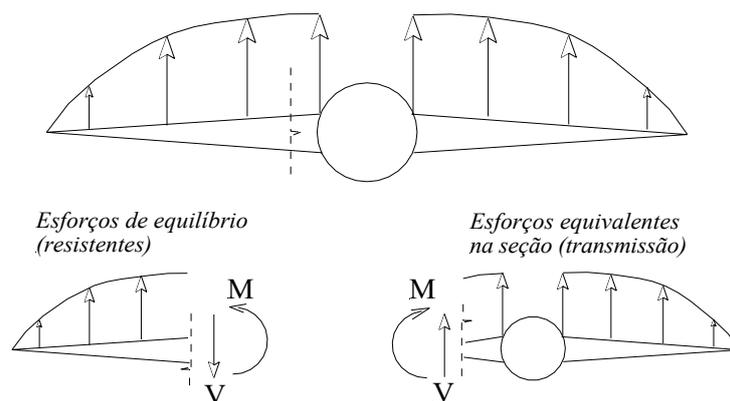


Figura 3 – Mecanismos internos de transmissão de forças e de resistência

Na Figura 3 procura-se ilustrar as interpretações de resistência e transmissão, segundo as quais os esforços internos em determinada seção possuem intensidades tais que equilibram as forças externas aplicadas na

parte considerada da estrutura ou então são equivalentes estáticos, em relação à seção, das forças aplicadas.

De um lado, o mecanismo interpretado como de *resistência* envolve esforços internos *generalizados* (momentos e forças), representados quando da construção de diagramas de corpo livre e com intensidades tais que garantam o equilíbrio da parte isolada da estrutura.

De outro lado, como o mecanismo *de transmissão* tem a ver com a idéia de transferência das forças aplicadas ao longo da estrutura, os mesmos esforços internos generalizados são agora entendidos como equivalentes estáticos das forças externas que atuam na parte isolada da estrutura em relação a uma seção de referência. Nesse caso, as intensidades dos esforços internos em cada posição descrevem o efeito local das forças externas ativas.

A segunda restrição geral imposta ao modelo matemático é a da compatibilidade entre deslocamentos e deformações.

Mudanças da forma e do volume inicial do elemento estrutural compõem a sua deformação. A condição de *compatibilidade* implica que o campo de deslocamentos, obedecendo às restrições vinculares, deve ter variação suficientemente regular de ponto a ponto, no sentido de se preservar a hipótese de continuidade também no elemento deformado. Processos de deformação que preservam continuidade são ditos *compatíveis*. Matematicamente, o chamado regime de deformações pode ser caracterizado localmente em cada porção infinitesimal ou, mais a rigor, ponto a ponto do elemento estrutural; a compatibilidade é então expressa relacionando as medidas de deformação com variações das componentes de deslocamento.

Finalmente, a condição constitutiva estabelece que ao regime de deformações deva corresponder um regime de tensões internas cuja intensidade depende de propriedades de rigidez do material. No modelo elástico-linear, a relação entre essas grandezas obedece a uma regra de proporcionalidade (*'lei de Hooke generalizada'*), sendo as propriedades de rigidez caracterizadas por constantes elásticas do material.

Entretanto, uma vez estabelecido o modelo matemático, a questão seguinte que se põe é relativa à sua resolução. Em boa parte dos problemas de interesse prático nem sempre é possível encontrar a solução matemática exata por métodos analíticos, de modo que uma alternativa de busca de uma solução aproximada precisa ser adotada. Os métodos numéricos

podem fornecer aproximações suficientemente precisas para a solução, constituindo-se em alternativas a serem exploradas. Entre os métodos disponíveis, o Método dos Elementos Finitos é o de aplicação mais difundida e será introduzido nestas notas inicialmente tendo-se em vista à análise de estruturas de barras.

A aplicação do método dos elementos finitos adquire uma dimensão mais ampla, isto é, que pode ser estendida a qualquer tipo de composição estrutural, quando o modelo matemático passa a ser representado em forma variacional.

Ao contrário da forma forte, expressa por equações diferenciais cujas soluções valem ponto a ponto do corpo, a forma variacional do modelo matemático é dita *fraca* por proporcionar uma solução média dentro do intervalo de interesse. Uma das maneiras de construção dessa forma faz uso dos chamados Princípios Variacionais, os quais estão inseridos no Método da Energia. À parte os Princípios Variacionais, há ainda uma maneira de caráter irrestrito para se gerar a forma variacional fraca e que será enfatizada neste texto: o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Todos os aspectos conceituais mencionados serão tratados de forma direta ou indireta ao longo dos capítulos que seguem. Evidentemente, as aplicações estarão voltadas às estruturas aeronáuticas, mas é importante notar que os conceitos gerais valem para a análise de estruturas de caráter geral.

2. Componentes estruturais de aviões

A função básica dos componentes ou elementos estruturais é proporcionar os mecanismos de resistência e transmissão das forças aplicadas. No caso das aeronaves uma função adicional do conjunto estrutural é a de prover uma forma aerodinâmica eficiente ao conjunto.

Para fins de concepção estrutural, as aeronaves podem ser idealizadas como um arranjo de partes, possuindo cada uma delas características específicas. A Figura 4 ilustra a idealização em questão, sendo que entre as partes se destacam aquelas relativas às asas e à fuselagem.

Em princípio, como induz a Figura 4, as estruturas aeronáuticas poderiam ser formadas somente por elementos de superfície denominados tecnicamente como '*cascas*'.

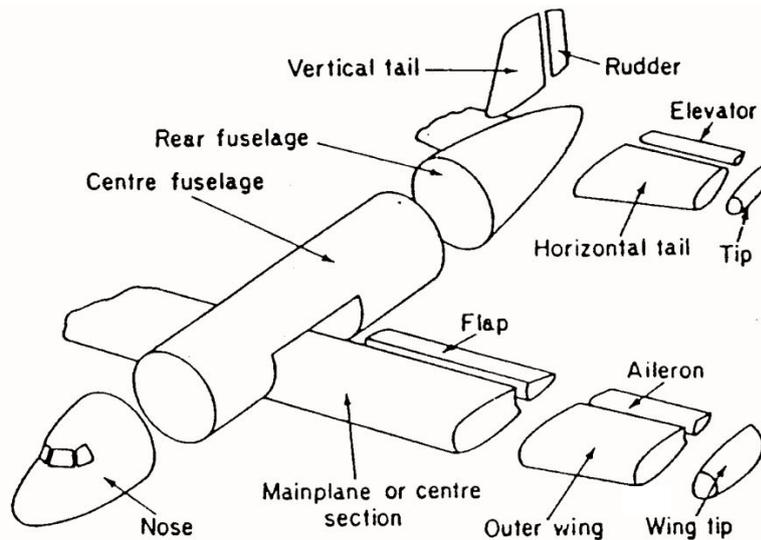


Figura 4 – Partes de fuselagens e asas (Fonte: referência ¹)

Sob um ponto de vista mecânico, por terem espessura muito fina, as cascas são capazes de movimentar localmente mecanismos de resistência a partir de distribuições de tensões normais e de cisalhamento contidas em planos tangentes às suas superfícies médias. Apesar da grande rigidez resultante de sua geometria (não-plana), as cascas podem perder estabilidade quando sob compressão e não são eficientes para resistir a forças de natureza mais concentrada aplicadas segundo a direção transversal à sua superfície; melhorar a eficiência estrutural nos aspectos mencionados levaria a um aumento indesejável de sua espessura.

Por esses motivos, na maior parte dos casos as estruturas de aviões incluem elementos ditos de reforço longitudinal e transversal que se combinam com as cascas, de modo que estas passam a compor, também, o revestimento externo daqueles elementos. Os elementos de reforço apresentam dimensões que contribuem para a formação adequada dos mecanismos de transmissão e resistência, em última análise, preservando a integridade e satisfazendo os requisitos de desempenho estrutural do conjunto.

Em termos gerais, portanto, a partir do tipo de concepção estrutural, os elementos de reforço podem ou não existir, o que leva a diferenciar as estruturas aeronáuticas entre as categoriais *semi-monocoque* e *monocoque*, respectivamente. A opção por uma ou outra concepção depende, essencialmente, do tipo de forças a que a estruturas pode estar sujeita e de funções complementares que deva desempenhar.

¹ Peery, D.J., Azar, J.J., *Aircraft Structures*, McGraw-Hill, Inc., 1982.

Particularmente nas concepções semi-monocoque, partes da estrutura completa, como as asas e a fuselagem, apresentam detalhamentos específicos nos seus arranjos estruturais. A Figura 5 ilustra arranjos adotados para fuselagens e asas em grandes aeronaves.

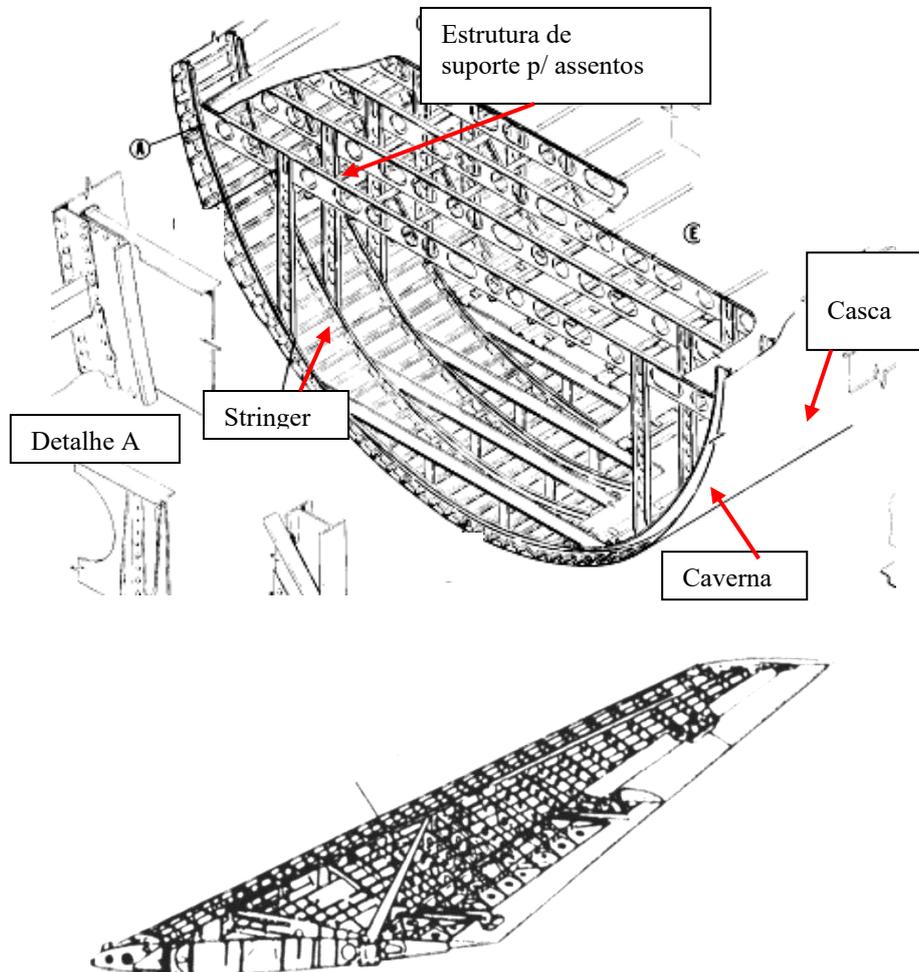


Figura 5 – Estruturas de fuselagens e asas (Fontes: <http://adg.stanford.edu/aa241/structures/structuraldesign.html>)

As asas, quando submetidas, simultaneamente ou não, à ação de forças de peso próprio, de sobrecarga (como pesos de combustível e trens de pouso), de sustentação e de inércia (estas, sobretudo movimentadas nas situações de manobras em vôo), genericamente deverão apresentar deformações por flexão e torção. Nessas condições, os mecanismos resistentes e de transmissão têm como resultantes nas seções transversais: momentos de flexão, de torção e forças de corte (cortantes).

O conjunto estrutural responsável pelo equilíbrio das forças aplicadas ao longo da asa é formado por elementos de superfície (*casca*) e elementos de reforço transversal (*nervuras* ou '*ribs*') e longitudinal (*barras* ou '*spars*' e '*stringers*').

Na Figura 6 indicam-se os elementos de reforço e na Figura 7 os mesmos elementos são indicados numa vista definida a partir de corte sobre um arranjo estrutural mais simplificado de asa.

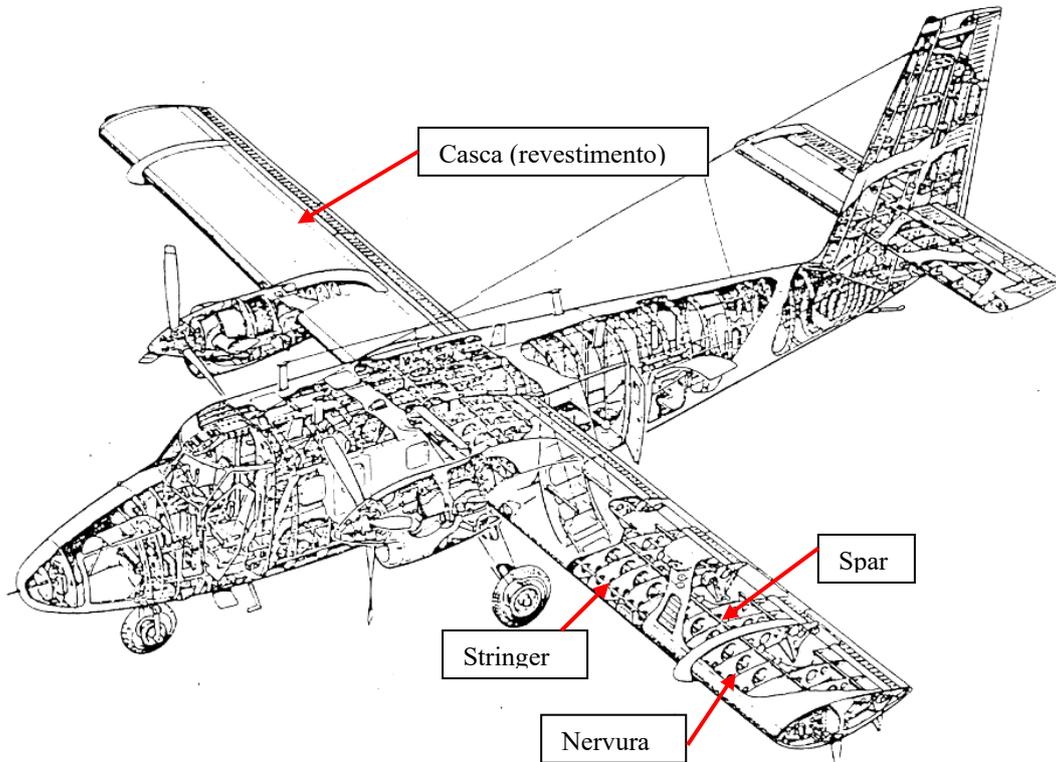


Figura 6 – Estruturas de fuselagens e asas (Fonte: referência ²)

As nervuras são elementos delgados de superfície média plana, eventualmente com aberturas circulares (como se vê na Figura 7) para a passagem de cabos ou dispositivos de controle.

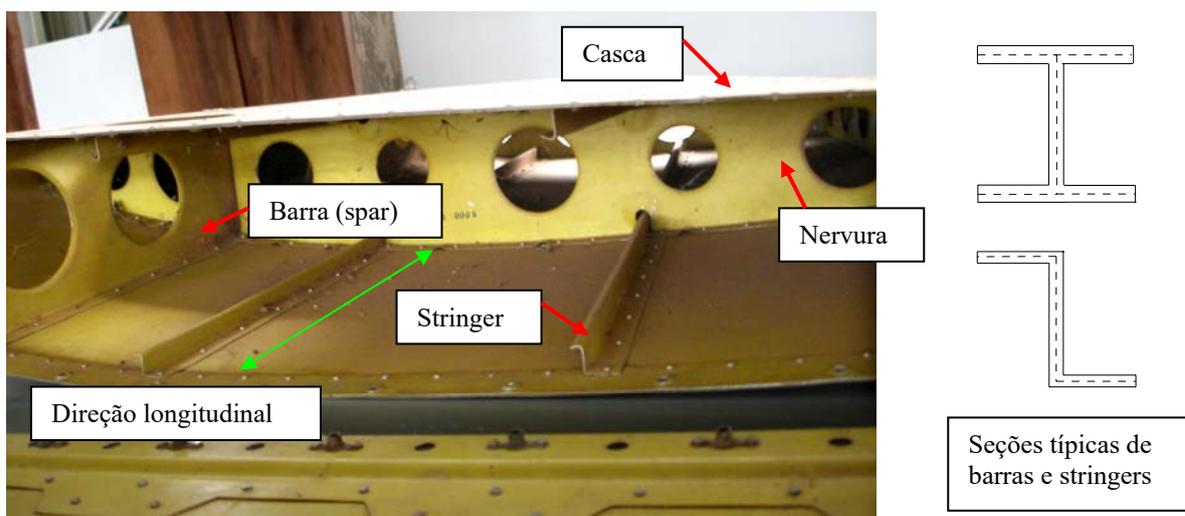


Figura 7 – Elementos estruturais em vista interna de asa – Cessna 310K

² Megson, T.H.G., *Aircraft Structures for Engineering Students*, Edward Arnold, 1990.

As barras e stringers são elementos geométricos de eixo reto com seções transversais em forma poligonal aberta formada por trechos de espessura fina. A diferença básica entre estes elementos é que as barras são mais robustas, também podendo apresentar aberturas circulares e são essenciais particularmente na ligação da asa com a fuselagem.

Ao movimentar tensões normais e de cisalhamento (estas contidas em planos localmente tangentes à sua superfície média), tanto os elementos de casca quanto os elementos de reforço interagem colaborando na formação dos mecanismos de equilíbrio. De modo simplificado, pode-se idealizar que os momentos de flexão nas seções transversais das asas resultam de tensões normais que se distribuem nas cascas, barras e stringers.

Na Figura 8, mostra-se a contribuição dos stringers para o momento fletor resistente na seção. As forças cortantes e os momentos de torção resultam, por sua vez, de tensões de cisalhamento distribuídas ao longo das cascas, nervuras e almas das barras.

As nervuras são ainda responsáveis pela manutenção da forma aerodinâmica da seção transversal da asa; além disso, elas colaboram na prevenção da eventual perda de estabilidade dos outros elementos, uma vez que o conjunto esteja submetido à compressão longitudinal.

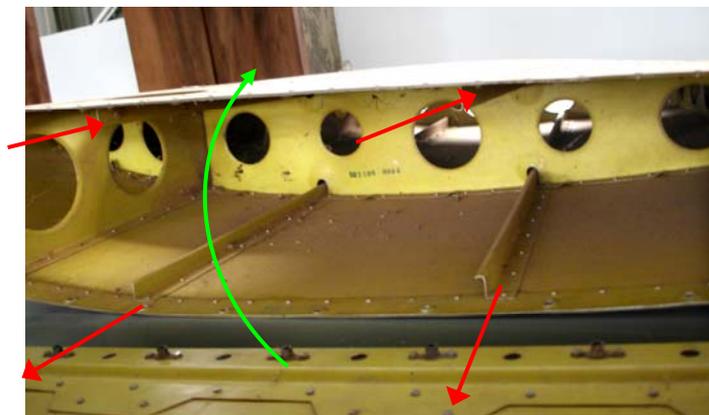


Figura 8 – Contribuição dos stringers para o momento fletor na seção

Inversamente, em menor escala, também as barras e stringers colaboram na prevenção à perda de estabilidade das cascas. Esse aspecto, aliás, é um dos motivos que norteia a definição do número de elementos de reforço ao longo da asa; os outros motivos são relacionados aos efeitos localizados que aparecem nas ligações com a fuselagem, com trens de pouso e com elementos de controle, como ‘*ailerons*’ e ‘*flaps*’, além de forças oriundas do empuxo dos motores, peso de combustível, etc.

A fuselagem já não desempenha papel significativo em relação à resistência a forças de natureza aerodinâmica. A sua finalidade preponderante está na resistência a forças de reação idealmente concentradas nas ligações com as asas, cauda e trens de pouso, além de suportar o carregamento proveniente do peso próprio de pessoas e sobrecargas.

A composição estrutural da fuselagem consiste em casca de superfície e elementos de reforço longitudinais ('stringers') e transversais ('cavernas'). Na Figura 9 indicam-se os componentes estruturais para uma aeronave simples.

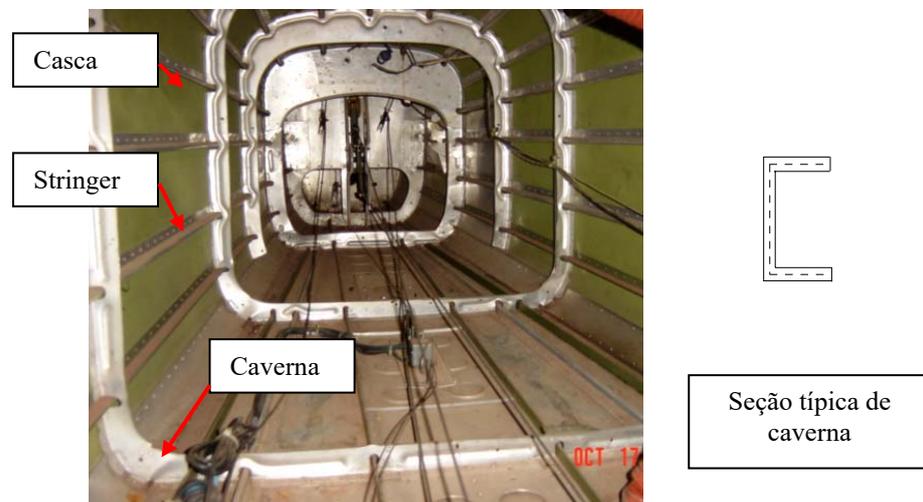


Figura 9 – Elementos estruturais em vista interna da fuselagem – Cessna 310K

A fuselagem também pode estar solicitada por flexão, torção e corte. Nas seções transversais ao longo do seu comprimento, os momentos de flexão resultam da composição de tensões normais nas cascas e stringers. Já o momento de torção e a força de corte resultam de tensões de cisalhamento nas cascas. Entretanto, por análise do equilíbrio, é possível mostrar que também os stringers e cavernas colaboram na transmissão daqueles esforços ao longo da fuselagem.

Como ilustra a Figura 10, nas grandes aeronaves, internamente à fuselagem, as cavernas aparecem como elementos de resistência aos efeitos da pressão interna e das forças de reação provenientes das estruturas internas de suporte aos assentos. Além disso, as cavernas também atuam, juntamente com os stringers, na distribuição ao longo da estrutura dos efeitos de forças concentradas, por exemplo, provenientes das ligações com as asas.

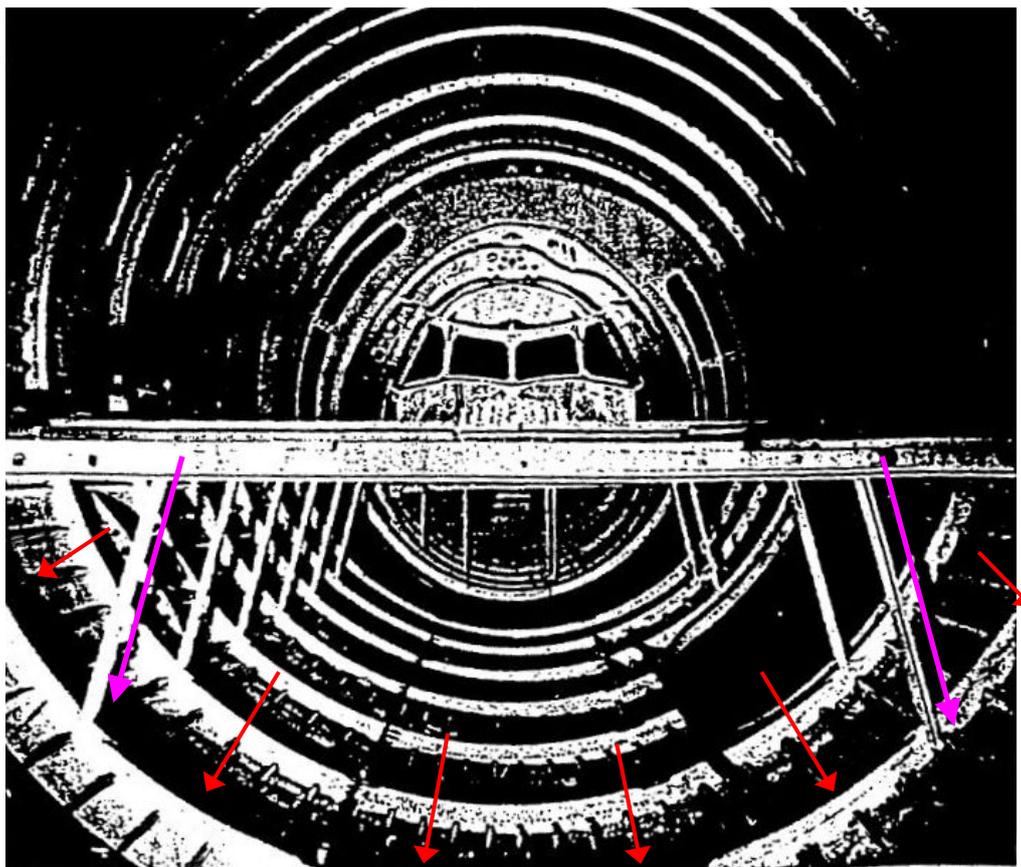


Figura 10 – *Vista interna da fuselagem: forças sobre as cavernas oriundas de pressão interna e estrutura de suporte (Fonte: referência ³)*

³ Peery, D.J., Azar, J.J., *Aircraft Structures*, McGraw-Hill, Inc., 1982.

CAPÍTULO 2 SOBRE A ELASTICIDADE PLANA

Neste capítulo apresentam-se elementos da teoria da elasticidade considerados essenciais para o entendimento da formulação matemática dos problemas de análise de estruturas nos regimes de resposta linear. As condições de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva devem ser verificadas de maneira geral, isto é, seja qual for a concepção estrutural e o tipo de abordagem, plana ou tridimensional.

1. Condições gerais de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva: relações principais e notação.

Considere-se um sólido, conforme representado na Figura 1, inserido no espaço tridimensional e idealizado como um *meio contínuo* de volume V e superfície de contorno Γ . A superfície de contorno é dividida em porções complementares (e com interseção vazia) Γ_u e Γ_σ , aonde se impõem valores prescritos para os deslocamentos e para as forças aplicadas (por unidade de superfície), respectivamente.

Seja, também, um referencial tri-ortogonal (com origem num ponto qualquer escolhido por conveniência) e um sistema cartesiano de coordenadas a ele associado, de modo que pontos do sólido podem ser posicionados nesse sistema mediante coordenadas x , y e z .

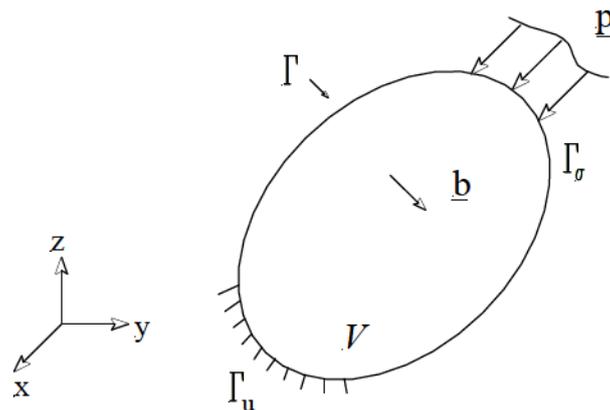


Figura 1 – Sólido submetido a forças externas e com vinculação prescrita

Considera-se que o sólido possa estar submetido à ação de forças externas distribuídas por unidade de volume e por unidade de superfície.

As forças por unidade de volume atuam em pontos no interior do corpo e possuem componentes b_x, b_y e b_z , segundo os eixos de referência, por sua vez reunidas num vetor \underline{b} . Já as forças externas distribuídas por unidade de superfície, atuam em pontos do contorno do corpo e possuem suas componentes p_x, p_y e p_z , estas reunidas num vetor \underline{p} .

Por outro lado, a um ponto qualquer no interior do volume podem ser atribuídos: um vetor \underline{d} que reúne as componentes de deslocamentos segundo as direções dos eixos de referência adotados e ‘tensores’¹ que reúnem as componentes de tensão e de deformação. Para tais grandezas valem as seguintes representações:

$$\underline{d}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}; \quad \underline{T}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad \underline{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1a,b,c)$$

ou, alternativamente, para o tensor de tensão e o ‘tensor’ de deformação²,

$$\underline{T}^T(x, y, z) = \{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yx} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zy} \} \quad \tau$$

$$\underline{\varepsilon}^T(x, y, z) = \{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_{xy} \quad \gamma_{yx} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zy} \} \quad \gamma \quad \gamma \quad (1d,e)$$

Obs: na notação matricial o traço simples sob a grandeza indica representação na forma de vetor coluna, o traço duplo indica representação como matriz.

As condições de equilíbrio impõem restrições sobre as variações ponto a ponto das intensidades das componentes de tensão, de modo que localmente as resultantes de forças e momentos sejam nulas. As relações que as representam podem ser deduzidas da passagem ao limite das relações equilíbrio de uma porção de volume, definida em torno de um ponto arbitrário no interior do sólido.

¹ Tensores são grandezas matemáticas que obedecem a uma regra bem definida de transformação de coordenadas (os vetores clássicos classificam-se como tensores de primeira ordem).

² A rigor esta grandeza não obedece estritamente à regra de transformação de coordenadas, sendo designada como um tensor de engenharia.

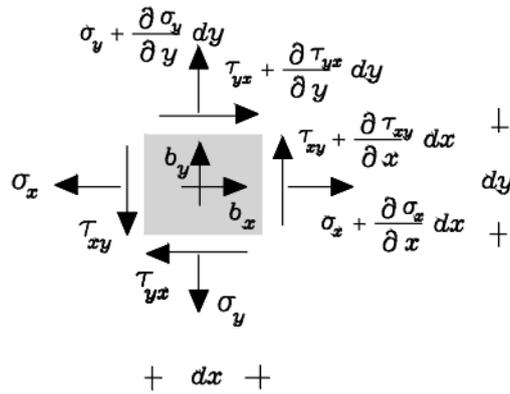


Figura 2 – Equilíbrio no plano x-y

Na Figura 2, por simplificação, indica-se um diagrama de corpo livre de um elemento no interior do sólido, observando-se o plano x-y.

Nessa representação plana, as relações que exprimem a nulidade das somatórias de forças segundo as direções dos eixos coordenados resultam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0 \end{aligned} \tag{2a,b}$$

Considerando-se o caso geral tridimensional, o equilíbrio de forças segundo cada uma das três direções dos eixos de referência fica expresso por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Por sua vez, o equilíbrio dos momentos das forças em torno das direções dos eixos de referência fornece:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \tag{4}$$

Tendo-se em vista o resultado anterior, conclui-se que o tensor de tensões é simétrico (a sua matriz representativa, dada pela 1b, é simétrica).

As condições de compatibilidade estabelecem que no meio deformado preserva-se a continuidade se *ponto a ponto* puderem ser definidas componentes de deformação a partir de variações das componentes de deslocamento.

Na Figura 3 ilustra-se, no plano x - y , a deformação sofrida pelo meio nas vizinhanças de um ponto, tomando-se por referência dois segmentos de reta que passam da situação $\overline{AB}, \overline{AC}$ para $\overline{A'B'}, \overline{A'C'}$. Justifica-se a representação indicada porque na passagem para a situação deformada, de uma maneira geral, o meio sofre mudanças de forma e volume, de modo que os segmentos de referência apresentam variações de seus comprimentos e variação do ângulo relativo (inicialmente reto). Tais variações podem ser quantificadas mediante as medidas de deformação linear e de distorção angular, que constituem as chamadas componentes de deformação.

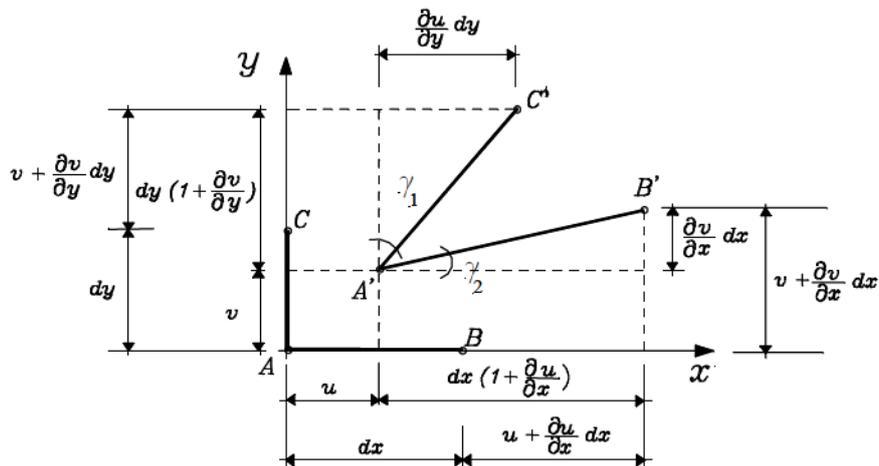


Figura 3 – Compatibilidade no plano x - y

Restringindo-se a modelagem aos regimes de pequenas deformações, os comprimentos dos segmentos $\overline{A'B'}, \overline{A'C'}$ podem ser confundidos com as suas projeções nas direções dos eixos x e y , respectivamente, e a distorção angular pode ser determinada confundindo-se a tangente com o próprio ângulo. De acordo com essas simplificações, as componentes de deformação ficam dadas pelas seguintes relações de compatibilidade:

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\overline{A'C'} - \overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5a,b,c)$$

No caso tridimensional as relações anteriores se generalizam para:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (6 a,b,c,d,e,f)$$

Nota-se que, pela definição apresentada: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$; $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$; $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$. Nas relações (6), ε_x , ε_y e ε_z representam medidas lineares de deformação e decorrem da variação de volume, enquanto que γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz} representam distorções angulares segundo os planos coordenados associadas à variação de forma imposta no processo de deformação do meio.

A relação constitutiva válida para o regime elástico-linear se exprime intrinsecamente por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{T}} \quad (7)$$

onde $\underline{\underline{C}}$ é o tensor de quarta ordem dito tensor constitutivo de flexibilidade.

Um dado adicional é que o tensor constitutivo de flexibilidade é simétrico³ e também positivo-definido, por esse motivo podendo ser invertido. Assim sendo, a relação constitutiva pode ser expressa em forma inversa, onde o campo de tensões decorre do campo de deformações mediante um tensor constitutivo de rigidez.

A forma (7) adotada para definir a relação constitutiva é conveniente por permitir recuperar de imediato a lei de Hooke generalizada apresentada na Mecânica dos Sólidos para meios com isotropia. Nesse caso particular, a representação do tensor de flexibilidade em forma matricial é dada por:

³ Existem diferentes teorias clássicas da elasticidade. A teoria de Green, que proporciona o tensor constitutivo simétrico, postula que ao corpo elástico possa ser associada certa quantidade de energia, função do estado de deformação, ou energia de deformação.

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\gamma/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\gamma/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\gamma/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu)/E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu)/E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu)/E \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde E e ν são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

De um modo geral, o número de constantes elásticas do material varia de acordo com o grau de anisotropia apresentado pelo meio. Por exemplo, na isotropia transversal o meio apresenta isotropia segundo um plano ortogonal a certa direção. Um material composto formado por fibras alinhadas com a direção z de referência, por exemplo, e imersas numa matriz polimérica, apresenta isotropia transversal. Nesse caso, a matriz constitutiva de flexibilidade fica dada por:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu_{xy}/E & -\nu/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xy}/E & 1/E & -\nu/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\gamma/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \quad (9)$$

sendo, ainda, possível demonstrar que: $G_{xy} = E/2(1+\nu_{xy})$. Portanto, o material transversalmente isótropo apresenta cinco constantes elásticas: E, E_z, ν, ν_{xy} e G .

O meio dito com ortotropia apresenta respostas simétricas segundo três direções linearmente independentes. Um material composto formado por fibras alinhadas segundo as três direções do referencial cartesiano e imersas

em matriz polimérica é um exemplo de meio que pode apresentar ortotropia.

O material ortótropo se caracteriza elasticamente por um conjunto de nove constantes elásticas: $E_x, E_y, E_z, \nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}, G_{xy}, G_{xz}$ e G_{yz} e a matriz constitutiva de flexibilidade fica dada, neste caso, por:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_y & -\nu_{xz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xy}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xz}/E_z & -\nu_{yz}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} \end{bmatrix} \quad (10)$$

No caso geral de anisotropia, a matriz constitutiva de flexibilidade é ainda simétrica, porém apresenta-se cheia, com vinte e uma constantes elásticas. O fato de a matriz ser cheia implica em que tensões normais podem provocar não somente deformações lineares (mudanças de volume), mas também distorções angulares (mudanças de forma). Ao contrário, tensões de cisalhamento podem provocar distorções angulares e também deformações lineares.

Finalmente, as condições de contorno: equilíbrio entre tensões e forças aplicadas em Γ_σ e deslocamentos prescritos em Γ_u , se exprimem por:

$$\underline{\underline{NT}} = \underline{\underline{p}} \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (11)$$

e

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\bar{d}}} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (12)$$

onde o traço superior sobre cada um dos vetores indica valores prescritos nos respectivos contornos.

Com o intuito de ilustrar de modo simplificado o equilíbrio no contorno, na Figura 4, mostra-se, no plano x-y, um elemento triangular com uma das arestas coincidentes com o contorno do sólido. Esta aresta possui normal n ,

cujos cossenos diretores são ℓ e m . No elemento indicam-se também as componentes, segundo as direções dos eixos coordenados, da força distribuída externamente aplicada e as componentes de tensão interna.

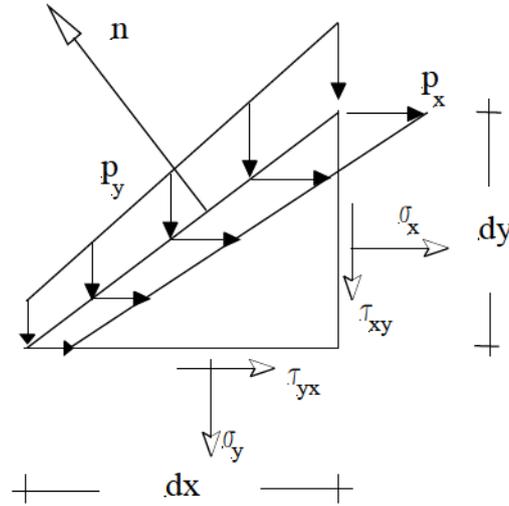


Figura 4 - Equilíbrio no contorno em relação ao plano x-y

O equilíbrio de forças segundo as direções dos eixos coordenados exprime-se, nesse caso, por:

$$\sigma_x \ell + \tau_{yx} m = -p_x; \quad \sigma_y m + \tau_{xy} \ell = -p_y \quad (13a,b)$$

ou, ainda, matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \ell & 0 & m \\ 0 & m & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p_x \\ -p_y \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Na relação (11), a condição de equilíbrio no contorno está generalizada para o caso geral tridimensional. Para essa situação geral, a matriz \underline{N} , que aparece na (14) na forma de matriz retangular, passa a ter a seguinte representação:

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} \ell & 0 & 0 & m & n & 0 \\ 0 & m & 0 & \ell & 0 & n \\ 0 & 0 & n & 0 & \ell & m \end{bmatrix} \quad (15)$$

onde ℓ, m e n são os cossenos diretores do vetor normal ao contorno no ponto, em relação aos eixos de referência x, y e z , respectivamente.

As relações (3), (6) e (7), acrescentadas das (11) e (12) constituem o chamado Problema de Valor de Contorno (P.V.C.) expresso em forma forte, pois as três primeiras relações devem valer ponto a ponto no volume. Ainda em termos matemáticos, pode-se mostrar a existência e unicidade de solução para o P.V.C.

O P.V.C. resulta, assim, formado por um conjunto de quinze incógnitas e quinze equações diferenciais a derivadas parciais. Tal conjunto de relações pode ser preliminarmente combinado de modo a reduzir o seu número e eliminar algumas das incógnitas. Das possibilidades de combinação decorrem diferentes formulações. A formulação em deslocamentos é obtida quando se eliminam as incógnitas de tensão e deformação, restando uma única equação em deslocamentos. A equação da formulação em tensões é obtida quando se eliminam as incógnitas de deslocamentos e deformações. Finalmente, a formulação mista se caracteriza por um sistema, nas incógnitas de deslocamento e tensão, obtido quando se eliminam as variáveis de deformação.

Para qualquer que seja a formulação adotada, a solução analítica pode ser obtida somente para um número reduzido de problemas, para os quais os dados de geometria, material, carregamento e condições de contorno apresentam grande regularidade. Os métodos de solução aproximada constituem alternativa de solução para os casos mais gerais, ou com menor grau de regularidade.

Naquilo que concerne às aplicações de interesse para as estruturas aeronáuticas, destacam-se em seguida dois problemas típicos: um em âmbito unidimensional e outro bidimensional. No primeiro caso, a formulação adotada é em deslocamentos. No segundo, adota-se a formulação em tensão.

2. Aplicação à análise de barras sob força normal

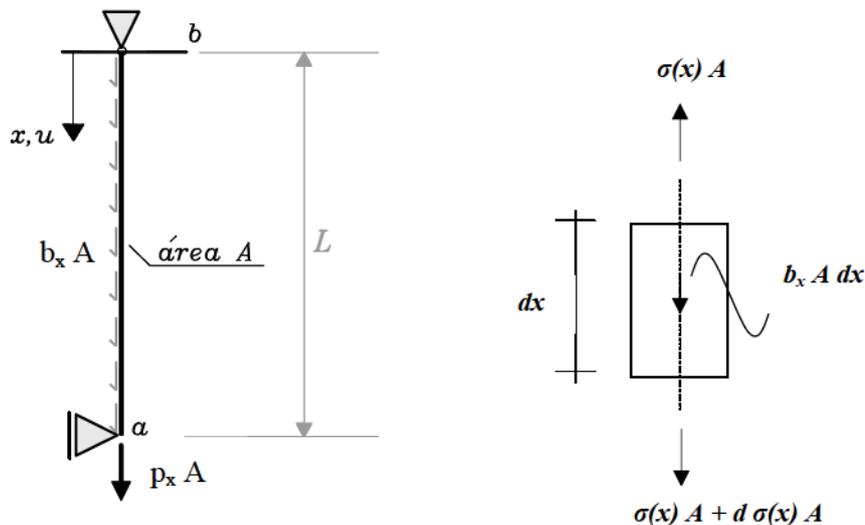
Os stringers são elementos estruturais de barra com papel de reforço nas asas e fuselagens e que são solicitados predominantemente por tensões normais. Em função de sua geometria característica (dimensão do comprimento muito maior que as dimensões da seção transversal) e dentro dos limites do comportamento elástico-linear do material, é possível assumir como válida a seguinte hipótese cinemática relativa ao processo de deformação:

‘Seções planas inicialmente ortogonais ao eixo da barra permanecem planas, indeformáveis e ortogonais ao eixo deformado’.

A adoção dessa hipótese, que pode ser justificada por observação experimental, permite simplificar a aplicação da teoria da elasticidade pela grande redução do número de incógnitas que proporciona. De imediato, alinhando-se o eixo de referência x com a direção do eixo da barra, a indeformabilidade da seção transversal permite reduzir o problema a uma única dimensão, pois todas as variáveis passam a ser funções somente de x . Por exemplo, são iguais os deslocamentos de todos os pontos pertencentes a uma mesma seção e como a seção é indeformável no seu plano não existem deformações lineares transversais ao eixo da barra. Além da indeformabilidade, como as seções permanecem ortogonais ao eixo no processo de deformação, distorções angulares associadas às direções dos eixos de referência não são induzidas. Assim sendo, o conjunto de incógnitas se reduz ao deslocamento axial u , à componente de tensão normal σ_x e à componente de deformação linear ε_x .

O equacionamento do problema da barra sob força normal se reduz a três relações: uma de equilíbrio, outra de compatibilidade e a relação constitutiva.

Como exemplo desse caso, considere-se a barra prismática mostrada na Figura 5, fixa numa extremidade e livre na outra, submetida à força de peso próprio e a uma força distribuída por unidade de área aplicada na extremidade livre. Por simplificação não se representa a largura da barra no plano do desenho. Ainda neste caso, b_x representa o peso específico do material da barra.



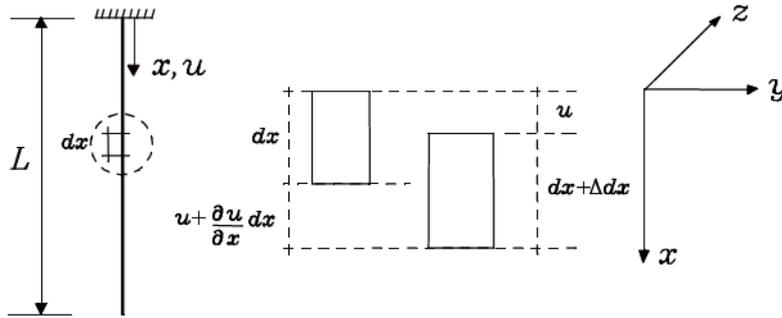


Figura 5 – Barra sob força normal

A relação de equilíbrio pode ser obtida diretamente do diagrama de corpo livre de um elemento do interior da barra, mostrado na Figura 5, sendo escrita na forma:

$$\frac{d \sigma_x}{d x} = -b_x \quad (16)$$

A relação de compatibilidade pode ser escrita a partir do esquema ilustrado também naquela figura, como:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{d x} = \frac{d u}{d x} = u' \quad (17)$$

Finalmente a relação constitutiva se reduz a:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (18)$$

Combinando-se as três relações de modo a eliminar a tensão normal e a deformação linear, obtém-se:

$$u'' = -\frac{b_x}{E} \quad (19)$$

Integrando-se em forma indefinida a relação anterior resulta:

$$u(x) = -\frac{b_x x^2}{2 E} + C_1 x + C_2 \quad (20)$$

As constantes de integração podem ser determinadas por aplicação das condições de contorno do problema, dadas por:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ \sigma_x(L) &= p_x \end{aligned} \tag{21a,b}$$

Aplicadas essas condições, a solução geral do problema resulta:

$$u(x) = \frac{b_x L^2}{2E} \left[2 \left(\frac{x}{L} \right) - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] + \frac{p_x}{E} x \tag{22}$$

A (17) e a (18) combinadas proporcionam, levando-se em conta a (22), a distribuição de tensões normais ao longo da barra:

$$\sigma(x) = b_x L \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right) \right] + p_x \tag{23}$$

Claramente, desconsiderando-se o peso próprio, a solução geral se particulariza para um regime aonde o deslocamento apresenta uma distribuição linear e tanto a tensão normal quanto a deformação linear são constantes ao longo da barra:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{p_x}{E} x \\ \varepsilon(x) &= \frac{p_x}{E} \\ \sigma(x) &= p_x \end{aligned} \tag{24}$$

Introduzindo a definição de força normal atuante numa seção transversal genérica como:

$$N(x) = \int_A \sigma_x dA \tag{25}$$

e observando que em cada seção a tensão normal é constante em todos os seus pontos (só depende de x), segue, ainda genericamente, que:

$$N(x) = \sigma_x(x) A \tag{26}$$

Portanto, com a ajuda da (23), conclui-se neste exemplo que:

$$N(x) = b_x AL \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right) \right] + p_x A \quad (27)$$

A força normal resulta constante ao longo da barra se o peso próprio for desconsiderado. Ainda nesta condição particular, a medida de deformação linear, definida pela primeira igualdade na (17), pode ser determinada simplesmente por:

$$\varepsilon_x = \frac{u(L)}{L} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{p_x}{E} \quad (28)$$

3. Aplicação à análise de tubos

As estruturas de fuselagem de grandes aeronaves, abstraídas as aberturas para janelas, portas e outras, podem ser consideradas como tubos reforçados que devem, entre outras funções, suportar pressões internas. Em termos de análise simplificada as áreas dos reforços (cavernas e/ou stringers) podem ser distribuídas ao longo do perímetro e do comprimento, gerando um tubo equivalente de espessura mais grossa do que aquela da casca de revestimento e que pode ser analisado com o auxílio das equações da elasticidade.

Na Figura 6 mostra-se um tubo reforçado e uma vista de seu interior, construído com o objetivo de avaliar experimentalmente, em laboratório, os efeitos de pressão interna.

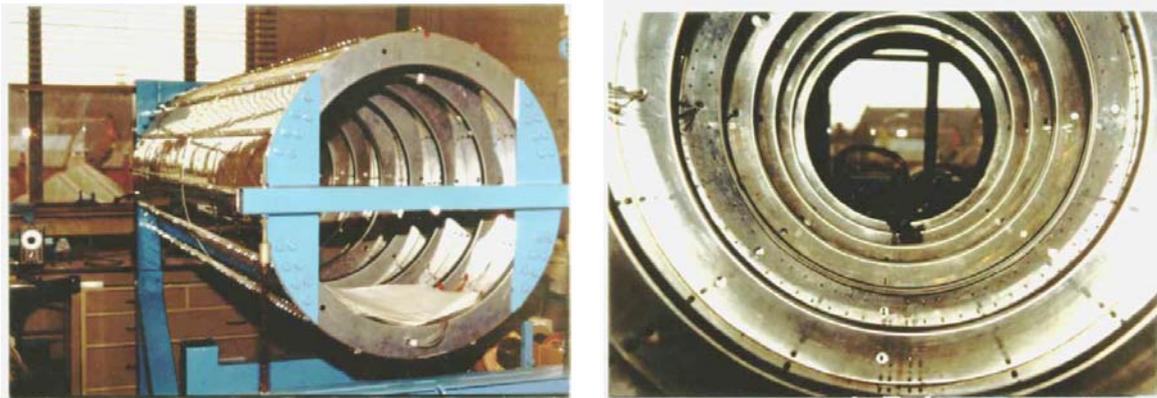


Figura 6 –Tubo reforçado e visão interna⁴

Os tubos aqui estudados possuem seção circular e eixo reto, sendo o seu comprimento muito maior do que as dimensões da seção transversal. Não há restrição quanto à espessura, que pode ser grossa ou fina. As solicitações

⁴ Fotografias disponibilizadas pelo Prof. Michael G. Maunsell, SMM/EESC.

consideradas incluem pressões externas e/ou internas, como as ilustradas no tubo da Figura 7.

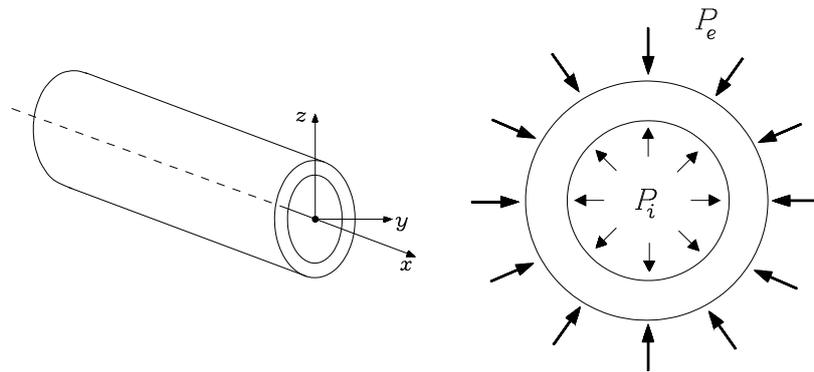


Figura 7 – Tubo submetido a pressões interna e externa

Em termos gerais, considera-se que não haja restrição à deformação do tubo na direção axial, de modo que inexistem tensões normais naquela direção. Independente disso, dado que seu comprimento é sempre muito grande em relação às dimensões da seção transversal, considera-se nulo o alongamento na direção axial, ou, o que é equivalente, tubo indeformável nessa direção. Nessas condições, toda a análise pode se desenvolver no plano de uma seção transversal genérica, sendo os resultados válidos para todo o tubo.

Conhecidas as pressões atuantes e a geometria do tubo, o problema a ser resolvido consiste em determinar as distribuições de tensões, deformações e as componentes de deslocamentos em qualquer um de seus pontos.

As relações matemáticas que envolvem as variáveis de interesse resultam da aplicação da *Teoria da Elasticidade* e traduzem condições locais de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva.

Como restrições adicionais, na modelagem que segue adotam-se a hipótese de comportamento elástico linear do material e admite-se que o tubo solicitado atinja o equilíbrio num regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

Nota-se que dada a geometria do tubo e o tipo de carregamento considerado, o problema acaba por apresentar simetria axial, o que viabiliza a utilização de coordenadas cilíndricas (x, r, θ) , com vantagens sobre as coordenadas cartesianas (x, y, z) .

Para o estabelecimento das condições locais, considera-se um elemento infinitesimal em torno de um ponto arbitrário na seção transversal do tubo.

Assim sendo, conforme ilustrado na Figura 8a considere-se um ponto arbitrário na espessura do tubo posicionado sobre uma circunferência de raio r , com centro no eixo do tubo. O campo de deslocamentos do ponto no plano da seção fica caracterizado, genericamente, por uma componente radial (v), segundo a direção do raio, e uma componente tangencial, de direção perpendicular ao raio no ponto. Obviamente, a axissimetria do problema leva a concluir que a componente tangencial do deslocamento é nula e que a componente radial é uma função da posição ao longo da espessura, isto é: $v = v(r)$.

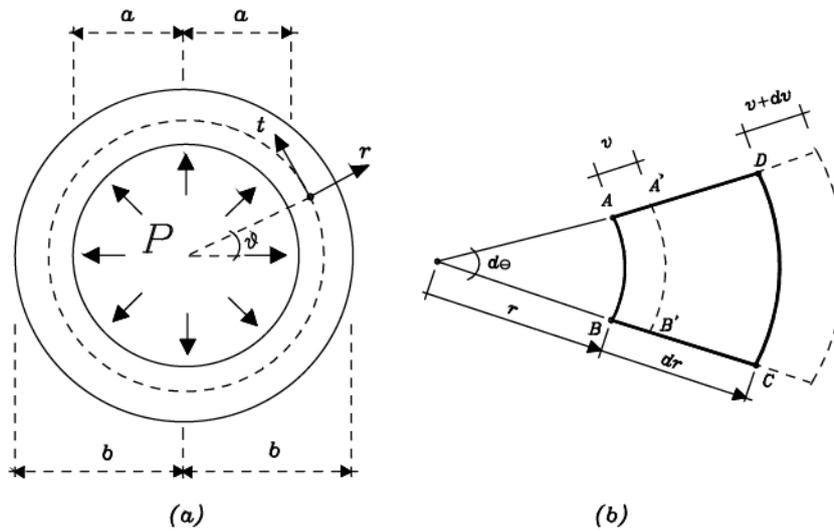


Figura 8 – Coordenadas cilíndricas e elemento de tubo

Seja, então, um elemento diferencial em torno do ponto considerado, conforme ilustra a figura 8b.

As expressões das medidas de deformação linear nas direções tangencial e radial são dadas respectivamente por:

$$\varepsilon_t = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(r+v)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{v}{r} \quad (29)$$

$$\varepsilon_r = \frac{B'C' - BC}{BC} = \frac{dv}{dr} = v' \quad (30)$$

Devido à axissimetria do problema, a deformação do elemento se dá de modo que sua forma se preserva ou, em outras palavras, sem distorção angular associada às direções radial e tangencial. Tais direções são, portanto, *principais de deformação*.

A condição de equilíbrio envolve o conjunto de componentes de tensão ilustrado na Figura 9. Nota-se que as componentes indicadas podem ser entendidas mediante uma correspondência direta com as deformações radial e tangencial descritas.

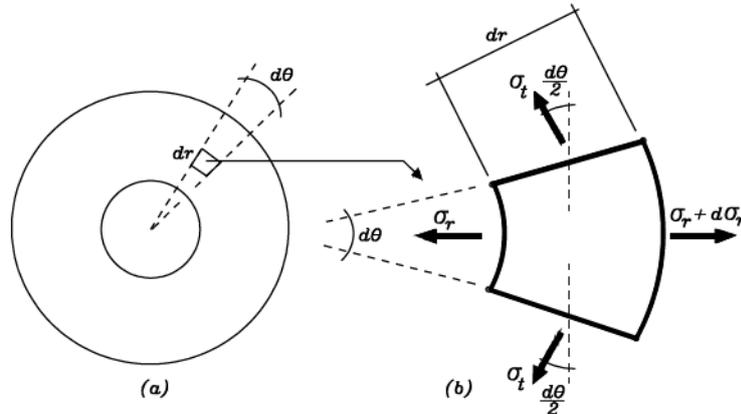


Figura 9 – Componentes de tensão no elemento infinitesimal

Em particular a ausência de tensões de cisalhamento justifica-se por não haver tendência de escorregamento relativo entre as faces de elementos vizinhos; portanto, as tensões normais indicadas são *principais*.

Em termos gerais a condição de equilíbrio implica em que a resultante das tensões no elemento deve ser nula. Tomando-se partido do sistema de coordenadas adotado, para explicitar a condição de equilíbrio, consideram-se as forças resultantes segundo as direções (independentes) radial e tangencial, impondo-se a nulidade de cada uma delas.

A imposição do equilíbrio de forças na direção tangencial conduz a uma identidade. Já, do equilíbrio de forças na direção radial, obtém-se:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)dz - \sigma_r r dz - 2\sigma_t dr dz \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \quad (31)$$

onde dz é uma dimensão (pode ser considerada unitária) na direção ortogonal ao plano da seção.

Como $\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \frac{d\theta}{2}$, e desconsiderando-se os infinitésimos de ordem superior, resulta que:

$$\varphi - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (32)$$

Por outro lado, a lei de Hooke generalizada estabelece relações entre as componentes tangencial e radial dos campos de deformação e de tensão, dadas por:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu_t \varphi) \quad (33 \text{ a,b})$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu_r \varphi)$$

ou ainda, de forma inversa :

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_r + \nu_t \varepsilon_t) \quad (34 \text{ a,b})$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_t + \nu_r \varepsilon_r)$$

Tendo-se em vista as relações de compatibilidade, equilíbrio e constitutiva, nota-se que tais relações envolvem cinco incógnitas a determinar: ν , ε_r , ε_t , σ_r e σ_t .

Na formulação aqui desenvolvida, a abordagem é em tensões, no sentido de que a combinação das relações de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva é tal a eliminar as incógnitas que compõem os campos de deslocamento e de deformação, resultando uma equação diferencial em tensões. Nesse sentido, numa primeira etapa combinam-se as relações de compatibilidade. Da (29) segue que:

$$\nu = r \varepsilon_t \quad (35)$$

e, com a (30), resulta :

$$\frac{d\nu}{dr} = \varepsilon_t + r \frac{d\varepsilon_t}{dr} = \varepsilon_r \quad (36)$$

Podem-se introduzir na expressão anterior as relações constitutivas dadas pelas (33):

$$\frac{1}{E}(\rho - \omega_r) + r \frac{1}{E} \left(\frac{d\sigma_t}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} \right) - \frac{1}{E}(\rho - \omega_t) = 0$$

ou

$$r \left(\frac{d\sigma_t}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} \right) = (\rho - \varphi)(1 + \nu) \quad (37 \text{ a,b})$$

As relações (37b) e (32) constituem, portanto, um sistema nas incógnitas σ_r e σ_t .

Pela substituição de $\sigma_t - \sigma_r$, retirado da (37b), na (32), obtém-se a seguinte condição:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_t}{dr} = 0 \quad \therefore \quad \varphi + \sigma_t = C \quad (38)$$

onde C é uma constante a determinar.

Da relação anterior segue que: $\sigma_t = C - \sigma_r$, a qual substituída na equação de equilíbrio (32) conduz à seguinte equação diferencial na tensão normal radial:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\sigma_r}{r} = \frac{C}{r} \quad (39)$$

Essa equação diferencial possui uma solução particular dada por:

$$[\sigma_r]_p = \frac{C}{2} \quad (40)$$

A forma homogênea da mesma equação diferencial apresenta uma solução obtida a partir da seguinte seqüência:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\sigma_r}{r} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\sigma_r}{\sigma_r} = -\frac{2dr}{r} \quad \rightarrow \quad \ln \sigma_r = -2 \ln r + C_1$$

$$\therefore \ln(\sigma_r r^2) = C_1 \quad \rightarrow \quad [\sigma_r]_h = \frac{C^*}{r^2}$$

Finalmente, a solução geral apresenta-se na forma:

$$\sigma_r = \frac{C}{2} + \frac{C^*}{r^2}$$

$$\sigma_t = \frac{C}{2} - \frac{C^*}{r^2} \quad (41 \text{ a,b})$$

As constantes de integração devem ser obtidas mediante imposição de condições de contorno no plano da seção transversal. No caso mais geral de tubo com pressões interna e externa, e com geometria definida por um raio interno (a) e um raio externo (b), as condições de contorno são sobre as tensões e escritas nas formas:

$$r = a \rightarrow \sigma_r = -p_i$$

$$r = b \rightarrow \sigma_r = -p_e \quad (42)$$

As constantes de integração, obtidas pela imposição das condições de contorno, permitem escrever, pelas (42), as expressões para o cálculo das tensões:

$$\sigma_r = -\frac{(b/r)^2 - 1}{(b/a)^2 - 1} p_i - \frac{(b/a)^2 - (b/r)^2}{(b/a)^2 - 1} p_e$$

$$\sigma_t = \frac{(b/r)^2 + 1}{(b/a)^2 - 1} p_i - \frac{(b/a)^2 + (b/r)^2}{(b/a)^2 - 1} p_e \quad (43 \text{ a,b})$$

Determinadas as tensões, uma outra relação de interesse é aquela que permite encontrar o valor do deslocamento radial. Tal relação pode ser obtida combinando-se as (40) e (33b):

$$v = \frac{r}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_t) \quad (44)$$

Exemplo 1. Representar os diagramas das tensões tangencial e radial ao longo da espessura do tubo, provocados por pressão interna p_i .

Das expressões (43) segue que:

$$\frac{\sigma_r}{p_i} = -\frac{\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad (< 0) \quad ; \quad \frac{\sigma_t}{p_i} = \frac{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad (> 0)$$

Considerando-se posições sobre os raios interno e externo, as expressões anteriores assumem os valores:

$$\frac{\sigma_r}{P_i} \Big|_{r=a} = -1 \quad ; \quad \frac{\sigma_r}{P_i} \Big|_{r=b} = 0$$

$$\frac{\sigma_t}{P_i} \Big|_{r=a} = \frac{\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad ; \quad \frac{\sigma_t}{P_i} \Big|_{r=b} = \frac{2\left(\frac{a^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}$$

As correspondentes distribuições ao longo da espessura estão indicadas na Figura 10.

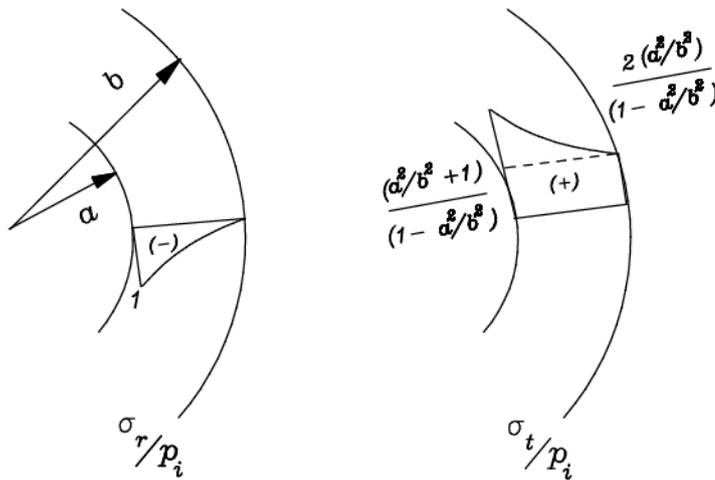


Figura 10 – Distribuições de tensões ao longo da espessura

Exemplo 2. Representar os diagramas de distribuição das tensões tangencial e radial ao longo da espessura do tubo, provocados por pressão externa p_e .

Novamente, das expressões (43) segue que:

$$\frac{\sigma_r}{P_e} = -\frac{\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad (< 0) \quad ; \quad \frac{\sigma_t}{P_e} = -\frac{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad (< 0)$$

Considerando-se as posições correspondentes aos raios interno e externo, as expressões anteriores assumem os valores:

$$\left. \frac{\sigma_r}{p_e} \right|_{r=a} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\sigma_r}{p_e} \right|_{r=b} = -1$$

$$\left. \frac{\sigma_t}{p_e} \right|_{r=b} = -\frac{\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad ; \quad \left. \frac{\sigma_t}{p_e} \right|_{r=a} = -\frac{2}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}$$

As correspondentes distribuições ao longo da espessura estão indicadas na Figura 11.

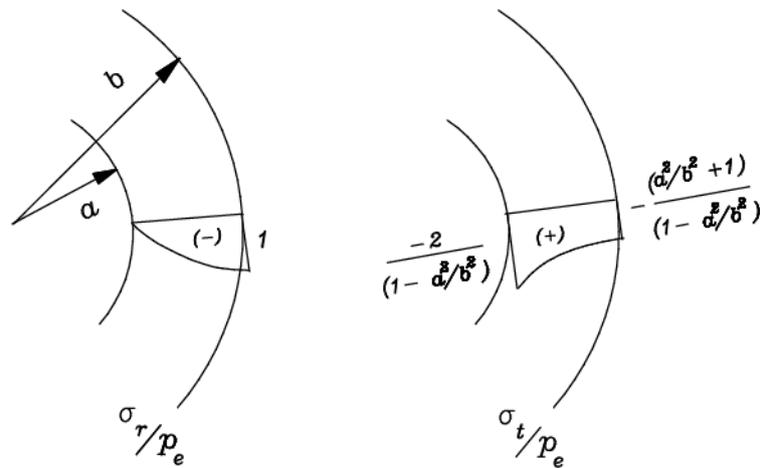


Figura 11 – Distribuições de tensões ao longo da espessura

Exemplo 3. A partir da solução geral para os tubos sob pressão interna, determinar expressões particularizadas das tensões e do deslocamento radial para tubos de parede fina.

No caso dos tubos de parede fina, a medida da espessura é muito menor do que as medidas dos raios. Nesses casos é usual se fazer referência ao raio médio r_m e à espessura t como parâmetros geométricos de interesse. Entre os raios interno e externo e os novos elementos geométricos valem as relações:

$$b = r_m + \frac{t}{2} \quad ; \quad a = r_m - \frac{t}{2} \quad ; \quad b + a = 2r_m \quad ; \quad b - a = t \quad ;$$

Daí segue as outras relações de interesse para a resolução do exercício:

$$b^2 - a^2 \approx 2r_m^2 \approx 2r_m^2/2 \approx 2r_m^2$$

$$b^2 - a^2 = 2r_m t$$

$$\frac{b^2}{a^2} - 1 \approx \frac{2r_m t}{a^2} \approx \frac{2t}{r_m}$$

Nas expressões (43) a razão b/r pode ser aproximada pela unidade, de modo que sua particularização para o caso de pressão interna e espessura delgada fornece:

$$\sigma_r \approx 0 \quad ; \quad \sigma_\varphi \approx \frac{p_i r_m}{t}$$

Portanto, a tensão tangencial resulta constante na espessura.

Por outro lado, para o deslocamento radial, podem-se substituir as condições anteriores diretamente na relação (44), obtendo-se:

$$v(r_m) = \frac{p_i r_m^2}{E t}$$

É interessante observar que a particularização obtida é idêntica à solução do problema do tubo de parede fina sob pressão interna, no qual se supõe 'a priori', que devido à pequena espessura, as tensões radiais são nulas e a tensão tangencial é constante na espessura.

De fato, considere-se um tubo de parede fina, submetido à pressão interna cuja seção transversal está ilustrada na Figura 12a.

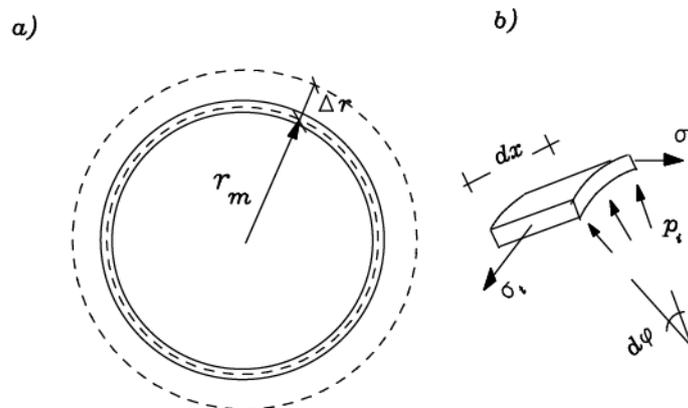


Figura 12 – Tubo de parede fina

Do equilíbrio de um elemento de tubo (v.Fig.12b), obtém-se a expressão para o cálculo da tensão tangencial:

$$p_i r_m d\phi = \sigma_t dx t d\phi \quad \therefore \quad \sigma_t = \frac{p_i r_m}{t}$$

Analisando-se a compatibilidade entre deformações e deslocamentos resulta:

$$\varepsilon_r = \varepsilon = \frac{\Delta r_m}{r_m} \rightarrow \Delta r_m = r_m \varepsilon = \frac{\sigma_t}{E} r_m \quad \therefore \quad v = \Delta r_m = \frac{p_i r_m^2}{E t}$$

Nota-se que no desenvolvimento anterior, como a única tensão não nula é a tangencial, a lei de Hooke aplicou-se diretamente na forma: $\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E}$.

Finalmente chama-se a atenção para a coincidência entre as respostas obtidas da particularização das expressões gerais e do estudo direto do tubo de parede fina.

CAPÍTULO 3 TEOREMA DE CASTIGLIANO E O P.T.V.

Neste capítulo, o tema do cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas planas de barras é introduzido mediante uma abordagem fundamentada no método da energia, mais especificamente pela aplicação do teorema de Castigliano.

O estudo apresentado neste e no próximo capítulo será mais adiante generalizado pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, que viabiliza o cálculo de deslocamentos em qualquer ponto da estrutura mediante aplicação de métodos numéricos de solução aproximada.

1. Energia de deformação em barras sob força normal

Já foi visto, no estudo da elasticidade linear, que as relações constitutivas representam matematicamente a dependência local que existe entre tensões e deformações de um sólido. Tal relação pode ser expressa e interpretada em forma dual. De fato, por um lado as deformações decorrem de um campo de tensões aplicado, mas possuem intensidades proporcionais à flexibilidade do material. Por outro lado, as tensões decorrem de um campo de deformações impostas, mas possuem intensidades proporcionais à rigidez do material.

Portanto, *rigidez* e *flexibilidade* são conceitos duais, ligados diretamente à maior ou menor capacidade de oposição que o material apresente a uma deformação ou a uma tensão imposta, respectivamente. Segundo essa interpretação, no caso unidimensional, o módulo de elasticidade representa um coeficiente de rigidez, enquanto que o seu inverso representa um coeficiente de flexibilidade.

Admitindo-se, então, que as intensidades de tensão e de deformação num ponto estejam relacionadas em função da resposta do material, considerem-se estados de tensão definidos nos pontos de um sólido em decorrência de certa história de deformação imposta. Considerando-se todo o volume do sólido, pode-se então, definir uma quantidade de energia interna movimentada no processo de deformação, medida pelo trabalho das tensões nas deformações. Essa quantidade é denominada *energia de deformação*.

Para ilustrar o conceito, seja uma barra submetida a um processo de deformação uniaxial. A variação de energia por unidade de volume para um incremento de deformação imposto é definida por:

$$d\tilde{u} = \sigma_x d\varepsilon_x \quad (1)$$

Ao final do processo de deformação a energia envolvida em todo o volume da barra é:

$$U = \int_V \left(\int_0^{\varepsilon} \sigma_x d\varepsilon_x \right) dV \quad (2)$$

Em termos gerais, se o sólido é elástico, toda a energia movimentada no processo de deformação se acumula no seu interior e poderá ser usada na recuperação da forma inicial quando retirada a causa externa que provocou a deformação. Nessa condição diz-se que o processo é conservativo e a energia de deformação é elástica.

Para a barra sob força normal, cuja energia de deformação pode ser descrita pela (2), é conveniente exprimir aquela relação em termos da força normal (também denominada *tensão generalizada*), combinando-se a lei de Hooke e a definição $N = \sigma_x A$. Assim sendo, a relação (2) particularizada para este caso fornece:

$$\begin{aligned} U &= \int_V \left(\int_0^{\varepsilon} \sigma_x d\varepsilon_x \right) dV = \int_V \left(\int_0^{\varepsilon} E \varepsilon_x d\varepsilon_x \right) dV \\ &= \int_V \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 \right) dV = \int_0^L \left(\int_A \frac{1}{2} \frac{N^2}{E A^2} dA \right) dx \\ U &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{E A} dx \end{aligned} \quad (3)$$

2. Teorema de Castigliano

O teorema será somente enunciado, sem demonstração, a qual pode ser encontrada, por exemplo, em: Hibbeler, R.C., *Mechanics of Materials*, 1997.

‘*Dado um sólido elástico e um sistema de forças conservativas^(*) sobre ele aplicadas, na condição de equilíbrio o deslocamento do ponto de aplicação de uma força na sua direção é determinado pela derivada parcial da energia de deformação em relação a essa força*’:

^(*) Uma força é dita conservativa quando sua intensidade não depende da deformação do corpo.

$$u_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} \quad (4)$$

onde k refere-se à posição, ou ponto, aonde se aplica a força P .

A aplicação do teorema depende, portanto, do conhecimento da energia de deformação U . Para o caso da barra sob força normal, valendo a (3), a relação anterior escreve-se na forma:

$$u_k = \int_0^L \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_k} dx \quad (5)$$

É possível dar uma interpretação conveniente para o termo correspondente à derivada parcial na relação anterior. Nesse sentido, admitindo-se que numa barra possam estar sendo aplicadas n forças concentradas em n posições distintas, então, sendo linear a resposta do sistema, vale a sobreposição de efeitos e a força normal numa seção arbitrária no interior da barra é determinada pelas contribuições dos efeitos nessa seção de cada uma das forças, isto é:

$$N = \sum_{j=1}^n P_j \bar{N}_j = P_1 \bar{N}_1 + \dots + P_k \bar{N}_k + \dots + P_n \bar{N}_n \quad (6)$$

onde \bar{N}_j é a força normal na mesma seção por efeito de uma força de valor unitário aplicada no ponto j . Nessas condições, a derivada parcial que aparece na relação (4) passa a ter o significado de força normal numa seção da barra devido à força concentrada unitária aplicada no ponto k :

$$\frac{\partial N}{\partial P_k} = \bar{N}_k \quad (7)$$

Portanto,

$$u_k = \int_0^L \frac{N}{EA} \bar{N}_k dx \quad (8)$$

Para ilustrar a aplicação da relação anterior, retoma-se o problema da barra sob força normal resolvido aplicando-se a formulação forte da elasticidade linear. Aplicando aquela formulação foi demonstrado que a função que

descreve o campo de deslocamentos (já se impondo as condições de contorno) tem a seguinte redação:

$$u(x) = \frac{b_x L^2}{2E} \left[2 \left(\frac{x}{L} \right) - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] + \frac{p_x}{E} x \quad (9)$$

Em particular, o deslocamento na extremidade livre resulta:

$$u(L) = \frac{b_x L^2}{2E} + \frac{p_x}{E} L \quad (10)$$

O mesmo resultado pode ser obtido aplicando-se o teorema de Castigliano representado, no caso, pela relação (7). Nesse sentido, é preciso explicitar as funções que representam as forças normais que aparecem naquela relação. A força normal N resulta do carregamento real aplicado e a força \bar{N} resulta de uma força ('virtual') de valor unitário aplicada no ponto aonde se deseja determinar o deslocamento. Como o que se deseja é o deslocamento na extremidade livre, então uma força unitária é aplicada naquela posição com sentido tal a provocar força normal positiva (de tração). Segue que a relação para \bar{N} é simplesmente:

$$\bar{N} = 1 \quad (11)$$

pois a força normal provocada é constante na barra. Já o efeito do carregamento aplicado (peso próprio mais força distribuída na extremidade livre da barra) proporciona a seguinte distribuição de força normal:

$$N(x) = p A + b_x (L - x) \quad (12)$$

Assim sendo, a (10) assume a forma:

$$\begin{aligned} u(L) &= \int_0^L \frac{1}{E A} [p A + b_x A (L - x)] dx \\ &= \frac{L^2}{2E} \left(\frac{2p}{L} + b_x \right) \end{aligned} \quad (13)$$

O resultado obtido coincide com aquele da formulação forte da elasticidade.

Um aspecto importante a notar é que o teorema de Castigliano pode ter sua aplicação estendida ao cálculo de deslocamentos em pontos aonde não haja força externa aplicada. Em princípio, para manter consistência com o enunciado do teorema, pode-se introduzir uma força no ponto em que se deseja determinar o deslocamento, aplicar o teorema e ao final impor valor nulo para a força introduzida. O exemplo seguinte ilustra este aspecto comentado.

Exemplo 1. Determinar o deslocamento na extremidade livre da barra submetida a uma força concentrada aplicada na sua seção central, conforme ilustra a Figura 1.

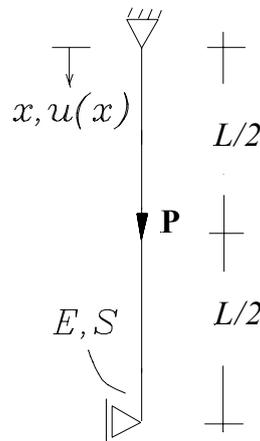


Figura 1 – Barra sob força concentrada

O procedimento de resolução consiste em introduzir uma força P^* na extremidade livre e a partir daí construir os diagramas de força normal das forças aplicadas e da força unitária posicionada no ponto onde se deseja determinar o deslocamento. A Figura 2 ilustra os diagramas resultantes.

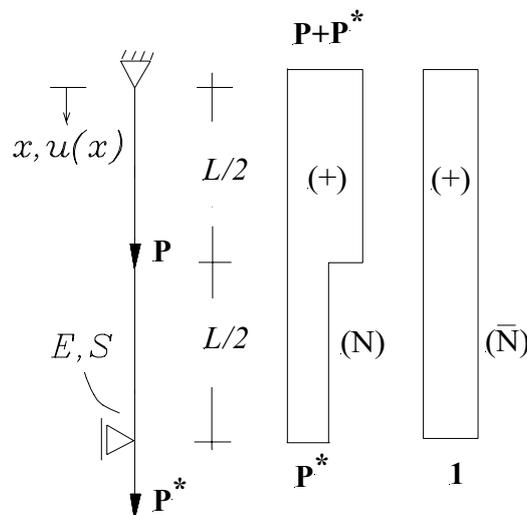


Figura 2 – Diagramas de força normal

A aplicação da relação (7) deve levar em conta que o diagrama de (N) apresenta uma descontinuidade em $L/2$ e, portanto a integral passa a ser dividida numa soma de integrais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(L) &= \int_0^{L/2} \frac{N}{EA} \bar{N}_k dx + \int_{L/2}^L \frac{N}{EA} \bar{N}_k dx \\ &= \int_0^{L/2} \frac{(P + P^*)}{EA} 1 dx + \int_{L/2}^L \frac{P^*}{EA} 1 dx \end{aligned} \quad (14)$$

Equacionado o cálculo do deslocamento incógnito, pode-se impor $P^* = 0$, de modo a recuperar o problema original. Assim procedendo, o deslocamento procurado resulta:

$$u(L) = \frac{PL}{2EA} \quad (15)$$

Nota-se, entretanto, que ao mesmo resultado pode-se chegar sem que seja necessário introduzir a força P^* . De fato, mantendo-se somente a força P , os diagramas de (N) e (\bar{N}) passam a ser os indicados na Figura 3.

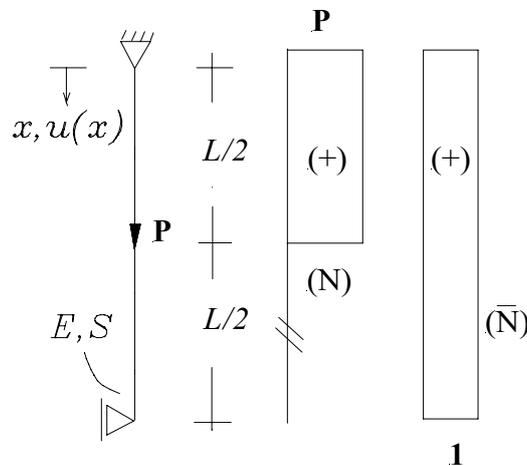


Figura 3 – Diagramas de força normal

Para esta situação o cálculo do deslocamento resulta da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} u(L) &= \int_0^{L/2} \frac{N}{EA} \bar{N}_k dx + \int_{L/2}^L \frac{N}{EA} \bar{N}_k dx \\ &= \int_0^{L/2} \frac{(P)}{EA} 1 dx + \int_{L/2}^L \frac{0}{EA} 1 dx \end{aligned} \quad (16)$$

a qual coincide com aquela empregada no procedimento anterior impondo-se $P^* = 0$!

Pode-se, portanto, perfeitamente estender a aplicação do teorema para o cálculo do deslocamento de um ponto qualquer da estrutura, no qual não necessariamente haja uma força concentrada aplicada.

O exemplo seguinte ilustra a aplicação do teorema, no sentido generalizado acima descrito, ao cálculo do deslocamento de um nó de uma treliça plana.

Exemplo 2. Determinar o deslocamento total do ponto E da treliça plana indicada na Figura 4. Dado adicional: $EA = 7000,0 \text{ kN}$ para todas as barras.

Na Figura 4 indicam-se as forças normais nas barras por efeito do carregamento aplicado.

O deslocamento incógnito pode ser determinado a partir de suas componentes horizontal e vertical. Assim sendo, para a aplicação do teorema constroem-se dois sistemas auxiliares, com forças unitárias no nó E nas direções horizontal e vertical. A Figura 5 mostra as forças normais nas barras em cada caso auxiliar.

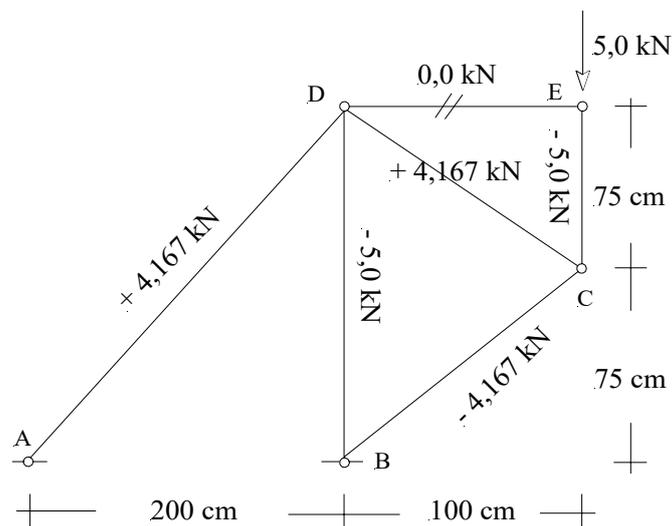


Figura 4 – Treliça plana e forças normais nas barras

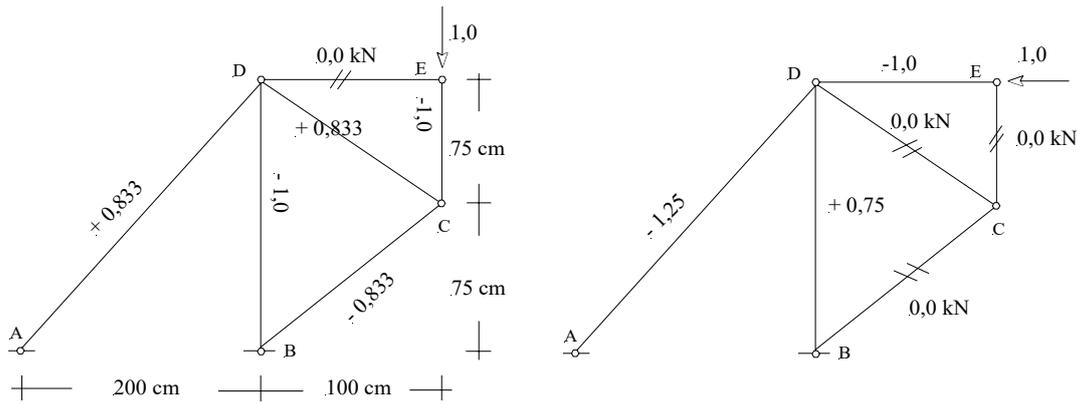


Figura 5 – Forças normais nas barras nos problemas auxiliares

Como as forças normais nas barras são constantes, bem como os produtos EA , a relação (8) assume uma redação particular no caso das treliças. De fato, como a integral que lá aparece implica em considerar as contribuições de cada uma das barras, obtém-se a seguinte relação para o cálculo de deslocamentos em nós da treliça:

$$u_k = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{(EA)_i} \bar{N}_{ik} L_i \quad (17)$$

onde n representa o número de barras da treliça e k é o nó aonde se deseja determinar o deslocamento.

A componente vertical do deslocamento resulta da aplicação da (17), considerando N_i as forças normais em correspondência à força de 5,0 kN e \bar{N}_i as forças normais para uma força vertical unitária aplicada no nó E . Nesse caso, resulta:

$$u_E^v = \frac{1}{EA} (4,167 \cdot 0,833 \cdot 250 + 5 \cdot 1 \cdot 150 + 4,167 \cdot 0,833 \cdot 125 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 75)$$

$$\approx 0,41 \text{ cm.}$$

A componente horizontal do deslocamento resulta da aplicação da (17), considerando N_i as forças normais em correspondência à força de 5,0 kN e \bar{N}_i as forças normais para uma força horizontal unitária aplicada no nó E . Nesse caso, resulta:

$$u_E^h = \frac{1}{EA}(-1,25.4,167.250 - 5.0,75.150)$$

$$\approx -0,266 \text{ cm.}$$

O sinal negativo indica que o sentido do deslocamento horizontal é contrário àquele adotado para a força horizontal unitária. Finalmente, o deslocamento total determina-se por cálculo da resultante, na forma:

$$u_E^T = \sqrt{0,41^2 + (-0,266)^2} \approx 0,49 \text{ cm.}$$

Por outro lado, o teorema de Castigliano tem uma aplicação mais ampla envolvendo outros tipos de sollicitação, como flexão, torção e força cortante para se restringir ainda às barras. A cada um dos tipos de sollicitação corresponde uma forma para o cálculo da energia de deformação.

Considere-se, então, que a barra esteja submetida à flexão normal pura, descrita pelo modelo cinemático clássico: *seções transversais inicialmente planas permanecem indeformáveis nos seus planos e ortogonais ao eixo deslocado*. Então, apenas uma variável de tensão normal (σ_x) e uma de deformação linear (ε_x) alinhadas com o eixo são envolvidas no processo de deformação. Portanto, neste caso vale também a seguinte relação para o cálculo da energia de deformação:

$$U = \int_0^L \left(\int_A \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dA \right) dx \quad (18)$$

Entretanto, a forma mais conveniente de exprimir a relação anterior, tendo-se em vista a aplicação do teorema de Castigliano, é obtida introduzindo-se o momento de flexão. Como se sabe, considerando-se um referencial dextrorso com eixos z e y contidos no plano da seção sendo também eixos centrais principais de inércia^(*), a relação entre o momento na seção e a tensão normal é dada por:

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y \quad (19)$$

onde I representa o momento de inércia em relação ao eixo z de referência e ao qual está alinhado o vetor do momento. Por sua vez, y representa a coordenada do ponto arbitrário da seção, ou sua distância ao eixo z .

^(*) Consideração feita para que se possam incluir as seções de geometria qualquer.

Considerando-se a (19) e a lei de Hooke, a (18) assume a forma:

$$U = \int_0^L \left(\int_A \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI^2} y^2 dA \right) dx \quad (20)$$

Tendo-se em vista, ainda, que $I = \int_A y^2 dA$, a integral anterior resulta:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \quad (21)$$

Portanto, para a barra em flexão pura, o teorema de Castigliano escreve-se da seguinte forma:

$$v_k = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_k} dx \quad (22)$$

entendendo-se, agora, que v_k é o deslocamento transversal ao eixo do ponto aonde se aplica uma força P_k . Também para a derivada parcial que aparece na (22) pode-se dar uma interpretação análoga àquela empregada no caso da força normal, isto é, a de momento (\bar{M}) provocado por força unitária aplicada no ponto k . Assim sendo:

$$v_k = \int_0^L \frac{M \bar{M}}{EI} dx \quad (23)$$

Entretanto, como nas barras em flexão o deslocamento transversal e o giro da seção são os graus de liberdade em cada posição definida ao longo da barra, a (23) pode ser estendida para o cálculo do giro de uma seção arbitrária. Neste caso, \bar{M} passa a ser a distribuição de momentos provocada por um momento unitário aplicado na seção aonde se deseja calcular o giro.

Como exemplo de aplicação da relação (23), considere-se o problema clássico da determinação da flecha de uma viga em balanço submetida a força concentrada aplicada na sua extremidade livre. A Figura 6 ilustra o problema em questão.

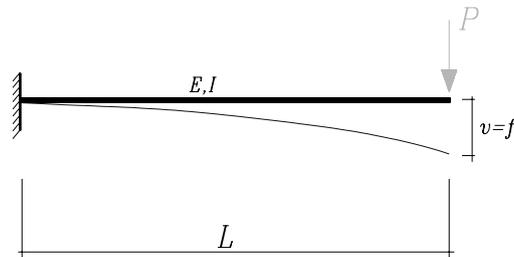


Figura 6 – Viga em balanço

Admitindo-se que o eixo de referência x tenha origem na extremidade livre e apontando para o engaste, a distribuição de momento de flexão por efeito da força P é dada pela seguinte relação:

$$M(x) = -Px \quad (24)$$

onde o sinal negativo decorre da convenção clássica de momentos de flexão em barras.

Para completar a aplicação do teorema de Castigliano, aplica-se uma força unitária no ponto aonde se deseja calcular o deslocamento. Neste caso, tal força é imposta na extremidade livre para baixo, sentido coincidente com o da flecha esperada. Para esta condição de carregamento, o momento ‘fictício’ obtido tem a seguinte expressão:

$$\bar{M}(x) = -x \quad (25)$$

Finalmente, com as relações anteriores a (23) fornece:

$$f = \int_0^L \frac{(-Px)(-x)}{EI} dx \quad (26)$$

Sendo a barra prismática, o produto EI é constante na integral. Nessa condição, obtém-se:

$$f = \frac{PL^3}{3EI} \quad (27)$$

O resultado coincide, naturalmente, com a solução clássica obtida, por exemplo, pela integração da equação diferencial da linha elástica.

Dentro dos limites do comportamento linear adotado, por hipótese, para as estruturas nestas notas, vale a sobreposição de efeitos. Assim sendo, se numa certa estrutura de barra houver tanto solicitação por força normal quanto por momento fletor, então ambas as solicitações poderão ser consideradas no cálculo do deslocamento num ponto qualquer. O teorema de Castigliano passa a ser escrito na seguinte forma:

$$d_k = \int_0^L \left(\frac{N \bar{N}}{EA} + \frac{M \bar{M}}{EI} \right) dx \quad (28)$$

sendo que d_k pode representar tanto uma componente de deslocamento axial quanto transversal ao eixo, ou mesmo giro da seção, conforme o caso.

Exemplo 3. Determinar uma expressão para o cálculo do deslocamento horizontal do ponto C da estrutura em balanço indicada na Figura 7, considerando-se as deformações por momento fletor e força normal.

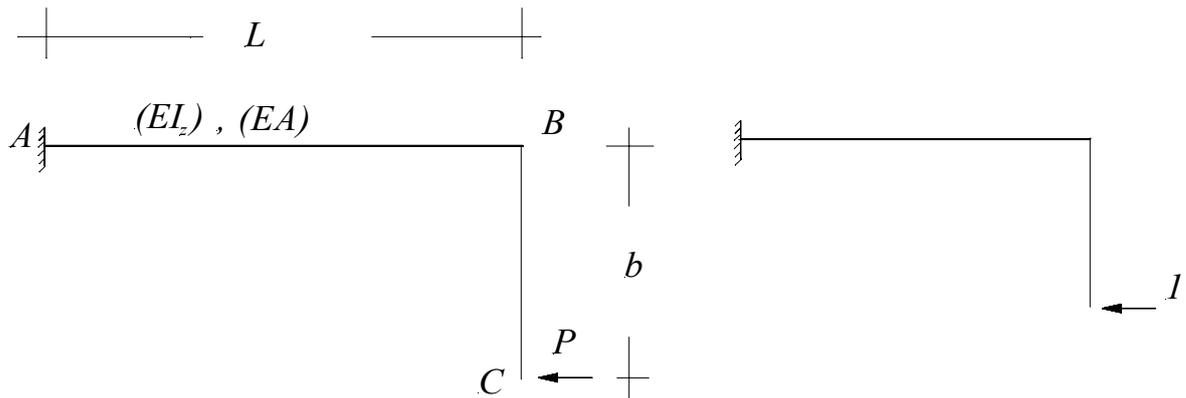


Figura 7 – Estrutura dada e problema auxiliar

Os diagramas de momento fletor e força normal, correspondentes ao carregamento aplicado e ao problema auxiliar construído com força unitária horizontal aplicada no nó C , estão ilustrados na Figura 8.

O deslocamento procurado fica determinado pela aplicação da (27), compondo-se a integral lá indicada pelas contribuições das integrais em cada um dos trechos lineares da estrutura. Assim sendo, resulta:

$$\begin{aligned} d_c^h &= \frac{(-P) \cdot (-1) \cdot L}{EA} + \frac{(-Pb) \cdot (-b) \cdot L}{EI_z} + \int_0^b \frac{(-Px) \cdot (-x)}{EI_z} dx \\ &= \frac{PL}{EA} + \frac{PLb^2}{EI_z} + \frac{Pb^3}{3EI_z} \end{aligned}$$

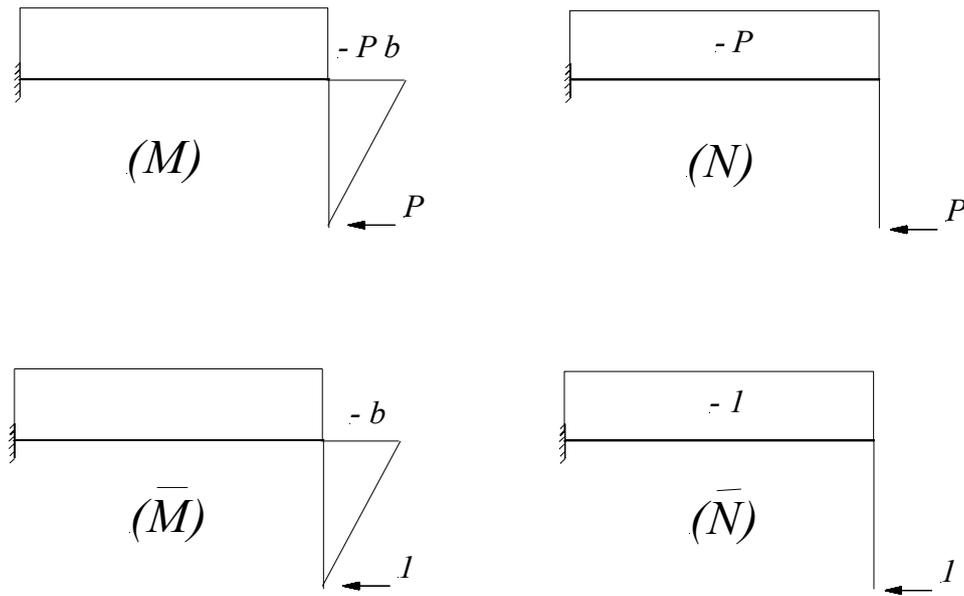


Figura 8 – Diagramas de esforços

3. Extensão do teorema de Castigliano para incluir as deformações por corte e torção

Até este ponto a energia de deformação foi apresentada para as barras considerando-se os efeitos de deformação por força normal e flexão pura. Nestas duas situações a energia foi computada somente pelo trabalho de tensões normais em deformações lineares.

Entretanto, pode-se estender o cálculo da energia de deformação de modo a incluir os efeitos das deformações por torção e força cortante. Nestes casos, a energia deve ser computada considerando-se os trabalhos de tensões de cisalhamento em deformações angulares (distorções).

Para apresentar a forma estendida da energia é interessante retomar a expressão até o momento obtida para ela, sobrepondo-se os efeitos dos esforços generalizados M e N :

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} \bar{N} \left(\frac{N dx}{EA} \right) + \int_0^L \frac{1}{2} \bar{M} \left(\frac{M dx}{EI} \right) \quad (29)$$

Na relação anterior o arranjo dos termos entre parênteses é proposital para facilitar a interpretação que segue. Essencialmente, à parte o fator $\frac{1}{2}$, o que

se nota é que em cada integral aparece um esforço multiplicado por outro termo (entre parênteses). Cada termo refere-se ao deslocamento e giro decorrentes, respectivamente, da deformação da barra por força normal e por momento de flexão. A Figura 9 ilustra a interpretação para cada um dos integrandos da relação (1).

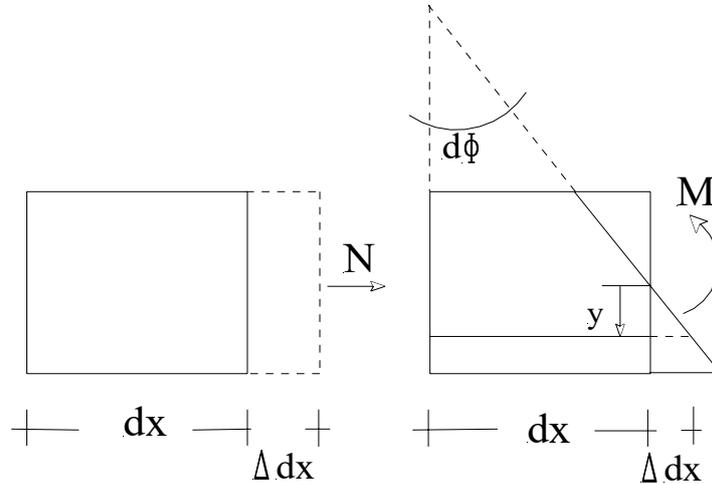


Figura 9 – Deslocamento e giro da seção por efeito de N e M

O acréscimo Δdx mostrado na Figura 1 à esquerda, na verdade refere-se ao deslocamento relativo du entre duas seções vizinhas por efeito da força normal. Idealizando o trecho dx como um conjunto de fibras ou ‘molas’ dispostas na direção longitudinal e que se deformam elasticamente, para cada fibra valem as relações constitutiva e de compatibilidade:

$$\sigma = E \varepsilon \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{du}{dx} \quad (30 \text{ a,b})$$

Combinando-se as relações anteriores e considerando-se a definição de força normal como resultante das tensões normais distribuídas na seção ($N = \sigma A$), obtém-se:

$$\sigma A = E A \frac{\Delta dx}{dx} \quad \rightarrow \quad \Delta dx = du = \frac{N dx}{E A} \quad (31)$$

O resultado obtido coincide com o termo entre parênteses na primeira integral da relação (29), o que confere àquela integral a interpretação de trabalho associado à força normal nos alongamentos relativos medidos em cada seção.

Passando à análise da deformação por flexão, na mesma Figura 1 indica-se o giro relativo entre duas seções vizinhas provocado por um momento de flexão. O giro relativo $d\phi$ implica agora em alongamento Δdx da fibra ou mola genérica. Novamente, exprimindo-se o alongamento em função do giro e introduzindo as relações (constitutiva e de compatibilidade) expressas na (30), resulta:

$$d\phi = \frac{\Delta dx}{y} \rightarrow d\phi = \frac{\varepsilon dx}{y} = \frac{\sigma dx}{E y}$$

Para obter uma relação entre o giro relativo e o momento atuante, deve-se empregar a definição de momento de flexão como resultante dos momentos das tensões normais distribuídas linearmente na seção. Assim sendo, resulta:

$$d\phi = \frac{M y dx}{E I y} = \frac{M dx}{E I} \tag{32}$$

O resultado obtido coincide com o termo entre parênteses na segunda integral da relação (29), o que confere àquela integral a interpretação de trabalho dos momentos nos giros relativos de cada seção.

As parcelas de energia associadas à força cortante e ao momento de torção podem então ser obtidas computando-se os trabalhos de cada um destes esforços nos deslocamentos ou giros relativos correspondentes. A Figura 10 ilustra as duas situações em questão.

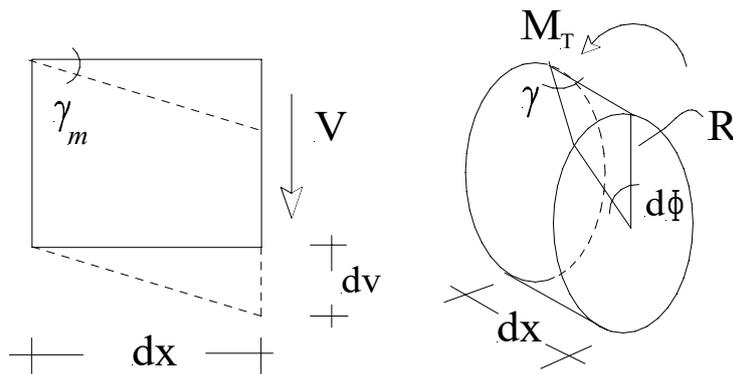


Figura 10 – Deslocamento e giro relativo

No caso da cortante, o deslocamento dv indicado na Figura 10 decorre das distorções angulares (γ) dos elementos ao longo da altura da seção. Tomando-se por referência um valor médio para as distorções (γ_m), pode-se escrever que:

$$dv = \gamma_m dx \quad (33)$$

Por sua vez a distorção média se relaciona com a tensão de cisalhamento média na seção por meio do módulo de elasticidade transversal:

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G} \quad (34)$$

A força cortante é então definida como a resultante da tensão de cisalhamento média na área da seção transversal: $V = \tau_m A$. Assim sendo, a relação (33) escreve-se:

$$dv = c \frac{V}{G A} dx \quad (35)$$

onde c é um parâmetro cujo valor depende da geometria da seção e é introduzido como forma de compensar o fato que na verdade a distribuição de tensão de cisalhamento não é constante no plano da seção, como o valor médio erroneamente leva a induzir. Nessas condições, a energia de deformação por contribuição da força cortante pode ser expressa na forma:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} V dv = \int_0^L \frac{1}{2} V \left(c \frac{V dx}{G A} \right) \quad (36)$$

O caso da torção segue procedimento semelhante, isto é, a energia de deformação pode ser computada pelo trabalho do momento de torção no giro relativo $d\phi$. Observando-se a geometria indicada na Figura 10 para o caso de um eixo de seção circular cheia, e já se considerando a lei de Hooke, vale a relação:

$$R d\phi = \gamma dx = \frac{\tau}{G} dx \quad (37)$$

Genericamente, o momento de torção é definido como a resultante dos momentos das tensões de cisalhamento distribuídas linearmente na seção circular, de modo que:

$$\tau = \frac{M_T}{I_T} r \quad (38)$$

onde I_T representa o momento de inércia à torção e r é a distância do ponto arbitrário em relação ao centro da seção. Como a tensão de cisalhamento que aparece na (37) é a da fibra posicionada na borda da seção ($r = R$), combinando-se as (37) e (38) nesta situação resulta:

$$d\phi = \frac{M_T}{G I_T} dx \quad (39)$$

Apesar de a dedução ter sido conduzida com base numa seção circular, a (39) tem aplicação geral, estendendo-se a outras formas de seção, bastando considerar para cada geometria o momento de inércia à torção correspondente.

Segue daí que a energia de deformação associada à torção pode ser expressa como:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} M_T d\phi = \int_0^L \frac{1}{2} M_T \left(\frac{M_T dx}{G I_T} \right) \quad (40)$$

Finalmente o teorema de Castigliano pode ser escrito na sua forma mais completa, contemplando o caso de uma barra submetida a esforços combinados de força normal, flexão e torção, como:

$$v_k = \int_0^L \bar{N} \frac{N dx}{EA} + \int_0^L \bar{M} \frac{M dx}{EI} + \int_0^L \bar{V} \frac{cV dx}{GA} + \int_0^L \bar{M}_T \frac{M_T dx}{G I_T} \quad (41)$$

Na relação anterior, entende-se que v_k é agora um deslocamento linear ou angular e os esforços $\bar{N}, \bar{M}, \bar{V}$ e \bar{M}_T são provocados por força, ou momento, unitário aplicado no ponto k com a direção ou sentido do deslocamento que se deseja determinar.

Exemplo 4. Determinar uma expressão para o cálculo do deslocamento vertical da seção C na extremidade do balanço indicado na Figura 11.

A aplicação do teorema exige a construção dos diagramas de esforços (força normal, momento de flexão, cortante e momento de torção) para os casos do carregamento dado e de uma força unitária de direção vertical aplicada no ponto C.

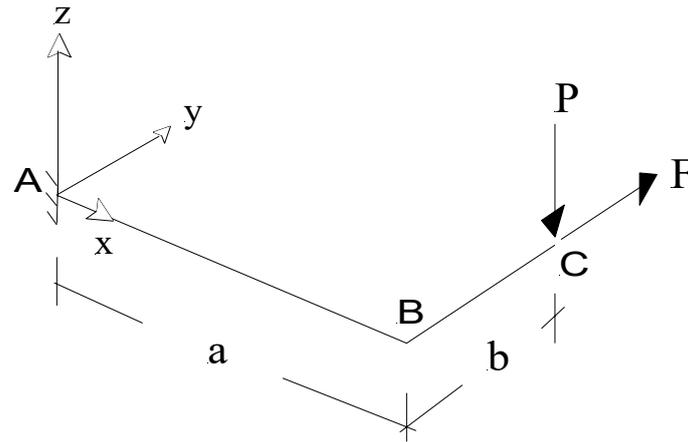


Figura 11 – Estrutura em balanço

A Figura 12 mostra os diagramas de esforços para o carregamento dado.

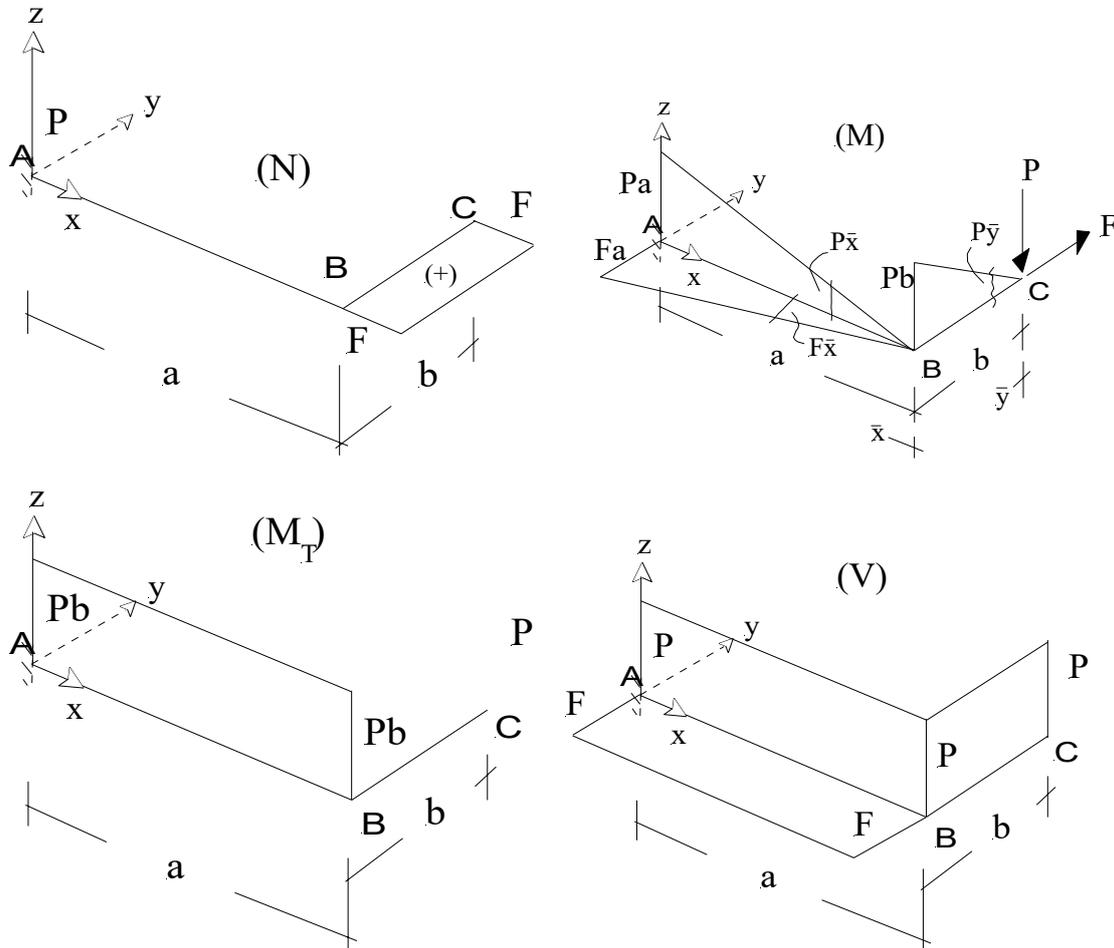


Figura 12 – Diagramas de esforços devidos às forças aplicadas

Na Figura 13 mostram-se os diagramas para a força unitária na ponta do balanço.

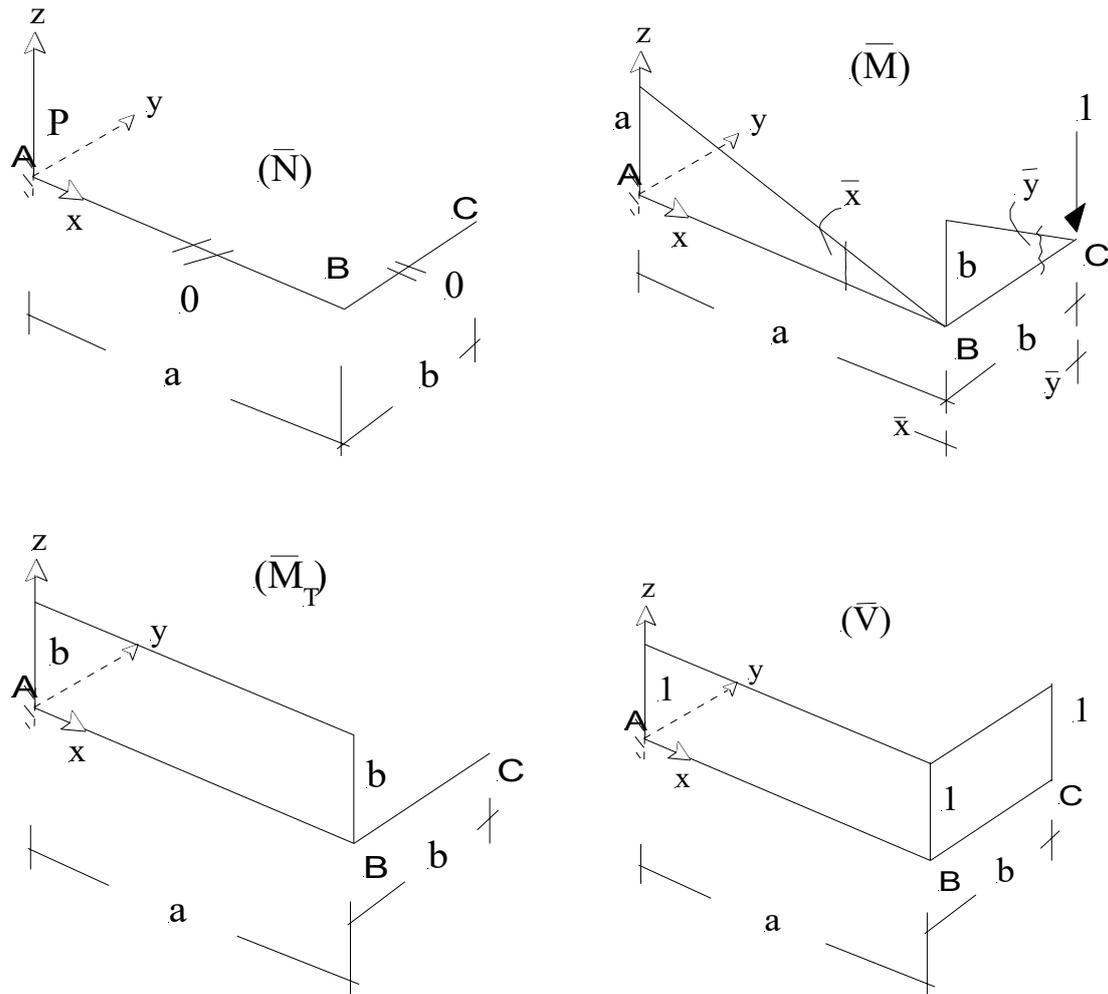


Figura 13 – Diagramas de esforços devidos à força unitária

Claramente, observando-se os diagramas nota-se que a deformação por força normal não contribui para o deslocamento vertical. Assim sendo, a aplicação da relação (31) fornece:

$$\delta_C^v = \int_0^a \frac{P\bar{x} \cdot \bar{x}}{EI} d\bar{x} + \int_0^b \frac{P\bar{y} \cdot \bar{y}}{EI} d\bar{y} + \int_0^a c \frac{P \cdot 1}{GA} dx + \int_0^b c \frac{P \cdot 1}{GA} dy + \int_0^a \frac{Pb \cdot b}{GI_T} dx$$

Após as integrações resulta:

$$\delta_C^v = \frac{P(b^3 + a^3)}{3EI} + c \frac{P(a+b)}{GA} + \frac{Pb^2 \cdot a}{GI_T}$$

4. O Princípio dos Trabalhos Virtuais

Uma interpretação interessante decorre da expressão (41) e empresta maior generalidade à sua aplicação. Considere-se, então, aquela relação escrita na seguinte forma:

$$1.v_k = \int_0^L \bar{N} \left(\frac{N dx}{EA} \right) + \int_0^L \bar{M} \left(\frac{M dx}{EI} \right) + \int_0^L \bar{V} \left(c \frac{V dx}{GA} \right) + \int_0^L \bar{M}_T \left(\frac{M_T dx}{GI_T} \right) \quad (42)$$

Como mencionado anteriormente, $\bar{N}, \bar{M}, \bar{V}$ e \bar{M}_T são distribuições equilibradas de esforços provocadas por força ou momento unitário (*força generalizada*) aplicada no ponto aonde se deseja determinar o deslocamento. Na (42) esta força generalizada aparece explicitamente multiplicando v_k no primeiro membro. Por outro lado, os termos colocados entre parênteses nos integrandos têm o significado, já visto no item anterior, de deslocamentos ou giros relativos (na verdade: '*deformações generalizadas*') que decorrem do carregamento efetivamente aplicado na barra. Pode-se dizer, então, que v_k e as deformações generalizadas (que devem ser compatíveis entre si) são '*reais*', enquanto que a força ou momento unitário e os esforços $\bar{N}, \bar{M}, \bar{V}$ e \bar{M}_T verificam o equilíbrio e são '*virtuais*'.

Dessa nova conceituação, segue que no lado esquerdo da igualdade tem-se o trabalho da força ou momento virtual no deslocamento ou giro real (*trabalho virtual externo*), enquanto que no lado direito da igualdade tem-se o trabalho de esforços virtuais em deformações reais (*trabalho virtual interno*). A (42), portanto, possui o seguinte significado implícito:

Em qualquer ponto da barra, ou estrutura, para encontrar um deslocamento compatível com uma distribuição de deformações reais conhecida, pode-se tomar uma distribuição de esforços em equilíbrio, provocada por uma força generalizada aplicada no ponto e com a direção do deslocamento procurado, e igualar o trabalho virtual externo com o trabalho virtual interno.

Decorre desta nova interpretação que o enunciado pode ser estabelecido sem que se recorra ao teorema de Castigliano, sendo suficiente considerar dois estados independentes entre si, um *virtual*, composto por força ou momento externo e esforços internos constituindo um sistema em equilíbrio, e outro *real* composto por deslocamento, ou giro, e deformações compatíveis.

Nota-se ainda que, o estado virtual não exige que a força ou momento seja unitário, bastando simplesmente considerar seu valor no trabalho externo. Nesse caso a (42) passaria a ter a seguinte redação:

$$\bar{P}_k \cdot v_k = \int_0^L \bar{N} \left(\frac{N dx}{EA} \right) + \int_0^L \bar{M} \left(\frac{M dx}{EI} \right) + \int_0^L \bar{V} \left(c \frac{V dx}{GA} \right) + \int_0^L \bar{M}_T \left(\frac{M_T dx}{GI_T} \right) \quad (43)$$

entendendo-se que $\bar{N}, \bar{M}, \bar{V}$ e \bar{M}_T são esforços internos que verificam condição de equilíbrio com \bar{P}_k .

Uma aplicação interessante que retrata bem a independência dos estados envolvidos na nova interpretação, refere-se ao cálculo de deslocamentos por efeito de deformações provocadas por variação de temperatura.

Nas estruturas determinadas geometricamente, variações de temperatura induzem deformações livres na estrutura, isto é, que ocorrem sem introduzir esforços internos. Por exemplo, no caso de uma treliça plana determinada geometricamente, algumas de suas barras podem sofrer variações de temperatura e apresentar variações livres nos seus comprimentos em decorrência da dilatação linear. O balanço de trabalhos virtuais pode ser aplicado para fins do cálculo de deslocamentos dos nós da treliça. Para tanto, constrói-se um sistema virtual de forças normais nas barras em equilíbrio com uma força externa unitária aplicada no nó e com a direção onde se deseja determinar o deslocamento. O equacionamento dos trabalhos virtuais se expressa, neste caso, por:

$$1 \cdot u_k = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i (\Delta L)_i \quad (44)$$

Na relação anterior n é o número de barras da treliça e $(\Delta L)_i$ é a dilatação linear da barra i , determinada pela conhecida relação: $\alpha_i L_i (\Delta T)_i$, sendo α o coeficiente de dilatação e ΔT a variação de temperatura imposta. O exemplo seguinte ilustra a aplicação da (44).

Exemplo 5. Para a treliça plana indicada na Figura 14 determinar o deslocamento horizontal do nó E por efeito de variação uniforme de temperatura nas barras 1, 2 e 3.

Dados: $\Delta T = 50^\circ C$; $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} / ^\circ C$.

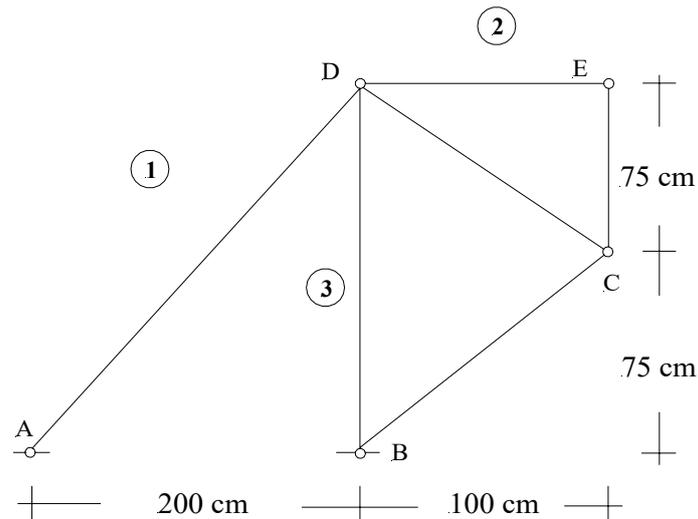


Figura 14 – Treliça plana

Os alongamentos reais decorrem das dilatações de cada barra:

- Barra 1: $\Delta L_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \cdot 250 = 0,15$

- Barra 2: $\Delta L_2 = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \cdot 100 = 0,06$

- Barra 3: $\Delta L_3 = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \cdot 150 = 0,09$

O estado virtual é dado pelas forças normais provocadas por uma força horizontal unitária aplicada no nó *E*. Tais forças são mostradas na Figura 15.

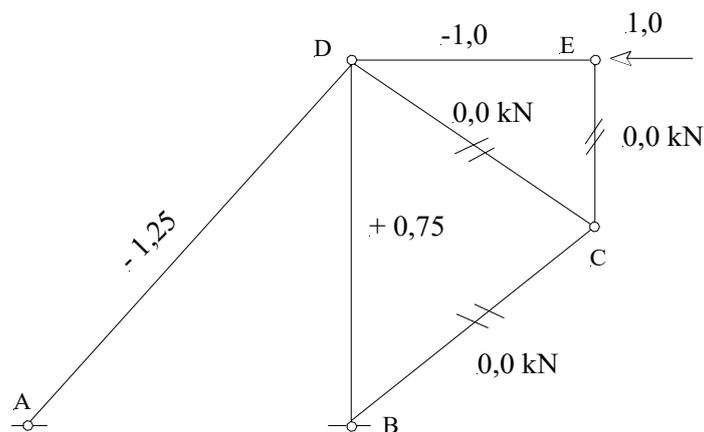


Figura 15 – Forças normais

Segue da aplicação da (43) que:

$$1.u_E^h = \sum_{i=1}^3 \bar{N}_i (\Delta L)_i = -1,25.0,15 - 1,0.0,06 + 0,75.0,09$$

$$= -0,18 \text{ cm.}$$

O sinal negativo indica que o deslocamento tem sentido para a direita, contrário ao sentido adotado para a força unitária aplicada.

Até o momento a metodologia descrita para o cálculo dos deslocamentos envolveu a definição de dois estados: um real e outro virtual. O real foi o de deslocamentos em compatibilidade com deformações efetivamente apresentadas pela estrutura carregada, e o virtual foi composto por um sistema de forças e esforços internos virtuais em equilíbrio. Todavia, é possível ‘dualizar’ esse tratamento invertendo-se os estados, isto é, tomando-se por um lado, um sistema de forças e esforços internos reais e, por outro, deslocamentos e deformações virtuais compatíveis. Para exemplificar essa idéia, considere-se o segundo membro da (43) com um conveniente arranjo de cada um dos integrandos:

$$\int_0^L N \left(\frac{\bar{N} dx}{EA} \right) + \int_0^L M \left(\frac{\bar{M} dx}{EI} \right) + \int_0^L V \left(c \frac{\bar{V} dx}{GA} \right) + \int_0^L M_T \left(\frac{\bar{M}_T dx}{GI_T} \right) \quad (45)$$

Os termos entre parênteses podem ser interpretados como deformações virtuais e a elas devem corresponder, por compatibilidade, deslocamentos virtuais. Já os esforços internos N, M, V e M_T devem estar em equilíbrio com forças reais, isto é, efetivamente aplicadas. Assim sendo, completando a analogia com a (43), no primeiro membro deve aparecer uma força ou momento real realizando trabalho num deslocamento ou giro virtual. A expressão completa resulta:

$$P_k \cdot \bar{v}_k = \int_0^L N \left(\frac{\bar{N} dx}{EA} \right) + \int_0^L M \left(\frac{\bar{M} dx}{EI} \right) + \int_0^L V \left(c \frac{\bar{V} dx}{GA} \right) + \int_0^L M_T \left(\frac{\bar{M}_T dx}{GI_T} \right) \quad (46)$$

Considerando-se ainda as relações (31), (32), (35) e (39) escritas para o estado virtual, a relação anterior passa a ser escrita na forma:

$$P_k \cdot \bar{v}_k = \int_0^L N d\bar{u} + \int_0^L M d\bar{\phi} + \int_0^L cV d\bar{v} + \int_0^L M_T d\bar{\phi} \quad (47)$$

Esta nova forma exprime o chamado Princípio dos Trabalhos, ou deslocamentos, Virtuais (P.T.V.) e permite identificar, por exemplo, a força

externa aplicada no ponto k em equilíbrio com uma distribuição de esforços internos conhecida.

Há que se observar que a ‘dualização’ da (43) para a (47) deve ser complementada com restrições sobre os campos de deslocamentos virtuais. De fato, tais campos devem ser homogêneos nas condições de contorno essenciais impostas aos campos de deslocamentos reais e, ainda, ter continuidade tal a permitir derivar campos de deformações virtuais compatíveis. Este conjunto de restrições será objeto de descrição detalhada no capítulo que trata do emprego do P.T.V. para a geração de soluções aproximativas.

Considerando-se as duas formas descritas pelas (43) e (47), diz-se que a primeira exprime o Princípio das Forças Virtuais e constitui condição a ser satisfeita para que campos de deslocamentos e deformações reais sejam compatíveis. Já a relação (47) exprime o Princípio dos Trabalhos Virtuais e constitui condição a ser satisfeita que os campos de forças externas e de esforços internos reais constituam um sistema em equilíbrio.

A aplicação feita até o momento do teorema de Castigliano ao cálculo de deslocamentos em estruturas de barra pode, agora, ser reinterpretada como uma forma de emprego do Princípio das Forças Virtuais, uma vez que o procedimento envolve sistemas de forças virtuais equilibradas. Entretanto, na seqüência do estudo, o Princípio dos Trabalhos Virtuais será colocado em destaque, e a principal justificativa para a sua priorização está no fato que este princípio proporciona uma metodologia mais eficiente para a geração de soluções aproximadas.

Finalmente, cabe observar que assim como o Princípio das Forças Virtuais tem correspondência com a forma descrita para o teorema de Castigliano, também o Princípio dos Trabalhos Virtuais tem correspondência com uma forma ‘dual’ do teorema de Castigliano. A rigor, a forma aqui descrita corresponde ao segundo teorema de Castigliano, enquanto que a forma dual corresponde ao primeiro teorema e pode ser expressa nos seguintes termos:

‘A derivada parcial da energia de deformação de um sistema elástico-linear em relação a um deslocamento arbitrariamente escolhido fornece a força aplicada no ponto e com a direção do deslocamento’.

Apesar dos teoremas terem suas formas restritas aos problemas lineares, a extensão para os sistemas não-lineares é possível, porém não será objeto destas notas.

CAPÍTULO 4 TENSÕES EM ASAS E FUSELAGENS

1. Tensões nas estruturas de asas e fuselagens

Neste capítulo trata-se do cálculo de tensões normais e de cisalhamento em seções transversais de asas e fuselagens sob flexão. A análise apresentada é simplificada, permitindo uma avaliação expedita, útil e suficientemente precisa para ser empregada em etapa de estimativas preliminares para fins de projeto.

Como regra geral, no regime de flexão induzido pelo conjunto de forças externas atuantes, as seções transversais identificadas nos diagramas de corpo livre devem ser capazes de movimentar esforços internos generalizados, nas formas de momento fletor e força cortante. As intensidades desses esforços devem ser tais que equilibrem os efeitos das forças aplicadas nas partes de estruturas isoladas na construção daqueles diagramas. Por outro lado, os esforços internos generalizados são, por definição, resultantes de tensões normais e de cisalhamento que se distribuem ao longo dos elementos que compõem as seções transversais.

Os valores e distribuições das tensões são determinados em coerência com a hipótese de deformação assumida para a seção, por exemplo, aquela do modelo clássico de flexão de barras. No cálculo das tensões pode-se considerar diretamente a seção original ou, de modo simplificado, uma sua *idealização*, tanto em geometria quanto em termos da capacidade resistente.

A opção pela idealização pode se apresentar vantajosa de acordo com a geometria da seção e o tipo de sollicitação considerada. Além de permitir um cálculo mais expedito de tensões normais e de cisalhamento, sem perda significativa de precisão, a idealização provê uma interpretação bastante clara do comportamento mecânico de cada parte da seção e sua contribuição para a resistência aos esforços sollicitantes.

No sentido de apresentar a idealização deve-se ter em vista a composição estrutural básica das asas e fuselagens. Nas asas, tal composição reúne longarinas ('spars') e reforçadores longitudinais ('stringers'), contraventados por nervuras transversais ('ribs') (vide Figura 1a). O sistema estrutural se completa com a casca externa, de espessura fina, que envolve o conjunto.

As longarinas ('spars') possuem seções transversais nas quais se destacam as regiões: mesa e alma (vide Fig.1c). A alma é quase sempre um elemento delgado de superfície média plana ('chapa'), enquanto que as mesas são fundamentalmente definidas por cantoneiras que servem como elementos de ligação da chapa com a casca de revestimento. As barras que compõem as cantoneiras e os reforçadores longitudinais possuem seções transversais em forma poligonal com áreas muito pequenas em comparação com a área de toda a seção transversal da asa.

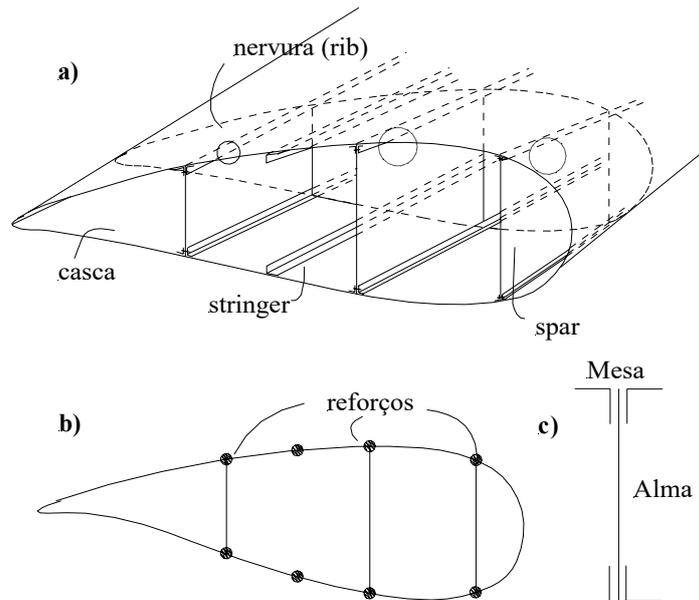


Figura 1 – Elementos estruturais e idealização de seção transversal de asa entre nervuras

Observando o conjunto de elementos da asa, em princípio as paredes da seção transversal (incluindo-se partes da casca de revestimento e almas das barras) possuem capacidade de movimentar tanto tensões normais quanto de cisalhamento. Entretanto, a idealização do comportamento estrutural da seção consiste em admitir que tensões normais se localizem, sobretudo, nas regiões de ligação entre longarinas e reforçadores com a casca de revestimento, apresentando intensidades tais que os momentos de suas resultantes igualam o momento fletor. Já ao longo das almas das longarinas e das cascas de revestimento aparecem exclusivamente tensões de cisalhamento, cuja resultante iguala a força cortante.

Além disso, nesta idealização do comportamento estrutural, admite-se que as parcelas de tensão normal, inicialmente correspondentes aos elementos que concorrem numa ligação, sejam computadas para uma área equivalente representativa dessa ligação, determinada acrescentando-se às seções nominais das cantoneiras, ou dos 'stringers', as áreas de casca e almas de

longarinas pertencentes à sua região de influência. Esse procedimento será desenvolvido mais adiante nas aplicações numéricas.

Em relação às tensões de cisalhamento, mais especificamente, considera-se que elas tenham direções paralelas às bordas das paredes, uma vez que estas possuem espessuras muito finas. Além disso, ainda em razão da espessura delgada, admite-se que as distribuições de tensão de cisalhamento sejam uniformes na espessura. Por conveniência de cálculo, pode-se substituir a representação das tensões de cisalhamento pela sua resultante na espessura, gerando o chamado *fluxo de cisalhamento* (q) na seção. Na Figura 2 a conceituação do fluxo é ilustrada, sem perda de generalidade, sobre um trecho de uma das paredes que compõem uma seção arbitrária aberta ainda por idealizar.

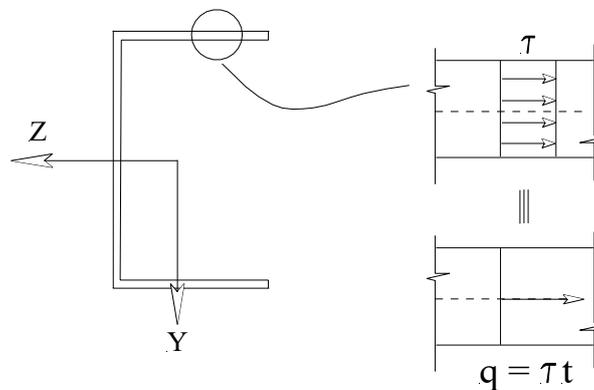


Figura 2 – Fluxo de cisalhamento (q)

É importante ressaltar que a idealização se justifica pelas pequenas dimensões tanto das espessuras quanto das áreas das seções das barras de reforço e cantoneiras. Além disso, simplificações adicionais podem ser adotadas, como, por exemplo, a desconsideração das formas das seções dos stringers e cantoneiras que compõem as mesas das asas, sendo essenciais apenas os valores de suas áreas. Outra simplificação consiste em admitir que os centros de gravidade das seções dos reforços estejam alinhados com a superfície média da casca.

Por outro lado, a idealização geométrica da seção da asa é uma opção particularmente interessante para o cálculo do momento de inércia da seção, como se mostrará mais adiante nos exemplos.

A Figura 1b mostra a simplificação geométrica resultante da idealização de uma seção transversal de asa posicionada entre nervuras. A seção idealizada apresenta-se como um perfil fechado de paredes finas, com uma ou mais células e um conjunto de reforçadores pontualmente distribuídos

ao longo das paredes (cascas e mesas) ou posicionados nas suas interseções.

Nas fuselagens, a composição estrutural básica é a de cavernas, que constituem elementos transversais de reforço, solidarizados por ‘stringers’, dispostos longitudinalmente. As cascas formam o revestimento do conjunto.

No regime de flexão, para as seções das fuselagens, definidas entre cavernas, valem considerações absolutamente análogas às feitas na idealização das asas, isto é, os reforços sendo solicitados por tensão normal e as paredes (cascas) por fluxos de cisalhamento. Na Figura 3 ilustra-se uma seção de fuselagem e sua idealização.

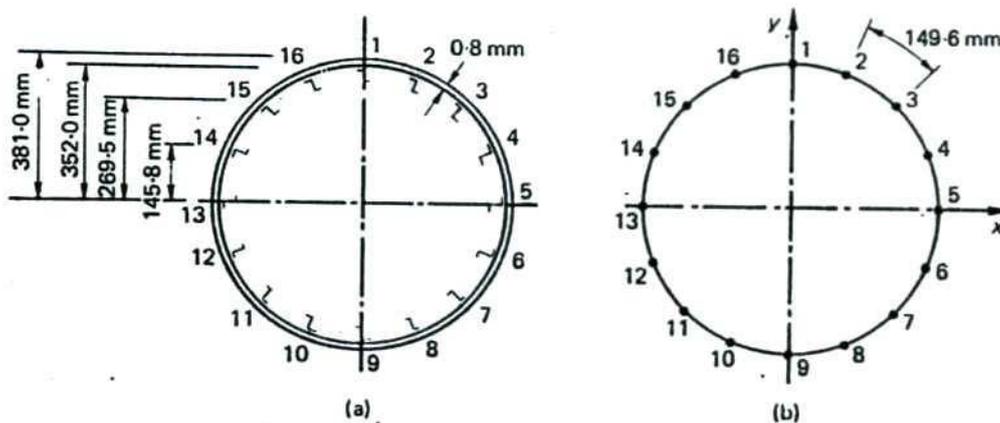


Figura 3 – Idealização de seção de fuselagem (Fonte: Megson [1])

Uma vez estabelecido o modelo estrutural, passa-se à etapa de análise que consiste na determinação das tensões normais e dos fluxos de cisalhamento a partir de esforços solicitantes de flexão conhecidos.

Nesta abordagem simplificada, emprega-se o modelo clássico de vigas em flexão para o cálculo das tensões normais nos reforços e dos fluxos de cisalhamento nas paredes da seção.

2. A idealização e o cálculo das tensões normais em seções de asas e fuselagens

De início é importante recuperar algumas relações de interesse do modelo clássico. Admita-se que no centro de gravidade de uma seção de geometria arbitrária seja posicionada a origem de um sistema dextrorso de referência. Os eixos do sistema são tais que na direção normal ao plano alinha-se o eixo x , enquanto que os eixos z e y estão contidos no plano da seção.

Admita-se, também, que nesta seção as ações externas tenham por equivalentes estáticos uma força normal N e momentos de flexão M_z e M_y . Na hipótese que os eixos z e y coincidam com as direções principais de inércia da seção, pode-se deduzir a seguinte relação para o cálculo das tensões normais em qualquer um de seus pontos:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (1)$$

onde,

M_z e M_y – são componentes do vetor momento de flexão, contido no plano da seção, em relação aos eixos de referência;

A – é a área da seção;

I_z e I_y – são momentos principais de inércia calculados em relação aos eixos z e y , respectivamente;

y e z – coordenadas do ponto em relação aos eixos de referência.

A relação anterior aplica-se também a alguns casos particulares conhecidos:

- Tração ou compressão centrada $\rightarrow \sigma_x = \frac{N}{A}$;
- Flexão pura normal $\rightarrow \sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$ ou $\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$;
- Flexão pura oblíqua $\rightarrow \sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$;
- Tração ou compressão excêntrica $\rightarrow \sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N e_z}{I_z} y + \frac{N e_y}{I_y} z$,

sendo e_z e e_y excentricidades da força normal em relação aos eixos principais z e y , respectivamente.

No caso de posicionamento dos eixos de referência y e z no plano da seção, ainda com origem no centro de gravidade, mas sem que haja coincidência com as direções principais de inércia, o cálculo das tensões normais pode ser feito pela seguinte relação:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{(M_z I_y - M_y I_{yz})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} y + \frac{(M_y I_z - M_z I_{yz})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} z \quad (2)$$

onde,

I_z e I_y – são momentos de inércia calculados em relação aos eixos z e y , respectivamente;

I_{yz} – é o produto de inércia, que se anula quando os eixos de referência coincidem com os principais de inércia.

Nota-se que os sinais à frente das parcelas que compõem as relações (1) e (2), pressupõem que os vetores de momento tenham os sentidos convencionados como positivos indicados, para uma seção arbitrária, na Figura 4. Além disso, a força normal quando de tração sobre a seção é considerada positiva.

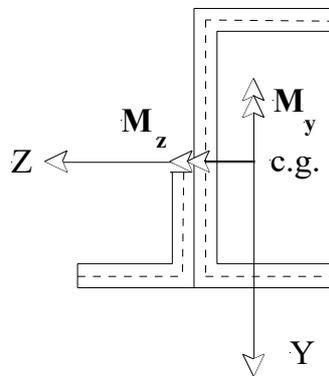


Figura 4 – Convenção dos momentos positivos na seção

Exemplo1: Equacionar a relação para o cálculo da tensão normal em pontos da seção transversal indicada na Figura 5.

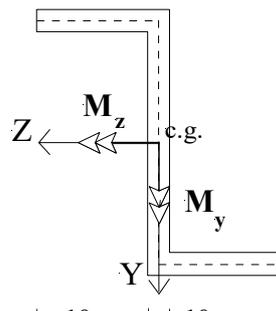


Figura 5 – Seção sob flexão oblíqua

Os dados complementares são:

$$M_z = 1250 \text{ kN cm}; M_y = 125 \text{ kN cm}; I_z = 27083,0 \text{ cm}^4; I_y = 6771,0 \text{ cm}^4; I_{yz} = -9375 \text{ cm}^4.$$

Inicialmente tem-se que: $I_z I_y - I_{yz}^2 = 95488368,0 \text{ cm}^8$.

Considerando-se a relação (2), segue que:

$$\sigma_x = \frac{[1250.6771 - (-125)(-9375)]}{95488368,0} y + \frac{[(-125).27083 - 1250.(-9375)]}{95488368,0} z$$

$$\sigma_x = 0,0764 y + 0,0873 z .$$

A aplicação do cálculo anterior às seções idealizadas de asas e fuselagens tem como preliminar a própria idealização a partir da seção dada. Neste sentido, considere-se o esquema ilustrado na Figura 6.

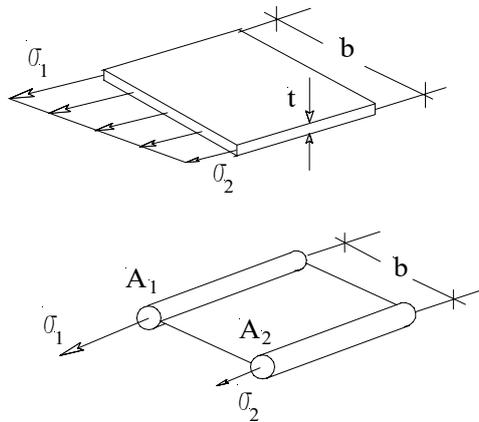


Figura 6 – Áreas de reforços em equivalência com áreas de parede

Admita-se que ao longo de certa face de largura b e espessura t de um elemento de parede haja uma distribuição linear de tensões normais, com valores extremos iguais a σ_1 e σ_2 , estimados em coerência com o modelo clássico de flexão. A idealização consiste em substituir a área de face original por uma combinação de dois reforços ligados por um segmento de parede de espessura nula. Impõe-se que a distância entre os centros das seções dos reforços seja igual à largura b da parede original. O critério para a determinação das áreas dos reforços é a equivalência estática.

A equivalência estática em questão parte do pressuposto que as tensões calculadas nos reforços do elemento idealizado tenham os mesmos valores extremos do elemento original. Além disso, o momento em relação a qualquer ponto do plano da face, calculado tanto pela distribuição de tensão original quanto pelas tensões nos reforços, deve ser o mesmo. Essas duas condições são empregadas para a determinação das áreas dos reforços da seção idealizada.

Assim sendo, tendo-se em vista a idealização indicada na Figura 6, assumindo a igualdade de tensões normais da primeira condição e

equacionando-se os momentos das tensões nos elementos original e simplificado em relação a um ponto, por conveniência coincidente com o centro do reforço de área A_2 , obtém-se:

$$\frac{\sigma_2 \cdot t \cdot b \cdot b}{2} + (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \frac{t \cdot b}{2} \cdot \frac{2b}{3} = \sigma_1 \cdot A_1 \cdot b$$

$$\therefore A_1 = \frac{t \cdot b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \quad (3)$$

Analogamente igualando-se os momentos em relação à borda alinhada com o reforço de área A_1 , obtém-se:

$$A_2 = \frac{t \cdot b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \quad (4)$$

Observa-se, em termos utilização das relações (3) e (4), que as tensões normais σ_1 e σ_2 em geral teriam valores determinados em cada caso de solicitação aplicando-se seja a relação (1) quanto a (2). Disso resulta que a idealização tem por correspondência um dado caso de solicitação.

Exemplo 2: Proceder à idealização da seção mostrada na Figura 7, considerando-se uma e outra possibilidade de momentos de flexão atuantes.

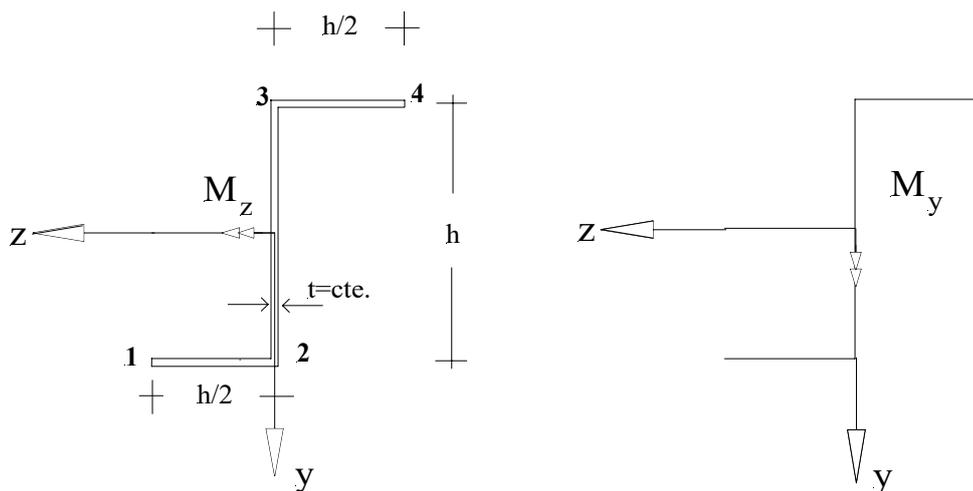


Figura 7 – Seção de paredes finas

Os reforços na seção idealizada são posicionados nos pontos 1, 2, 3 e 4 marcados e suas áreas equivalentes resultam por aplicação das relações (3) ou (4), sobrepondo-se as contribuições das áreas adjacentes ao ponto, quando for o caso, como segue:

$$A_1 = \frac{t.h}{6.2} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right); \quad A_2 = \frac{t.h}{6.2} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + \frac{t.h}{6} \left(2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \right);$$

$$A_3 = \frac{t.h}{6.2} \left(2 + \frac{\sigma_4}{\sigma_3} \right) + \frac{t.h}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right); \quad A_4 = \frac{t.h}{6.2} \left(2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_4} \right).$$

Como os eixos de referência indicados não são principais de inércia, as razões entre tensões que aparecem nas relações anteriores podem ser determinadas com o auxílio da (2). Assim, a tensão normal num ponto qualquer (i) da seção resulta de:

$$\sigma_i = + \frac{(M_z I_y - M_y I_{yz})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} y + \frac{(M_y I_z - M_z I_{yz})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} z$$

Para os pontos 1 e 2, substituindo-se suas coordenadas, obtém-se:

$$\sigma_1 = + \frac{(M_z I_y - M_y I_{yz})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} \frac{h}{2} + \frac{(M_y I_z - M_z I_{yz})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} \frac{h}{2};$$

$$\sigma_2 = + \frac{(M_z I_y - M_y I_{yz})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} \frac{h}{2}.$$

Analogamente determinam-se: $\sigma_3 = -\sigma_2$ e $\sigma_4 = -\sigma_1$. Assim sendo:

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\sigma_4}{\sigma_3} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Combinando-se as relações para as tensões normais nos pontos 1 e 2, conclui-se que:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1 + \frac{(M_y I_z - M_z I_{yz})}{(M_z I_y - M_y I_{yz})} \quad \text{e} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{\left[M_z I_y + M_y I_z - (M_z + M_y) I_{yz} \right]}.$$

Claramente as razões entre as tensões nos pontos 1 e 2 se simplificariam caso o produto de inércia da seção fosse nulo. Por este motivo, a idealização das seções torna-se efetivamente vantajosa nas situações em

que os eixos de referência adotados alinham-se com as direções principais de inércia, para as quais o produto de inércia se anula.

Voltando à consideração da seção dada, podem-se determinar os seguintes valores para os momentos de segunda ordem correspondentes à seção dada:

$$I_z = \frac{t h^3}{3}; \quad I_y = \frac{t h^3}{12}; \quad I_{yz} = \frac{t h^3}{8}.$$

Para o caso em que atua na seção somente o momento M_z , obtêm-se:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -2.$$

Com esses resultados, determinam-se:

$$A_1 = A_4 = 0; \quad A_2 = A_3 = \frac{7th}{24}.$$

Conclui-se que para esta possibilidade de solicitação (M_z), a seção idealizada contém apenas dois reforços alinhados sobre o eixo y . Nota-se ainda que o momento de inércia segundo o eixo z , estima-se somente computando os transportes (área vezes distância de transporte ao quadrado) dos reforços:

$$I_z = \frac{7th^3}{48}$$

Nota-se que este momento de inércia proporciona os mesmos valores de tensão normal que seriam calculados nos pontos 2 e 3 da seção original.

Por outro lado, para a possibilidade que contempla o momento M_y (com sinal negativo em razão do sentido contrário ao convencionado como positivo), as tensões normais nos pontos 1 e 2 ficam determinadas por:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{I_{yz} - I_z}{I_{yz}} \quad \text{e} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{I_{yz}}{I_{yz} - I_z}.$$

Levando-se em conta os momentos de segunda ordem da seção dada, determinam-se:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{5}{3}; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -\frac{3}{5}.$$

Com esses resultados, obtém-se:

$$A_1 = A_4 = \frac{7th}{60}; \quad A_2 = A_3 = \frac{7th}{36}.$$

Finalmente, a seção idealizada passa a apresentar os seguintes valores de momentos de segunda ordem, que poderão ser empregados para o cálculo das tensões normais por efeito de M_y :

$$I_z = \frac{7th^3}{45}; \quad I_y = \frac{7th^3}{120}; \quad I_{yz} = \frac{7th^3}{120}.$$

Na Figura 8 mostram-se os resultados das idealizações realizadas.

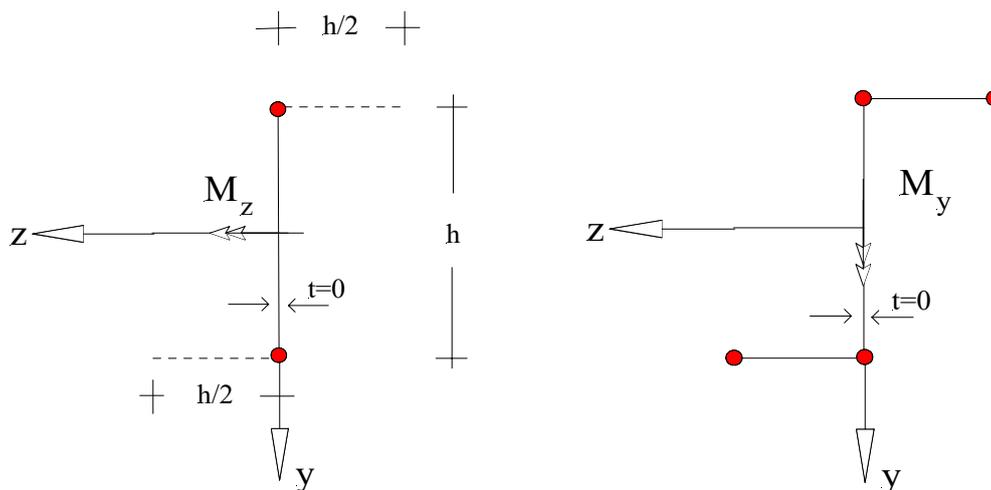


Figura 8 – Seções idealizadas

O próximo exemplo ilustra de fato a vantagem da idealização no caso de flexão pura normal com eixos de referência alinhados com as direções principais. Destaca-se que, nesta situação, as razões entre as tensões normais, que aparecem nas relações (3) e (4), acabam por se traduzir em razões entre as ordenadas dos centros das seções dos reforços com respeito ao eixo de referência.

Exemplo 3: Para a seção de asa indicada na Figura 9, pede-se representar sua forma idealizada e escrever a relação para o cálculo das tensões normais. Os reforços indicados na seção inicial possuem áreas iguais a 3,2

cm^2 e o momento fletor atuante tem um valor de 5700 kNcm. As espessuras da casca e das almas das duas barras são iguais a 0,2 cm.

Neste exemplo, por hipótese, os trechos indicados em tracejado possuem apenas função aerodinâmica, não sendo considerados no cálculo das áreas equivalentes; além disso, os trechos entre reforços podem ser considerados retos.

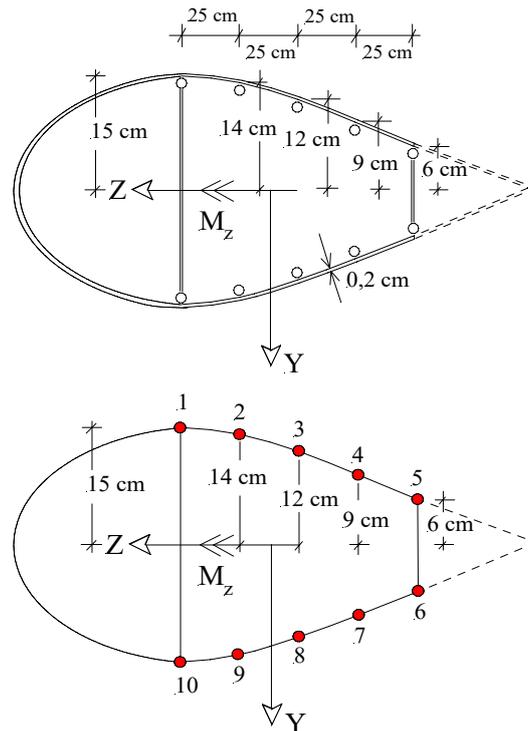


Figura 9 – Seção esquemática de asa com reforços

Trata-se de um caso de flexão normal pura com eixos de referência coincidentes com os principais de inércia da seção. Portanto, a relação para a determinação das tensões normais reduz-se a:

$$\sigma_x = + \frac{M_z}{I_z} y.$$

É de se notar que M_z e I_z são os mesmos para todos os pontos da seção, o que torna mais simples o cálculo das áreas equivalentes. Para o cálculo de cada uma das áreas equivalentes que compõem a idealização aplicam-se as relações (3) e (4) em modo combinado, a depender do reforço e sua posição na seção. Considera-se, por simplificação, que os comprimentos dos

trechos de seção entre os reforços 1 e 3 sejam aproximadamente de 25 cm; já os comprimentos entre os pontos 3, 4 e 5 é de aproximadamente 25,2 cm.

Para o reforço 1 vale:

$$\begin{aligned} A_1 &= 3,2 + \frac{0,2 \cdot 30}{6} \left(2 + \frac{\sigma_{10}}{\sigma_1} \right) + \frac{0,2 \cdot 25}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \\ &= 3,2 + \frac{0,2 \cdot 30}{6} (2 - 1) + \frac{0,2 \cdot 25}{6} \left(2 + \frac{14}{15} \right) \\ &= 6,64 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Para o reforço 2:

$$\begin{aligned} A_2 &= 3,2 + \frac{0,2 \cdot 25}{6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + \frac{0,2 \cdot 25}{6} \left(2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \right) \\ &= 3,2 + \frac{0,2 \cdot 30}{6} \left(2 + \frac{15}{14} \right) + \frac{0,2 \cdot 25}{6} \left(2 + \frac{12}{14} \right) \\ &= 8,14 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Para o reforço 3:

$$\begin{aligned} A_3 &= 3,2 + \frac{0,2 \cdot 25}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right) + \frac{0,2 \cdot 25,2}{6} \left(2 + \frac{\sigma_4}{\sigma_3} \right) \\ &= 3,2 + \frac{0,2 \cdot 25}{6} \left(2 + \frac{14}{12} \right) + \frac{0,2 \cdot 25,2}{6} \left(2 + \frac{9}{12} \right) \\ &= 8,14 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Para o reforço 4:

$$\begin{aligned} A_4 &= 3,2 + \frac{0,2 \cdot 25,2}{6} \left(2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_4} \right) + \frac{0,2 \cdot 25,2}{6} \left(2 + \frac{\sigma_5}{\sigma_4} \right) \\ &= 3,2 + \frac{0,2 \cdot 25,2}{6} \left(2 + \frac{12}{9} \right) + \frac{0,2 \cdot 25,2}{6} \left(2 + \frac{6}{9} \right) \\ &= 8,24 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Finalmente, para o reforço 5:

$$\begin{aligned}
 A_5 &= 3,2 + \frac{0,2.25,2}{6} \left(2 + \frac{\sigma_4}{\sigma_5} \right) + \frac{0,2.12}{6} \left(2 + \frac{\sigma_6}{\sigma_5} \right) \\
 &= 3,2 + \frac{0,2.25,2}{6} \left(2 + \frac{9}{6} \right) + \frac{0,2.25,2}{6} (2-1) \\
 &= 6,54 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

O momento de inércia da seção idealizada resulta:

$$I_z = (6,64.15^2 + 8,14.14^2 + 8,14.12^2 + 8,24.9^2 + 6,54.6^2).2 = 9975,8 \text{ cm}^4$$

Substituindo-se este resultado na relação para a tensão normal e levando-se em conta o valor do momento aplicado, obtém-se:

$$\sigma_x = +0,57 y.$$

Quando o trecho de chapa a ser idealizado possui curvatura não-desprezível, a equivalência se procede a partir de uma generalização da dedução feita para as relações (3) e (4).

Nesse sentido, em primeiro lugar retoma-se aquela dedução, destacando-se a hipótese que a distribuição de tensão normal no trecho para o qual se fará a equivalência é linear. Assim, considerando a geometria indicada na Figura 10, num ponto qualquer do trecho a tensão normal fica dada pela seguinte relação:

$$\sigma = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{y}{L} \quad (5)$$

Tomando-se como referência a extremidade em que atua σ_1 , igualando-se de um lado o momento da distribuição de tensão no trecho e de outro o momento da tensão atuante no reforço de área equivalente, a relação de equivalência escreve-se:

$$\int_s \sigma y dS = \sigma_2 A_2 L \quad (6)$$

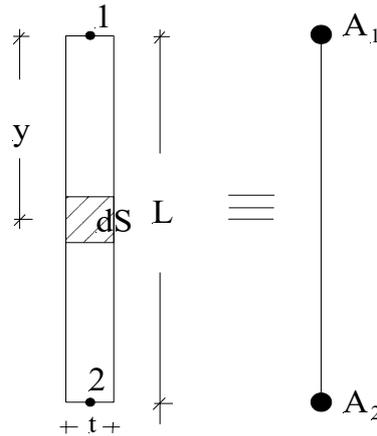


Figura 10 – Equivalência em trecho curvo

Substituindo a relação (5) na anterior resulta:

$$\sigma_1 \int_s y dS + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{L} \int_s y^2 dS = \sigma_2 A_2 L \quad (7)$$

As integrais que aparecem na relação anterior são momentos de primeira e segunda ordem, respectivamente momento estático e momento de inércia da área definida pelo trecho em relação a um eixo que passa pelo ponto 1, e ortogonal à direção em que se mede y .

No caso da área retangular indicada na Figura 10, tais integrais resultam:

$$\int_s y dS = \frac{L^2 t}{2}; \quad \int_s y^2 dS = \frac{L^3 t}{3}. \quad (8 \text{ a,b})$$

Levando-se em conta esses resultados, a (7) fornece:

$$A_2 = \frac{t \cdot b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)$$

relação esta que coincide formalmente com a (4). Pode-se, portanto propor que a (7) seja a forma geral que permite determinar as áreas equivalentes de reforço para qualquer que seja a forma geométrica do trecho considerado. No exemplo seguinte testa-se a generalização para caso de um trecho curvo.

Exemplo 4. Admitindo-se, no plano da seção, a existência de um momento de flexão com vetor alinhado com o eixo de simetria, pede-se realizar a

idealização da seção indicada na Figura 11 e determinar o momento de inércia em relação a esse eixo.

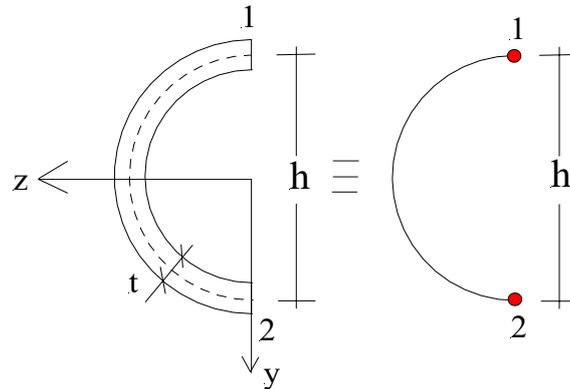


Figura 11 – Seção dada e elementos da sua idealização

Nota-se que o eixo z de referência adotado, por ser eixo de simetria, é também principal de inércia da seção. Para fins do emprego da relação (7), o eixo auxiliar que passa pelo ponto 1, neste caso, é paralelo ao eixo de simetria. Deve-se, então, calcular o momento estático e o momento de inércia da área definida pelo semicírculo em relação ao eixo auxiliar:

$$\int_s y dS = \frac{\pi h^2 t}{4}; \quad \int_s y^2 dS = \frac{\pi h^3 t}{16} + \frac{\pi h t}{2} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{3\pi h^3 t}{16}.$$

Assim sendo, considerando-se que $L = h$, resulta da relação (7):

$$\sigma_1 \cdot \frac{\pi t h^2}{4} + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{3\pi t h^2}{16} = \sigma_2 A_2 h$$

$$\therefore A_2 = \frac{\pi h t}{16} \left(3 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) = \frac{\pi h t}{8}.$$

A área idealizada A_1 determina-se por procedimento análogo sendo, obviamente, igual à A_2 .

Finalmente, o momento de inércia procurado calcula-se a partir das contribuições dos reforços da seção idealizada:

$$I_z = \frac{\pi t h}{8} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot 2 = \frac{\pi h^3 t}{16}$$

3. Caracterização do fluxo de cisalhamento por análise do equilíbrio.

Neste item, por uma questão didática e com o objetivo de ressaltar os aspectos conceituais, opta-se por se fazer referência somente às seções, já idealizadas, abertas e com um eixo de simetria.

É importante notar que a seção idealizada dispensa a indicação das espessuras, permitindo representar diretamente os fluxos de cisalhamento sobre as ‘linhas dos esqueletos’ dos trechos de parede.

Como restrição geral, admite-se que nos planos das seções, além de momentos de flexão, possam atuar forças de corte, porém sem efeito de torção. Nesse sentido é preciso também admitir ‘a priori’ que as forças de corte (resultantes dos fluxos de cisalhamento) passam por um ponto particular do plano da seção denominado *centro de cisalhamento*, cuja determinação será feita oportunamente, mais adiante ¹.

A restrição às seções com um eixo de simetria tem por objetivo simplificar a apresentação do procedimento. A vantagem principal está no fato que o centro de cisalhamento encontra-se nesse eixo (a evidência disto será entendida mais adiante). Explora-se este fato, associando-se um dos eixos de referência da seção ao eixo de simetria.

Considere-se, então, um trecho de barra² entre duas seções vizinhas, conforme ilustrado na Figura 12.

O sistema de referência no plano da seção tem as direções dos eixos adotadas de tal modo que uma delas (Z) é necessariamente de simetria da seção e a outra (Y) é ortogonal à ela. Tais direções são, também, principais de inércia. Admita-se, ainda, que o momento fletor e a força de corte, induzidos pelo carregamento, tenham seus vetores coincidentes em direção com os eixos Z e Y, respectivamente; em particular, o vetor do momento tem o mesmo sentido do eixo Z. A idealização da seção, com reforços pontuais e paredes de espessuras nulas, foi feita de forma consistente com esse momento.

Seguindo a mesma metodologia do modelo clássico de flexão de barras, as distribuições de tensões de cisalhamento são determinadas mediante análises do equilíbrio de partes isoladas do trecho elementar de ‘asa’ em questão.

¹ O efeito de torção na seção calcula-se pela excentricidade da força de corte resultante em relação ao centro de cisalhamento.

² A representação cabe também para um trecho de asa.

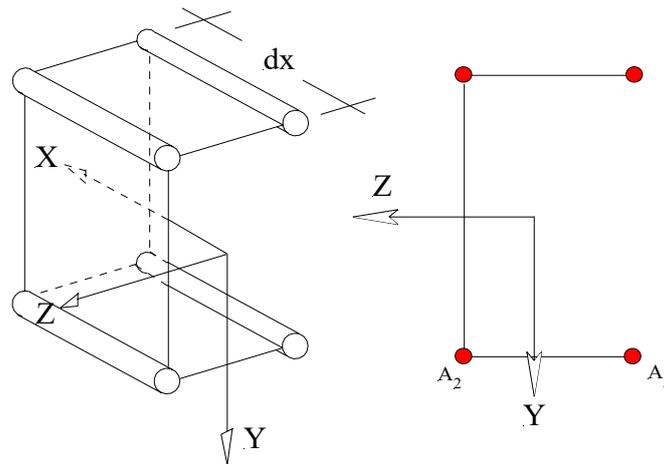


Figura 12 – Trecho de barra entre seções idealizadas

Na Figura 13 estão representados dois segmentos contendo reforços (posicionados do lado positivo do eixo Y), destacados mediante cortes arbitrários ao longo das paredes do trecho em análise. Os fluxos q_1 e q_2 indicados (definidos por unidade de comprimento) equilibram as diferenças entre as tensões normais oriundas da suposta variação (‘positiva’) do momento fletor ao longo da asa.

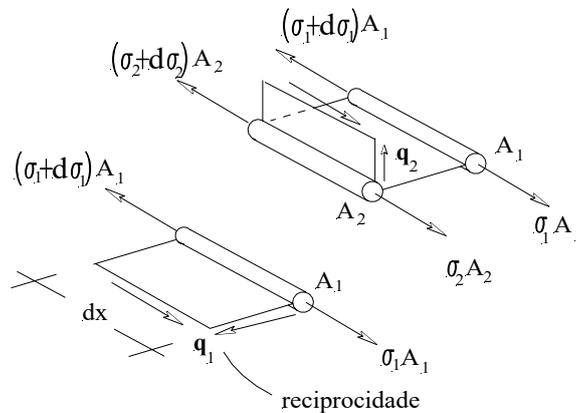


Figura 13 – Equilíbrio de partes do trecho de ‘asa’

Tendo-se em vista as indicações contidas naquela figura, do equilíbrio do segmento adjacente ao reforço externo de área A_1 e situado abaixo do eixo de simetria da seção, conclui-se que:

$$d\sigma_1 A_1 = q_1 dx \quad \therefore q_1 = \frac{d\sigma_1}{dx} A_1 \quad (9)$$

Levando-se em conta as relações que seguem, obtidas, respectivamente, por extensão da relação (1) particularizada para o caso em análise e da teoria clássica de flexão,

$$d\sigma_1 = \frac{dM}{I_z} y_1 \quad \text{e} \quad V = \frac{dM}{dx} \quad (3) \quad (10a,b)$$

o fluxo resulta:

$$q_1 = \frac{dM}{dx I_z} A_1 y_1 = \frac{V}{I_z} M_{s_1} \quad (11)$$

Na relação anterior, I_z é o momento de inércia da seção em relação ao eixo Z de referência (de simetria) e M_{s_1} é o momento estático da área do reforço pertencente ao segmento determinado em relação ao mesmo eixo.

Uma observação importante é que o fluxo determinado por equilíbrio é de direção longitudinal (paralelo ao eixo X). Nota-se, entretanto, que aplicando a regra da reciprocidade das tensões de cisalhamento em relação a planos ortogonais entre si, ao fluxo longitudinal corresponde um fluxo de mesmo valor no plano da seção, e que se mantém constante em todo o trecho horizontal de parede entre reforços. Assim sendo, a (11) determina o fluxo contido no plano da seção. A Figura 13 ilustra a reciprocidade.

Considerando-se, agora, o segundo segmento, isolado do restante da seção por um corte arbitrário na parte vertical da parede (v.Fig.13), da condição de equilíbrio resulta:

$$d\sigma_1 A_1 + d\sigma_2 A_2 = q_2 dx \quad (12)$$

ou ainda, procedendo analogamente ao caso anterior,

$$q_2 = \frac{dM}{dx I_z} \underbrace{(A_1 y_1 + A_2 y_2)}_{M_{s_2}} = \frac{V}{I_z} M_{s_2} \quad (13)$$

onde M_{s_2} agora representa o momento estático das áreas dos reforços que pertencem ao segmento isolado em relação ao eixo de simetria. Também neste caso vale a regra da reciprocidade. Além disso, conclui-se que o fluxo é constante ao longo de todo o trecho vertical de parede entre reforços.

⁽³⁾ Em função do sentido do momento, a força cortante positiva é contrária ao sentido do eixo Y !

Como o eixo de referência coincidente com o de simetria contém, necessariamente, o c.g. da seção, cabe observar, por definição, que é nulo o momento estático total, isto é, resultante das contribuições das áreas de todos os reforços da seção, em relação a ele. Assim sendo, o momento estático das áreas dos reforços que pertencem ao segmento em análise é igual, em módulo, ao momento estático das áreas de todos os reforços restantes da seção. Este fato pode ser usado para simplificar o cálculo do momento estático em seções com concepção mais complexa.

Do que foi apresentado até este ponto, conclui-se que os fluxos ao longo da seção podem ser determinados mediante a seguinte relação geral:

$$q_i = \frac{V}{I_z} M_{s_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (14)$$

onde n é o número de trechos de parede entre reforços que compõem a seção e M_{s_i} indica o momento estático em relação ao eixo de simetria das áreas dos reforços que pertencem ao segmento isolado para definir q_i .

Em qualquer caso e, em particular, na seção em análise, os fluxos devem ter como resultante a própria força cortante na seção. Como os fluxos de cisalhamento são constantes entre reforços fica imediato determinar suas resultantes em cada um desses trechos.

Nesse sentido, denominando-se por F_i a resultante do fluxo no trecho genérico de parede de comprimento ℓ_i segue que:

$$F_i = q_i \ell_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (15)$$

Para a seção indicada na Figura 12, os fluxos resultantes ficam representados conforme ilustrado na Figura 14.

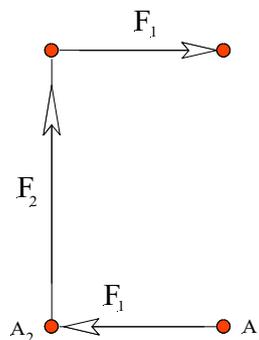


Figura 14 – Fluxos resultantes nos trechos da seção

Claramente as resultantes dos fluxos nos trechos horizontais se anulam entre si⁴, de modo que:

$$F_2 = V \tag{16}$$

Dessa relação, pode-se inferir uma condição relativa ao cálculo do momento de inércia da seção em relação ao eixo de simetria. De fato, como $F_2 = q_2 h$, sendo h o comprimento do trecho vertical, com a definição de q_2 , tem-se:

$$\frac{V}{h} = \frac{V}{I_z} M_{s_2} \quad \therefore \quad I_z = M_{s_2} h = A_1 \frac{h^2}{2} + A_2 \frac{h^2}{2} \tag{17}$$

O resultado anterior coincide com o valor do momento de inércia da seção calculado considerando-se somente as parcelas de transporte relativas às áreas dos reforços, isto é: desprezando-se as inércias próprias dos mesmos e as contribuições das paredes da seção (supostamente de espessuras nulas nas seções idealizadas). Portanto, de modo consistente com a idealização adotada para a seção e, em particular, com o modelo de repartição das tensões entre reforços (somente tensões normais) e paredes (somente tensões de cisalhamento), o momento de inércia da seção só envolve o transporte de inércia relativo aos reforços.

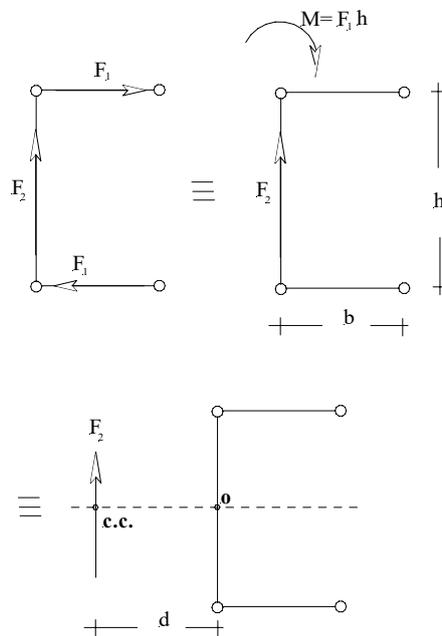


Figura 13 – Redução dos fluxos resultantes

⁴ Segue daí a evidência que o centro de cisalhamento está sobre o eixo de simetria.

Por outro lado, a resultante dos fluxos, que coincide com a força cortante na seção, deve cruzar o eixo de simetria num ponto denominado *centro de cisalhamento*.

A determinação do centro de cisalhamento decorre de uma redução consistente do fluxo a uma única força vertical no plano da seção, conforme se indica a seqüência mostrada na Figura 13.

A condição para a determinação da distância d é que o momento da força cortante em relação ao ponto O (arbitrariamente escolhido sobre o eixo de simetria) seja igual ao momento dos fluxos em relação ao mesmo ponto:

$$F_2 d = F_1 h \quad (18)$$

Levando-se em conta as relações (16), (15) e (14), as duas últimas aplicadas ao cálculo de F_1 , resulta que:

$$d = \frac{M_{s_1}}{I_z} b h \quad (19)$$

A relação obtida mostra que a posição do centro de cisalhamento depende apenas da geometria da seção e independe da intensidade e do sentido da força cortante; trata-se, portanto, de uma característica puramente geométrica da seção. Esse fato permite propor uma metodologia específica para o cálculo da posição do centro de cisalhamento em seções com um eixo de simetria que dispensa, em cada caso, uma análise detalhada do equilíbrio para fins de definição do fluxo inicial de cisalhamento em seções abertas.

Como procedimento geral, pode-se diretamente adotar um fluxo consistente, isto é: por exemplo, saindo das extremidades da seção situadas de um lado do eixo de simetria e chegando às extremidades correspondentes do outro lado daquele eixo. A partir daí, o processo de redução sucessiva dos fluxos a uma única força resultante no plano da seção proporciona as condições para o estabelecimento da condição resolvente, do tipo indicado pela (18).

Exemplo 5: Para a seção indicada na Figura 13, considerem-se os seguintes dados: $b = 10 \text{ cm}$; $h = 25 \text{ cm}$; $A_1 = A_2 = 0,5 \text{ cm}^2$. Pode-se determinar a posição do c.c. em relação ao ponto O .

Os resultados parciais de interesse são: $M_{s_1} = \frac{0,5 \cdot 25}{2}$; $I_z = \frac{25^2}{2}$.

Segue da (19) que: $d = 5,0 \text{ cm}$.

Outra situação que pode ocorrer na resolução de exemplos de seções com geometria mais complexa é a determinação da resultante do fluxo em perfis curvos, conforme ilustra a Figura 14.

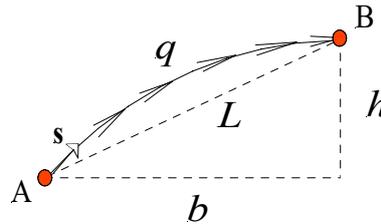


Figura 14 – Fluxo em trecho curvo de parede

Na figura aparece um trecho curvo de parede entre os pontos A e B, sendo b e h as projeções do seu comprimento nas direções horizontal e vertical, respectivamente. Também está indicada na figura uma coordenada local (s) que posiciona pontos sobre o trecho.

A resultante do fluxo num comprimento elementar ao longo da parede pode ser expressa na forma:

$$dF = q ds \quad (20)$$

As componentes horizontal e vertical dessa força elementar ficam definidas por:

$$dF_x = (q ds) \cos \alpha \quad (21 \text{ a,b})$$

$$dF_y = (q ds) \operatorname{sen} \alpha$$

onde α é o ângulo de inclinação entre a força elementar $q ds$ e a direção horizontal. Considerando-se que: $ds \cos \alpha = dx$ e $ds \operatorname{sen} \alpha = dy$, as relações para o cálculo das resultantes das componentes escrevem-se como:

$$F_x = \int_0^b q dx = qb \quad (22 \text{ a,b})$$

$$F_y = \int_0^h q dy = qh$$

Assim sendo, a resultante do fluxo no trecho curvo pode ser obtida de:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = qL \quad (23)$$

onde L é o comprimento da corda que une os pontos extremos do trecho (v.Fig.14). A resultante tem, portanto, direção paralela àquela corda.

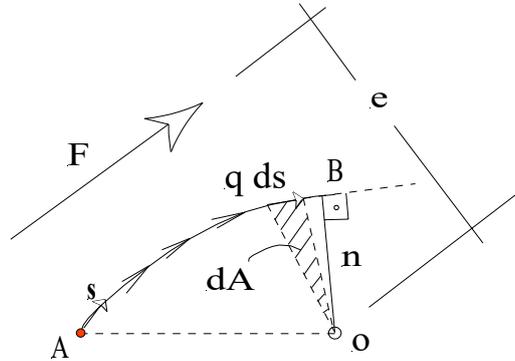


Figura 15 – Momento do fluxo em relação a um ponto arbitrário

É possível, ainda, determinar a distância da resultante a um ponto arbitrário do plano da seção. Na Figura 15 apresenta-se um ponto O em relação ao qual a resultante passa a uma distância e . Tal distância pode ser determinada igualando-se o momento da resultante ao momento do fluxo, ambos os momentos tomados em relação ao ponto O . Basicamente, tem-se a seguinte condição:

$$\int_s q n ds = F e \quad (24)$$

Entretanto, geometricamente, (v.Fig.15), a área do triângulo elementar definido pelo segmento ds e o ponto O fica definida pela seguinte expressão:

$$dA = \frac{ds \cdot n}{2} \quad (25)$$

Nessas condições, a relação (24), assume a forma:

$$F \cdot e = \int_A 2q dA \quad (26)$$

de onde, com a ajuda da (23), se obtém:

$$e = \frac{2A}{L} \tag{27}$$

Na relação anterior (A) representa a área compreendida pelo segmento curvo de parede e o ponto O de referência.

Exemplo 6: Determinar a posição do centro de cisalhamento para a seção indicada na Figura 16.

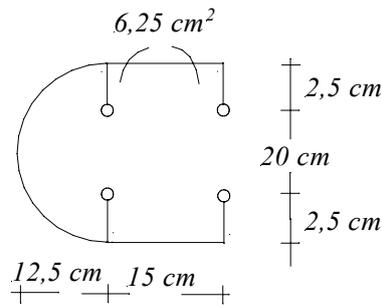


Figura 16 – Seção com trecho curvo de parede

Para determinação do c.c. não é preciso especificar um valor para a força cortante. Portanto, os cálculos e resultados intermediários podem ficar escritos em função de uma força V .

Tomando-se por referência o eixo de simetria, os resultados geométricos de interesse são:

$$M_{s_1} = 62,5 \text{ cm}^3; \quad M_{s_2} = 125,0 \text{ cm}^3; \quad I_z = 2500 \text{ cm}^4;$$

A seqüência de redução do fluxo a uma única força resultante de direção vertical está ilustrada na Figura 17.

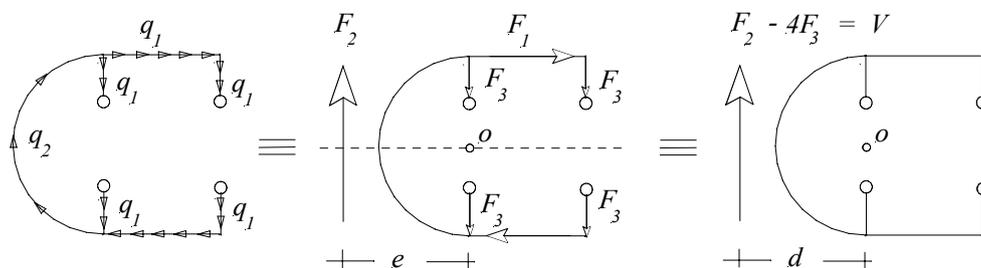


Figura 17 – Redução do fluxo a uma força cortante

Na Figura 17, e indica a distância, em relação ao ponto O , da resultante do fluxo no trecho curvo. Já d indica a distância do centro de cisalhamento (ponto por onde passa a resultante total do fluxo) em relação ao ponto O .

A condição para a determinação da posição do c.c. é que o momento da força cortante em relação ao ponto O seja igual ao momento, em relação ao mesmo ponto, das forças resultantes dos fluxos em cada trecho da seção. A relação que expressa essa condição é a seguinte:

$$V.d = F_2.e + 2F_3.15 + F_1.25$$

Os valores calculados para os fluxos resultantes e para a distância e são:

$$F_1 = 937,5 \frac{V}{I_z} ; F_2 = 3125 \frac{V}{I_z} ; F_3 = 156,25 \frac{V}{I_z} ; e = 6,25 \pi \text{ cm}.$$

Finalmente, obtém-se: $d = 35,8 \text{ cm}$.

4. Caracterização do fluxo em seções fechadas com uma célula.

Neste item o tema dos fluxos e do centro de cisalhamento tem continuidade, considerando-se seções fechadas com uma célula e, por simplificação, com um eixo de simetria.

Como regra geral, adianta-se que no caso de seções fechadas não basta a condição de equilíbrio para a determinação dos fluxos em cada uma das paredes que compõem a seção. Em outras palavras, os fluxos não mais podem ser estimados somente com a aplicação direta de uma relação como a (14), do item anterior; há que se acrescentar uma condição de ‘compatibilidade de deformações’.

Seja, então, o trecho de asa idealizado e sua seção transversal indicados na Figura 18.

Admita-se, como anteriormente feito nas seções abertas, que o trecho de asa esteja submetido à flexão, sendo o momento, de vetor paralelo e no sentido do eixo Z de referência, com intensidade variável ao longo da direção X . Admita-se, também, que haja uma força cortante passando pelo centro de cisalhamento da seção e alinhada com o eixo Y de referência.

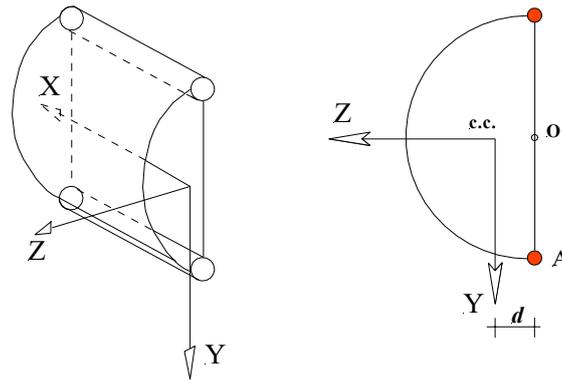


Figura 18 – Trecho de asa e seção fechada com uma célula

Em virtude da variação do momento fletor no trecho, fluxos longitudinais de cisalhamento devem aparecer nas paredes da seção de modo a equilibrar as diferenças de tensões normais transmitidas pelos reforços. Tal afirmativa fica justificada, por exemplo, pelo diagrama de corpo livre de um segmento adjacente ao reforço de área A situado abaixo do eixo de simetria da seção, conforme ilustrado na Figura 19; os fluxos q_0 e q_1 indicados equilibram as diferenças entre as tensões normais decorrentes da suposta variação do momento ao longo da asa.

Tendo-se em vista, portanto, tal condição de equilíbrio, conclui-se que:

$$d\sigma A = (q_0 + q_1) dx \quad \therefore q_1 + q_0 = \frac{d\sigma}{dx} A \quad (28)$$

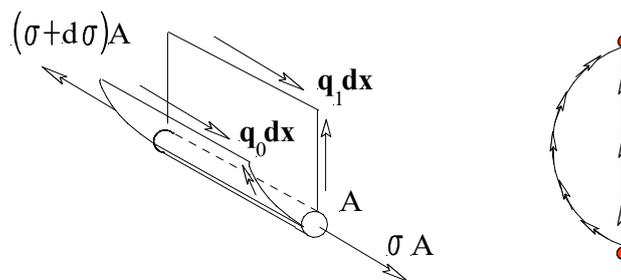


Figura 19 – Equilíbrio de partes do trecho de 'asa'

Levando-se em conta, analogamente como feito no caso da seção aberta, as relações da teoria clássica de flexão (para o cálculo da tensão normal e entre a variação do momento e a cortante), segue que a (28) passa a ser dada por:

$$q_1 + q_0 = \frac{V}{I_z} M_A \quad (29)$$

onde M_A é o momento estático da área do reforço em relação ao eixo de simetria da seção. Nota-se que, agora, há dois fluxos incógnitos e apenas uma relação de equilíbrio.

Considerando-se o caso de seção com uma célula, porém com um número maior de reforços, como a indicada na Figura 20, a análise anterior de equilíbrio, que proporcionou a relação (29), pode ser estendida.

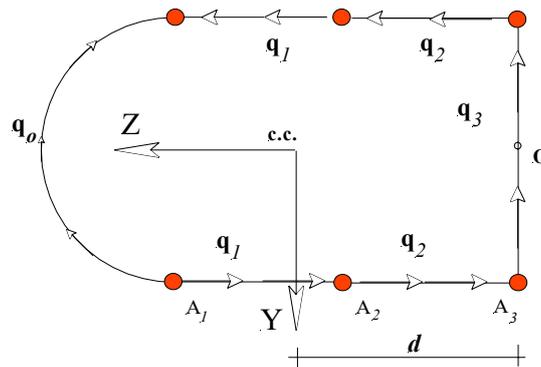


Figura 20 – Seção com uma célula e vários reforços

Genericamente, cada trecho entre reforços passa a ter a indicação de um fluxo. Naturalmente, a simetria da seção garante a igualdade das intensidades dos fluxos atuantes em trechos opostos. Por conveniência, adota-se um dos fluxos como de referência⁵, recebendo a notação q_0 . Nota-se que, propositadamente, o fluxo q_0 tem na Figura 20 sentido contrário em relação aos demais. A adoção dessa convenção facilitará, mais adiante, o emprego das relações para o cálculo do centro de cisalhamento.

A análise do equilíbrio pode ser conduzida de modo a se obter relações para os fluxos incógnitos q_1 , q_2 e q_3 em função do fluxo q_0 . Nesse sentido, isolam-se segmentos definidos a partir de um corte sobre a parede à qual foi associado o fluxo q_0 e um segundo corte sobre o trecho de parede contendo outro fluxo incógnito. A Figura 21 ilustra dois desses segmentos.

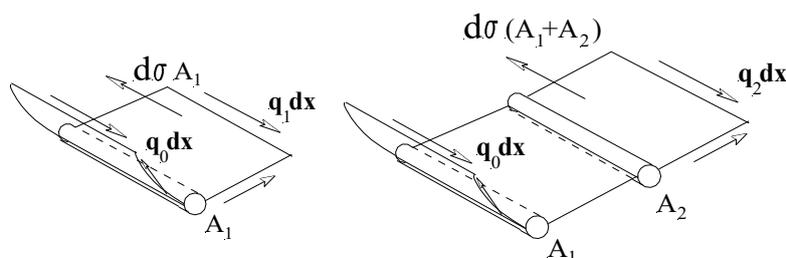


Figura 21 – Equilíbrio de partes do segmento de 'asa'

⁵ O fluxo de referência pode ser adotado em qualquer trecho, respeitando-se a simetria.

Dos equilíbrios dos segmentos mencionados, pode-se propor a seguinte relação geral para os fluxos ao longo da seção:

$$q_i + q_0 = \frac{V}{I_z} M_{A_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (30)$$

onde n é o número de fluxos incógnitos, à exceção do fluxo de referência; M_{A_i} denota os momentos estáticos, em relação ao eixo de simetria da seção, das áreas dos reforços contidos entre o fluxo q_i e o fluxo de referência. Claramente, a (30) indica um sistema indeterminado, com uma incógnita (q_0) a mais que o número de equações; a determinação do fluxo q_0 depende de outra condição.

Como passo inicial para se obter uma condição adicional, retoma-se a hipótese que os fluxos a serem determinados com a (30), uma vez que se conheça q_0 , devam ter como resultante na seção uma força igual à cortante passando pelo centro de cisalhamento. Não havendo efeito de torção associado, também não deverá haver giro relativo por efeito dos fluxos atuantes nas seções externas do trecho isolado para a análise do equilíbrio. Precisamente, a imposição de giro relativo nulo é a condição adicional para a determinação de q_0 .

5. Giro de seções fechadas por efeito de fluxos de cisalhamento

Neste item, trata-se da dedução de uma relação geral para o cálculo do giro relativo, no plano de seções idealizadas, por efeito de fluxos quaisquer de cisalhamento, isto é, não necessariamente associados somente à força cortante, mas, eventualmente, também ao momento de torção. Tais fluxos podem aparecer nas seções quando o carregamento externo (força de sustentação, por exemplo) provoca flexão e torção na asa.

Conforme ilustra a Figura 22, a torção ocorre quando o plano de ação da resultante do carregamento sobre a largura da asa não passa pelo c.c. da seção. Nessa condição, justamente pelo efeito da torção, a seção genérica poderá sofrer um giro no seu plano (em torno do c.c.!), que pode ser visualizado tomando-se por referência a seção fixa de ligação entre a asa e a fuselagem. Naturalmente, porque o giro pode passar de um valor nulo naquela ligação para um valor máximo na ponta da asa, pode-se entender que entre duas seções vizinhas haja um giro relativo.

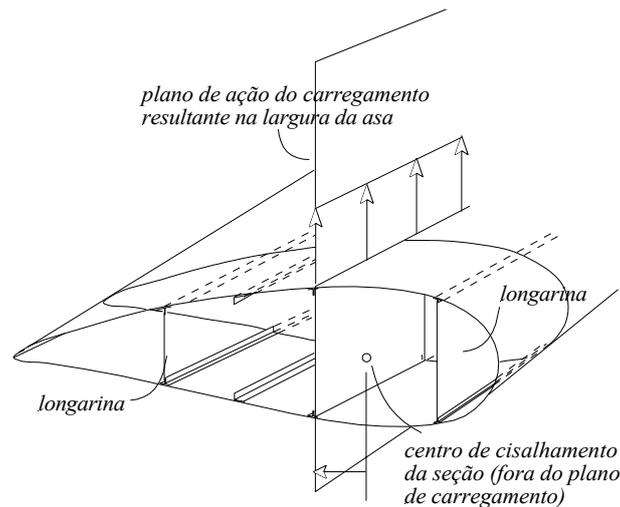


Figura 22 – Plano de ação do carregamento que não contém o c.c. da seção

A relação para o cálculo do giro relativo envolvendo os fluxos nas paredes da seção resulta de uma análise de compatibilidade de deformações por efeito da torção. Existem diferentes modos de conduzir esta análise, porém, neste texto, opta-se pela aplicação do *Princípio das Forças Virtuais*. A conceituação formal deste princípio será descrita mais adiante, no capítulo específico que trata do cálculo de deslocamentos. Nesta parte do texto é suficiente adiantar que em termos gerais tal princípio equivale, essencialmente, à condição de compatibilidade entre os deslocamentos e as deformações sofridas por um sólido ou elemento estrutural, de modo que o mesmo se mantenha íntegro após a deformação.

No caso em estudo, considerando-se um trecho elementar de asa, conforme ilustrado na Figura 23, deve haver compatibilidade entre o giro relativo $d\varphi$ e as distorções angulares γ das paredes da seção, pois a hipótese geral é que a *continuidade* se preserva no elemento deformado.

Em sua concepção, o Princípio envolve dois campos independentes: um (estático) de forças externas e esforços internos ‘virtuais’, constituindo um sistema em equilíbrio, e outro (cinemático) de deslocamentos e deformações ‘reais’. O Princípio é dito de ‘forças virtuais’ porque o campo estático é qualquer e não necessariamente o real do problema, enquanto que o campo cinemático é o real.

No caso em estudo, conforme ilustra a Figura 23, o campo cinemático é formado pelo giro relativo e pelas distorções angulares; já o campo estático é composto por um momento de torção (qualquer!) e um fluxo virtual (constante!) a ele associado.

Nota-se que, genericamente, quando uma seção de parede delgada fechada, podendo ter espessura variável, está submetida somente a um momento de torção a parcela de fluxo (\bar{q}) associada é constante ao longo da parede, conforme se pode concluir do equilíbrio de forças longitudinais num elemento genérico de parede ilustrado no detalhe da Figura 23.

Ao combinar os campos estático e cinemático admitidos, diz-se que o momento realiza no giro relativo um trabalho virtual externo, enquanto que o fluxo realiza nas distorções angulares um trabalho virtual interno. O Princípio aponta para a existência de compatibilidade entre as grandezas cinemáticas se o trabalho virtual externo for igual ao trabalho virtual interno.

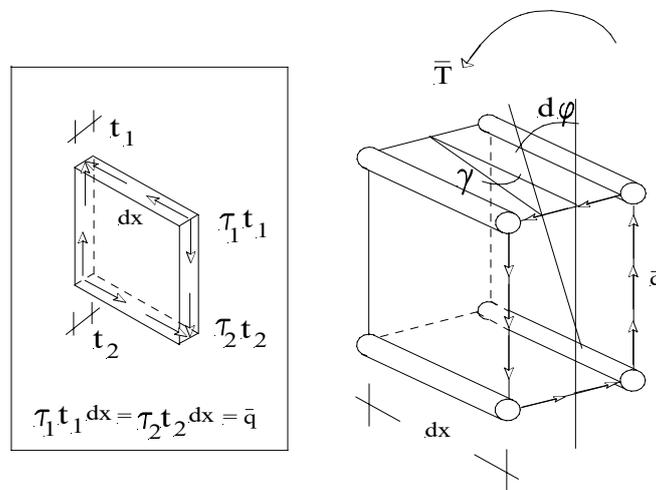


Figura 23 – Detalhe sobre equilíbrio de elemento de parede. Giro relativo e distorção (reais) e momento de torção (virtual).

De modo mais objetivo, na Figura 23 está representada a situação assim descrita: um segmento idealizado de ‘asa’ de comprimento infinitesimal dx , submetido à ação de um momento de torção externo \bar{T} (virtual!), um fluxo virtual \bar{q} e duas grandezas cinemáticas ‘reais’ definidas pelo giro relativo $d\phi$ e pela distorção angular γ da parede da seção.

O Princípio das Forças Virtuais então prescreve que:

$$\bar{T} \cdot d\phi = \sum_{i=1}^N \left(\int_{L_i} \bar{q}_i \gamma_i ds \right) dx \tag{31}$$

onde N é o número de paredes que compõem a seção (cada uma delas com um fluxo ‘virtual’ \bar{q} , em equilíbrio com \bar{T} , e uma distorção γ ‘real’); ainda na (31) L_i é o comprimento do trecho i de parede.

Por outro lado, no item anterior calculou-se o valor do momento de um fluxo atuante num segmento de parede em relação a um ponto arbitrário no plano da seção. Tal cálculo está aqui reproduzido com o objetivo de relacionar \bar{T} com \bar{q} , tendo por referência a notação indicada na Figura 24.

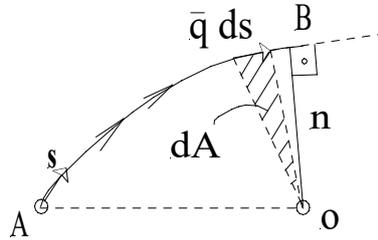


Figura 24 – Momento do fluxo em relação a um ponto

Para uma seção fechada, o momento do fluxo, como já demonstrado, fica dado por:

$$\bar{T} = \int_A 2\bar{q} dA \quad (32)$$

onde A é a área interna da seção. Considerando-se que o fluxo ‘virtual’ correspondente é constante nas paredes da seção, a relação anterior assume a forma:

$$\bar{T} = 2\bar{q} A \quad (33)$$

Por outro lado, na relação (31), as distorções γ_i são ‘reais’ e se relacionam com fluxos ‘reais’ mediante a Lei de Hooke (naturalmente na hipótese de comportamento elástico-linear para o material da asa). Vale, portanto:

$$\gamma_i = \frac{q_i}{Gt_i} \quad (34)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal do material.

Tendo-se em vista a (33) e a (34), segue que a relação (31) passa a ser dada na forma:

$$2\bar{q} A \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \bar{q} \sum_{i=1}^N \int_{L_i} \frac{q_i}{Gt_i} ds \quad (35)$$

ou, uma vez que os fluxos e espessuras são constantes em cada parede,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2GA} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{t_i} L_i \quad (36)$$

Finalmente, a condição para que os giros relativos sejam nulos ao longo de toda a asa é garantida uma vez que se anule a somatória indicada na relação (36), isto é:

$$\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{t_i} L_i = 0 \quad (37)$$

Uma observação complementar é que a relação (36) pode ser empregada para calcular os giros absolutos das seções em relação a uma seção fixa de referência, quando integrada ao longo do comprimento da asa.

6. Determinação do centro de cisalhamento

Como os fluxos de cisalhamento na seção são constantes entre reforços, fica imediato determinar suas resultantes em cada um dos trechos de parede. Nesse sentido, denominando-se por F_i a resultante do fluxo no trecho genérico de parede de comprimento L_i segue que:

$$F_i = q_i L_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (38)$$

Para o exemplo indicado na Figura 20, as resultantes dos fluxos ficam representadas conforme ilustrado na Figura 25.

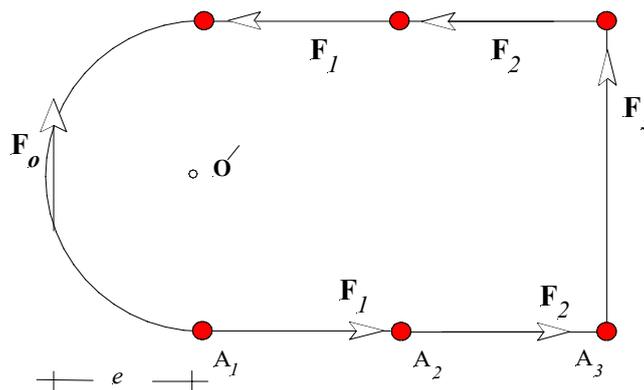


Figura 25 – Resultantes dos fluxos

Em particular, na parte semicircular a posição da resultante do fluxo passa a uma distância e de um ponto O' de referência (posicionado arbitrariamente), determinada pela relação (27).

Como visto a hipótese a ser adotada em qualquer caso e, em particular, na seção em análise, é que os fluxos devem ter como resultante a própria força cortante na seção. No exemplo em tela, como as resultantes dos fluxos nos trechos horizontais se anulam entre si, segue que:

$$F_3 + F_0 = V \quad (39)$$

Nota-se que da (39), levando-se em conta as definições das resultantes dos fluxos, pode-se inferir uma relação para o cálculo do momento de inércia da seção com respeito ao eixo de simetria. Tal relação, portanto, fornece uma alternativa para confirmar o valor do momento de inércia obtido diretamente somando-se as contribuições dos reforços.

Na seqüência passa-se à redução consistente do fluxo a uma única força vertical no plano da seção, conforme se indica na Figura 26.

A condição para a determinação da distância d , que define a posição do centro de cisalhamento, é que o momento da força cortante em relação ao ponto O indicado na Figura 26 (que pode ser escolhido em qualquer outra posição sobre o eixo de simetria) seja igual ao momento dos fluxos em relação ao mesmo ponto:

$$V d = F_0 (e + L_1 + L_2) - (F_1 + F_2) L_3 \quad (40)$$

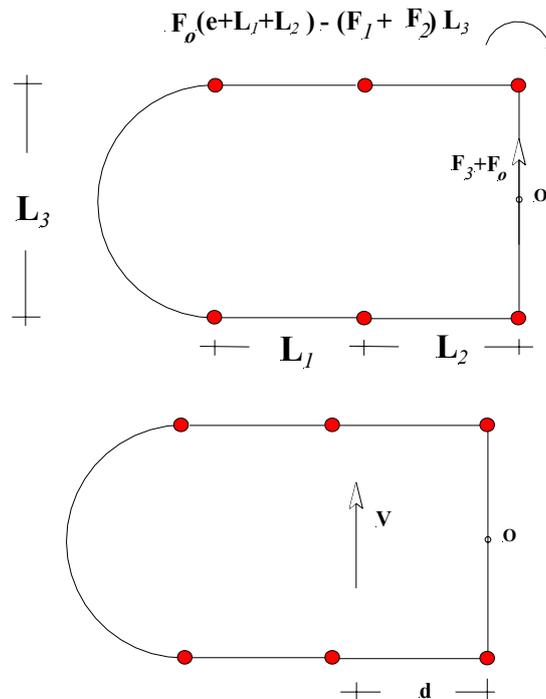


Figura 26 – Redução dos fluxos a uma força equivalente

É importante novamente observar que a posição do centro de cisalhamento depende apenas da geometria da seção, independentemente da intensidade e do sinal da força cortante (que acaba por ser simplificada na relação anterior).

Exemplo 7: Para a seção idealizada indicada na Figura 27, pede-se determinar a posição do c.c. em relação ao ponto O .

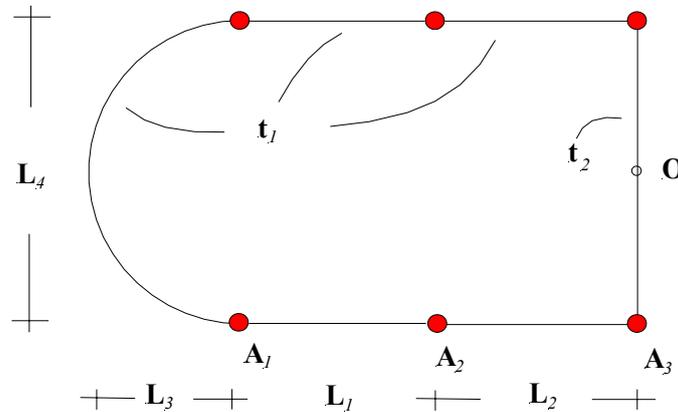


Figura 27 – Elementos geométricos da seção idealizada

Considerem-se os seguintes dados:

$$L_1 = L_2 = 25 \text{ cm}; L_3 = 12,5 \text{ cm}; L_4 = 25 \text{ cm};$$

$$A_1 = A_2 = 3,2 \text{ cm}^2; A_3 = 6,4 \text{ cm}^2; t_1 = 0,1 \text{ cm}; t_2 = 0,16 \text{ cm}.$$

Os fluxos incógnitos são os mesmos indicados na Figura 20.

Os resultados parciais de interesse são:

$$q_1 + q_0 = \frac{V}{I_z}(3,2 \cdot 12,5)$$

$$q_2 + q_0 = \frac{V}{I_z}(6,4 \cdot 12,5)$$

$$q_3 + q_0 = \frac{V}{I_z}(12,8 \cdot 12,5)$$

$$I_z = 4000 \text{ cm}^4;$$

$$q_0 = \frac{V}{I_z} \left(\frac{(3,2.12,5).25.2}{0,1} + \frac{(6,4.12,5).25.2}{0,1} + \frac{(12,8.12,5).25}{0,16} \right) = \frac{V}{I_z} \frac{85000}{1549}$$

$$q_1 = 0,0137 V; q_2 = 0,0063 V; q_3 = 0,0263 V;$$

Finalmente, aplicando-se a relação (40) obtém-se: $d \approx 27,8 \text{ cm}$.

7. Fluxos e centro de cisalhamento de seções fechadas com mais de uma célula

Nas seções idealizadas com mais de uma célula, o número de fluxos de referência a adotar deve ser igual ao número de células, e sua determinação decorre da solução do sistema de equações montado impondo-se de forma independente a condição de giro nulo para cada uma das células.

A Figura 28 mostra uma seção com duas células, com fluxos de referência q_0^1 e q_0^2 adotados em cada uma delas. Na mesma figura indica-se também a posição do centro de cisalhamento (c.c.) em relação a um ponto O arbitrário. A posição do c.c. é inicialmente desconhecida, mas certamente está sobre o eixo horizontal de simetria da seção.

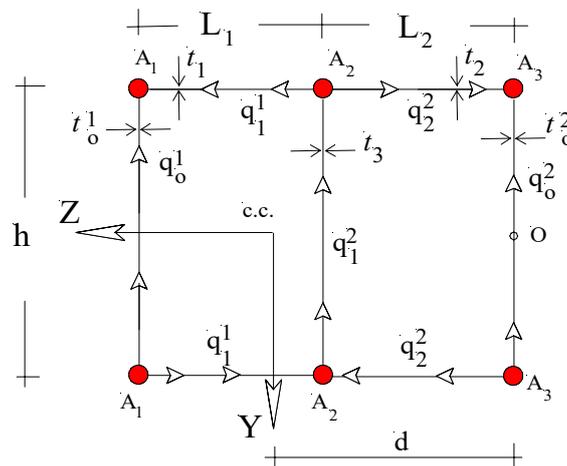


Figura 28 – Fluxos em seção com duas células

Os sentidos indicados para os fluxos foram convenientemente escolhidos de modo a facilitar a aplicação da condição de giro nulo. A análise do equilíbrio pode ser conduzida de modo a se obter relações entre os fluxos incógnitos (q_1^1 , q_1^2 e q_1^3) e os fluxos de referência. Nesse sentido, isolam-se segmentos de profundidade dx com limites laterais definidos a partir de

cortes realizados sobre as paredes da seção aonde atuam os fluxos de referência e outro fluxo incógnito. A Figura 29 ilustra dois desses segmentos.

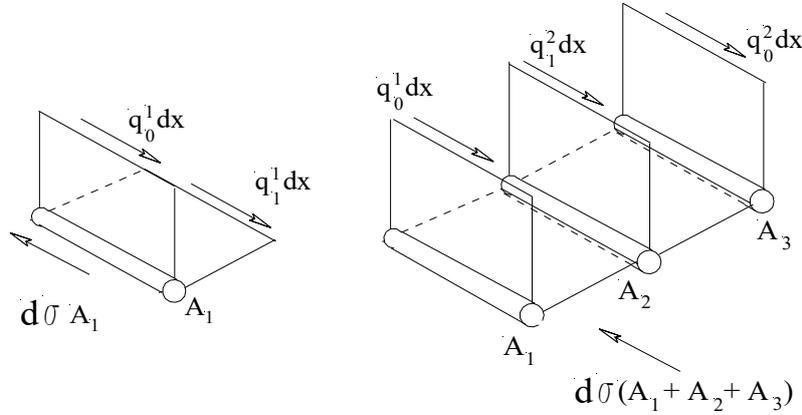


Figura 29 – Equilíbrio de segmentos de ‘asa’

Dos equilíbrios dos três possíveis segmentos, deduzem-se as relações:

$$q_1^1 + q_0^1 = \frac{V}{I_z} M_{A_1} \quad (41)$$

$$q_2^2 + q_0^2 = \frac{V}{I_z} M_{A_3} \quad (42)$$

$$q_1^2 + q_0^1 + q_0^2 = \frac{V}{I_z} M_{(A_1+A_2+A_3)} \quad (43)$$

onde os momentos estáticos são calculados em função das áreas dos reforços contidos em cada segmento. Claramente, as (41-43) indicam um sistema indeterminado, com duas incógnitas a mais do que o número de equações. As equações adicionais representam as condições de giro nulo de cada uma das células e podem ser obtidas pela aplicação da (37), resultando em:

$$-q_0^1 \frac{h}{t_0^1} + q_1^1 \frac{L_1}{t_1} 2 + q_2^2 \frac{h}{t_3} = 0 \quad (44), (45)$$

$$-q_0^2 \frac{h}{t_0^2} + q_2^2 \frac{L_2}{t_2} 2 + q_1^1 \frac{h}{t_3} = 0$$

Operando-se a substituição das (41-43), as relações (44) e (45) assumem as formas:

$$\begin{aligned}
 -q_0^1 \frac{h}{t_0^1} + 2 \frac{L_1 V}{t_1 I_z} M_{A_1} - q_0^1 2 \frac{L_1}{t_1} + \frac{h V}{t_3 I_z} M_{(A_1+A_2+A_3)} - q_0^1 \frac{h}{t_3} - q_0^2 \frac{h}{t_3} &= 0 \\
 -q_0^2 \frac{h}{t_0^2} + 2 \frac{L_2 V}{t_2 I_z} M_{A_2} - 2q_0^2 \frac{L_2}{t_2} + \frac{h V}{t_3 I_z} M_{(A_1+A_2+A_3)} - q_0^1 \frac{h}{t_3} - q_0^2 \frac{h}{t_3} &= 0
 \end{aligned} \tag{46}$$

O sistema estendido formado pelas relações (41-43) e (46) fornece a solução para o cálculo dos fluxos na seção.

Exemplo 8. Para a seção idealizada indicada na Figura 28, pede-se determinar os valores dos fluxos e a posição do centro de cisalhamento, levando-se em conta os seguintes dados geométricos:

$$\begin{aligned}
 L_1 = h = 10 \text{ cm}; L_2 = 20 \text{ cm}; t_0^1 = 0,08 \text{ cm}; t_0^2 = 0,04 \text{ cm}; t_1 = t_2 = 0,04 \text{ cm}; \\
 t_3 = 0,05 \text{ cm}; A_1 = A_2 = A_3 = 1 \text{ cm}^2.
 \end{aligned}$$

O sistema (46) assume a forma:

$$\begin{aligned}
 -q_0^1 \left(\frac{10}{0,08} + 2 \frac{10}{0,04} + \frac{10}{0,05} \right) + \frac{15 \cdot 10 V}{0,05 I_z} + \frac{10 \cdot 5 \cdot 2 V}{0,04 I_z} - q_0^2 \frac{10}{0,05} &= 0 \\
 -q_0^2 \left(\frac{10}{0,04} + 2 \frac{20}{0,04} + \frac{10}{0,05} \right) + \frac{15 \cdot 10 V}{0,05 I_z} + \frac{20 \cdot 5 \cdot 2 V}{0,04 I_z} - q_0^1 \frac{10}{0,05} &= 0
 \end{aligned}$$

A solução fornece:

$$q_0^1 = 5,51 \frac{V}{I_z}; \quad q_0^2 = 4,76 \frac{V}{I_z}.$$

Os outros fluxos incógnitos podem então ser determinados com o auxílio das relações (41-43), resultando em:

$$q_1^1 = -0,51 \frac{V}{I_z}; \quad q_2^2 = 0,24 \frac{V}{I_z}; \quad q_1^2 = 4,73 \frac{V}{I_z}.$$

Com as resultantes dos fluxos em cada trecho de parede, pode-se construir a relação para o cálculo da posição do centro de cisalhamento com respeito

ao ponto O indicado na Figura 28. Admitindo-se que a força cortante (V) na seção tenha sentido para cima, tal relação resulta:

$$V \cdot d = [5,51 \cdot 10 \cdot 30 + 4,73 \cdot 10 \cdot 20 + (0,51 \cdot 10 + 0,24 \cdot 20) \cdot 10] \frac{V}{I_z}$$

O momento de inércia é formado pelas contribuições dos reforços, considerando-se apenas as parcelas relativas aos transportes em relação ao eixo de simetria da seção:

$$I_z = (1 + 1 + 1) \cdot 5^2 \cdot 2 = 150 \text{ cm}^4$$

Finalmente, para a posição do c.c. obtém-se a seguinte resposta:

$$d \cong 18,0 \text{ cm}.$$

Exemplo 9. Para a seção idealizada indicada na Figura 30, pede-se determinar a posição do centro de cisalhamento. A seção original possui espessura constante (t).

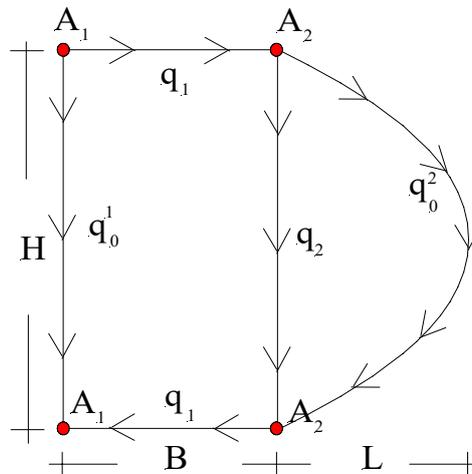


Figura 30 – Elementos geométricos da seção idealizada e fluxos

Os dados geométricos indicados na figura são os seguintes:

$$L = 15,0 \text{ cm}; H = 30,0 \text{ cm}; B = 30,0 \text{ cm}; A_1 = A_2 = 3,2 \text{ cm}^2.$$

Em particular para a aplicação da relação que fornece os giros das células, um dado complementar importante é o comprimento do trecho parabólico, aonde se distribui o fluxo q_0^2 . Na Figura 31, representa-se uma parábola posicionada em relação a um referencial cartesiano.

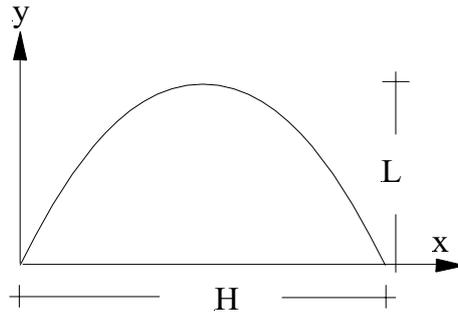


Figura 31 – Parábola do segundo grau

Entre os elementos geométricos de interesse da parábola estão a sua área e o seu comprimento.

A área (S) tem relação conhecida: $S = \frac{2}{3} H.L$

Já o comprimento (s) resulta da seguinte integral: $s = \int_0^H (1 + y'^2)^{1/2} dx$.

No caso indicado na figura, as expressões da parábola e sua primeira derivada são:

$$y = -\frac{4L}{H^2}x^2 + \frac{4L}{H}x ; \quad y' = -\frac{8L}{H^2}x + \frac{4L}{H}$$

De modo que, para cada valor prescrito para H e L , o comprimento calcula-se mediante a relação:

$$s = \frac{1}{H^2} \int_0^H \sqrt{H^4 + 64L^2x^2 + 16H^2L^2 - 64L^2Hx} dx$$

Particularizando a integral anterior para a parábola deste exemplo, calcula-se o seguinte valor aproximado para o comprimento: $s \approx 44,37 \text{ cm}$.

Voltando ao equilíbrio dos dois possíveis segmentos, deduzem-se as relações:

$$q_1 + q_0^1 = \frac{V}{I_z} (3,2.15) = 48 \frac{V}{I_z}$$

$$q_2 + q_0^1 + q_0^2 = \frac{V}{I_z} (3,2.15.2) = 96 \frac{V}{I_z}$$

As equações adicionais representando as condições de giro nulo de cada uma das células resultam em:

$$-q_0^1 \frac{30}{t} + q_1 \frac{30}{t} 2 + q_2 \frac{30}{t} = 0$$

$$-q_0^2 \frac{44,37}{t} + q_2 \frac{30}{t} = 0$$

A solução do sistema formado pelas relações anteriores fornece:

$$q_0^1 = 38,2 \frac{V}{I_z}; \quad q_0^2 = 39,0 \frac{V}{I_z}; \quad q_1 = 9,8 \frac{V}{I_z}; \quad q_2 = 18,8 \frac{V}{I_z}.$$

Para o cálculo do centro de cisalhamento, os fluxos calculados precisam ser reduzidos de forma estaticamente equivalente a uma única força cortante (supostamente vertical) no plano da seção. Nesse procedimento, adota-se, em primeiro lugar, um ponto de referência sobre o eixo de simetria da seção, por exemplo, o ponto *O* indicado na Figura 32, e então todos os fluxos são reduzidos a uma força passando pelo ponto e um momento.

O passo seguinte é impor que o conjunto força-momento seja equivalente à força cortante passando pelo centro de cisalhamento. No caso deste exemplo, a resultante vertical dos fluxos (que se iguala à força cortante na seção) resulta:

$$V = 1146 \frac{V}{I_z} + 564 \frac{V}{I_z} + 1170 \frac{V}{I_z}$$

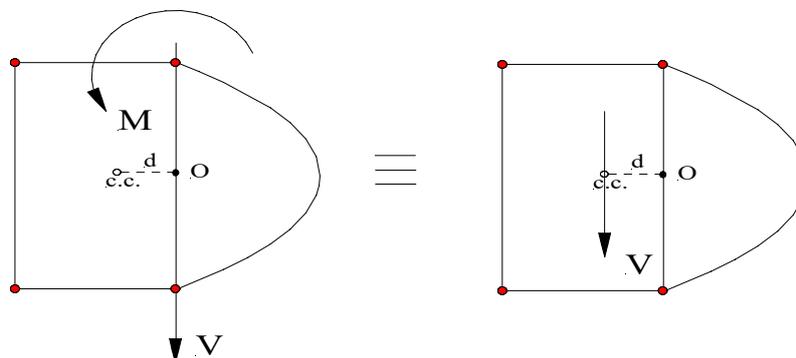


Figura 32 – Equivalência entre resultantes dos fluxos e força cortante na seção

Já o momento dos fluxos em relação ao ponto *O* de referência fica determinado por:

$$M = 1146 \frac{V}{I_z} \cdot 30 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 15 \cdot 30 \right) \cdot 39 \frac{V}{I_z} = 10980,0 \frac{V}{I_z}.$$

Da primeira relação pode-se tirar o valor do momento de inércia da seção:

$$I_z = 2880,0 \text{ cm}^4.$$

Este mesmo valor pode ser calculado diretamente, a partir das contribuições dos reforços:

$$I_z = 3,2 \cdot 15^2 \cdot 4 = 2880,0 \text{ cm}^4.$$

Finalmente, da equivalência entre os momentos do fluxo e da força cortante, tem-se:

$$M = V \cdot d \rightarrow V \cdot d = 10980 \frac{V}{I_z} \therefore d \approx 3,8 \text{ cm}.$$

8. Fluxos e centro de cisalhamento em seções idealizadas abertas de geometria qualquer: comentários gerais.

É possível generalizar o estudo anterior sobre a determinação dos fluxos e do centro de cisalhamento para o caso de seções sem qualquer eixo de simetria.

No sentido de entender a generalização, é importante observar que nos casos resolvidos anteriormente em que havia um eixo de simetria, já se sabia à partida que o centro de cisalhamento estaria em alguma posição sobre esse eixo. Portanto, a solução consistia em deduzir uma única relação (representativa da equivalência estática entre os momentos dos fluxos e o de uma única força cortante ortogonal ao eixo de simetria) para a determinação daquela posição com respeito a um ponto de redução arbitrariamente escolhido sobre o eixo de simetria.

Pois bem, no caso geral, de seção sem simetria, o centro de cisalhamento tem sua posição definida por duas coordenadas em relação a um ponto de redução arbitrariamente escolhido. As duas equações que permitem determinar essas coordenadas resultam de dois problemas independentes, sendo que em cada um deles admite-se a existência de uma única força cortante na seção de direção paralela a um dos eixos de referência adotados no plano da seção.

Assim sendo, num primeiro problema, por exemplo, a seção está submetida a um momento de flexão e uma força de corte (M_z, V_y) , ambos com seus vetores alinhados aos eixos de referência, Z e Y , respectivamente, no plano da seção. Analogamente, no segundo problema a seção está submetida ao par complementar (M_y, V_z) , agora com vetores alinhados aos eixos Y e Z , respectivamente. É também importante observar que a cada um dos momentos corresponde uma idealização da seção e que os eixos de referência têm, por hipótese, origem no *centro de gravidade* da seção, o que viabiliza o emprego direto da relação (2) para o cálculo das tensões normais.

Apenas para fins de um equacionamento que contemple os dois problemas, no que segue não se faz uma distinção entre um ou outro. Nesse sentido, o conceito de determinação dos fluxos de cisalhamento por análise do equilíbrio de partes da seção contendo reforços se mantém, de modo que a relação (9), por exemplo, permanece válida. Reescrevendo-se aquela relação em forma generalizada para um trecho (i) qualquer, isolado a partir de uma das extremidades da seção (porque se trata de uma seção aberta), tem-se:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N_r} \frac{d\sigma_j}{dx} A_j \quad (47)$$

onde A_j representa a área do reforço j contido no trecho isolado e N_r refere-se ao número de reforços no mesmo trecho.

A derivada que aparece na relação anterior passa a ser escrita tendo-se em vista a (2) (naturalmente lembrando que neste caso não há força normal ao plano da seção), apresentando a seguinte forma:

$$\frac{d\sigma_j}{dx} = + \frac{\left(\frac{dM_z}{dx} I_y - \frac{dM_y}{dx} I_{yz} \right)}{\left(I_z I_y - I_{yz}^2 \right)} y_j + \frac{\left(\frac{dM_y}{dx} I_z - \frac{dM_z}{dx} I_{yz} \right)}{\left(I_z I_y - I_{yz}^2 \right)} z_j \quad (48)$$

Introduzindo a relação conhecida entre a derivada do momento fletor e a força cortante, estendida para as componentes dos momentos e das forças de corte consideradas nesta análise, a (48) assume a forma:

$$\frac{d\sigma_j}{dx} = + \frac{\left(V_y I_y - V_z I_{yz} \right)}{\left(I_z I_y - I_{yz}^2 \right)} y_j + \frac{\left(V_z I_z - V_y I_{yz} \right)}{\left(I_z I_y - I_{yz}^2 \right)} z_j \quad (49)$$

Substituindo-se a (49) na (47), segue que:

$$q_i = + \frac{(V_y I_y - V_z I_{yz})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N_r} A_j y_j \right)}_{M_{S_{zi}}} + \frac{(V_z I_z - V_y I_{yz})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N_r} A_j z_j \right)}_{M_{S_{yi}}} \quad (50)$$

Ou ainda,

$$q_i = \frac{V_y (I_y M_{S_{zi}} - I_{yz} M_{S_{yi}}) + V_z (I_z M_{S_{yi}} - I_{yz} M_{S_{zi}})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} \quad (51)$$

A relação anterior serve, então, aos dois problemas a serem analisados de forma independente, que contemplam ora V_y , ora V_z , sendo que as grandezas geométricas envolvidas (momentos de primeira e segunda ordem) são particularizadas de acordo com a idealização da seção em cada caso.

Em cada problema, uma vez calculados os fluxos, determinam-se suas resultantes em cada trecho de seção idealizada. As componentes dessas resultantes segundo os eixos de referência, quando transportadas para um ponto de redução escolhido arbitrariamente no plano da seção⁶, irão compor forças cortantes e momentos. A determinação da posição do centro de cisalhamento resulta da redução consistente dessas forças e momentos à uma única força cortante passando pelo centro de cisalhamento; esta equivalência é construída em cada problema. Montam-se, portanto, duas equações independentes cujas incógnitas são as componentes segundo os eixos de referência da distância do centro de cisalhamento ao ponto de redução.

No caso geral, pode não mais ser válido o procedimento, empregado nos casos com um eixo de simetria, de identificação prévia arbitrária dos fluxos, isto é, simplesmente adotando-se um sentido de percurso ao longo da seção. Assim sendo, notando que na (51) o sinal do fluxo fica determinado apenas pelos momentos estáticos, propõe-se uma convenção geral definida pelo seguinte critério:

- Se $q_i > 0$, o fluxo no segmento isolado aponta para a seção de corte;
- Se $q_i < 0$, o fluxo no segmento isolado diverge da seção de corte.

⁶ O ponto de redução é o mesmo em cada problema.

O exemplo seguinte ilustra a determinação do centro de cisalhamento para uma seção sem qualquer simetria.

Exemplo 10. A determinação da posição do centro de cisalhamento para a seção (de espessura constante t) indicada na Figura 33 será feita primeiramente sem recurso à idealização e, depois, considerando a idealização.

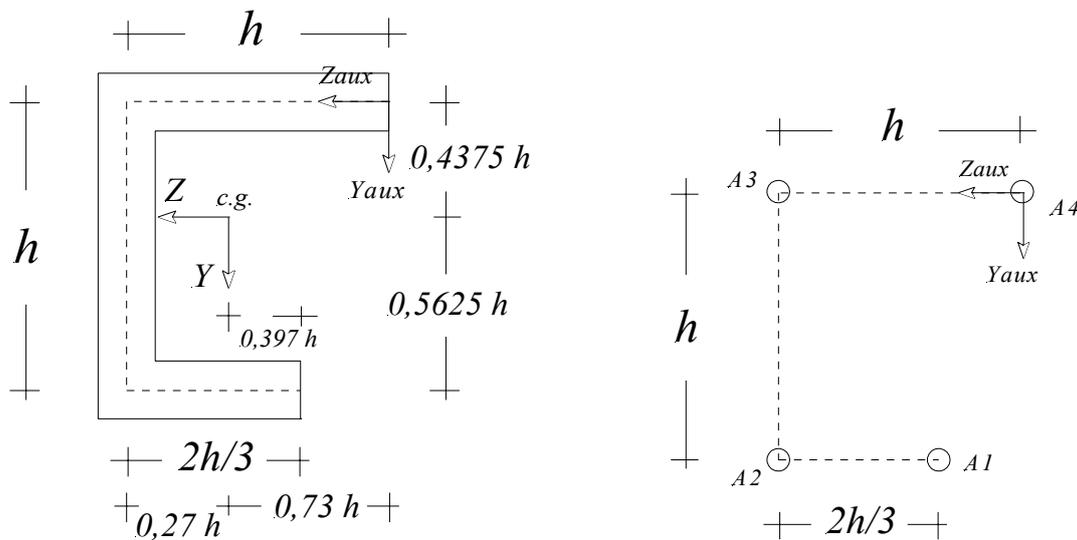


Figura 33 – Seção original e idealizada sem simetria

Na figura já está indicada a posição do centro de gravidade, obtida a partir de eixos auxiliares Z_{aux} e Y_{aux} ; indicam-se, também, as distâncias do c.g. aos trechos que formam a linha do esqueleto, cujos valores serão empregados nos cálculos que seguem.

Inicialmente, a área da seção vale: $\frac{8ht}{3}$.

Os momentos de segunda ordem em relação aos eixos centrais Z e Y incluem, nos seus cálculos, parcelas de transporte e valem:

$$I_z = \frac{2ht}{3}(0,5625h)^2 + ht(0,4375h)^2 + \frac{th^3}{12} + ht(0,0625h)^2 = 0,49h^3t$$

$$I_y = \frac{2ht}{3}(0,0633h)^2 + ht(0,27h)^2 + \frac{th^3}{12} + ht(0,23h)^2 + \frac{8th^3}{12.27} = 0,2365h^3t$$

$$I_{yz} = -\frac{2ht}{3}(0,5625h)(0,0633h) + ht(0,4375h)(0,23h) + ht(0,0625h)(0,27h)$$

$$= 0,09375h^3t$$

$$I_z I_y - I_{yz}^2 = 0,1071 h^6 t^2$$

Numa primeira situação, imagina-se que a seção esteja submetida somente à uma força cortante de direção vertical, isto é: $V = V_y$. Neste caso a relação (51), para o cálculo dos fluxos, se particulariza para:

$$q_i = \frac{V(I_y M_{S_{zi}} - I_{yz} M_{S_{yi}})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)}$$

A relação anterior pode, então, ser aplicada para a determinação dos fluxos em cada um dos três trechos da seção, uma vez que se conheçam os momentos estáticos. A divisão da seção em trechos é assim definida: para o trecho 1, adota-se a aba horizontal inferior da seção; para o trecho 2, a aba vertical e, para o trecho 3, a aba horizontal superior. Uma das extremidades de cada um dos trechos é escolhida como origem da coordenada local, que percorre a linha do esqueleto, sendo necessária para o equacionamento dos momentos estáticos⁷.

Considerando-se o primeiro trecho e adotando-se a extremidade da direita para origem da coordenada local, determinam-se as seguintes relações para os momentos estáticos em relação aos eixos centrais de referência:

$$M_{S_{z1}} = st0,5625h; \quad M_{S_{y1}} = -st0,397h + \frac{ts^2}{2}$$

Para fins do cálculo do centro de cisalhamento, interessa obter diretamente a resultante (F_1) do fluxo no trecho, definida por: $F_1 = \int_0^{2h/3} q_1 ds$. Assim sendo:

$$F_1 = \frac{V}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} \left[I_y 0,5625ht \frac{4h^2}{18} - I_{yz} \left(-0,397th \frac{4h^2}{18} + \frac{8h^3t}{162} \right) \right] \cong 0,31V$$

No segundo trecho, a origem local é posicionada na extremidade inferior, obtendo-se para os momentos estáticos as seguintes relações:

⁷ Os momentos estáticos possuem sinais atrelados às coordenadas em relação aos eixos de referência adotados.

$$M_{S_{z2}} = 0,375h^2t + st\left(0,5625h - \frac{s}{2}\right); \quad M_{S_{y1}} = st0,27h - 0,0424h^2t$$

Para a resultante (F_2) do fluxo no trecho obtém-se:

$$F_2 = \frac{V}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} \left[I_y \left(0,5625 \frac{th^3}{2} - \frac{th^3}{6} + 0,375h^3t \right) - I_{yz} \left(-0,0424th^3 + \frac{0,27h^3t}{2} \right) \right] \cong V$$

No terceiro trecho, a origem local é posicionada na extremidade direita, obtendo-se para os momentos estáticos as seguintes relações:

$$M_{S_{z1}} = -st0,4375h; \quad M_{S_{y1}} = -st\left(0,73h - \frac{s}{2}\right)$$

Para a resultante (F_3) do fluxo obtém-se:

$$F_3 = \frac{V}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} \left[-I_y h^3 t \frac{0,4375}{2} - I_{yz} \left(-th^3 \frac{0,73}{2} + \frac{h^3t}{6} \right) \right] \cong -0,31V$$

O equacionamento para a determinação da posição (d) do centro de cisalhamento tem por base a equivalência ilustrada na Figura 34⁸:

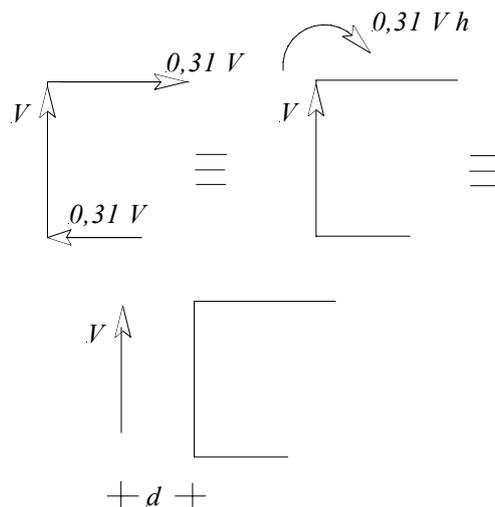


Figura 34 – Redução dos fluxos à uma força cortante

⁸ Os sentidos indicados para as resultantes dos fluxos decorrem da convenção estabelecida para os fluxos.

A relação de equivalência exprime a igualdade entre o momento das forças dos fluxos e do momento da força cortante em relação a um ponto qualquer sobre a linha do esqueleto da aba vertical:

$$V d = 0,31V h \quad \text{ou:} \quad d = 0,31h$$

Na segunda situação, supõe-se que a seção esteja submetida somente à uma força cortante de direção horizontal, isto é: $V = V_z$. Neste caso, a relação (51) para o cálculo dos fluxos se particulariza para:

$$q_i = \frac{V_z (I_z M_{S_{yi}} - I_{yz} M_{S_{zi}})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)}$$

Os momentos estáticos para cada trecho são os mesmos equacionados na primeira situação. Assim sendo, pode-se passar de imediato ao cálculo das resultantes dos fluxos em cada trecho, obtendo-se, sucessivamente:

$$F_1 = \left(\frac{V}{I_z I_y - I_{yz}^2} \right) \left[-I_{yz} 0,5625 \frac{4h^3 t}{18} + I_z \left(-0,397 t h \frac{4h^2}{18} + \frac{8h^3 t}{162} \right) \right] \cong -0,2871V$$

$$F_2 = \left(\frac{V}{I_z I_y - I_{yz}^2} \right) \left[-I_{yz} \left(0,5625 \frac{th^3}{2} - \frac{th^3}{6} + 0,375h^3 t \right) + I_z \left(-0,0424th^3 + \frac{0,27h^3 t}{2} \right) \right] \\ \cong 0$$

$$F_3 = \left(\frac{V}{I_z I_y - I_{yz}^2} \right) \left[-I_{yz} h^3 t \frac{0,4375}{2} + I_z \left(-th^3 \frac{0,73}{2} + \frac{h^3 t}{6} \right) \right] \cong -0,716V$$

O equacionamento para a determinação da posição (c) do centro de cisalhamento tem por base a equivalência ilustrada na Figura 35:

Tomando-se a aba superior como referência para a distância procurada, a relação de equivalência neste caso escreve-se como:

$$V c = 0,2871V h \quad \text{ou:} \quad c = 0,2871h$$

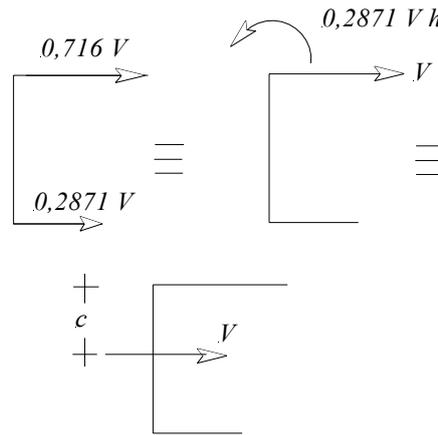


Figura 35 – Redução dos fluxos à uma força cortante

A mesma solução para a posição do centro de cisalhamento pode ser obtida mediante idealização da seção. Apesar de que no caso das seções sem qualquer simetria o procedimento é mais oneroso, toda a análise é aqui apresentada para fins de ilustração.

O primeiro passo é a idealização da seção, a qual pressupõe a existência de um momento de flexão (que, no caso geral, pode ser oblíquo em relação aos eixos de referência). De fato, as relações envolvidas na estimativa da área equivalente a um trecho de seção são as seguintes:

$$A_i = \frac{t \cdot b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \right)$$

$$\sigma_i = + \frac{(M_z I_y - M_y I_{yz})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} y_i + \frac{(M_y I_z - M_z I_{yz})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)} z_i$$

Onde i refere-se ao ponto da extremidade do trecho à qual irá se atrelar a área equivalente e j é o ponto da outra extremidade.

A aplicação dessas relações ao problema em questão é feita considerando-se que duas análises devem ser conduzidas, cada qual determinando uma das coordenadas do centro de cisalhamento. Assim sendo, para cada análise realiza-se uma idealização específica, admitindo-se que, para este fim, exista um vetor de momento de flexão alinhado com uma das direções de referência, Z ou Y .⁹

⁹ Os sentidos positivos para os vetores de momento são os aqueles indicados na Figura 4.

Portanto, admita-se que na seção atue um momento de flexão M_z , com vetor alinhado com o eixo Z de referência, e uma força cortante vertical. A relação para o cálculo da tensão normal em pontos da seção fica particularizada para a seguinte forma:

$$\sigma_i = M_z \frac{(I_y y_i - I_{yz} z_i)}{(I_z I_y - I_{yz}^2)}$$

A Figura 33, à direita, mostra a seção idealizada, com a indicação das áreas equivalentes.

Para o cálculo da área 1, empregam-se:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{(I_y y_2 - I_{yz} z_2)}{(I_y y_1 - I_{yz} z_1)} = 0,6238$$

$$A_1 = \frac{t \cdot 2h}{3.6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) = 0,2925 ht$$

Para o cálculo da área 2, valem:

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{(I_y y_3 - I_{yz} z_3)}{(I_y y_2 - I_{yz} z_2)} = -1,1955$$

$$A_2 = \frac{t \cdot 2h}{3.6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + \frac{t \cdot h}{6} \left(2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \right) = 0,5319 ht$$

Para a área 3, valem:

$$\frac{\sigma_4}{\sigma_3} = \frac{(I_y y_4 - I_{yz} z_4)}{(I_y y_3 - I_{yz} z_3)} = 0,272$$

$$A_3 = \frac{t \cdot h}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right) + \frac{t \cdot h}{6} \left(2 + \frac{\sigma_4}{\sigma_3} \right) = 0,5726 ht$$

Finalmente, para a área 4:

$$A_4 = \frac{th}{6} \left(2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_4} \right) = 0,946ht$$

Uma vez obtida a idealização, o problema é retomado do seu início, determinando-se, sucessivamente, a posição do centro de gravidade da seção idealizada, os momentos estáticos e os fluxos em cada trecho de seção.

Para a posição do centro de gravidade em relação aos eixos auxiliares indicados na Figura 33, à direita, obtêm-se:

$$y_{cg} = \frac{\sum_i A_i y_i}{\sum_i A_i} = \frac{(0,5319 + 0,2925)}{2,343} = 0,3518h$$

$$z_{cg} = \frac{\sum_i A_i z_i}{\sum_i A_i} = \frac{(0,5319 + 0,5726h) + 0,2925 \frac{h}{3}}{2,343} = 0,513h$$

Os fluxos de cisalhamento são constantes nos trechos de seção entre as áreas da idealização. O primeiro trecho é definido entre as áreas 1 e 2. Para o fluxo nesse trecho, interessam os momentos estáticos da área A_1 relativos aos eixos de referência, agora posicionados com origem no centro de gravidade da área idealizada:

$$M_{A_1z} = 0,2925ht \cdot 0,6482h = 0,1896h^2t;$$

$$M_{A_1y} = 0,2925ht \cdot (-0,18h) = -0,05265h^2t$$

O fluxo neste trecho calcula-se pela aplicação da relação:

$$q_i = \frac{V(I_y M_{S_{zi}} - I_{yz} M_{S_{yi}})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)}$$

Os momentos de segunda ordem que aparecem na relação anterior são, agora, calculados em relação aos eixos de referência da seção idealizada. Portanto, desenvolvem-se os seguintes cálculos:

$$I_z = (A_3 + A_4)0,3518^2 + (A_2 + A_1)0,6482^2 = 0,5343h^3t$$

$$I_y = (A_2 + A_3)0,487^2 + A_4 \cdot 0,513^2 + A_1 \cdot 0,18^2 = 0,52h^3t$$

$$I_{yz} = -A_1 \cdot 0,6482 \cdot 0,18 + A_2 \cdot 0,6482 \cdot 0,4857 - A_3 \cdot 0,487 \cdot 0,3518 + A_4 \cdot 0,3518 \cdot 0,513 = 0,2063 h^3 t$$

$$I_y I_z - I_{yz}^2 = 0,2353 h^3 t$$

Com os resultados anteriores, calcula-se, para o primeiro trecho:

$$q_1 = \frac{(0,52 \cdot 0,1896 + 0,2063 \cdot 0,05625) h^5 t^2}{0,2353 h^6 t^2} = 0,4652 \frac{V}{h}$$

No segundo trecho, entre as áreas 2 e 3, os momentos estáticos resultam:

$$M_{(A_1+A_2)_z} = (0,2925 + 0,5319) ht \cdot 0,6482 h = 0,5344 h^2 t;$$

$$M_{(A_1+A_2)_y} = -0,05265 h^2 t + 0,5319 ht \cdot (0,487 h) = 0,2064 h^2 t$$

O fluxo correspondente é dado por:

$$q_2 = \frac{(0,52 \cdot 0,5344 - 0,2063 \cdot 0,2064) h^5 t^2}{0,2353 h^6 t^2} = 1,0 \frac{V}{h}$$

Para o terceiro trecho, entre as áreas 3 e 4, obtêm-se:

$$M_{(A_1+A_2+A_3)_z} = 0,5344 h^2 t - 0,5726 ht \cdot 0,3518 h = 0,3329 h^2 t;$$

$$M_{(A_1+A_2+A_3)_y} = 0,2064 h^2 t + 0,5726 ht \cdot 0,487 h = 0,4852 h^2 t$$

O fluxo correspondente é determinado por:

$$q_3 = \frac{(0,52 \cdot 0,3329 - 0,2063 \cdot 0,4852) h^5 t^2}{0,2353 h^6 t^2} = 0,31 \frac{V}{h}$$

As resultantes dos fluxos são idênticas àquelas obtidas quando da análise da seção original, de modo que o equacionamento ilustrado na Figura 34 é o mesmo. Assim sendo, o posicionamento do centro de cisalhamento em relação à esquerda da aba vertical fica determinado por:

$$d = 0,31h$$

Para a obtenção da outra coordenada do centro de cisalhamento, resolve-se um segundo problema, onde se admite que na seção atue um momento de flexão M_y , com vetor alinhado com o eixo Y de referência, e uma força cortante de direção horizontal. A relação para o cálculo da tensão normal em pontos da seção fica particularizada para a seguinte forma:

$$\sigma_i = M_y \frac{(I_z z_i - I_{yz} y_i)}{(I_z I_y - I_{yz}^2)}$$

Procede-se à uma nova idealização da seção, voltando a empregar na relação anterior os momentos de segunda ordem da seção original. Nesse sentido, para o cálculo da área 1, emprega-se:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{(I_z z_2 - I_{yz} y_2)}{(I_z z_1 - I_{yz} y_1)} = -0,32917$$

$$A_1 = \frac{t \cdot 2h}{3.6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) = 0,18645 ht$$

Para o cálculo da área 2, valem:

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{(I_z z_3 - I_{yz} y_3)}{(I_z z_2 - I_{yz} y_2)} = 2,1783$$

$$A_2 = \frac{t \cdot 2h}{3.6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + \frac{t \cdot h}{6} \left(2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \right) = 0,5735 ht$$

Para a área 3, valem:

$$\frac{\sigma_4}{\sigma_3} = \frac{(I_z z_4 - I_{yz} y_4)}{(I_z z_3 - I_{yz} y_3)} = -1,8272$$

$$A_3 = \frac{t \cdot h}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right) + \frac{t \cdot h}{6} \left(2 + \frac{\sigma_4}{\sigma_3} \right) = 0,4386 ht$$

Finalmente, para a área 4:

$$A_4 = \frac{th}{6} \left(2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_4} \right) = 0,2421ht$$

Uma vez obtida a idealização, o problema é retomado do seu início, determinando-se, sucessivamente, a posição do centro de gravidade da seção idealizada, os momentos estáticos e os fluxos em cada trecho entre áreas equivalentes.

Para a posição do centro de gravidade em relação aos eixos auxiliares indicados na Figura 33, obtêm-se:

$$y_{cg} = \frac{\sum_i A_i y_i}{\sum_i A_i} = \frac{(0,18645 + 0,5735)}{1,44065} = 0,5275h$$

$$z_{cg} = \frac{\sum_i A_i z_i}{\sum_i A_i} = \frac{(0,5735 + 0,4386h) + 0,18645 \frac{h}{3}}{1,44065} = 0,7457h$$

Com esses resultados é possível determinar os valores dos momentos de segunda ordem da seção idealizada:

$$I_z = (A_3 + A_4)0,5275^2 + (A_2 + A_1)0,4725^2 = 0,359h^3t$$

$$I_y = (A_2 + A_3)0,2543^2 + A_4 \cdot 0,7457^2 + A_1 \cdot 0,41237^2 = 0,23178h^3t$$

$$I_{yz} = -A_1 \cdot 0,41237 \cdot 0,4725 + A_2 \cdot 0,2543 \cdot 0,4725 - A_3 \cdot 0,5275 \cdot 0,2543 + A_4 \cdot 0,7457 \cdot 0,5275 = 0,069h^3t$$

$$I_y I_z - I_{yz}^2 = 0,0784h^3t$$

Para o cálculo dos fluxos interessa a seguinte relação:

$$q_i = \frac{V(I_z M_{S_{yi}} - I_{yz} M_{S_{zi}})}{(I_z I_y - I_{yz}^2)}$$

Para os momentos estáticos da área A_1 , escrevem-se:

$$M_{A_1z} = 0,18645 ht \cdot 0,4725 h = 0,088 h^2 t;$$

$$M_{A_1y} = 0,18645 ht \cdot (-0,41237 h) = -0,0769 h^2 t$$

O fluxo no primeiro trecho resulta:

$$q_1 = V \frac{(-0,359 \cdot 0,0769 - 0,069 \cdot 0,088) h^5 t^2}{0,0784 h^6 t^2} = 0,4296 \frac{V}{h}$$

No segundo trecho, entre as áreas 2 e 3, os momentos estáticos resultam:

$$M_{(A_1+A_2)z} = (0,18645 + 0,5735) ht \cdot 0,4725 h = 0,359 h^2 t;$$

$$M_{(A_1+A_2)y} = -0,18645 \cdot 0,41237 h^2 t + 0,5735 ht \cdot (0,2543 h) = 0,069 h^2 t$$

O fluxo correspondente é dado por:

$$q_2 = \frac{(0,359 \cdot 0,069 - 0,069 \cdot 0,359) h^5 t^2}{0,0784 h^6 t^2} = 0,0 \frac{V}{h}$$

Para o terceiro trecho, entre as áreas 3 e 4, obtêm-se:

$$M_{(A_1+A_2+A_3)z} = 0,359 h^2 t - 0,4386 ht \cdot 0,5275 = 0,1276 h^2 t;$$

$$M_{(A_1+A_2+A_3)y} = 0,069 h^2 t + 0,4386 ht \cdot 0,2543 h = 0,1805 h^2 t$$

O fluxo correspondente é dado por:

$$q_3 = \frac{(0,359 \cdot 0,1805 - 0,069 \cdot 0,1276) h^5 t^2}{0,0784 h^6 t^2} = 0,714 \frac{V}{h}$$

As resultantes dos fluxos são idênticas às obtidas na situação correspondente do caso da análise da seção original, de modo que o equacionamento ilustrado na Figura 35 é o mesmo. Assim sendo, o posicionamento do centro de cisalhamento em relação à esquerda da aba vertical fica determinado por:

$$c = 0,287h$$

CAPÍTULO 5 ASAS COM SEÇÕES VARIÁVEIS

Neste capítulo dá-se continuidade à abordagem simplificada, iniciada no capítulo anterior, fundamentalmente baseada na condição de equilíbrio, passando à determinação dos fluxos de cisalhamento nas paredes e forças axiais nos reforços, de seções que compõem as estruturas das asas.

1. Análise simplificada para a determinação de fluxos de cisalhamento em asas com dimensões variáveis ao longo do comprimento

Os exemplos deste item pretendem ilustrar o efeito das variações das dimensões das seções transversais das asas sobre a determinação dos fluxos de cisalhamento nas chapas e forças normais nos reforços ('stringers') que as compõem.

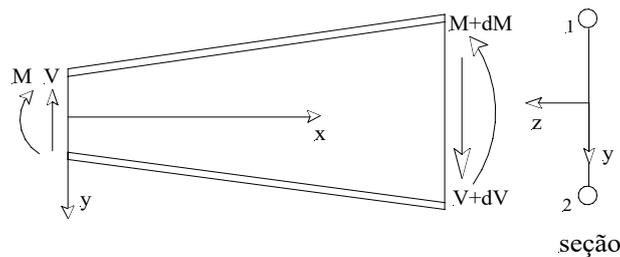


Figura 1 – Viga com altura variável

A Figura 1 mostra um caso de viga isolada com altura variável ao longo do comprimento submetida a momento de flexão e força cortante, ambos também variáveis.

Quando a altura da seção é variável, em razão da inclinação dos reforços em relação ao eixo x , em cada seção as forças normais a eles correspondentes apresentam componentes verticais que também contribuem para a resistência à força cortante, alterando o cálculo do fluxo de cisalhamento na alma da viga.

A força cortante na seção fica, portanto, composta por parcelas associadas à resultante (S) do fluxo de cisalhamento (q_s) na alma e às componentes na seção das forças normais nos reforços (a Figura 2 ilustra essa situação):

$$V = S + P_{y1} + P_{y2}$$

A intensidade do fluxo fica, então, determinada por:

$$q_s = \frac{S}{I} M_s$$

onde I é o momento de inércia da seção em relação a um eixo horizontal no seu plano.

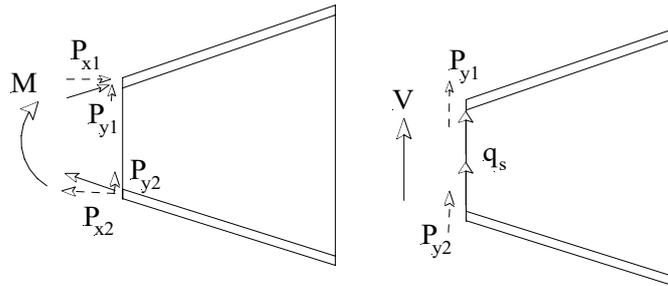


Figura 2 – Contribuições dos reforços na resistência aos esforços solicitantes

Exemplo 1. Determinar as forças normais nos reforços e o fluxo na alma da seção central da viga indicada na Figura 3.

Em seções de geometria análoga, porém com altura constante, a análise pode ser feita adotando-se a idealização da seção. Nessa idealização toda a resistência ao momento fletor fica por conta dos reforços, cujas áreas equivalentes levam em conta as áreas de reforços externos eventualmente posicionados na seção original e a contribuição da alma. Na alma da seção idealizada desenvolve-se, exclusivamente, fluxo constante de cisalhamento, que contribui para a resistência à força cortante.

Naturalmente que o recurso à idealização é opcional, sendo vantajoso, em muitos casos, particularmente pela simplificação que pode proporcionar à análise. Na resolução deste exemplo, opta-se por não adotar a idealização da seção. A representação em forma simplificada da seção, mostrada na Figura 3, é apenas para ressaltar os valores das áreas dos reforços da seção original.

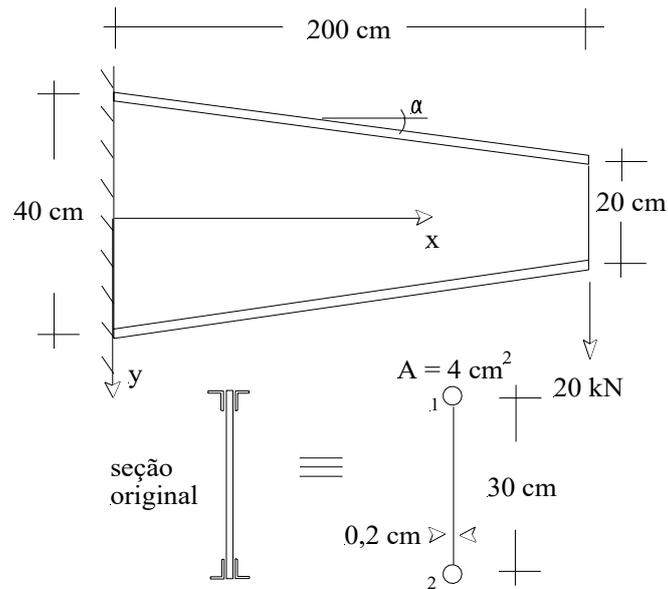


Figura 3 – Caso de viga com altura variável

Inicialmente, o momento de flexão solicitante na seção central tem o seguinte valor:

$$M = 20 \cdot 100 = 2000 \text{ kN cm}$$

Já o momento de inércia à flexão da seção fica composto pelas contribuições dos reforços (apenas a parcela de transporte) e do trecho da alma:

$$I = 4 \cdot 15^2 \cdot 2 + \frac{0,2 \cdot 30^3}{12} = 2250 \text{ cm}^4$$

As forças normais nos reforços podem ser determinadas partindo-se da condição que suas componentes horizontais contribuem para a resistência de parte do momento fletor (na ausência de idealização da seção, uma parte menor do momento acaba sendo resistida por tensões normais na alma). Para o cálculo dessas componentes, determinam-se, em primeiro lugar, as tensões normais nas alturas dos reforços.

Para a consideração dos sinais de cada componente, opta-se, à partida, por levar em conta que o momento solicitante provoca tração no reforço superior (1) e compressão no inferior (2). Assim sendo, no caso do reforço 1 resulta:

$$\sigma_{x1} = \frac{M}{I} y_1 = \frac{2000}{2250} \cdot 15 = 13,33 \text{ kN/cm}^2$$

No reforço 2 a tensão normal tem mesma intensidade, porém, de compressão:

$$\sigma_{x_2} = \frac{M}{I} y_2 = -13,33 \text{ kN/cm}^2$$

Tendo-se em vista a representação esquemática mostrada na Figura 4, as componentes horizontais das forças normais nos reforços ficam determinadas multiplicando-se as tensões normais pelas respectivas áreas no plano da seção:

$$P_{x_1} = 13,33 \cdot 4 = 53,33 \text{ kN}; \quad P_{x_2} = -53,33 \text{ kN}$$

As componentes verticais das mesmas forças normais podem ser obtidas em função da tangente do ângulo de inclinação dos reforços em relação ao eixo x :

$$P_{y_1} = P_{x_1} \operatorname{tg} \alpha = P_{x_1} \frac{10}{200} = 2,667 \text{ kN}$$

$$P_{y_2} = P_{x_2} \operatorname{tg} \alpha = P_{x_2} \frac{10}{200} = -2,667 \text{ kN}$$

A Figura 4 ilustra as componentes em questão:

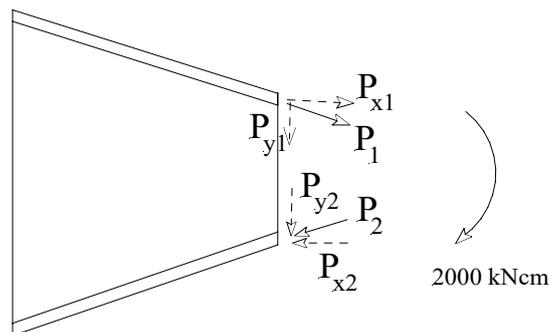


Figura 4 – Componentes de forças normais nos reforços

As forças normais nos reforços, também ilustradas na Figura 4, calculam-se a partir de suas componentes como:

$$P_1 = -P_2 = \sqrt{53,33^2 + 2,667^2} = 53,4 \text{ kN}$$

A força cortante na seção distribui-se em parte na alma e parte nas componentes verticais das forças normais nos reforços:

$$V = S + P_{y1} + P_{y2} \quad \therefore \quad S = 20 - 2,667 - 2,667 = 14,667 \text{ kN}$$

O fluxo de cisalhamento q_s num ponto genérico da alma da viga pode ser determinado pela relação:

$$q_s = \frac{S}{I} M_s$$

Neste caso, o sentido do fluxo de cisalhamento deve coincidir com o sentido conhecido de S, de modo que se pode dispensar a consideração de sinais das distâncias das áreas em relação ao eixo de simetria quando do cálculo do momento estático. Assim sendo, com os dados da Figura 5 resulta:

$$M_s = 4.15 + t.s. \left(15 - \frac{s}{2} \right) = 60 + 3s - 0,1s^2$$

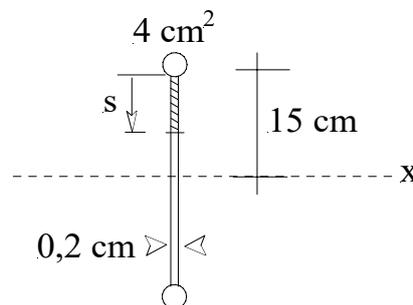


Figura 5 – Geometria para o cálculo do momento estático

Portanto, o fluxo apresenta uma distribuição parabólica na altura da seção. Em particular, os valores de fluxo nas extremidades e centro da alma resultam:

$$p/s = 0 \rightarrow q_0 = 0,39 \text{ kN/cm}$$

$$p/s = 15 \rightarrow q_{15} = 0,536 \text{ kN/cm}$$

Exemplo 2. A Figura 6 ilustra um caso de viga com altura e largura linearmente variáveis submetida a uma força concentrada em sua extremidade livre, a qual provoca solicitações de flexão e de torção. O que

se pede é determinar as forças normais nos reforços ('stringers') e os fluxos nas paredes da seção central da viga.

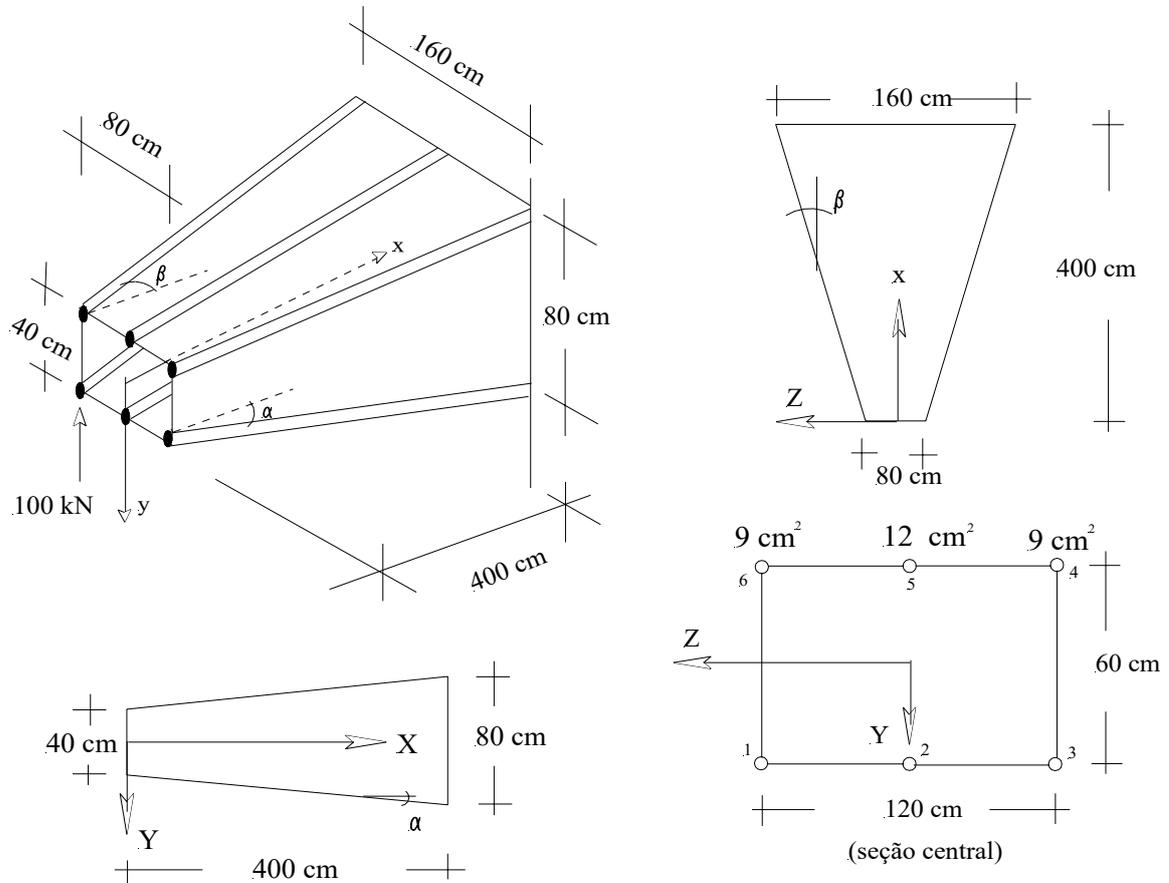


Figura 6 – Viga com altura e largura variáveis

O momento de flexão solicitante na seção central vale:

$$M = 100 \cdot 200 = 20000 \text{ kN cm}$$

O momento de inércia à flexão da seção central idealizada, indicada na Figura 16, calcula-se com as contribuições dos reforços:

$$I = 9 \cdot 30^2 \cdot 4 + 12 \cdot 30^2 \cdot 2 = 54000 \text{ cm}^4$$

A tensão normal (de tração) na altura dos reforços 1, 2 e 3 resulta:

$$\sigma_{x1} = \frac{M}{I} y_1 = \frac{20000}{54000} \cdot 30 = 11,11 \text{ kN / cm}^2$$

Na altura dos reforços 4, 5 e 6 a tensão normal tem mesma intensidade que a anterior, porém, de compressão:

$$\sigma_{x4} = \frac{M}{I} y_4 = -11,11 \text{ kN/cm}^2$$

Considerando-se as áreas das seções dos reforços, as componentes horizontais (segundo o eixo x) das forças normais ficam determinadas por:

$$P_{x1} = P_{x3} = -11,11 \cdot 9 = -100 \text{ kN}; \quad P_{x2} = -11,11 \cdot 12 = -133,3 \text{ kN};$$

$$P_{x4} = P_{x6} = 100 \text{ kN}; \quad P_{x5} = 133,3 \text{ kN}.$$

Tendo-se em vista a representação esquemática mostrada na Figura 7, as componentes das forças normais nos planos (x - y) e (x - z) podem ser obtidas em função das tangentes dos ângulos de inclinação dos reforços em relação ao eixo x , medidos naqueles planos.

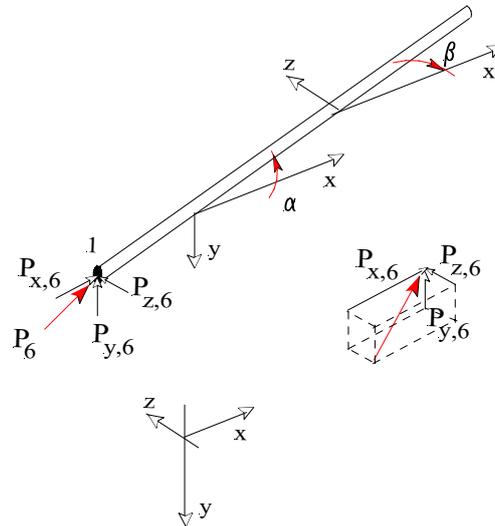


Figura 7 – Componentes das forças no reforço

Particularmente para os reforços 6 e 5, determinam-se (não se consideram sinais nestes cálculos):

$$P_{y6} = P_{x6} \operatorname{tg} \alpha = 100 \frac{20}{400} = 5 \text{ kN}$$

$$P_{y5} = P_{x5} \operatorname{tg} \alpha = 133,3 \cdot \frac{20}{400} = 6,67 \text{ kN}$$

$$P_{z6} = P_{x6} \operatorname{tg} \beta = 100 \frac{40}{400} = 10 \text{ kN}$$

$$P_{z5} = P_{x5} \operatorname{tg} \beta = 133,3 \cdot \frac{0}{400} = 0,0 \text{ kN}$$

As forças normais nos reforços 5 e 6 (os outros reforços calculam-se analogamente) resultam a partir de suas componentes como:

$$P_1 = \sqrt{100^2 + 5^2 + 10^2} = 100,6 \text{ kN}; \quad P_2 = \sqrt{133,3^2 + 6,67^2 + 0^2} = 133,5 \text{ kN}.$$

A força cortante na seção se compõe em parte pelos fluxos nas paredes que formam a seção e em parte pelas componentes verticais (segundo y) das forças normais nos reforços. Representando por S a resultante dos fluxos nas paredes da seção, esta quantidade fica determinada por:

$$V = S + P_{y1} + P_{y2} + P_{y3} + \dots + P_{y6} \quad \therefore \quad S = 100 - 5.4 - 6,67.2 = 66,67 \text{ kN}$$

Os fluxos nos trechos de parede entre reforços, podem ser determinados a partir da análise convencional simplificada de seção fechada. Entretanto, observa-se que neste caso, como a força aplicada não passa pelo centro de cisalhamento da seção, os fluxos estarão relacionados tanto à parcela S de força cortante quanto ao momento de torção atuante na seção.

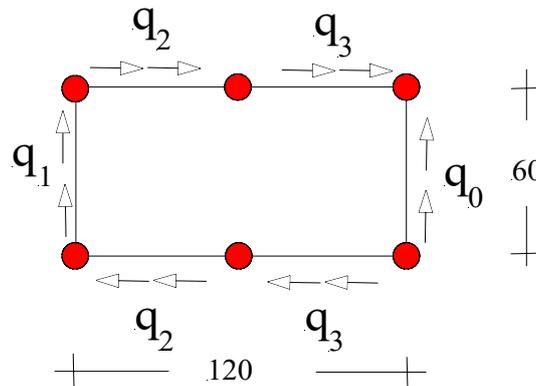


Figura 8 – Fluxos na seção fechada

Por um lado, considerando-se os sentidos adotados, que estão indicados na Figura 8, a parcela S e os fluxos verificam a seguinte relação geral de equilíbrio:

$$q_i + q_o = \frac{S}{I} M_{si} \quad c / i = 1,2,3$$

Particularizando-se a relação geral para cada um dos trechos, escrevem-se:

$$q_1 + q_o = \frac{S}{I} \cdot (18 + 12) \cdot 30 = 1,11 \text{ kN/cm}$$

$$q_2 + q_o = \frac{S}{I} \cdot (12 + 9) \cdot 30 = 0,778 \text{ kN/cm}$$

$$q_3 + q_o = \frac{S}{I} \cdot (9) \cdot 30 = 0,33 \text{ kN/cm}$$

Por outro lado, como os fluxos também mantêm relação com o momento de torção solicitante e, ainda, como o centro de cisalhamento é conhecido (coincide com o c.g.) é possível escrever diretamente a relação de equivalência entre os momentos dos fluxos na seção e o momento de torção. Assim sendo, tem-se:

$$100 \cdot 40 = -q_o \cdot 60 \cdot 60 + 2(q_2 + q_3) \cdot 60 \cdot 60 + q_1 \cdot 60 \cdot 60$$

Substituindo-se nesta equação as relações entre os fluxos q_1 , q_2 , q_3 e q_o , determina-se:

$$q_o = 0,277 \text{ kN/cm}$$

É importante notar que, a rigor, nessa relação de equivalência de momento de torção deveriam aparecer também contribuições das componentes no plano da seção das forças normais nos reforços (pois estes são inclinados em relação ao plano da seção!); entretanto, no caso considerado, devido à simetria tais contribuições se anulam.

Finalmente, os fluxos de cisalhamento nas paredes da seção resultam conforme mostra a Figura 9.

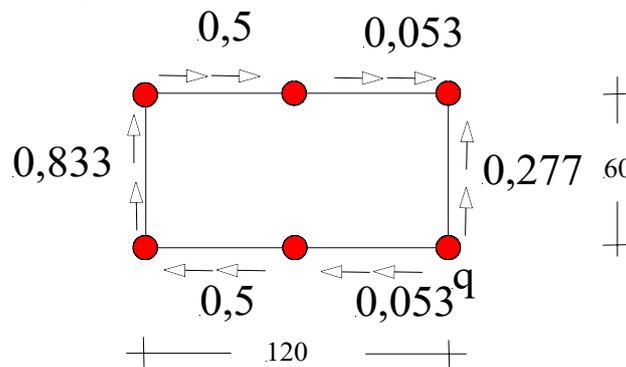


Figura 9 – Fluxos finais nas paredes da seção central

Exemplo 3. Este exemplo procura apresentar uma metodologia de cálculo simplificado dos fluxos nas paredes da seção numa situação em que as áreas das seções dos reforços ('stringers') são variáveis ao longo do comprimento da asa.

Neste tipo de situação as relações do tipo:

$$q_i + q_o = \frac{S}{I} M_{si} \quad c / i = 1, 2, 3$$

não podem ser aplicadas diretamente, pois foram deduzidas a partir da hipótese de áreas de reforços invariáveis. De fato, considerando-se as situações indicadas na Figura 10, relativas a um trecho de comprimento elementar entre seções supostamente submetidas à flexão, nas quais as áreas dos reforços são constantes ou variáveis, tem-se para o caso constante a seguinte relação de equilíbrio:

$$d\sigma A_1 = (q_1 + q_o) dx$$

Já para o caso de área variável, escreve-se:

$$d\sigma A_1 + \sigma dA_1 = (q_1 + q_o) dx$$

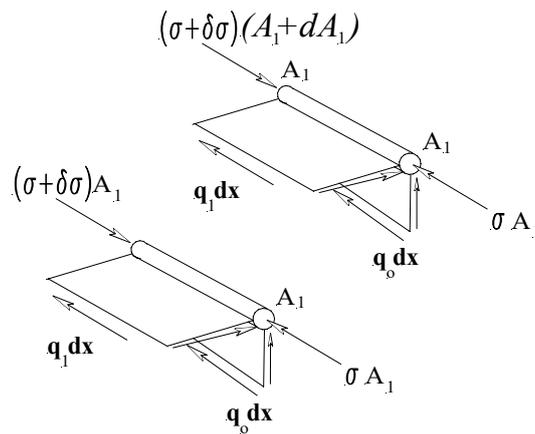


Figura 10 – Equilíbrio de trechos de paredes

Da primeira delas, com o emprego de relações conhecidas da flexão, resulta:

$$q_1 + q_o = \frac{d\sigma}{dx} A_1 = \frac{dM}{dx I_z} A_1 y = \frac{V}{I_z} M_{s_1}$$

que é a relação empregada nos exemplos anteriores. Entretanto, da segunda relação de equilíbrio, tem-se:

$$q_1 + q_o = \frac{d\sigma}{dx} A_1 + \sigma \frac{dA_1}{dx} = \frac{V}{I_z} M_{s_1} + \frac{M}{I_z} y \frac{dA_1}{dx}$$

Nota-se que a determinação do fluxo passa a envolver também o momento fletor, inviabilizando a adoção da hipótese que os fluxos mantêm apenas relação com tensões de cisalhamento provenientes da cortante. Isto mostra, portanto, que as áreas variáveis de reforço impõem uma alteração importante no procedimento de cálculo dos fluxos.

Naturalmente as áreas dos reforços podem variar arbitrariamente ao longo do comprimento, proporcionando uma variação também arbitrária das forças normais. Porém uma hipótese simplificadora razoável consiste admitir que a variação da força normal num reforço ao longo de toda a asa possa ser reproduzida pela combinação de variações lineares definidas em pequenos trechos entre seções. Por exemplo, entre duas seções (1 e 2) distantes entre si de uma distância finita pequena Δx , a variação da força normal no reforço pode ser determinada por:

$$p = \frac{P_2 - P_1}{\Delta x}$$

Voltando ao exemplo em estudo, considera-se que o mesmo arranjo estrutural do exemplo 2, porém com seções de reforços variáveis. O objetivo é determinar forças normais nos reforços e fluxos nas paredes da seção central da viga.

Dentro do procedimento de solução escolhem-se duas seções vizinhas da seção central, entre as quais se admite uma variação linear das forças normais. Neste caso, sugerem-se as seções distantes 190 cm e 210 cm da extremidade livre. Nestas mesmas seções, as áreas dos reforços 1 e 2, indicados na Figura 5, valem: $8,5 \text{ cm}^2$ e $9,5 \text{ cm}^2$ para o reforço 1 e $11,5 \text{ cm}^2$ e $12,5 \text{ cm}^2$ para o reforço 2. As áreas dos outros reforços resultam por simetria.

Segue o cálculo das forças normais nos reforços. Para a seção 1 o momento fletor vale:

$$M = 100.190 = 19000 \text{ kN cm}$$

A largura e a altura da seção resultam, respectivamente: 118 cm e 59 cm . O momento de inércia leva em conta as contribuições dos reforços:

$$I = 8,5.29,5^2 \cdot 4 + 11,5.29,5^2 \cdot 2 = 49604,25 \text{ cm}^4$$

A tensão normal (de compressão) na altura dos reforços 1, 2 e 3 resulta:

$$\sigma_{x1} = \frac{M}{I} y_1 = \frac{19000}{49604,25} \cdot 29,5 = -11,3 \text{ kN/cm}^2$$

Na altura dos reforços 4, 5 e 6 a tensão normal tem mesma intensidade que a anterior, porém, de tração:

$$\sigma_{x4} = \frac{M}{I} y_4 = 11,3 \text{ kN/cm}^2$$

Considerando-se as áreas das seções dos reforços, as componentes horizontais (segundo o eixo x) das forças normais ficam determinadas por:

$$P_{x1} = P_{x3} = -11,3 \cdot 8,5 = -96,05 \text{ kN}; \quad P_{x2} = -11,3 \cdot 11,5 = -129,95 \text{ kN};$$

$$P_{x4} = P_{x6} = 96,05 \text{ kN}; \quad P_{x5} = 129,95 \text{ kN}.$$

As componentes das forças nos planos (x - y) e (x - z) resultam:

$$P_{y1} = P_{y3} = P_{x1} \operatorname{tg} \alpha = 96,05 \cdot 0,05 = 4,8 \text{ kN}; \quad P_{y2} = 129,95 \cdot 0,05 = 6,5 \text{ kN};$$

$$P_{z1} = P_{z3} = 96,05 \cdot 0,1 = 9,605 \text{ kN}; \quad P_{z2} = 129,95 \cdot 0,1 = 12,995 \text{ kN}.$$

Finalmente as forças normais nos reforços valem:

$$P_1 = P_3 = \sqrt{96,05^2 + 4,8^2 + 9,605^2} = 100,210 \text{ kN};$$

$$P_2 = \sqrt{129,95^2 + 6,5^2 + 12,995^2} = 140,1 \text{ kN}.$$

As forças nos outros reforços seguem por simetria, porém invertendo os sinais.

Para a seção 2 o momento fletor vale:

$$M = 100 \cdot 210 = 21000 \text{ kN cm}$$

A largura e altura da seção resultam, respectivamente: 122 cm e 61 cm. O momento de inércia leva em conta as contribuições dos reforços:

$$I = 9,5 \cdot 30,5^2 \cdot 4 + 12,5 \cdot 30,5^2 \cdot 2 = 58605,75 \text{ cm}^4$$

A tensão normal (de compressão) na altura dos reforços 1, 2 e 3 resulta:

$$\sigma_{x1} = \frac{M}{I} y_1 = \frac{21000}{58605,75} \cdot 30,5 = -10,93 \text{ kN/cm}^2$$

Na altura dos reforços 4, 5 e 6 a tensão normal tem mesma intensidade que a anterior, porém, de tração:

$$\sigma_{x4} = \frac{M}{I} y_4 = 10,93 \text{ kN/cm}^2$$

Considerando-se as áreas das seções dos reforços, as componentes horizontais (segundo o eixo x) das forças normais ficam determinadas por:

$$P_{x1} = P_{x3} = -10,93 \cdot 9,5 = -103,8 \text{ kN}; \quad P_{x2} = -10,93 \cdot 12,5 = -136,6 \text{ kN};$$

$$P_{x4} = P_{x6} = 103,8 \text{ kN}; \quad P_{x5} = 136,6 \text{ kN}.$$

As componentes das forças nos planos (x - y) e (x - z) resultam:

$$P_{y1} = P_{y3} = P_{x1} \operatorname{tg} \alpha = 103,8 \cdot 0,05 = 5,19 \text{ kN}; \quad P_{y2} = 136,6 \cdot 0,05 = 6,83 \text{ kN};$$

$$P_{z1} = P_{z3} = 103,8 \cdot 0,1 = 10,38 \text{ kN}; \quad P_{z2} = 136,6 \cdot 0,0 = 0 \text{ kN}.$$

Finalmente as forças normais nos reforços valem:

$$P_1 = P_3 = \sqrt{103,8^2 + 5,19^2 + 10,38^2} = -104,4 \text{ kN};$$

$$P_2 = \sqrt{136,6^2 + 6,83^2 + 0^2} = -136,8 \text{ kN}.$$

As forças nos outros reforços seguem por simetria, porém invertendo os sinais.

A variação da força normal em cada reforço fica determinada por:

$$p_1 = p_3 = \frac{-96,65 + 104,4}{20} = -0,3875 \text{ kN/cm}$$

$$p_2 = \frac{136,8 - 130,1}{20} = -0,335 \text{ kN/cm}$$

A Figura 11 mostra o trecho em análise com os fluxos correspondentes às variações de forças nos reforços. Os fluxos nas paredes do trecho resultam por análise de equilíbrio; assim, isolando-se cada um dos reforços:

$$q_{16} + q_{12} = 0,3875$$

$$q_{23} - q_{12} = 0,335$$

$$q_{34} - q_{23} = 0,3875$$

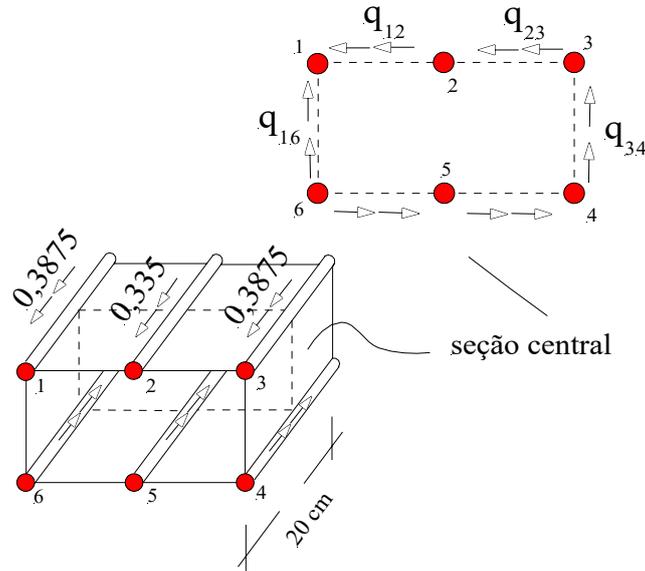


Figura 11 – Variações de forças nos reforços

Impondo-se a equivalência dos momentos dos fluxos na seção central com o momento de torção provocado pela força externa aplicada (e de sentido horário na seção), obtém-se:

$$4000 = q_{16} \cdot 60 \cdot 60 - q_{12} \cdot 60 \cdot 60 - q_{23} \cdot 60 \cdot 60 - q_{34} \cdot 60 \cdot 60$$

Da resolução do sistema de equações anteriores resultam:

$$q_{12} = -0,445; \quad q_{16} = 0,833; \quad q_{23} = -0,11; \quad q_{34} = 0,277.$$

A Figura 12 ilustra o resultado obtido.

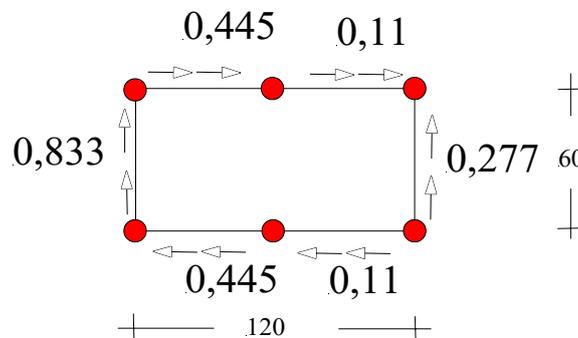


Figura 12 – Fluxos finais nas paredes da seção central

CAPÍTULO 6 FORMAS FRACAS DO P.V.C.

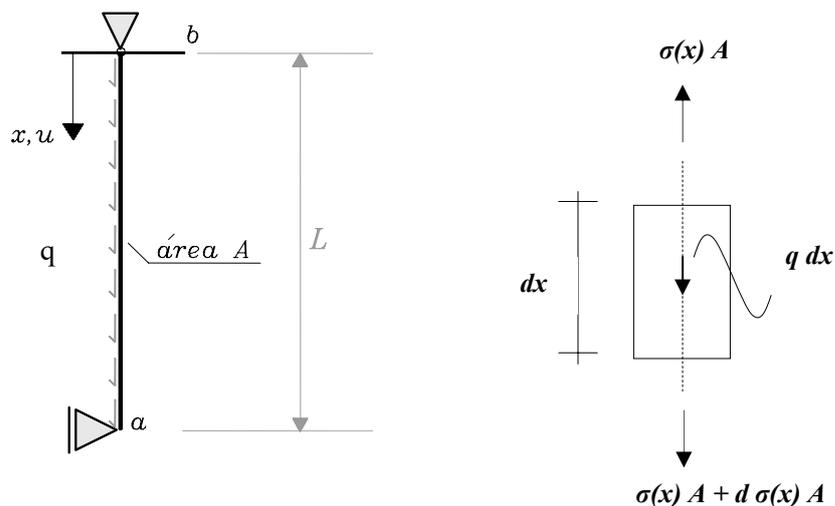
1. Forma Forte do problema da barra sob força normal

O equacionamento aqui denominado: em *forma forte* do problema da barra sob força normal foi visto no capítulo de introdução à teoria da elasticidade e, essencialmente, se constrói mediante três relações: uma de equilíbrio, outra de compatibilidade e a relação constitutiva.

O interesse pela forma forte é que ela pode proporcionar uma solução analítica exata para o problema matemático de valor de contorno, que reúne as três relações mencionadas e as condições de contorno.

Como exemplo de construção da forma forte é interessante reconsiderar o caso da barra prismática sob força normal. Nas barras, em razão da hipótese de indeformabilidade das seções transversais nos seus planos, o conjunto de incógnitas envolvidas se reduz ao deslocamento axial u , à componente de tensão normal σ_x e à componente de deformação linear ε_x , todas elas caracterizando-se como funções de uma única variável.

A Figura 1 ilustra o problema de uma barra fixa numa extremidade e livre na outra, submetida à uma força q distribuída por unidade de comprimento.



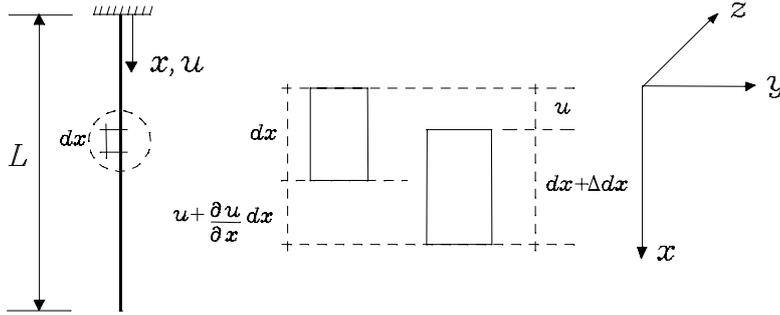


Figura 1 – Barra sob força normal

A relação de equilíbrio pode ser obtida diretamente do diagrama de corpo livre de um elemento do interior da barra, colocado em destaque na Figura 1, sendo escrita na forma:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{q}{A} \quad (1)$$

A relação de compatibilidade decorre da hipótese de indeformabilidade da seção, sendo escrita, conforme ilustra o esquema ilustrado na Figura 1, como:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{du}{dx} = u' \quad (2)$$

Finalmente a relação constitutiva se reduz a:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (3)$$

Combinando-se as três relações de modo a eliminar a tensão normal e a deformação linear, obtém-se:

$$u'' = -\frac{q}{EA} \quad (4)$$

Da integração da equação diferencial e imposição das condições de contorno resulta:

$$u(x) = \frac{qL^2}{2EA} \left[2\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad (5)$$

A (2) e a (3) combinadas proporcionam, com a (5), a distribuição de tensões normais ao longo da barra:

$$\sigma(x) = \frac{qL}{A} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right) \right] \quad (6)$$

Com a definição de força normal atuante numa seção transversal arbitrária:

$$N(x) = \int_A \sigma_x dA \quad (7)$$

conclui-se neste exemplo que:

$$N(x) = qL \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right) \right] \quad (8)$$

É importante notar que nem sempre é possível obter uma solução analítica para um problema de valor de contorno formulado em forma forte e, nesses casos a alternativa consiste em encontrar soluções aproximadas suficientemente precisas. A formulação em forma fraca proporciona metodologias eficientes para gerar soluções em forma aproximada.

2. O problema da barra sob força normal em Forma Fraca

Ainda considerando o problema da barra sob força normal, a dedução da *forma fraca* parte da seguinte condição, construída com a equação diferencial do problema:

$$\int_0^L (E Au'' + q)w dx = 0 \quad \forall w \in H \quad (9)$$

onde a função ponderadora w pertence ao espaço H das funções homogêneas nas condições de contorno essenciais, isto é, no caso: $w(0) = 0$, e suficientemente regulares para que a integral faça sentido.

De um modo geral, os espaços vetoriais aos quais pertencem as funções solução e ponderadora podem ser diferentes. Entretanto, a restrição de homogeneidade mencionada tem em vista atender também à possibilidade que tanto a função solução quanto a de ponderação pertençam a um mesmo espaço vetorial. Neste caso, por um lado a homogeneidade, imposta à função ponderadora, permite que a mesma seja definida como uma variação, ou diferença, entre funções admissíveis para solução. Por outro

lado, garante-se que uma eventual condição de contorno não-homogênea a ser exigida da solução, não venha a ser violada por efeito da ponderação.

Como já mencionado, a forma ponderada descrita pela (9) é interessante particularmente porque dela podem ser obtidas soluções aproximativas. De fato, de forma independente é possível adotar uma aproximação (polinomial, por exemplo) para a solução e outra para a função ponderadora (obedecendo as restrições de regularidade e homogeneidade). A partir daí, a verificação da (9) impõe uma adequação da aproximação (mediante um ajuste dos seus coeficientes), de tal modo que a equação diferencial passa a ser atendida no sentido de média ponderada. Claramente, a função ponderadora exerce papel importante sobre o ajuste da aproximação, porém, se a solução aproximativa escolhida previamente coincidir com a exata, a condição (9) será atendida para qualquer w .

Voltando à análise da forma indicada pela (9), nota-se que a função u deve apresentar regularidade mínima (segunda derivada contínua) para que exista a integral definida; além disso, exige-se que essa função satisfaça as condições de contorno nas extremidades da barra. A regularidade exigida de u é, portanto, a mesma da forma forte. Entretanto, realizando-se uma primeira integração por partes, a condição de regularidade pode ser atenuada. De fato, tal integração resulta:

$$\left[E A u' w \right]_0^L - \int_0^L E A u' w' dx + \int_0^L q w dx = 0 \quad (10)$$

A parcela entre colchetes representa valores nos contornos, no caso, as extremidades da barra, explicitados como segue:

$$\underbrace{E A u'(L) w(L)}_{N(L)} - \underbrace{E A u'(0) w(0)}_{N(0)} - \int_0^L E A u' w' dx + \int_0^L q w dx = 0 \quad (11)$$

A forma dada pela (11) é dita *fraca* fundamentalmente por exigir regularidade de ordem menor na função solução. Além disso, por envolver forças normais $N(L)$ e $N(0)$ nas parcelas de contorno, e que devem coincidir com forças concentradas eventualmente aplicadas externamente, diz-se que a forma fraca inclui naturalmente as condições de contorno nos esforços. Por este motivo as condições de contorno em esforços são ditas *naturais*.

Por outro lado, a (11) passa a exigir da função ponderadora regularidade maior em relação àquela exigida pela (9). Nota-se, nesse sentido, que a regularidade mínima necessária tanto para u quanto para w passa a ser a mesma, e controlada pela integral: $\int_0^L E A u' w' dx$.

Em resumo, a (11), se adotada diretamente, constitui-se em nova forma de representação matemática do problema em análise. Essa forma é dita *fraca* e *simétrica*, por exigir regularidade menor e igual tanto da função incógnita quanto da função peso.

Assim sendo, a resolução do exemplo, expresso segundo a forma fraca, se resume a encontrar $u(x)$, com $u(0) = 0$, tal que para todo $w(x)$, com $w(0) = 0$, seja verificada a condição:

$$\int_0^L E A u' w' dx = \int_0^L q w dx \quad (12)$$

Nota-se que no exemplo, a força normal na extremidade livre deve ser nula, uma vez que não há força externa aplicada diretamente naquela seção. Por este motivo na passagem da (11) para a (12) desapareceram as parcelas correspondentes às condições de contorno naturais.

Do que foi apresentado, pode-se concluir que:

1. A forma forte exige maior regularidade da função solução, além da verificação de condições de contorno que podem incluir restrições também nos esforços (*condições de contorno naturais*).
2. A forma fraca permite o relaxamento das condições de regularidade exigidas pela forma forte e a verificação inicial somente das condições de contorno essenciais.

Outra possível interpretação para a (12) decorre da definição que se possa dar à função ponderadora. Por exemplo, como ela deve ter o mesmo grau de continuidade da função de aproximação da solução, porém apenas com a restrição adicional de homogeneidade na condição de contorno essencial, ambas podem pertencer ao mesmo espaço vetorial. Assim sendo, pode-se muito bem definir a função ponderadora a partir da diferença entre duas funções candidatas à aproximação, conforme a relação seguinte:

$$w(x) = u_2(x) - u_1(x)$$

Claramente, na forma acima a função ponderadora resulta homogênea na condição de contorno essencial. Pode-se, então, dar à w a interpretação adicional de um deslocamento ‘virtual’, representando-a, por conveniência, na forma: $w(x) = \delta u(x)$. Assim sendo, a (12) passa a ser entendida como a expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\int_0^L E A u' \delta u' dx = \int_0^L q \delta u dx \quad (13)$$

De fato, explicitando-se na relação anterior a integral de área segue que:

$$\int_0^L \int_S E u' \delta u' dS dx = \int_0^L q \delta u dx \quad (14)$$

Considerando-se que no problema da barra simples de volume V : $u' = \varepsilon$, $\sigma = E \varepsilon$ e que analogamente podem ser definidos:

$$\delta u' = \delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \delta \varepsilon, \text{ a (14) assume a forma de balanço entre trabalhos}$$

virtuais (interno e externo):

$$\int_V \sigma \delta \varepsilon dV = \int_0^L q \delta u dx \quad (15)$$

Naturalmente a relação anterior deve ser válida para qualquer que seja δu compatível com $\delta \varepsilon$ e homogêneo nas condições de contorno essenciais. Vale lembrar, neste ponto, o que estabelece, em linhas gerais, o enunciado do P.T.V.: *um sólido deformável está em equilíbrio, considerando-se a distribuição de tensões internas e forças externas aplicadas, se o trabalho virtual interno for igual ao trabalho virtual externo para todo campo imposto de deslocamentos virtuais admissíveis (que verificam as condições de contorno) e compatíveis (que geram deformações virtuais).*

A relação do P.T.V. dada pela (15) pode ser estendida de forma imediata para o caso das barras em flexão, uma vez que a hipótese de indeformabilidade das seções se mantém e o problema também pode ser tratado em forma unidimensional.

Neste caso, admitindo-se que a função de aproximação dos deslocamentos seja representada por $v(x)$, de acordo com a teoria clássica de flexão a relação de compatibilidade escreve-se: $\varepsilon = -y v''$; por analogia a deformação virtual pode ser escrita como: $\delta \varepsilon = -y \delta v''$. Levando-se em conta que a relação constitutiva é dada por: $\sigma = E \varepsilon$, e sendo $p(x)$ a força externa aplicada de natureza distribuída ao longo do comprimento da viga, resulta que a (15) assume a forma:

$$\int_0^L \int_S E y^2 v'' \delta v'' dS dx = \int_0^L p \delta v dx \quad (16)$$

sendo que, agora, δv é um campo de deslocamentos virtuais compatíveis e homogêneos nas condições de contorno essenciais.

Observa-se, em conclusão, que a adoção do Princípio dos Trabalhos Virtuais proporciona diretamente a forma fraca e, portanto, dispensa o conhecimento da equação diferencial do problema.

Nota-se, finalmente, em alternativa ao P.T.V., ou à integração por partes da forma ponderada da equação diferencial, pode-se deduzir a forma fraca mediante uma abordagem baseada no Método da Energia.

3. Formas Fracas construídas pela Energia Potencial Total

O conceito de energia interna de deformação já foi apresentado em capítulo anterior. Essencialmente, considerando-se que em pontos de um sólido estados de tensão surgem em decorrência de certa história de deformação imposta, pode-se definir uma quantidade de energia interna movimentada no processo de deformação, medida pelo trabalho das tensões nas deformações. Essa quantidade é denominada *energia de deformação*.

No caso da barra simples, ao final do processo de deformação a energia envolvida em todo o volume pode ser quantificada pela relação:

$$U = \int_V \left(\int_0^{\varepsilon} \sigma_x d\varepsilon_x \right) dV \quad (17)$$

Em termos gerais, se um sólido é elástico, toda a energia movimentada no processo de deformação se acumula no seu interior e poderá ser usada na recuperação da forma inicial quando da retirada da causa externa que provocou a deformação. Nessa condição a energia de deformação é dita elástica.

Para a barra sob força normal pode-se exprimir a energia de deformação em termos do campo de deslocamentos axiais (u), considerando-se a lei de Hooke e a condição de compatibilidade, expressas pelas (3) e (2), respectivamente. Assim sendo, a relação (17) particularizada para este caso fornece:

$$\begin{aligned}
U &= \int_V \left(\int_0^{\varepsilon} \sigma_x d\varepsilon_x \right) dV = \int_V \left(\int_0^{\varepsilon} E \varepsilon_x d\varepsilon_x \right) dV \\
&= \int_V \left(\frac{1}{2} E (\varepsilon_x)^2 \right) dV = \int_0^L \left(\int_A \frac{1}{2} E (u')^2 dA \right) dx \\
U &= \int_0^L \frac{1}{2} E A (u')^2 dx
\end{aligned} \tag{18}$$

Por outro lado, às forças externas aplicadas pode-se associar a definição de uma energia potencial ‘*de posição*’. Assim, tendo-se em vista o conjunto de forças aplicadas, ao passar o sólido da posição inicial para uma deformada, diz-se que há uma variação da energia potencial de posição, quantificada pelo trabalho das forças externas nos deslocamentos dos seus pontos de aplicação.

Por generalidade, considere-se que na barra possam ser aplicadas forças distribuídas por unidade de comprimento (q) e forças concentradas (P). Se, além disso, o trabalho realizado somente depender do conhecimento das configurações inicial e final, e não do trajeto percorrido durante a mudança, então, diz-se que as forças aplicadas são *conservativas*, ou independentes do campo de deslocamentos.

Nessas condições, tendo a configuração inicial como referência, o trabalho realizado pelas forças externas, ao apresentar a barra um campo de deslocamentos u , é definido na forma:

$$\delta W_E = \int_L q u dx + \sum_{i=1}^n P_i u_i \tag{19}$$

sendo n o número de forças aplicadas em posições ao longo da barra.

Considerando-se, então, a configuração inicial da barra e a deformada, segue que a variação da *energia potencial de posição* é dada por:

$$\delta \Omega = -\delta W_E \tag{20}$$

Note-se que essa variação apresenta um sinal negativo em coerência com a hipótese que a energia potencial de posição tende a diminuir na mudança para uma configuração mais deformada (ou os deslocamentos sejam tais que $\delta W_E > 0$).

Energia Potencial Total $\Pi(\underline{u})$ de um Sólido Elástico: é definida pela soma da energia elástica de deformação com a energia potencial de posição das forças externas, sendo um *funcional*¹ do campo de deslocamentos.

$$\Pi[u(x)] = U + \delta\Omega \quad (21)$$

Primeiro princípio variacional: em um sólido elástico sujeito a forças externas conservativas, na configuração ‘real’, ou equilibrada, Π apresenta primeira variação nula (ou seja: é estacionário) com relação a qualquer variação congruente (*homogênea nas condições de contorno essenciais*) do campo de deslocamentos.

$$\delta^{(1)}\Pi = 0 \quad \forall \delta u \quad (22)$$

Segundo princípio variacional: em um sólido elástico-linear sujeito à forças externas conservativas, no âmbito das pequenas deformações, na configuração de equilíbrio o funcional apresenta segunda variação positiva (Π atinge um valor mínimo) com relação a qualquer variação congruente do campo de deslocamentos.

$$\delta^{(2)}\Pi > 0 \quad \forall \delta u \quad (23)$$

A aplicação dos princípios descritos, em particular do primeiro deles, exige o cálculo da variação primeira do funcional. Tal variação é definida como a parcela linear no acréscimo do funcional, escrito a partir de um acréscimo (δu) dado à função argumento. Justamente a imposição da condição dada pela (22) é que proporciona a forma fraca em questão. Os próximos itens ilustram esses aspectos conceituais.

3.1. Energia Potencial Total e Forma Fraca: barras sob força normal

Para a barra indicada na Figura 1 o funcional da energia potencial total resulta:

$$\Pi(u) = \int_0^L \frac{1}{2} E (u')^2 dx - \int_0^L q u(x) dx \quad (24)$$

A partir do funcional da energia total, pode-se aplicar o primeiro princípio variacional $\delta \Pi(u) = 0$ no sentido de encontrar $u(x)$ que corresponde à configuração de equilíbrio. Tem-se, então, o seguinte desenvolvimento:

¹ Funcional é toda aplicação que associa uma função a um valor escalar.

$$\begin{aligned}
 \Pi[u + \delta u] &= \int_0^L \left[\frac{ES}{2} (u' + \delta u')^2 - q(u + \delta u) \right] dx \\
 \Pi[u + \delta u] &= \int_0^L \left[\frac{ES}{2} (u'^2 + 2u' \delta u' + \delta u'^2) - q(u + \delta u) \right] dx \\
 \Pi[u + \delta u] &= \Pi[u] + \underbrace{\int_0^L [ES(u' \delta u') - q(\delta u)] dx}_{\delta \Pi} + o(\delta u)
 \end{aligned} \tag{25}$$

onde $o(\delta u)$ representa termos de ordem superior em δu . Conclui-se que:

$$\delta \Pi = \int_0^L [ES(u' \delta u') - q(\delta u)] dx \tag{26}$$

A (26) igualada à zero, em acordo com o primeiro princípio variacional, e admitindo que o acréscimo δu seja homogêneo nas condições de contorno essenciais, coincide com a forma fraca do problema da barra sob força normal.

Assim sendo, conclui-se que a forma fraca pode ser obtida diretamente da primeira variação do funcional da energia potencial total, dispensando-se, nesse caso, o conhecimento da equação diferencial do problema.

Uma observação importante é que a forma fraca também contempla as condições de compatibilidade e constitutiva. Além disso, ela própria representa a condição de equilíbrio. Portanto, todas as restrições do P.V.C. estão atendidas numa única relação!

3.2. Energia Potencial Total e Forma Fraca: barras sob flexão

Seja o problema de determinar os deslocamentos transversais da viga bi-engastada, indicada na Figura 2, a partir de sua formulação em forma fraca.

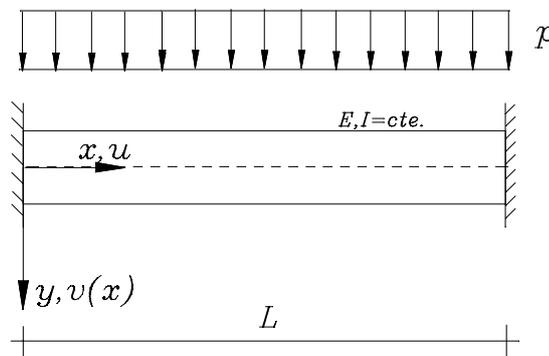


Figura 2 – Viga bi-engastada

Para se obter a forma fraca, o primeiro passo consiste em escrever o funcional da Energia Potencial Total.

Considerando-se que a resposta procurada corresponde à viga em regime linear elástico, com pequenos giros e deslocamentos de suas seções transversais, o problema pode ser modelado segundo a teoria clássica de flexão. Nesse sentido, admite-se válida a hipótese cinemática de seções inicialmente planas e ortogonais ao eixo permanecerem planas, indeformáveis no seu plano, e ortogonais ao eixo deslocado. Além disso, admite-se, também, que os deslocamentos axiais sejam desprezíveis.

Por serem as seções transversais indeformáveis nos seus planos e apresentando giros pequenos em correspondência a momentos fletores solicitantes, os deslocamentos transversais, em qualquer ponto da viga, são totalmente determinados pelos deslocamentos dos pontos pertencentes ao eixo e descritos pela função $v(x)$.

Considerando-se, ainda, que a seção genérica permanece ortogonal ao eixo deformado e, novamente, que os deslocamentos e giros são suficientemente pequenos, pode-se confundir a tangente à linha elástica com a derivada da função $v(x)$ no ponto e, por sua vez, com o próprio giro da seção.

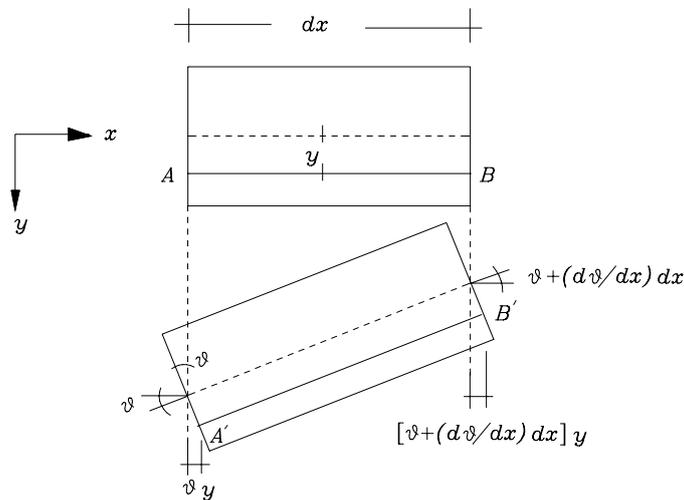


Figura 3 – Deformação de um elemento de viga

Valendo as hipóteses mencionadas, o estado de deformação apresenta, em cada ponto, somente uma componente: ϵ_x . A determinação dessa componente decorre da geometria indicada na Figura 3, que ilustra um elemento infinitesimal de viga antes e depois da deformação. Valendo-se da hipótese de giros e deslocamentos pequenos, pode-se confundir o comprimento atual da fibra com a sua projeção horizontal e, portanto:

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{[dx - \theta y + \theta y + (d\theta/dx) dx y] - dx}{dx} = y \frac{d\theta}{dx} \quad (27)$$

$$\text{Como } \theta = -\frac{dv}{dx}, \text{ segue que } \varepsilon_x = -y \frac{d^2v}{dx^2} = -y v'' \quad (28)$$

Tendo-se em vista que a tensão normal correspondente a ε_x fica determinada pela Lei de Hooke ($\sigma_x = E \varepsilon_x$), em razão da resposta elástico-linear do meio, a Energia de Deformação fica dada na forma:

$$U[v(x)] = \int_0^L \int_A \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 dA \right) dx = \int_0^L \int_A \left(\frac{1}{2} E y^2 v''^2 dA \right) dx \quad (29)$$

Como todos os pontos de uma seção sofrem deslocamentos transversais iguais, segue que o produto $E v''^2$ é constante na integral sobre a área A e, portanto:

$$U[v(x)] = \int_0^L \frac{1}{2} E v''^2 \left(\int_A y^2 dA \right) dx = \int_0^L \frac{EI}{2} (v''^2) dx \quad (30)$$

onde I representa o momento de inércia da seção em relação ao eixo z , ortogonal ao plano da Figura 3.

A Energia Potencial de Posição das Forças Externas fica expressa em função do trabalho da força distribuída aplicada sobre o campo de deslocamentos $v(x)$:

$$\Omega[v(x)] = -\int_0^L p v dx \quad (31)$$

Finalmente, a Energia Potencial Total resulta:

$$\Pi[v(x)] = \int_0^L \frac{EI}{2} (v'')^2 dx - \int_0^L p v(x) dx \quad (32)$$

A forma fraca resulta, então, da imposição da nulidade da primeira variação do funcional dado pela (32). No caso, a primeira variação pode ser determinada pelo seguinte desenvolvimento:

$$\Pi[v + \delta v] = \int_0^L \frac{EI}{2} (v'' + \delta v'')^2 dx - \int_0^L p(v + \delta v) dx \quad (33)$$

onde δv representa qualquer variação para a função $v(x)$, homogênea nas condições de contorno essenciais. Nota-se que no caso da viga, as condições de contorno essenciais referem-se não somente aos deslocamentos transversais, mas também aos giros (ou primeiras derivadas de $v(x)$) das seções nas extremidades.

Identificando-se no desenvolvimento da relação (33) a parcela linear no acréscimo e impondo-se, então, a nulidade da primeira variação, obtém-se a forma fraca conhecida:

$$\int_0^L EI v'' \delta v'' dx - \int_0^L p \delta v dx = 0 \quad (34)$$

4. A Forma Fraca e as soluções aproximativas

Conforme visto, tanto o Método da Energia, quanto Princípio dos Trabalhos Virtuais proporcionam maneiras de se obter a forma variacional fraca de um problema de valor de contorno. Por conveniência reescrevem-se as formas fracas dos problemas da barra sob carregamento axial e da viga em flexão estudados até o momento:

$$\int_0^L ES u' \delta u' dx = \int_0^L q \delta u dx \quad \forall \delta u \quad (35)$$

$$\int_0^L EI v'' \delta v'' dx = \int_0^L p \delta v dx \quad \forall \delta v \quad (36)$$

É importante novamente chamar a atenção que, de acordo com o P.T.V., a função que descreve o campo de deslocamentos reais (u ou v) na situação equilibrada deve obedecer às condições de contorno essenciais, sendo que o campo de deslocamentos virtuais (δu ou δv) deve ser homogêneo nessas mesmas condições. Já as condições de contorno naturais estão contempladas no P.T.V. nas parcelas relativas ao trabalho das forças externas.

Neste ponto, recordam-se alguns conceitos básicos da Álgebra Linear. Uma transformação $L(v)$, que associa um escalar à função v , é dita *forma linear* se apresenta a seguinte propriedade:

$$L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2) \quad c/ \alpha, \beta \text{ ctes} \quad (37)$$

Uma transformação $B(u, v)$, que associa um escalar às funções u e v , é dita *forma bilinear* (linear em u e linear em v) se apresenta as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} B(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \alpha B(u_1, v) + \beta B(u_2, v) \\ B(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha B(u, v_1) + \beta B(u, v_2) \end{aligned} \quad c/ \alpha, \beta \text{ ctes} \quad (38)$$

Voltando, por um momento, às expressões (35) e (36), nota-se que ambas incluem uma forma bilinear e outra linear e, portanto, a mesma característica é apresentada pelo P.T.V.

No caso da (35), por exemplo, as formas bilinear e linear são identificadas em cada uma das integrais por:

$$B(u, v) = B(u', \delta u') = \int_0^L E S u' \delta u' dx$$

$$L(v) = L(u) = \int_0^L q u dx$$

Assim sendo, ao P.T.V. pode-se dar a seguinte representação geral:

$$B(u, v) - L(v) = 0 \quad \forall v \quad (39)$$

aonde u representa um campo de funções com condições de continuidade compatíveis com o que exige a particular forma bilinear de cada problema e que verificam as condições de contorno essenciais. Por sua vez, v representa um campo de deslocamentos virtuais homogêneo nas condições de contorno essenciais e, também, com regularidade compatível com as formas bilinear e linear.

No sentido de se obter soluções aproximadas para os problemas de valor de contorno expressos segundo a (39), pode-se representar u e v como combinações lineares do tipo: $u(x) = \alpha_i \phi_i(x)$ e $v(x) = \beta_j \psi_j(x)$, com $i, j = 1, \dots, n^2$. Nessas representações os coeficientes α_i e β_j são parâmetros incógnitos, enquanto que $\phi_i(x)$ e $\psi_j(x)$ são funções com características adequadas para que a forma bilinear, em particular, tenha valor finito. Além disso, em coerência com as restrições que os campos

² A notação indicada é a indicial, que pressupõe somatória dos termos com índices repetidos.

reais e virtuais devem obedecer, as funções $\phi_i(x)$ devem verificar as condições de contorno essenciais, enquanto que as funções $\psi_j(x)$ devem ser homogêneas nas mesmas condições de contorno essenciais.

Uma maneira de definir as funções $\psi_j(x)$ consiste em empregar a técnica de Galerkin, segundo a qual se tomam as mesmas funções $\phi_i(x)$ usadas para aproximar a solução³. Nessas condições, as funções $\phi_i(x)$ também passam a ser homogêneas nas condições de contorno essenciais.

Por outro lado, a integral que define a forma bilinear no problema da barra simples assume a forma: $\int_0^L E A (u')^2 dx$. Essa análise serve para concluir que a rigor, de modo a abranger também a possibilidade descrita, deve-se exigir que tanto u quanto v pertençam ao conjunto de funções homogêneas nas condições de contorno essenciais e com primeira derivada quadrado integrável.

Voltando ao desenvolvimento para a obtenção do sistema do qual se obtêm as constantes α_i , considere-se novamente a (39) substituindo-se, em primeiro lugar, a aproximação para o campo de deslocamentos virtuais. Desse modo resultam, sucessivamente:

$$B(u, \beta_j \phi_j) - L(\beta_j \phi_j) = 0 \quad \forall \beta_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\beta_j [B(u, \phi_j) - L(\phi_j)] = 0 \Rightarrow B(u, \phi_j) = L(\phi_j) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (40)$$

A última relação representa, portanto, um conjunto de n equações.

Numa segunda etapa do desenvolvimento, introduzindo-se na (40) a aproximação para o campo de deslocamentos reais, obtém-se:

$$\alpha_i B(\phi_i, \phi_j) = L(\phi_j) \quad c / i, j = 1, \dots, n \quad (41)$$

Denotando-se: $K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j)$ e $L_j = L(\phi_j)$, e interpretando-se K_{ij} como componente de uma matriz posicionado na linha i e coluna j , e também L_j como componente de um vetor-coluna posicionado na linha j , resulta que o sistema resolvente pode ser colocado na forma:

$$\underline{\underline{K}}^T \underline{\alpha} = \underline{L} \quad (42)$$

³ É o caso em que a função solução e a ponderadora pertencem ao mesmo espaço vetorial.

aonde reuniram-se os coeficientes α_i no vetor $\underline{\alpha}$.

Uma propriedade importante da matriz $\underline{\underline{K}}$ é a sua simetria, a qual decorre da própria definição da forma bilinear.

Exemplo 1: considere-se o mesmo problema da barra sob carga axial ilustrado na Figura 4 (note-se que as duas extremidades são fixas).

Neste caso a forma fraca obtida pela aplicação do P.T.V. tem a mesma redação da (1), aqui repetida por conveniência:

$$\int_0^L E S u' \delta v' dx - \int_0^L q \delta v dx = 0$$

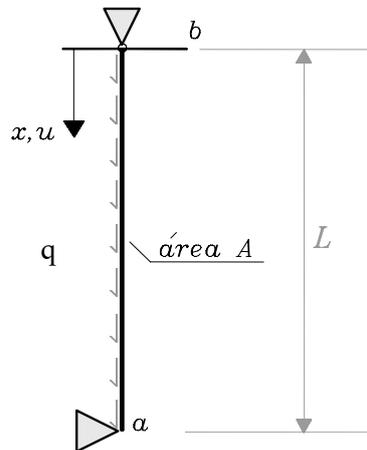


Figura 4 – Barra sob força normal

Portanto: $B(u, v) = \int_0^L E S u' \delta v' dx$ e $L(v) = \int_0^L q \delta v dx$. Assim sendo, para fins de obtenção dos parâmetros da solução aproximada, as componentes da matriz $\underline{\underline{K}}$ e do vetor \underline{L} , podem ser obtidas de:

$$K_{ij} = \int_0^L E S \phi_i' \phi_j' dx \quad \text{e} \quad L_j = \int_0^L q \phi_j dx$$

Adotando-se para o campo de deslocamentos reais uma aproximação dada por um polinômio completo do terceiro grau, e já impondo as condições de contorno essenciais, obtém-se a seguinte relação:

$$u(x) = \alpha_1 (x^3 - L^2 x) + \alpha_2 (x^2 - L x)$$

e, portanto: $\phi_1(x) = (x^3 - L^2 x)$ e $\phi_2(x) = (x^2 - Lx)$.

Nessas condições, as componentes da matriz $\underline{\underline{K}}$ e do vetor \underline{L} resultam:

$$K_{11} = \int_0^L E S (3x^2 - L^2)^2 dx = \frac{4 E S L^5}{5}$$

$$K_{12} = \int_0^L E S (3x^2 - L^2)(2x - L) dx = \frac{E S L^2}{4}$$

$$K_{22} = \int_0^L E S (2x - L)^2 dx = \frac{E S L^3}{3}$$

$$L_1 = \int_0^L p (x^3 - L^2 x) dx = -\frac{p L^4}{4}$$

$$L_2 = \int_0^L p (x^2 - Lx) dx = -\frac{p L^3}{6}$$

Montando-se o sistema indicado pela (42) e resolvendo-o, obtém-se a solução:

$$\alpha_1 = 0 ; \quad \alpha_2 = -\frac{p}{2 E S}$$

Segue daí a resposta para o campo de deslocamentos:

$$u(x) = \alpha_i \phi_i(x) = \frac{p L^2}{2 E S} \left[\left(\frac{x}{L} \right) - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Exemplo 2: determinar uma solução aproximada para a elástica da viga indicada na Figura 5.

Neste caso a forma fraca obtida pela aplicação do P.T.V. tem a seguinte redação:

$$\int_0^L E I v'' \delta v'' dx = P \delta v(L)$$

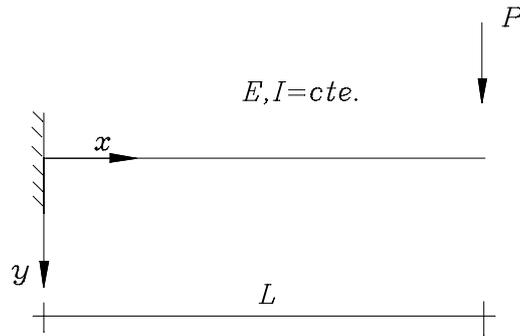


Figura 5 – Viga em balanço

Uma aproximação para a solução mediante um polinômio do terceiro grau (já se considerando as condições de contorno essenciais) resulta expressa na forma:

$$v(x) = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2; \text{ com } v''(x) = 6\alpha_1 x + 2\alpha_2$$

Então, segue que: $\phi_1 = x^3$, $\phi_2 = x^2$, $\phi_1'' = 6x$ e $\phi_2'' = 2$. Por conseguinte a forma bilinear fica dada, neste caso, por: $B(\phi_i, \phi_j) = \int_0^L EI \phi_i'' \phi_j'' dx$ e a forma linear por: $L(\phi_i) = P \phi_i(L)$.

Nessas condições, as componentes do sistema indicado na (42) resultam:

$$B(\phi_1, \phi_1) = \int_0^L EI \phi_1'' \phi_1'' dx = 12 E I L^3; \quad B(\phi_1, \phi_2) = \int_0^L EI \phi_1'' \phi_2'' dx = 6 E I L^2;$$

$$B(\phi_2, \phi_1) = B(\phi_1, \phi_2); \quad B(\phi_2, \phi_2) = \int_0^L EI \phi_2'' \phi_2'' dx = 4 E I L;$$

$$L(\phi_1) = P \phi_1(L) = P L^3; \quad L(\phi_2) = P \phi_2(L) = P L^2.$$

Finalmente, o sistema de equações assume a forma:

$$\begin{bmatrix} 12 E I L^3 & 6 E I L^2 \\ 6 E I L^2 & 4 E I L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 P L \\ 2 P \end{Bmatrix}$$

Da solução do sistema resultam: $\alpha_1 = -\frac{P}{6 E I}$; $\alpha_2 = \frac{P L}{2 E I}$ e a aproximação passa a ser escrita como:

$$v(x) = \frac{PL^3}{6EI} \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right].$$

Lembrando que: $-EI v''(x) = M(x)$, a solução aproximada obtida leva a um momento fletor dado por: $M = P(x - L)$, que coincide com a solução exata!

Uma observação complementar é que ao se tentar adotar um polinômio de grau ainda maior para determinar uma nova aproximação, os coeficientes correspondentes aos termos de grau superior a três acabam resultando nulos.

1. O Método dos Elementos Finitos

A técnica dos Elementos Finitos fornece uma metodologia para a geração de funções de aproximação ϕ_i que se aplica à forma fraca obtida pelo P.T.V. ou pelo Método da Energia. A combinação da técnica com a forma fraca gera o Método dos Elementos Finitos (MEF). No que segue, faz-se menção diretamente ao MEF.

Segundo a metodologia proposta pelo MEF, a aproximação para a solução é também construída mediante combinação linear de um número finito de ‘funções base’ na forma:

$$u(x) = \alpha_i \phi_i(x) \quad c / i = 1, \dots, N \quad (1)$$

Diz-se, então, que a aproximação pertence a um espaço de funções de dimensão finita. Outras particularidades do método estão relacionadas ao significado dado aos coeficientes α_i e à forma de geração das funções base.

Nesse sentido, realiza-se, inicialmente, uma ‘discretização’ do domínio fechado da solução introduzindo um número N de pontos (propositadamente igual ao número de coeficientes α_i) ditos *nós*, em posições x_i que incluem também o contorno; a distribuição de nós pode ser regular ou irregular. Cada par de nós consecutivos delimita, por sua vez, um *elemento finito*, de modo que o conjunto de N pontos define um número $(N-1)$ de elementos.

Definida a discretização, impõe-se que os coeficientes α_i sejam iguais aos valores pontuais da função incógnita em cada nó, conforme indica a relação seguinte:

$$\alpha_i = u(x_i) = u_i \quad (2)$$

Nota-se que em conseqüência do significado dado aos coeficientes α_i , as funções base devem ser construídas de modo a apresentarem valores unitários em cada nó e o valor da aproximação entre os pontos nodais fica definido por interpolação dos próprios valores nodais.

Além disso, como diretrizes gerais, admitindo-se que as funções base pertençam à família dos polinômios, deve-se procurar trabalhar com polinômios do menor grau possível, observando-se a compatibilidade com a maior ordem de derivada presente na expressão do P.T.V., em especial nas integrais que definem as formas bilineares.

1.1 Aproximações com continuidade de ordem zero

No caso das barras, funções base lineares por partes permitem construir a aproximação mais simples possível. De fato, conforme ilustra a Figura 1, a aproximação global (em tracejado) apresenta continuidade de ordem zero (isto é: sobre os valores da função) em todo o domínio da solução, enquanto que as derivadas de ordem um apresentam-se contínuas por partes, isto é, contínuas no interior de cada elemento. Como se verá mais adiante, tais características atendem às exigências de continuidade da aproximação global, explicitadas na expressão do P.T.V..

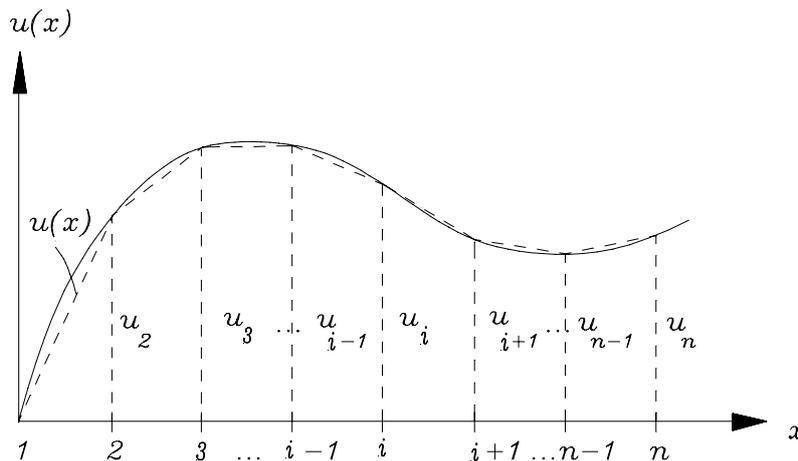


Figura 1 – Aproximação linear por partes

Observando-se, por um momento a (1), cada função base $\phi_i(x)$ em princípio possui valores definidos em todo o domínio, porém é atrelada a um nó. Mais especificamente, uma maneira de garantir que a (2) seja verificada é que cada função base assuma valor unitário no nó ao qual está atrelada e valor nulo nos nós restantes da malha.

Tendo-se em vista, então, a aproximação global linear por partes, indicada em tracejado na Figura 1, e os comentários anteriores, o método propõe que cada função $\phi_i(x)$ tenha por suporte (região aonde toma valores diferentes de zero) os dois elementos adjacentes ao nó. A Figura 2 ilustra essa característica, com as funções base representadas por relações lineares ('tendas').

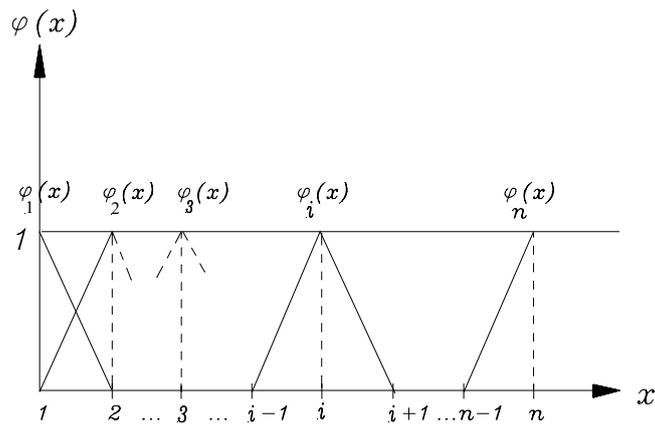


Figura 2 – Funções base atreladas aos nós

De acordo com esse critério, a função base $\phi_i(x)$ tem por suporte os dois elementos finitos que ocupam a região definida entre os nós $(i+1)$ e $(i-1)$, sendo expressa pelas relações:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & p / x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & p / x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases} \quad (3)$$

Passando a analisar, agora, a forma aproximada da relação de equilíbrio obtida do Princípio dos Trabalhos Virtuais, a matriz K e o vetor L assumem uma composição característica em razão da definição dada às funções base.

Por exemplo, a matriz K passa a ter dimensão definida pelo número de pontos nodais. Por outro lado, considerando-se a sua definição: $K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j)$, as componentes que envolverem índices i e j não pertencentes ao mesmo elemento serão nulas, em virtude, justamente, do formato em ‘tenda’ e do suporte compacto das funções base. Por essa mesma razão, os elementos não-nulos da matriz se acumularão em torno da diagonal principal, dando à matriz K o chamado formato em *banda*.

Quanto ao vetor L , suas componentes, $L_j = L(\phi_j)$, serão calculadas a partir de integrais definidas sobre o suporte de cada função base.

Para ilustrar as características descritas, considere-se, novamente, o exemplo da barra sob força axial, fixa na extremidade superior e livre na inferior. Admita-se que a discretização adotada seja formada por três nós igualmente espaçados e dois elementos, conforme ilustra a Figura 3.

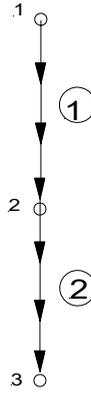


Figura 3 – Discretização com três nós e dois elementos

Neste caso, a matriz K passa a ter dimensão (3×3) , o vetor L e o vetor de parâmetros nodais resultam ambos com dimensão (3×1) :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}; \quad \underline{L} = \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}; \quad \underline{\alpha} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Levando-se em conta a divisão em elementos adotada, as componentes da matriz K e do vetor L podem ser calculadas, respectivamente, mediante as formas bilinear e linear deste caso:

$$K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) = \int_0^L E S \phi_i' \phi_j' dx = \int_0^{h_1} E S \phi_i' \phi_j' dx + \int_{h_1}^{h_1+h_2} E S \phi_i' \phi_j' dx;$$

$$L_j = L(\phi_j) = \int_0^L q \phi_j dx = \int_0^{h_1} q \phi_j dx + \int_{h_1}^{h_1+h_2} q \phi_j dx$$

onde $h_1 = x_2 - x_1$ e $h_2 = x_3 - x_2$. Naturalmente, x_1 , x_2 e x_3 referem-se às coordenadas dos pontos nodais 1, 2 e 3 e valem, no caso, respectivamente:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{L}{2} \quad \text{e} \quad x_3 = L.$$

Considerando-se, então, o exposto acima e as relações (3), as componentes do sistema resultam:

$$K_{11} = \int_0^{h_1} E S \frac{(x_2 - x)' (x_2 - x)'}{h_1 h_1} dx + \underbrace{\int_{h_1}^{h_1+h_2} E S \phi_1' \phi_1' dx}_{=0} = \frac{ES}{h_1}$$

$$K_{12} = \int_0^{h_1} ES \frac{(x_2 - x)'}{h_1} \frac{(x - x_1)'}{h_1} dx + \underbrace{\int_{h_1}^{h_1+h_2} ES \phi_1' \phi_2' dx}_{=0} = -\frac{ES}{h_1}$$

$$K_{13} = 0$$

$$K_{22} = \int_0^{h_1} ES \frac{(x - x_1)'}{h_1} \frac{(x - x_1)'}{h_1} dx + \int_{h_1}^{h_1+h_2} ES \frac{(x_3 - x)'}{h_2} \frac{(x_3 - x)'}{h_2} dx = \frac{ES}{h_1} + \frac{ES}{h_2}$$

$$K_{23} = \underbrace{\int_0^{h_1} ES \phi_2' \phi_3' dx}_{=0} + \int_{h_1}^{h_1+h_2} ES \frac{(x_3 - x)'}{h_2} \frac{(x - x_2)'}{h_2} dx = -\frac{ES}{h_2}$$

$$K_{33} = \underbrace{\int_0^{h_1} ES \phi_3' \phi_3' dx}_{=0} + \int_{h_1}^{h_1+h_2} ES \frac{(x - x_2)'}{h_2} \frac{(x - x_2)'}{h_2} dx = \frac{ES}{h_2}$$

$$L_1 = L(\phi_1) = \int_0^{h_1} q \frac{(x_2 - x)}{h_1} dx + \underbrace{\int_{h_1}^{h_1+h_2} q \phi_1 dx}_{=0} = \frac{qh_1}{2}$$

$$L_2 = L(\phi_2) = \int_0^{h_1} q \frac{(x - x_1)}{h_1} dx + \int_{h_1}^{h_1+h_2} q \frac{(x_3 - x)}{h_2} dx = \frac{qh_1}{2} + \frac{qh_2}{2}$$

$$L_3 = L(\phi_3) = \underbrace{\int_0^{h_1} q \phi_3 dx}_{=0} + \int_{h_1}^{h_1+h_2} q \frac{(x - x_2)}{h_2} dx = \frac{qh_2}{2}$$

Em forma matricial o sistema apresenta a seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} \frac{ES}{h_1} & -\frac{ES}{h_1} & 0 \\ -\frac{ES}{h_1} & \left(\frac{ES}{h_1} + \frac{ES}{h_2}\right) & -\frac{ES}{h_2} \\ 0 & -\frac{ES}{h_2} & \frac{ES}{h_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qh_1}{2} \\ \frac{qh_1}{2} + \frac{qh_2}{2} \\ \frac{qh_2}{2} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Observando-se o vetor independente, associado à força externa, nota-se que suas componentes são formadas pelas contribuições de metade da resultante da força distribuída atuante em cada elemento adjacente ao nó; assim, é como se a força externa distribuída uniformemente na barra estivesse aplicada em forma equivalente somente nos nós. Por essa razão, esse vetor é também denominado ‘*vetor de forças nodais equivalentes*’. Além disso, se existisse uma força concentrada e um nó posicionado diretamente sob ela, esta força apareceria, no vetor independente, na linha correspondente ao grau de liberdade associado ao nó.

Por outro lado, é importante chamar a atenção que o sistema dado pela (4), porque provém do P.T.V., representa uma condição de equilíbrio da estrutura discretizada. Mais especificamente, o que se tem na (4) é um conjunto de relações de equilíbrio entre forças internas e externas que concorrem em cada um dos nós, sendo as forças internas proporcionais à *rigidez* da estrutura representada por cada um dos componentes da matriz dos coeficientes do sistema. Nesse sentido, a matriz dos coeficientes é também denominada ‘*matriz de rigidez da estrutura*’.

Voltando à consideração da (4), substituindo-se: $h_1 = h_2 = \frac{L}{2}$, o sistema assume a forma:

$$ES \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & -\frac{2}{L} & 0 \\ -\frac{2}{L} & \frac{4}{L} & -\frac{2}{L} \\ 0 & -\frac{2}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{4} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{4} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

É importante observar que o sistema tal como está apresenta-se singular, pois a matriz de rigidez não é inversível. Uma explicação simples para esse fato decorre da observação que até o momento nenhuma condição de contorno foi imposta no modelo numérico. Assim sendo, o sistema diz respeito a uma estrutura discretizada sem fixação e, portanto, incapaz equilibrar o conjunto de forças aplicadas.

Para a obtenção de uma solução é necessário acrescentar a restrição correspondente à condição de contorno, no caso: $u_1 = 0$. O acréscimo dessa restrição vem também acompanhado do acréscimo de uma nova incógnita. A rigor, ao considerar que o nó 1 está vinculado, a primeira equação do sistema deve passar a ter seu termo independente alterado pelo acréscimo

de um termo correspondente à força de reação externa; isto é, o sistema altera-se para:

$$ES \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & -\frac{2}{L} & 0 \\ -\frac{2}{L} & \frac{4}{L} & -\frac{2}{L} \\ 0 & -\frac{2}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{4} + R_1 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{4} \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

No sistema anterior as incógnitas passam a ser u_2 , u_3 e R_1 , apresentando, a resolução, as seguintes respostas em deslocamentos:

$$u_1 = 0; \quad u_2 = \frac{3qL^2}{8ES}; \quad u_3 = \frac{qL^2}{2ES}.$$

O que se observa é que a solução obtida coincide com a solução exata nos pontos nodais. A solução geral finalmente resulta expressa na forma:

$$u(x) = \frac{3qL^2}{8ES} \phi_2(x) + \frac{qL^2}{2ES} \phi_3(x)$$

com $\phi_2(x)$ e $\phi_3(x)$ definidos conforme a (3).

Até agora a construção da aproximação pelo MEF baseou-se na combinação linear de funções base atreladas aos nós da malha. Todavia, observando-se a representação da aproximação, (indicada na Figura 4a), e o fato de as integrais de interesse terem sido calculadas a partir de uma somatória de integrais sobre cada um dos elementos da discretização, resulta também válida outra interpretação.

De acordo com ela, tanto a aproximação global quanto a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais equivalentes do sistema resolvente resultam das contribuições de aproximações locais construídas sobre os domínios de cada um dos elementos.

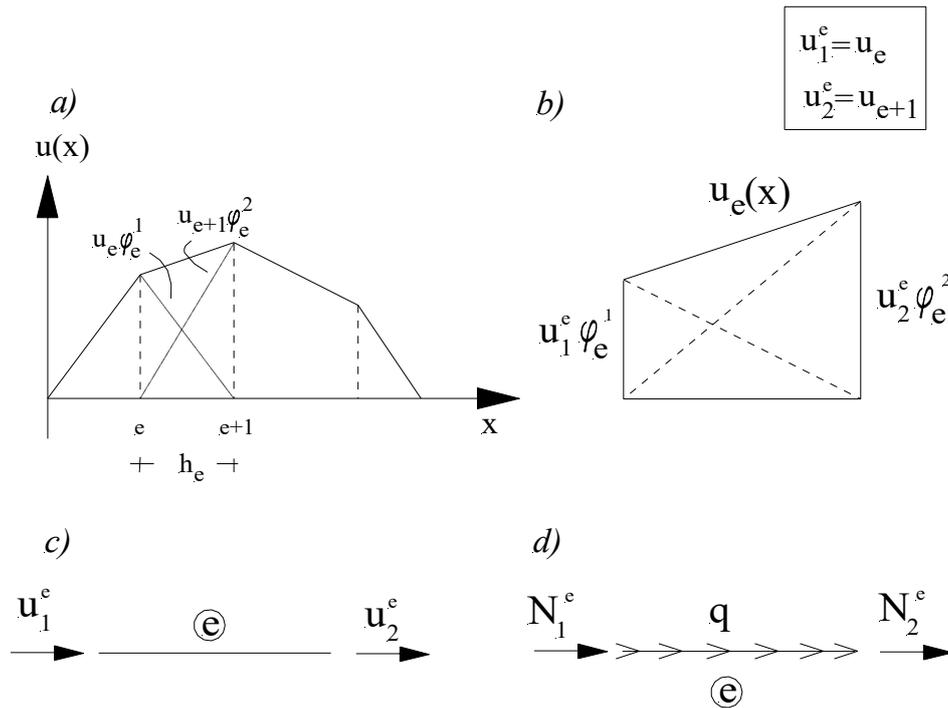


Figura 4 – Contribuição do elemento 'e' para a aproximação

Nos mesmos moldes da aproximação global, pode-se então estabelecer que dentro do domínio do elemento e , (conforme ilustrado na Figura 4b), uma aproximação linear seja definida por:

$$u_e(x) = u_1^e \phi_e^1(x) + u_2^e \phi_e^2(x) \quad (6)$$

Tendo-se em vista que: $h_e = x_{e+1} - x_e$, as funções de forma lineares $\phi_e^1(x)$ e $\phi_e^2(x)$ do elemento são dadas por:

$$\phi_e^1(x) = \frac{x_{e+1} - x}{h_e} \quad p/ \quad x_e \leq x \leq x_{e+1} \quad (7)$$

$$\phi_e^2(x) = \frac{x - x_e}{h_e}$$

Para um elemento finito entendido como uma estrutura de barra isolada sob forças externas definidas por q , N_1^e e N_2^e , conforme ilustra a Figura 4d, a expressão do P.T.V. escreve-se na forma:

$$\int_0^{h_e} E A u_e' \delta u_e' dx = \int_0^{h_e} q \delta u_e dx + N_2^e(h_e) \delta u_e(L) + N_1^e(0) \delta u_e(0) \quad (8)$$

Nota-se que os deslocamentos virtuais nas extremidades do elemento não são necessariamente nulos, a menos que essas extremidades coincidam com o contorno do domínio da estrutura aonde se prescrevam condições de contorno essenciais.

O campo de deslocamentos virtuais no domínio do elemento finito pode ser representado, segundo a técnica de Galerkin, por extensão da relação (6):

$$\delta u_e(x) = \delta u_1^e \phi_e^1(x) + \delta u_2^e \phi_e^2(x) \quad (9)$$

O reconhecimento na expressão do P.T.V. das formas bilinear e linear permite deduzir, analogamente como feito para a estrutura global, as componentes da matriz de rigidez (de ordem (2x2)) e do vetor de forças nodais equivalentes (de ordem (2x1)) do elemento e .

Para a matriz de rigidez, as componentes resultam da seguinte relação:

$$K_{ij}^e = \int_0^{h_e} E S \phi_e^i \phi_e^j dx \quad (10)$$

e para o vetor de forças nodais:

$$L_j^e = \int_0^{h_e} q \phi_e^j dx + N_1^e \phi_e^j(0) + N_2^e \phi_e^j(h_e) \quad (11)$$

Empregando-se as definições dadas pela (7), obtém-se:

$$\begin{aligned} K_{11}^e &= \int_0^{h_e} E S \phi_e^1 \phi_e^1 dx = \frac{E S}{h_e} \\ K_{12}^e &= \int_0^{h_e} E S \phi_e^1 \phi_e^2 dx = -\frac{E S}{h_e} ; & K_{21}^e &= K_{12}^e ; \\ K_{22}^e &= \int_0^{h_e} E S \phi_e^2 \phi_e^2 dx = \frac{E S}{h_e} \end{aligned}$$

No caso de força externa q uniformemente distribuída ao longo do comprimento do elemento, o vetor de forças nodais resulta:

$$L_1^e = \int_0^{h_e} q \phi_e^1 dx = \frac{q h_e}{2} + N_1^e ; \quad L_2^e = \int_0^{h_e} q \phi_e^2 dx = \frac{q h_e}{2} + N_2^e$$

Assim sendo, a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais equivalentes do elemento genérico apresentam as seguintes componentes:

$$\underline{\underline{K}}^e = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix} = ES \begin{bmatrix} 1/h_e & -1/h_e \\ -1/h_e & 1/h_e \end{bmatrix}; \quad \underline{L}^e = \begin{Bmatrix} L_1^{(e)} \\ L_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qh_e/2 + N_1^e \\ qh_e/2 + N_2^e \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Considerando-se novamente o exemplo anterior, aonde o domínio foi discretizado em dois elementos de comprimento $L/2$, a matriz de rigidez e o vetor de forças equivalentes do elemento e resultam:

$$\underline{\underline{K}}^e = ES \begin{bmatrix} 2/L & -2/L \\ -2/L & 2/L \end{bmatrix}; \quad \underline{L}^e = \begin{Bmatrix} qL/4 + N_1^e \\ qL/4 + N_2^e \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Reunindo-se o conjunto de relações do P.T.V. discretizado para cada um dos elementos, escreve-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} K_{11}^{(1)} u_1^{(1)} + K_{12}^{(1)} u_2^{(1)} &= qL/2 + N_1^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} u_1^{(1)} + K_{22}^{(1)} u_2^{(1)} &= qL/2 + N_2^{(1)} \\ K_{11}^{(2)} u_1^{(2)} + K_{12}^{(2)} u_2^{(2)} &= qL/2 + N_1^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} u_1^{(2)} + K_{22}^{(2)} u_2^{(2)} &= qL/2 + N_2^{(2)} \end{aligned} \quad (14)$$

No sistema anterior os sobre-índices entre parênteses identificam o elemento ao qual a relação se refere. Cada uma das relações refere-se ao equilíbrio de um nó de extremidade do elemento isolado.

Ao se considerar a estrutura discretizada, há também um conjunto de relações que exprime o equilíbrio de cada nó global isolado. Tal conjunto de relações pode ser montado a partir do sistema (14). Nesse sentido, uma primeira condição a impor é a correspondência entre os ‘graus de liberdade’ em deslocamento dos nós de cada elemento e da estrutura discretizada. A Figura 3 ilustra essa ‘compatibilização’, que se escreve como:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= u_1 \\ u_2^{(1)} &= u_1^{(2)} = u_2 \\ u_2^{(2)} &= u_3 \end{aligned} \tag{15}$$

As relações de equilíbrio dos nós da estrutura global se exprimem levando-se em conta que ao realizar as contribuições de cada elemento, as forças normais de extremidade (entendidas originalmente como forças externas) devem ter sua sobreposição anulada ou igualada à uma força externa concentrada eventualmente aplicada no nó. No caso, valem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} N_1^{(1)} &= R_1 \\ N_2^{(1)} + N_1^{(2)} &= 0 \\ N_2^{(2)} &= R_2 \end{aligned} \tag{16}$$

Nas relações anteriores, R_1 e R_2 são forças externas concentradas que representam as reações de apoio; em princípio tais reações são consideradas não-nulas, pois as condições de contorno serão impostas na etapa final de resolução.

Substituindo-se as condições de compatibilidade (15) nas (14) e posteriormente impondo-se as (16), obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} K_{11}^{(1)} u_1 + K_{12}^{(1)} u_2 &= qL/2 + R_1 \\ K_{21}^{(1)} u_1 + (K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)}) u_2 + K_{12}^{(2)} u_3 &= qL/2 + qL/2 \\ K_{21}^{(2)} u_2 + K_{22}^{(2)} u_3 &= qL/2 + R_2 \end{aligned} \tag{17}$$

Em notação matricial o sistema anterior apresenta a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & (K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)}) & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_1^{(1)} + R_1 \\ L_2^{(1)} + L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} + R_2 \end{Bmatrix} \tag{18}$$

Claramente as contribuições de cada elemento aparecem no sistema segundo uma regra bem definida de sobreposição conforme esquematizado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{Bmatrix} \quad (19)$$

É possível realizar matricialmente a sobreposição indicada, de modo totalmente equivalente à imposição das condições (15) de compatibilidade e (16) de balanço.

Essencialmente as matrizes de rigidez e os vetores de forças nodais equivalentes de cada elemento devem ter suas dimensões expandidas de (2x2) e (2x1), respectivamente, para a dimensão do sistema, e depois somadas. Entretanto, para que essa soma reproduza propriamente a sobreposição indicada na (19), as componentes originais de cada matriz e vetor devem passar a ocupar posições convenientes nas formas expandidas (as outras posições dessas formas são ocupadas por zeros). Nesse sentido, diz-se que as componentes originais sofrem um ‘espalhamento’ para ocupar posições nas matrizes expandidas.

O espalhamento obedece a uma relação de correspondência entre os graus de liberdade globais, representados pelas incógnitas u_i do sistema global, e os graus de liberdade locais u_e^i definidos isoladamente em cada elemento e (conforme indicado em destaque na Figura 4b). Aos n graus de liberdade globais e n_e locais associam-se numerações, global e local, independentes, sendo a correspondência entre elas registrada numa matriz binária retangular, dita de espalhamento, A^e , de ordem $(n \times n_e)$, construída para cada elemento. Nota-se que a numeração local é sempre a mesma para todos os elementos. Constroem-se, portanto, tantas matrizes de espalhamento quantos forem os elementos.

A maneira de gerar as matrizes de espalhamento será indicada logo em seguida, porém imaginando-se que elas sejam conhecidas para cada elemento, a sobreposição que leva à matriz de rigidez global e ao vetor de forças nodais equivalentes pode ser indicada pelas seguintes relações:

$$\underline{\underline{K}} = \sum_{e=1}^{n_e} \underline{\underline{A}}^e \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{A}}^{eT} ; \quad \underline{\underline{L}} = \sum_{e=1}^{n_e} \underline{\underline{A}}^e \underline{\underline{L}}^e \quad (20)$$

Para ilustrar a geração da matriz de espalhamento, considere-se justamente o exemplo anterior no qual a barra foi discretizada em dois elementos. As numerações dos graus de liberdade globais e locais, de cada elemento, estão indicadas na Figura 5.

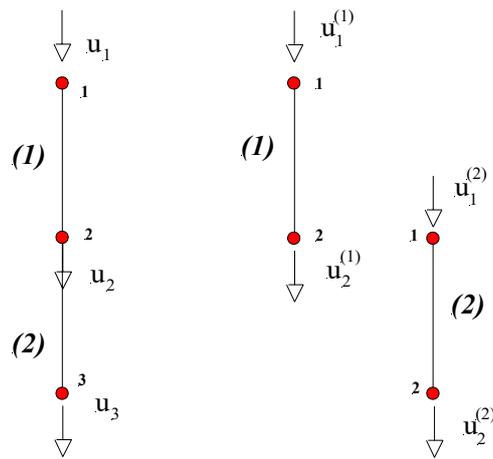


Figura 5 – Numeração global e local de graus de liberdade

A matriz de espalhamento $A^{(1)}$ do elemento (1) relaciona os graus de liberdade locais desse elemento aos globais, sendo binária e recebendo a unidade quando houver a correspondência entre eles. Essa correspondência fica descrita na forma:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Seguindo a mesma lógica, a matriz de espalhamento $A^{(2)}$ do elemento (2) resulta na forma:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Com as matrizes de espalhamento, as contribuições de cada elemento para a matriz de rigidez global e para o vetor de forças nodais globais, de acordo com a (20), resultam:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{A}}^{(1)} \underline{\underline{K}}^{(1)} \underline{\underline{A}}^{(1)} + \underline{\underline{A}}^{(2)} \underline{\underline{K}}^{(2)} \underline{\underline{A}}^{(2)} ; \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{A}}^{(1)} \underline{\underline{L}}^{(1)} + \underline{\underline{A}}^{(2)} \underline{\underline{L}}^{(2)} \quad (23)$$

Em lugar de operar os produtos matriciais indicados na relação anterior, pode-se montar diretamente o sistema global a partir da indicação da

relação de mapeamento das posições locais para as globais das componentes da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais de cada elemento, construída sobre os espaços das matrizes locais, conforme indicado em seguida.

Considerando-se, em primeiro lugar, as matrizes de rigidez de cada elemento, numeram-se as linhas e colunas, percorrendo os sentidos da esquerda para direita e de cima para baixo, respectivamente. É importante observar que essas numerações têm correspondência direta com os graus de liberdade locais. Numa etapa seguinte, considerando-se que os elementos devem ser ‘montados’ de modo a reproduzir a estrutura global, numeram-se as mesmas linhas e colunas, e nos mesmos sentidos adotados, considerando a compatibilidade com os graus de liberdade globais. Dessa forma, adotando-se para a numeração local uma representação entre parênteses, de forma a destacá-la em relação à global, obtêm-se as seguintes numerações sobre as linhas e colunas das matrizes de rigidez dos elementos:

$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = \begin{matrix} (1) & (2) \\ 1 & 2 \\ (1) & 1 \begin{bmatrix} (\times) & (\times) \\ (\times) & (\times) \end{bmatrix} \\ (2) & 2 \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(2)} = \begin{matrix} (1) & (2) \\ 2 & 3 \\ (1) & 2 \begin{bmatrix} (\times) & (\times) \\ (\times) & (\times) \end{bmatrix} \\ (2) & 3 \end{matrix}$$

Nas indicações anteriores já está estabelecida diretamente a indicação de mapeamento das posições locais para globais. Por exemplo, observando a matriz do elemento 2, conclui-se que a posição local (1,1) ocupará na matriz global a posição (2,2); já a posição local (2,1) ocupará a posição global (3,2).

Para os vetores de forças nodais, de forma análoga constroem-se as representações de correspondência, obtendo-se:

$$\underline{\underline{L}}^{(1)} = \begin{matrix} (1) & 1 \\ (2) & 2 \end{matrix} \begin{Bmatrix} (\times) \\ (\times) \end{Bmatrix}; \quad \underline{\underline{L}}^{(2)} = \begin{matrix} (1) & 2 \\ (2) & 3 \end{matrix} \begin{Bmatrix} (\times) \\ (\times) \end{Bmatrix}$$

Conclui-se, por exemplo, que as posições locais 1 e 2 do vetor de forças nodais do elemento 2 ocuparão as posições 2 e 3 do vetor global de forças nodais.

Uma vez obtidas as indicações de mapeamento o sistema global pode ser montado diretamente considerando-se as contribuições dos elementos da discretização:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{Bmatrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Nota-se que a sobreposição indicada reproduz as equações do sistema apresentado na (5).

A técnica descrita de montagem do sistema global pode ser estendida para qualquer número de elementos que componha a discretização e para qualquer numeração que se adote para os nós (não necessariamente seqüencial). Entretanto, ao se adotar uma numeração não-seqüencial, deve-se tomar o cuidado de montar o vetor de graus de liberdade globais ordenando suas componentes de acordo com a seqüência de numeração adotada.

Observa-se, finalmente, que a metodologia do MEF permite tratar com facilidade problemas mais gerais, onde carregamento, material e geometria variam de elemento para elemento, como ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo1. Determinar os deslocamentos, forças normais e reações de vínculo do sistema indicado na Figura 6.

Considerando-se as descontinuidades de geometria e carregamento, esta imposta pela força concentrada, adota-se uma discretização mínima em três elementos, de tal modo a coincidir um nó global com o ponto de aplicação daquela força e outro com a seção onde a geometria sofre descontinuidade.

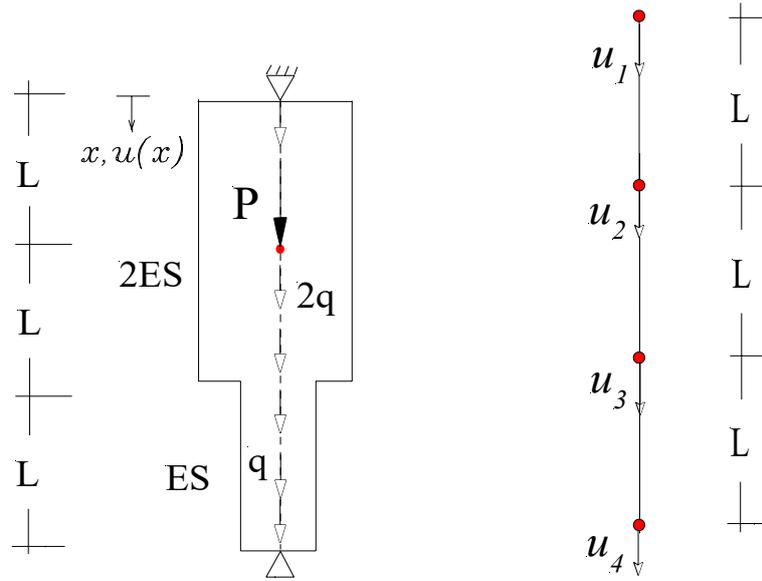


Figura 6 – Barra com variação de propriedades geométricas e carregamento

As matrizes de rigidez de cada elemento, e os respectivos vetores de forças nodais equivalentes, são dadas por:

$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = \underline{\underline{K}}^{(2)} = \frac{2ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{K}}^{(3)} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\underline{F}^{(1)} = \begin{Bmatrix} qL + N_1^{(1)} \\ qL + N_2^{(1)} \end{Bmatrix}; \quad \underline{F}^{(2)} = \begin{Bmatrix} qL + N_1^{(2)} \\ qL + N_2^{(2)} \end{Bmatrix}; \quad \underline{F}^{(3)} = \begin{Bmatrix} qL/2 + N_1^{(3)} \\ qL/2 + N_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

Ao se reunir as relações de equilíbrio de cada elemento para a montagem do sistema de equações lineares, devem-se levar em conta as restrições de ‘balanço’ entre as forças normais nas extremidades dos elementos e forças externas concentradas eventualmente aplicadas nos nós, bem como a compatibilidade entre graus de liberdade locais e globais. Tais restrições exprimem-se mediante as seguintes relações:

$$\begin{array}{ll} N_1^{(1)} = R_1 & u_1^{(1)} = u_1 \\ N_2^{(1)} + N_1^{(2)} = P & u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_2 \\ N_2^{(2)} + N_1^{(3)} = 0 & u_2^{(2)} + u_1^{(3)} = u_3 \\ N_2^{(3)} = R_4 & u_2^{(3)} = u_4 \end{array} ;$$

O sistema resolvente finalmente apresenta-se na forma:

$$\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL + R_1 \\ 2qL + P \\ 3qL/2 \\ qL/2 + R_4 \end{Bmatrix}$$

Um passo final antes da resolução é a imposição das condições de contorno: $u_1 = u_4 = 0$.

De modo direto, pode-se simplesmente acrescentar às equações do sistema as relações correspondentes às condições de contorno, obtendo-se:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_4 &= 0 \\ \frac{2ES}{L}u_1 - \frac{2ES}{L}u_2 &= qL + R_1 \\ -\frac{2ES}{L}u_1 + \frac{4ES}{L}u_2 - \frac{2ES}{L}u_3 &= 2qL + P \\ -\frac{2ES}{L}u_2 + \frac{3ES}{L}u_3 - u_4 &= \frac{3qL}{2} \\ -\frac{ES}{L}u_3 + \frac{ES}{L}u_4 &= \frac{qL}{2} + R_4 \end{aligned}$$

Deste sistema, além das respostas para os deslocamentos nodais determinam-se diretamente as reações de apoio:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{9}{8} \frac{qL^2}{ES} + \frac{3}{8} \frac{PL}{ES} \\ \frac{5}{4} \frac{qL^2}{ES} + \frac{PL}{4ES} \end{Bmatrix};$$

$$R_1 = -\frac{13qL}{4} - \frac{3P}{4}; \quad R_4 = -\frac{7qL}{4} - \frac{P}{4}$$

Uma rápida análise do sistema completo indica que ao substituir as duas primeiras relações nas outras, identificam-se duas relações independentes nos graus de liberdade internos u_2 e u_3 :

$$\frac{4ES}{L}u_2 - \frac{2ES}{L}u_3 = 2qL + P$$

$$-\frac{2ES}{L}u_2 + \frac{3ES}{L}u_3 = \frac{3qL}{2}$$

Assim sendo, uma maneira alternativa de encontrar a solução, já obedecendo às condições de contorno, consiste em alterar o sistema resolvente para a seguinte forma:

$$\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2qL + P \\ 3qL/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Essencialmente, neste procedimento substituem-se as equações de equilíbrio dos nós 1 e 4, pelas relações que representam as condições de contorno; assim sendo, a primeira e a quarta linha da matriz do sistema passam a apresentar a unidade na posição correspondente à diagonal principal e o valor nulo nas outras posições. As condições $u_1 = u_4 = 0$ são levadas em conta diretamente nas equações dos nós 2 e 3, mediante o preenchimento com zeros das posições fora da diagonal principal da primeira e da quarta colunas.

Nota-se que no sistema final alterado as forças normais nas extremidades dos elementos desaparecem, restando no vetor de forças nodais equivalentes somente as forças externas efetivamente aplicadas. Assim sendo, ao realizar a geração do sistema alternativamente pelo procedimento matricial, ou pela técnica direta de mapeamento, não é necessário considerar as forças normais nas extremidades dos elementos, bastando realizar as contribuições somente das forças nodais equivalentes à força externa distribuída; isto feito, a força concentrada pode ser acrescentada diretamente ao vetor de forças nodais globais equivalentes, na linha correspondente ao grau de liberdade do nó ao qual ela está aplicada.

Ainda no âmbito dessa maneira alternativa, uma vez obtidas as respostas para os deslocamentos nodais globais, as reações de apoio podem ser determinadas voltando a considerar o sistema original resolvente, reproduzido abaixo:

$$\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL + R_1 \\ 2qL + P \\ 3qL/2 \\ qL/2 + R_4 \end{Bmatrix}$$

Definindo-se os vetores:

$$\underline{L}^* = \begin{Bmatrix} qL \\ 2qL + P \\ 3qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}; \quad \underline{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ R_4 \end{Bmatrix}$$

As reações podem ser calculadas pela seguinte operação matricial:

$$\underline{R} = \underline{K} \underline{u} - \underline{L}^*$$

Ou, em forma desenvolvida:

$$\underline{R} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{9qL^2}{8ES} + \frac{3PL}{8ES} \\ \frac{5qL^2}{4ES} + \frac{PL}{4ES} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} qL \\ 2qL + P \\ 3qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}$$

As forças normais nas extremidades de cada elemento podem ser determinadas com a ajuda das relações de equilíbrio, que envolvem as matrizes de rigidez e os vetores de forças nodais equivalentes. As relações em questão são indicadas em seguida:

$$\frac{2ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL + N_1^{(1)} \\ qL + N_2^{(1)} \end{Bmatrix};$$

$$\frac{2ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL + N_1^{(2)} \\ qL + N_2^{(2)} \end{Bmatrix};$$

$$\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL/2 + N_1^{(3)} \\ qL/2 + N_2^{(3)} \end{Bmatrix}.$$

Considerando-se, de um lado, as respostas obtidas e, de outro lado, as condições de compatibilidade entre os graus de liberdade globais e locais, é possível identificar os valores dos deslocamentos nodais de cada elemento, de modo que os sistemas por elemento alteram-se para:

$$\frac{2ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{9}{8} qL^2/ES + \frac{3}{8} PL/ES \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL + N_1^{(1)} \\ qL + N_2^{(1)} \end{Bmatrix};$$

$$\frac{2ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{9}{8} qL^2/ES + \frac{3}{8} PL/ES \\ \frac{5}{4} qL^2/ES + \frac{1}{4} PL/ES \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL + N_1^{(2)} \\ qL + N_2^{(2)} \end{Bmatrix};$$

$$\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{5}{4} qL^2/ES + \frac{1}{4} PL/ES \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL/2 + N_1^{(3)} \\ qL/2 + N_2^{(3)} \end{Bmatrix};$$

Das relações anteriores, calculam-se:

$$N_1^{(1)} = -\frac{13}{4}qL - \frac{3}{4}P; \quad N_2^{(1)} = \frac{5}{4}qL - \frac{3}{4}P;$$

$$N_1^{(2)} = -\frac{5}{4}qL - \frac{P}{4}; \quad N_2^{(2)} = -\frac{3}{4}qL - \frac{P}{4};$$

$$N_1^{(3)} = \frac{3}{4}qL + \frac{P}{4}; \quad N_2^{(3)} = -\frac{7}{4}qL - \frac{P}{4}.$$

Nota-se que as forças normais calculadas possuem uma convenção de sentido positivo idêntica àquela dos graus de liberdade nodais ilustradas na Figura 4. Assim, eventuais sinais negativos indicam sentidos contrários aos convencionados.

Uma observação importante diz respeito à relação entre as forças normais nas extremidades dos elementos, acima determinadas, e as forças normais no interior das barras; naturalmente, uma vez que se conheçam aquelas, estas podem ser determinadas por equilíbrio. Mas a análise do equilíbrio pode ser conduzida considerando-se a distribuição real das forças externas (q) ao longo da barra ou sua forma nodal equivalente, coerente com a idealização proporcionada pelo elemento finito. A Figura 7 ilustra estas duas situações.

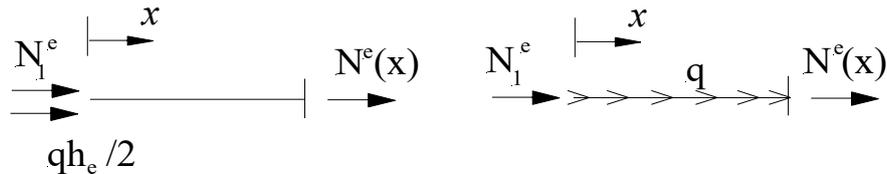


Figura 7 – Força normal no interior da barra obtida por análise de equilíbrio

A análise do equilíbrio de um segmento de barra considerando a distribuição real das forças externas permite concluir que, sendo esta distribuição uniforme, a força interna normal deve variar linearmente ao longo do segmento, isto é:

$$N^e(x) = N_1^e + q(x)$$

Já, considerando-se o mesmo segmento, porém entendido como parte de um elemento finito submetido a forças nodais equivalentes, a força normal interna resulta constante, pois:

$$N^e(x) = N_1^e + \frac{qh_e}{2}$$

Conclui-se que a consideração exclusiva do MEF fornece uma aproximação para a estimativa da força normal.

Todavia, mesmo mantendo-se no âmbito do MEF é possível recuperar o diagrama correto de força normal interna no domínio de cada elemento, mediante união dos valores obtidos para as forças normais de extremidade; este procedimento é válido sempre que a força externa aplicada tiver distribuição uniforme ao longo da barra.

Assim, no caso do exemplo em estudo, com os valores calculados das forças normais de extremidade, pode-se construir o diagrama de força normal ao longo da estrutura, ilustrado em linha cheia na Figura 8. O

diagrama resultante é linear por partes, observando-se que a variação linear ao longo do elemento é consistente com a distribuição uniforme do carregamento aplicado (na hipótese de $q = 0$ o diagrama seria constante por partes).

Entretanto, se forem consideradas exclusivamente as forças normais de extremidade e as forças nodais equivalentes, o gráfico resultante passa a ser constante por partes. Este resultado pode ser justificado de outra maneira, lembrando que a força normal deve ser proporcional à primeira derivada da função deslocamento. Então, no âmbito do MEF, como a aproximação para os deslocamentos é linear por partes, a força normal deve resultar constante por partes. Para ilustrar esta situação, tomem-se a solução aproximada global e sua primeira derivada escritas para o exemplo como:

$$u(x) = u_2 \varphi_2 + u_3 \varphi_3; \quad u'(x) = u_2 \varphi_2' + u_3 \varphi_3'$$

Como ao longo da estruturas as funções de forma e suas primeiras derivadas são dadas por:

$$\varphi_2 = \begin{cases} \frac{x}{L} \\ \frac{2L-x}{L} \end{cases}; \quad \varphi_2' = \begin{cases} \frac{1}{L} & p/ \quad 0 \leq x \leq L \\ -\frac{1}{L} & p/ \quad L \leq x \leq 2L \end{cases}$$

$$\varphi_3 = \begin{cases} \frac{x-L}{L} \\ \frac{3L-x}{L} \end{cases}; \quad \varphi_3' = \begin{cases} \frac{1}{L} & p/ \quad L \leq x \leq 2L \\ -\frac{1}{L} & p/ \quad 2L \leq x \leq 3L \end{cases}$$

as distribuições de forças normais ao longo dos elementos resultam:

$$N(x) = 2ESu'(x) = \frac{9}{4}qL + \frac{3}{4}P \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$N(x) = \frac{qL}{4} - \frac{P}{4} \quad (L \leq x \leq 2L)$$

$$N(x) = -\frac{5}{4}qL - \frac{P}{4} \quad (2L \leq x \leq 3L)$$

Finalmente, a Figura 8 mostra confronto entre o diagrama de força normal fornecido pela interpolação linear das forças normais nas extremidades de cada elemento e o diagrama obtido pela primeira derivada da função deslocamento. Por simplificação, analisam-se somente as contribuições das forças distribuídas, sendo destacados com asterisco os valores calculados das forças normais nas extremidades de cada elemento.

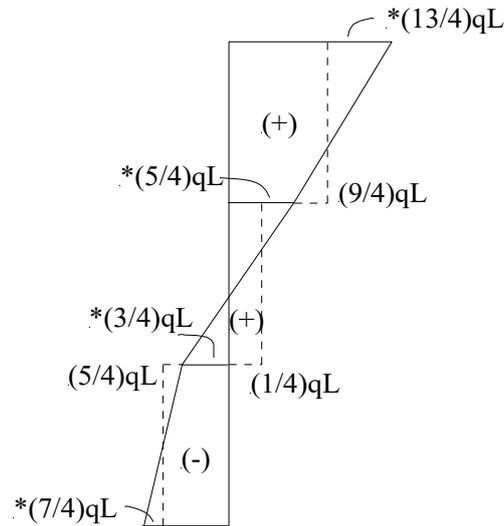


Figura 8 – Diagrama de força normal: confronto numérico e exato

Nota-se que a estimativa de força normal em cada elemento mediante derivada da função de aproximação resulta subestimada em relação à resposta correta. Pode-se concluir que no MEF os trechos constantes por partes coincidem com a média dos valores exatos nas extremidades de cada elemento.

1. Extensão do MEF para a análise de treliças planas

Em treliças planas, em consequência da idealização usual segundo a qual as ligações entre barras são articulações perfeitas e as forças externas devem ser aplicadas exclusivamente nos nós, cada uma de suas barras fica submetida somente à força normal, de tração ou de compressão, constante ao longo do seu comprimento.

Por um lado, cada barra da treliça pode ser interpretada como um elemento finito, com aproximação linear para o campo de deslocamentos. Por outro lado, à treliça plana deve corresponder uma matriz de rigidez global gerada pelas contribuições das matrizes de cada uma de suas barras. Além disso, o conjunto de graus de liberdade independentes de cada nó da treliça pode compor um vetor de deslocamentos nodais e as forças aplicadas nos nós (em correspondência aos graus de liberdade) podem ser reunidas num único vetor de forças nodais. Assim sendo, para a treliça toda, pode valer o seguinte sistema:

$$\underline{\underline{K}}_g \underline{u}_g = \underline{F}_g \quad (1)$$

onde o índice g refere-se ao sistema global adotado para posicionar a treliça.

Para montar a matriz de rigidez global a partir das contribuições das matrizes de rigidez de cada elemento é preciso inicialmente alterar a matriz do elemento de ordem (2×2) , válida para uma análise unidimensional segundo a direção do elemento, para torná-la consistente com uma análise bidimensional, espaço aonde se insere a treliça.

Nesse sentido, considerem-se as representações do elemento de barra e graus de liberdade indicadas na Figura 1.

Na Figura 1a apresenta-se o caso, até o momento considerado, de elemento finito de barra para análise unidimensional, com graus de liberdade locais formados somente por deslocamentos axiais.

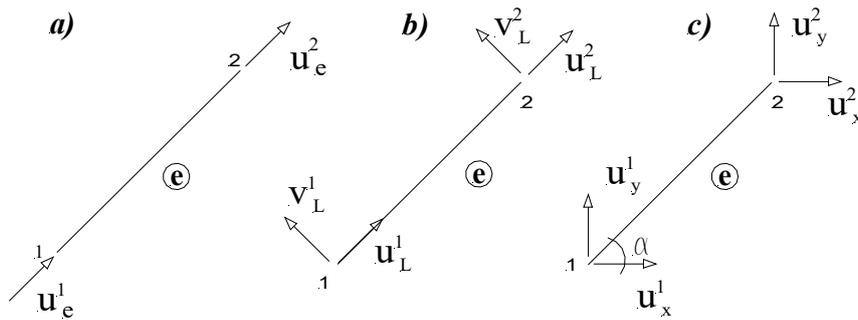


Figura 1 – Graus de liberdade para análises uni e bidimensionais

Uma vez que este elemento seja inserido num espaço bidimensional, o alongamento ou encurtamento pode vir acompanhado de mudança de direção do seu eixo. Para levar em conta este aspecto, objetivando-se incluir a possibilidade de variação de direção eventualmente sofrida pela barra, são introduzidos novos graus de liberdade locais na direção transversal ao eixo da barra, conforme indica a Figura 1b.

Ocorre que entre os graus de liberdade mostrados nas figuras 1a e 1b pode-se construir a seguinte relação, caracterizada pela matriz de mapeamento $\underline{\underline{A}}^{(e)}$:

$$\begin{Bmatrix} u_L^1 \\ v_L^1 \\ u_L^2 \\ v_L^2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^{(e)}} \begin{Bmatrix} u_{(e)}^1 \\ u_{(e)}^2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

A mesma matriz de mapeamento pode ser empregada para aumentar a ordem da matriz de rigidez do elemento, passando de (2X2) para (4X4), em correspondência com o novo conjunto de graus de liberdade locais, mediante a seguinte relação:

$$\underline{\underline{K}}_L = \underline{\underline{A}}^{(e)} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{A}}^{(e)T} \quad (3)$$

De modo explícito, a relação anterior fornece:

$$\underline{\underline{K}}_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ES/h_e & -ES/h_e \\ -ES/h_e & ES/h_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$\underline{\underline{K}}_L = \begin{bmatrix} ES/h_e & 0 & -ES/h_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ES/h_e & 0 & ES/h_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Nota-se, claramente, que as linhas e colunas nulas na nova matriz expandida indicam que a barra tem preservada a característica de rigidez associada apenas às deformações axiais.

O vetor de forças nodais do elemento finito de barra também pode ser expandido para a ordem (4X1) mediante a matriz $\underline{\underline{A}}^{(e)}$:

$$\underline{\underline{F}}_L = \underline{\underline{A}}^{(e)} \underline{\underline{F}} \quad (5)$$

Assim, para o caso de força uniformemente distribuída ao longo do elemento:

$$\underline{\underline{F}}_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} qh_e/2 \\ qh_e/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qh_e/2 \\ 0 \\ qh_e/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Por outro lado, entre as direções atreladas ao eixo da barra, mostradas na Figura 1b, e as direções globais mostradas na Figura 1c existe uma relação conhecida de transformação por rotação e que pode ser escrita para cada nó:

$$\begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L^1 \\ v_L^1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_x^2 \\ u_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L^2 \\ v_L^2 \end{Bmatrix}$$

As relações anteriores podem ainda ser reunidas numa única transformação:

$$\begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L^1 \\ v_L^1 \\ u_L^2 \\ v_L^2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Em forma condensada, a (7) fica escrita como:

$$\underline{u}_g = \underline{R} \underline{u}_L \quad (8)$$

Uma relação análoga vale para o vetor de forças nodais, o qual pode passar a ser escrito em relação aos graus de liberdade globais:

$$\underline{F}_g = \underline{R} \underline{F}_L \quad (9)$$

A relação (9) desenvolvida fornece:

$$\begin{Bmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \\ F_x^2 \\ F_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q h_e / 2 \\ 0 \\ q h_e / 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(q h_e / 2 \right) \cos \alpha \\ \left(q h_e / 2 \right) \operatorname{sen} \alpha \\ \left(q h_e / 2 \right) \cos \alpha \\ \left(q h_e / 2 \right) \operatorname{sen} \alpha \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Nota-se que a matriz \underline{R} é ortogonal, no sentido que sua inversa coincide com a sua transposta; portanto, as relações (8) e (9) podem ser invertidas simplesmente pré-multiplicando ambas por \underline{R}^T .

Partindo-se da relação de equilíbrio para a barra, escrita considerando-se os graus de liberdade locais expandidos, com a ajuda das formas inversas das (8) e (9), pode-se obter a relação para o cálculo da matriz de rigidez da barra no sistema global de graus de liberdade, conforme o desenvolvimento que segue:

$$\begin{aligned} \underline{K}_L \underline{u}_L &= \underline{F}_L \\ \underline{K}_L \underline{R}^T \underline{u}_g &= \underline{R}^T \underline{F}_g \\ \underline{R} \underline{K}_L \underline{R}^T \underline{u}_g &= \underline{F}_g \end{aligned} \quad (11)$$

Segue da última relação que:

$$\underline{\underline{K}}_g = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{K}}_L \underline{\underline{R}}^T \quad (12)$$

Realizando as substituições e operações matriciais indicadas, obtém-se:

$$\underline{\underline{K}}_g = \frac{ES}{h_e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde as letras c e s resumem, respectivamente, $\cos\alpha$ e $\text{sen}\alpha$.

Exemplo 1. Determinar os deslocamentos do nó 2 da treliça plana indicada na Figura 2.

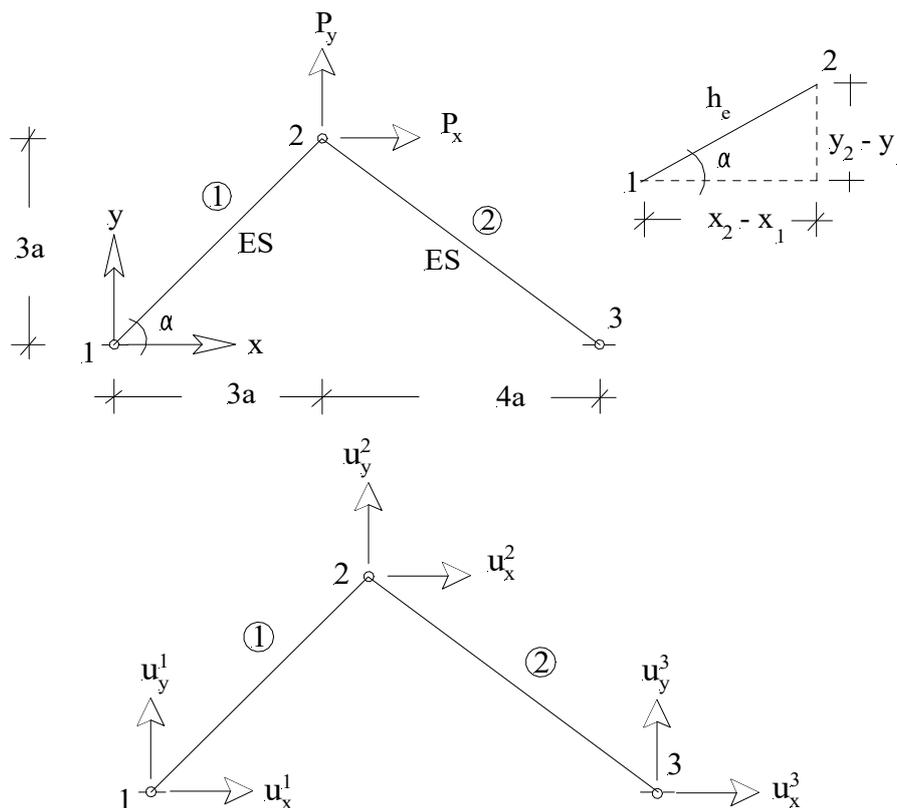


Figura 2 – Treliça Plana

Cada barra possui um ângulo de inclinação distinto em relação ao referencial global (x-y) indicado. Tomando-se por base o detalhe da Figura

2, genericamente o cálculo do comprimento de uma barra, do seno e do cosseno do seu ângulo de inclinação em relação à horizontal pode ser feito pelas seguintes relações:

$$h_e = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{(x_2 - x_1)}{h_e}; \quad \text{sen} \alpha = \frac{(y_2 - y_1)}{h_e}$$

No caso do exemplo, para as barras 1 e 2 pode-se construir a seguinte tabela de valores:

Elemento	x ₁	x ₂	y ₁	y ₂	h _e	cos α	sen α
1	0	3a	0	3a	3√2a	√2/2	√2/2
2	3a	7a	3a	0	5a	4/5	-3/5

As matrizes de rigidez de cada elemento em relação ao sistema global de graus de liberdade resultam de particularizações feitas sobre a (13):

$$\underline{\underline{K}}_g^1 = \frac{ES}{3\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_g^2 = \frac{ES}{5a} \begin{bmatrix} 16/25 & -12/25 & -16/25 & 12/25 \\ -12/25 & 9/25 & 12/25 & -9/25 \\ -16/25 & 12/25 & 16/25 & -12/25 \\ -12/25 & -9/25 & -12/25 & 9/25 \end{bmatrix}$$

A montagem da matriz de rigidez global da estrutura, de ordem (6X6), obedece à mesma regra de mapeamento descrita em capítulo anterior, relacionando as numerações locais e globais dos graus de liberdade, resultando em:

$$\underline{\underline{K}}_G = \frac{ES}{a} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{12} & \frac{\sqrt{2}}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{12} & \frac{\sqrt{2}}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & \left(\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{16}{125}\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{12}{125}\right) & -\frac{16}{125} & \frac{12}{125} \\ -\frac{\sqrt{2}}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{12}{125}\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{9}{125}\right) & \frac{12}{125} & -\frac{9}{125} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{125} & \frac{12}{125} & \frac{16}{125} & -\frac{12}{125} \\ 0 & 0 & \frac{12}{125} & -\frac{9}{125} & -\frac{12}{125} & \frac{9}{125} \end{bmatrix}$$

O vetor dos deslocamentos incógnitos reúne os graus de liberdade de cada nó, com numeração mostrada na Figura 2, em correspondência com as direções globais:

$$\underline{u}_g^T = \{u_x^1 \quad u_y^1 \quad u_x^2 \quad u_y^2 \quad u_x^3 \quad u_y^3\}$$

O vetor de forças nodais globais do sistema pode ser montado diretamente, posicionando-se os valores das forças aplicadas diretamente nas linhas correspondentes aos graus de liberdade, conforme indica a relação seguinte:

$$\underline{F}_g^T = \{0 \quad 0 \quad P_x \quad P_y \quad 0 \quad 0\}$$

Considerando-se que as condições de contorno do problema são:

$$u_x^1 = u_y^1 = u_x^3 = u_y^3 = 0$$

o sistema resolutivo resulta:

$$\frac{ES}{a} \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{16}{125}\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{12}{125}\right) \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{12}{125}\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{9}{125}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^2 \\ u_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix}$$

Invertendo-se a matriz do sistema, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} u_x^2 \\ u_y^2 \end{Bmatrix} = \frac{a}{ES} \begin{bmatrix} 4,1 & -0,476 \\ -0,476 & 5,32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix}$$

Considerem-se, então, os seguintes valores particulares:

$$P_x = 0,0 ; P_y = -1,0 ; ES = 100,0 .$$

Os componentes de deslocamento global do nó 2 resultam:

$$\begin{Bmatrix} u_x^2 \\ u_y^2 \end{Bmatrix} = \frac{a}{ES} \begin{Bmatrix} 0,476 \\ -5,32 \end{Bmatrix}$$

O cálculo das forças normais em cada uma das barras pode ser feito considerando-se que localmente, isto é, no elemento finito de barra a aproximação dos deslocamentos é linear e sua derivada é, portanto, constante. A relação para o cálculo da força normal no elemento finito e resulta:

$$N_e = (ES)_e u'_e = (ES)_e (u_e^1 \phi_e^1 + u_e^2 \phi_e^2)$$

$$N_e = \frac{(ES)_e}{h_e} (u_e^2 - u_e^1)$$

onde h_e representa o comprimento do elemento.

Como os deslocamentos calculados são os globais do nó 2, é preciso fazer a transformação de rotação inversa para descobrir as componentes do deslocamento nas direções do eixo e transversal ao eixo do elemento. Nesse sentido, aplica-se a (7), porém em forma reduzida porque em cada barra do problema dado existe um nó fixo, com deslocamentos globais correspondentes nulos, conforme ilustra a Figura 3.

Assim sendo, a relação de transformação a aplicar em cada barra reduz-se a:

$$u_L^e = \begin{Bmatrix} u^e \\ v^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^2 \\ u_y^2 \end{Bmatrix}$$

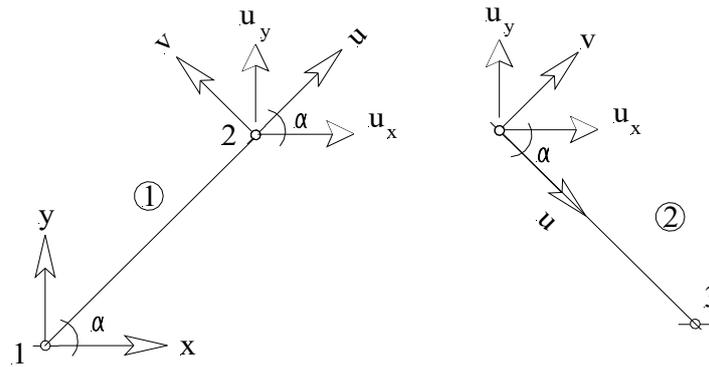


Figura 3 – Graus de liberdade locais rotacionados para direções globais

Fazendo-se as substituições, determinam-se:

$$u_L^1 = \begin{Bmatrix} u_2^1 \\ v_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \frac{a}{ES} \begin{Bmatrix} 0,476 \\ -5,32 \end{Bmatrix} = \frac{a}{ES} \begin{Bmatrix} -3,425 \\ -4,098 \end{Bmatrix}$$

$$u_L^2 = \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ v_1^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \frac{a}{ES} \begin{Bmatrix} 0,476 \\ -5,32 \end{Bmatrix} = \frac{a}{ES} \begin{Bmatrix} 3,573 \\ -3,97 \end{Bmatrix}$$

Finalmente as forças normais resultam:

$$N_1 = \frac{ES}{3\sqrt{2}a} \frac{a}{ES} (-3,425 - 0) = -0,8; \quad N_2 = \frac{ES}{5a} \frac{a}{ES} (0 - 3,573) = -0,71.$$

Os valores locais de deslocamentos transversais aos eixos servem para calcular os giros sofridos pelas barras da situação inicial para a equilibrada.

2. Montagem da matriz de rigidez global por numeração dos graus de liberdade

Com já visto, a montagem da matriz de rigidez global pode ser feita de modo mais expedito considerando-se a incidência das barras, definida pela relação de correspondência entre os nós inicial e final de cada barra com a numeração global de nós. Para exemplificar, considere-se a treliça indicada na Figura 4.

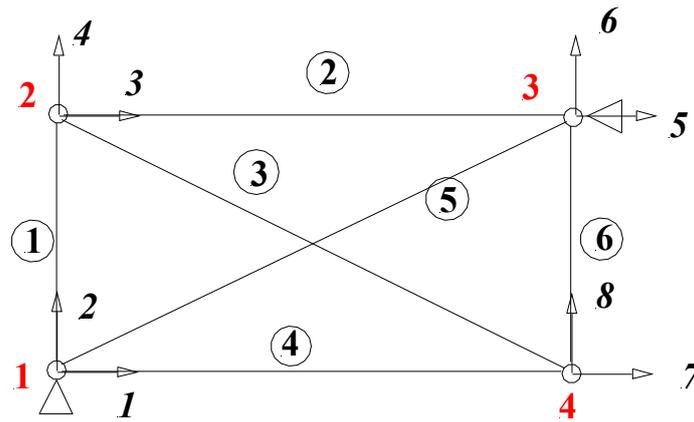


Figura 4 – Numeração de nós, barras e graus de liberdade globais

Na tabela seguinte apresenta-se a relação de incidência:

Barra	Nó inicial	Nó final
1	1	2
2	2	3
3	2	4
4	1	4
5	1	3
6	3	4

Obviamente, a escolha sobre a numeração e a ordem dos nós inicial e final na definição da incidência é arbitrária.

A matriz de rigidez global da treliça terá ordem (8X8) e deve ser montada a partir das contribuições das matrizes de cada barra, de ordem (4X4), ampliadas para a ordem (8X8) com a ajuda das matrizes de mapeamento. A relação que representa essa montagem é reproduzida abaixo:

$$\underline{\underline{K}}_G = \sum_{e=1}^6 \underline{\underline{A}}^{(e)} \underline{\underline{K}}^{(e)} \underline{\underline{A}}^{(e)T} \quad (14)$$

A relação anterior estabelece uma regra de correspondência entre graus de liberdade locais de cada elemento e os graus de liberdade globais da estrutura.

Entendendo-se que na matriz global cada linha e coluna numerada sequencialmente tem por correspondência um dos graus de liberdade, o trabalho de montagem pode ser menor se nas matrizes de cada elemento já for previamente indicada a numeração dos graus de liberdade globais, tomando-se por base os dados da tabela de incidência.

Nesse sentido, deve-se ter em vista que a cada um dos nós indicados na tabela de incidência correspondem dois graus de liberdade globais, com numerações definidas respectivamente pelas relações: $(2 \cdot \text{NÓ} - 1)$ e $(2 \cdot \text{NÓ})$. A numeração de linhas e colunas de cada elemento obedece, então, à seqüência de graus de liberdade associados aos nós inicial e final indicados na tabela de incidência. Obtém-se, assim, para cada um dos seis elementos da treliça a seguinte numeração de linhas e colunas:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \\
 1 \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} & 3 \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} & 3 \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \\
 2 & 4 & 4 & \\
 3 & 5 & 7 & \\
 4 & 6 & 8 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 7 & 8 \end{array} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} & \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
 1 \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} & 5 \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \\
 2 & 2 & 6 & \\
 7 & 5 & 7 & \\
 8 & 6 & 8 &
 \end{array}$$

Os blocos de sub-matrizes de ordem (2×2) de cada elemento irão se distribuir na região (8×8) da matriz global de acordo com a numeração de linhas e colunas a eles correspondentes.

O esquema abaixo indica as contribuições resultantes de cada um dos elementos na formação da matriz de rigidez global.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} & & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
 1 \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 2 & & 2 & & & & & \\
 3 & & 3 & & & & & \\
 4 & & 4 & & & & & \\
 5 & & 5 & & & & & \\
 6 & & 6 & & & & & \\
 7 & & 7 & & & & & \\
 8 & & 8 & & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \\
 4 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \\
 5 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 6 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 7 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \\
 8 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 1 & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \\
 2 & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \\
 3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 4 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 5 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 6 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 7 & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \\
 8 & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 1 & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 2 & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 4 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 5 & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 6 & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 7 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 8 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 4 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 5 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \\
 6 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \\
 7 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \\
 8 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

3. Barra de treliça tridimensional

Todo o procedimento anterior pode ser estendido para possibilitar a análise de treliças tridimensionais.

Na Figura 5 representa-se uma barra de treliça inserida no espaço tridimensional. Em cada nó de extremidade da barra associam-se três graus de liberdade segundo as direções dos eixos de referência.

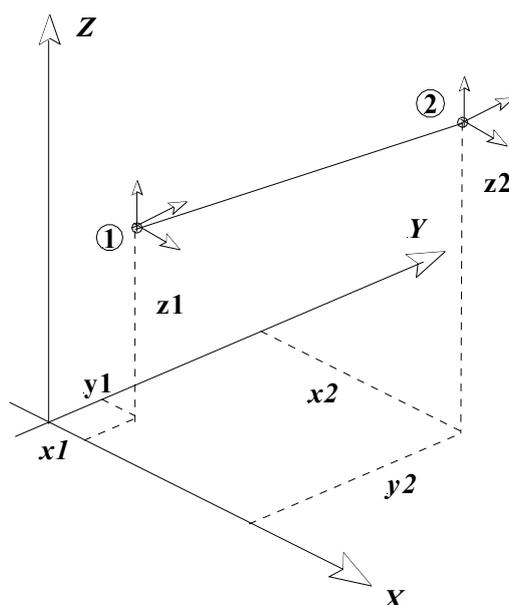


Figura 5 – Barra de treliça no espaço tridimensional

Os três graus de liberdade são necessários para descrever tanto a deformação axial quanto as mudanças de direção que o elemento venha a sofrer quando fizer parte de uma treliça submetida a certo conjunto de forças aplicadas.

A dedução da matriz de rigidez do elemento relativa aos graus de liberdade dispostos segundo as direções dos eixos de referência segue procedimento análogo ao realizado no caso plano.

Em linhas gerais, a matriz inicial que contempla apenas os graus de liberdade axiais é ampliada para uma dimensão (6X6) em associação com graus de liberdade axial e transversais ao eixo. Posteriormente, mediante rotação, transforma-se a matriz ampliada para fazer referência a graus de liberdade segundo as direções dos eixos de referência. Nessa última transformação ficam envolvidos os cossenos diretores entre a direção do elemento e de cada um dos eixos de referência. A matriz resultante apresenta o seguinte aspecto:

$$\frac{ES}{h_e} \begin{bmatrix} cx^2 & cx\,cy & cx\,cz & -cx^2 & -cx\,cy & -cx\,cz \\ cx\,cy & cy^2 & cy\,cz & -cx\,cy & -cy^2 & -cy\,cz \\ cx\,cz & cy\,cz & cz^2 & -cx\,cz & -cy\,cz & -cz^2 \\ -cx^2 & -cx\,cy & -cx\,cz & cx^2 & cx\,cy & cx\,cz \\ -cx\,cy & -cy^2 & -cy\,cz & cx\,cy & cy^2 & cy\,cz \\ -cx\,cz & -cy\,cz & -cz^2 & cx\,cz & cy\,cz & cz^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

O comprimento da barra e os cossenos diretores calculam-se mediante as seguintes relações:

$$h_e = \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$cx = \frac{(x_2 - x_1)}{h_e}$$

$$cy = \frac{(y_2 - y_1)}{h_e}$$

$$cz = \frac{(z_2 - z_1)}{h_e}$$

4. Imposição de condições de contorno não-homogêneas

Em algumas situações de interesse prático os vínculos apresentam deslocamentos prescritos. Nestes casos o procedimento de imposição das condições correspondentes apresenta alguma modificação em relação aos procedimentos descritos em capítulo anterior.

Para exemplificar, considere-se o mesmo exemplo da treliça ilustrada na Figura 2. Na Figura 6 a treliça é reproduzida com a indicação dos graus de liberdade globais.

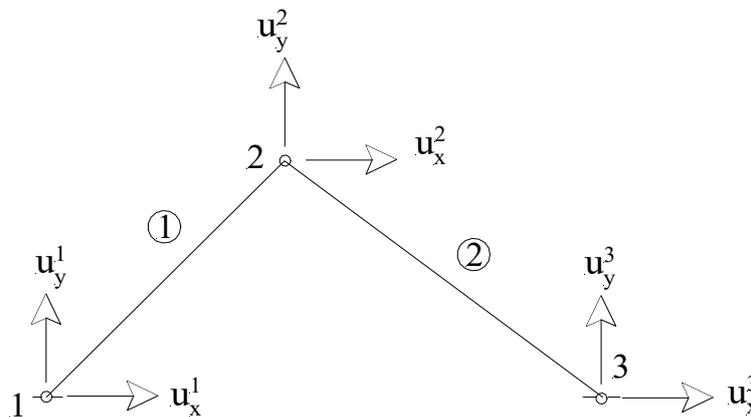


Figura 6 – Discretização da treliça plana

Admita-se que as condições de contorno do problema original sejam alteradas de modo que o primeiro grau de liberdade passe a ter um valor diferente de zero, isto é:

$$u_x^1 = \bar{u}; \quad u_y^1 = u_x^3 = u_y^3 = 0$$

Seguindo o procedimento convencional, essas condições devem ser inseridas no sistema de equações resolvente, nas linhas correspondentes aos mesmos graus de liberdade.

Em relação às restrições homogêneas mantém-se o procedimento de colocação da unidade na diagonal principal, anulando-se os outros componentes da linha e coluna adjacente. A diferença em relação à condição não-homogênea é que não se anulam os elementos da coluna adjacente e a justificativa é que se tratam de termos de rigidez que nas outras relações do sistema estariam multiplicando a variável u_x^1 .

Assim sendo, o sistema de equações de equilíbrio do problema já alterado pela imposição das condições de contorno resulta:

$$\underline{\underline{K}}_G = \frac{ES}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/12 & 0 & \left(\sqrt{2}/12 + 16/125\right) & \left(\sqrt{2}/12 - 12/125\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/12 & 0 & \left(\sqrt{2}/12 - 12/125\right) & \left(\sqrt{2}/12 + 9/125\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \\ u_x^3 \\ u_y^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ 0 \\ P_x \\ P_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nota-se que na primeira linha foi inserido \bar{u} no vetor independente. Além disso, na primeira coluna os termos de rigidez não foram todos anulados; aqueles de valor nulo decorrem da imposição das outras condições de contorno homogêneas.

Uma vez que u_x^1 passa a ter valor conhecido, nas equações restantes, relativas à u_x^2 e u_y^2 , os termos de rigidez que multiplicam u_x^1 passam a ser determinados e podem ser transferidos para o segundo membro. Assim, o sistema resolvente resulta:

$$\frac{ES}{a} \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{16}{25}\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{12}{125}\right) \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{12}{125}\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{9}{125}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^2 \\ u_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x + \frac{ES}{a} \frac{\sqrt{2}}{12} \bar{u} \\ P_y + \frac{ES}{a} \frac{\sqrt{2}}{12} \bar{u} \end{Bmatrix}$$

O procedimento descrito aplica-se sempre que houver restrição não-homogênea sobre quaisquer das condições de contorno. Como norma, sugere-se sempre iniciar a alteração do sistema pela imposição das condições homogêneas, passando em seguida para as não-homogêneas.

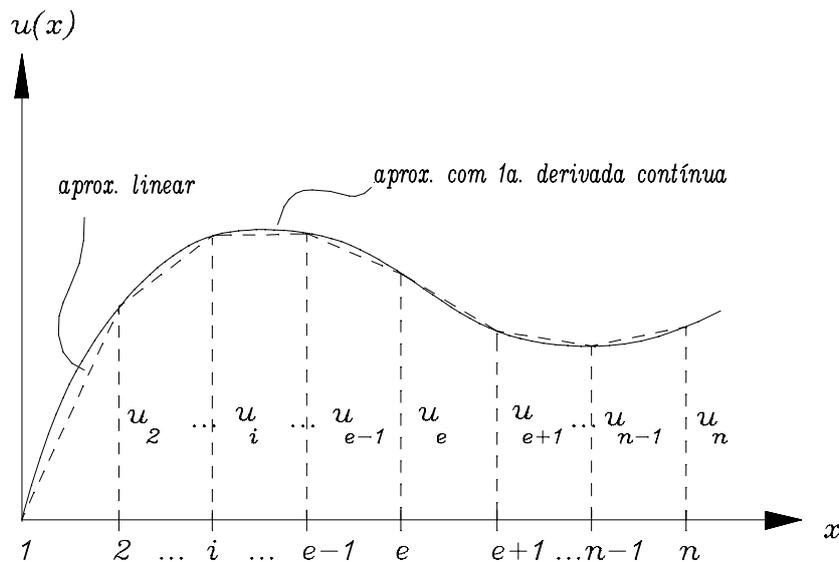
CAPÍTULO 9 MEF PARA BARRAS EM FLEXÃO

1 Aproximações com continuidade de ordem um para vigas em flexão.

Nos problemas de barras simples, submetidas exclusivamente à força normal, a ordem máxima de derivada presente na forma bilinear que compõe a expressão do P.T.V. é igual a um. Portanto, a aproximação mais simples possível, candidata à solução, deve apresentar continuidade de ordem zero em todo o domínio, podendo, entretanto, ser contínua por partes na ordem um (isto é: com continuidade da primeira derivada no interior de cada elemento, mas não necessariamente entre elementos). A Figura 1, em sua primeira ilustração, mostra essa característica da aproximação linear.

Já os problemas de barras em flexão formulados em forma fraca pelo P.T.V. apresentam formas bilineares envolvendo ordem máxima de derivada igual a dois. Nesses casos a aproximação mais simples possível deve ter continuidade nas ordens um e zero em todo o domínio do problema, conforme mostra a Figura 1, também na sua primeira ilustração, sendo contínua por partes na ordem dois.

A construção de tal tipo de aproximação pelo MEF segue a mesma metodologia apresentada para o caso linear, compondo as contribuições de funções base atreladas aos nós.



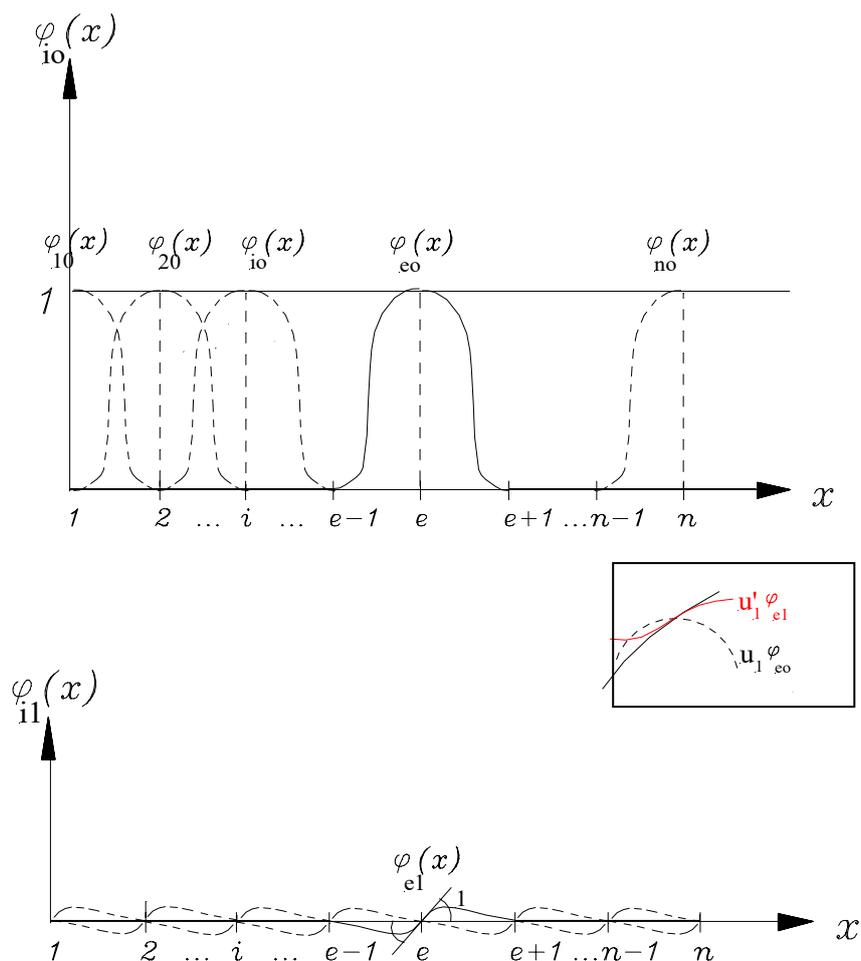


Figura 1 – Aproximação com continuidade na primeira derivada

Uma maneira de garantir a continuidade na primeira derivada da função aproximativa global consiste em combinar convenientemente duas famílias de funções base em cada nó: uma delas responsável por reproduzir o valor da função (φ_{i0}) e a outra pela inclinação da tangente (φ_{i1}), conforme mostram as outras ilustrações da Figura 1. O destaque retangular da mesma figura mostra as contribuições de cada parcela na aproximação em região adjacente a um nó.

A função aproximativa global para o deslocamento transversal ao eixo da barra resulta, então, da seguinte¹ combinação linear:

$$v(x) = v_i \varphi_{i0}(x) + v_i' \varphi_{i1}(x) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

¹ No caso das vigas em flexão usa-se $v(x)$ para denotar o deslocamento transversal ao eixo.

Observa-se que, agora, em cada nó ficam atrelados dois parâmetros: v_i e v'_i , ou seja, o valor da função e de sua derivada. De acordo com os princípios do MEF, tais parâmetros possuem significados associados a grandezas cinemáticas bem definidas. No caso das vigas, nas quais se adota o modelo clássico de deformação (“seções planas permanecem planas...”), os parâmetros representam graus de liberdade, dos tipos deslocamentos e giros, das seções coincidentes com os nós da discretização.

Por construção as funções base φ_{i0} e φ_{i1} possuem suportes (regiões aonde podem assumir valores não-nulos) definidos pelos elementos adjacentes ao nó. Por um lado, as funções base φ_{i0} , que aparecem na (1), são responsáveis estritamente pela aproximação do campo de deslocamentos e, nesse sentido, apresentam valor unitário no nó i , porém com primeira derivada nula no mesmo nó. Por outro lado, as funções base φ_{i1} têm por objetivo realizar exclusivamente a aproximação das primeiras derivadas, possuindo a característica de apresentar um valor unitário para a sua primeira derivada no nó i enquanto que o seu valor primitivo é nulo no mesmo nó. Ainda por definição, nos outros nós os valores e derivadas de cada uma das funções são nulos.

As funções base são formadas por polinômios cúbicos, definidos em cada um dos elementos adjacentes ao nó. Esses polinômios cúbicos podem ser identificados univocamente levando-se em conta o número total de parâmetros nodais (dois em cada nó) e as condições que eles devem obedecer.

Assim sendo, denotando-se por L os comprimentos dos elementos adjacentes ao nó i , as funções base ficam expressas pelas seguintes relações:

$$\varphi_{i0} = \begin{cases} -2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 & (0 \leq x \leq L) \\ 2\left(\frac{x}{L}-1\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}-1\right)^2 + 1 & (L \leq x \leq 2L) \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi_{i1} = \begin{cases} \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} & (0 \leq x \leq L) \\ \frac{(x-L)^3}{L^2} - 2\frac{(x-L)^2}{L} + x - L & (L \leq x \leq 2L) \end{cases} \quad (3)$$

Mas, analogamente ao caso da barra sob força normal, é possível construir a aproximação global mediante as contribuições das aproximações definidas nos limites de cada elemento finito.

Para ilustrar a obtenção da aproximação local, considere-se o elemento finito de viga, de comprimento L_e , com dois nós, conforme ilustra a Figura 2a.

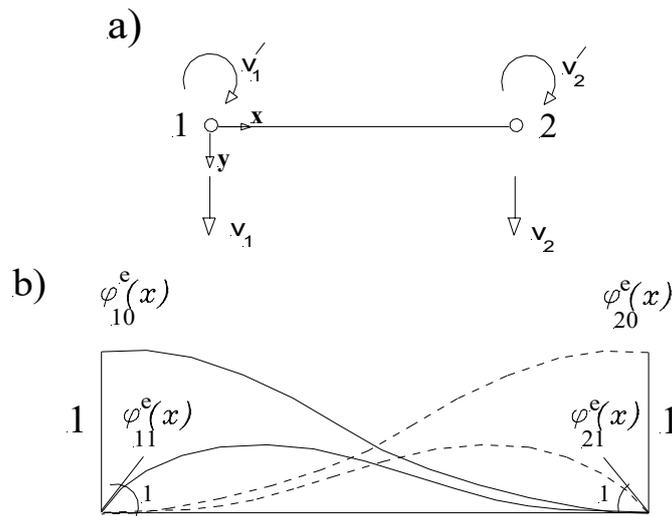


Figura 2 - Elemento finito de viga

A expressão que define a aproximação dos deslocamentos no domínio do elemento é a seguinte:

$$v^e(x) = v_1^e \varphi_{10}^e(x) + v_2^e \varphi_{20}^e(x) + v_1'^e \varphi_{11}^e(x) + v_2'^e \varphi_{21}^e(x) \quad (4)$$

onde $v_1^e, v_1'^e, v_2^e$ e $v_2'^e$ são parâmetros nodais, conforme mostra a Figura 2a.

As funções base estão indicadas na Figura 2b. Cada uma delas é representada por um polinômio cúbico na forma:

$$\varphi^e(x) = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4$$

sendo os coeficientes α_i determinados a partir da imposição de restrições específicas nos limites do elemento. Assim, particularizando o polinômio para gerar $\varphi_{10}^e(x)$ valem as seguintes condições:

$$\varphi_{10}^e(0) = 1; \varphi_{10}^e(L_e) = 0; \varphi_{10}^e(0) = 0; \varphi_{10}^e(L_e) = 0$$

Para este caso a função base resulta:

$$\varphi_{10}^e(x) = \frac{2}{L_e^3} x^3 - \frac{3}{L_e^2} x^2 + 1 \quad (5)$$

A função $\varphi_{11}^e(x)$, por sua vez, apresenta as seguintes condições de contorno:

$$\varphi_{11}^e(0) = 0 ; \varphi_{11}^e(L_e) = 0 ; \varphi_{11}^{\prime e}(0) = 1 ; \varphi_{11}^{\prime e}(L_e) = 0$$

resultando em:

$$\varphi_{11}^e(x) = \frac{x^3}{L_e^2} - \frac{2}{L_e} x^2 + x \quad (6)$$

A função base $\varphi_{20}^e(x)$ tem por condições de contorno:

$$\varphi_{20}^e(0) = 0 ; \varphi_{20}^e(L_e) = 1 ; \varphi_{20}^{\prime e}(0) = 0 ; \varphi_{20}^{\prime e}(L_e) = 0$$

e apresenta a forma:

$$\varphi_{20}^e(x) = -\frac{2}{L_e^3} x^3 + \frac{3}{L_e^2} x^2 \quad (7)$$

Finalmente, a função base $\varphi_{21}^e(x)$ deve obedecer às condições:

$$\varphi_{21}^e(0) = 0 ; \varphi_{21}^e(L_e) = 0 ; \varphi_{21}^{\prime e}(0) = 0 ; \varphi_{21}^{\prime e}(L_e) = 1$$

e assume a forma:

$$\varphi_{21}^e(x) = \frac{x^3}{L_e^2} - \frac{x^2}{L_e} \quad (8)$$

Assim sendo, a função aproximativa para o elemento de viga resulta:

$$\begin{aligned} v^e(x) = & v_1^e \left[\frac{2x^3}{L_e^3} - \frac{3x^2}{L_e^2} + 1 \right] + v_1^{\prime e} \left[\frac{x^3}{L_e^2} - \frac{2x^2}{L_e} + x \right] \\ & + v_2^e \left[-\frac{2x^3}{L_e^3} + \frac{3x^2}{L_e^2} \right] + v_2^{\prime e} \left[\frac{x^3}{L_e^2} - \frac{x^2}{L_e} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

2 Elemento finito de viga

Considerando-se o elemento finito como um elemento estrutural isolado, e de forma compatível com o modelo cinemático, sobre ele podem ser aplicadas: força externa de direção transversal ao eixo distribuída por unidade de comprimento, bem como forças e momentos concentrados nas extremidades, conforme ilustra a Figura 3.

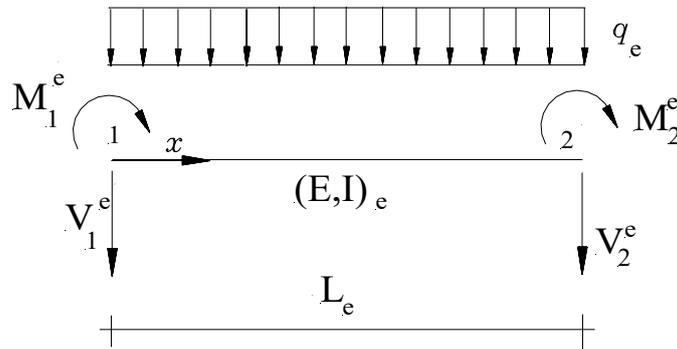


Figura 3 – Forças externas no elemento de viga

A expressão do P.T.V. para o elemento apresenta a seguinte forma:

$$\int_0^{L_e} (EI)_e v^{e''} \delta v^{e''} dx = \int_0^{L_e} q_e \delta v^e dx + M_1^e \delta v^e(0) + V_1^e \delta v^e(0) + M_2^e \delta v^e(L_e) + V_2^e \delta v^e(L_e) \quad (10)$$

Dessa relação identificam-se as formas bilinear e linear seguintes:

$$B(\phi_i^e, \phi_j^e) = K_{ij}^e = \int_0^{L_e} (EI)_e \phi_i^{e''} \phi_j^{e''} dx ; \quad c / i, j = 1, \dots, 4 \quad (11)$$

$$F(\phi_j^e) = \int_0^{L_e} q_e \phi_j^e dx + M_1^e \phi_j^e(0) + V_1^e \phi_j^e(0) + M_2^e \phi_j^e(L_e) + V_2^e \phi_j^e(L_e)$$

Nas relações anteriores ϕ_i^e representa uma das funções $\phi_{i0}^e(x)$ ou $\phi_{i1}^e(x)$, anteriormente deduzidas. Numerando-as seqüencialmente de um a quatro, as funções base passam a ser identificadas por: $\phi_1^e = \phi_{10}^e$; $\phi_2^e = \phi_{11}^e$; $\phi_3^e = \phi_{20}^e$; $\phi_4^e = \phi_{21}^e$. Assim sendo, a matriz de rigidez do elemento resulta com ordem (4x4) e o vetor de forças nodais equivalentes com ordem (4x1).

Após as deduções, a matriz de rigidez completa do elemento apresenta a seguinte forma:

$$\underline{\underline{K}}^e = (EI)_e \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} & -\frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} \\ \frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} \\ -\frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} \\ \frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Apenas como ilustração, o cálculo de alguns termos dessa matriz é explicitado em seguida:

$$\begin{aligned} K_{ee}^3 &= B(\phi_3^e, \phi_3^e) = \int_0^{L_e} (EI)_e \phi_3^{e''} \phi_3^{e''} dx \\ &= \int_0^{L_e} (EI)_e \left(-\frac{12x}{L_e^3} + \frac{6}{L_e^2} \right)^2 dx = \frac{12(EI)_e}{L_e^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{34}^e &= B(\phi_3^e, \phi_4^e) = \int_0^{L_e} (EI)_e \phi_3^{e''} \phi_4^{e''} dx \\ &= \int_0^{L_e} (EI)_e \left(-\frac{12x}{L_e^3} + \frac{6}{L_e^2} \right) \left(\frac{6x}{L_e^2} - \frac{2}{L_e} \right) dx = -\frac{6(EI)_e}{L_e^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{44}^e &= B(\phi_4^e, \phi_4^e) = \int_0^{L_e} (EI)_e \phi_4^{e''} \phi_4^{e''} dx \\ &= \int_0^{L_e} (EI)_e \left(\frac{6x}{L_e^2} - \frac{2}{L_e} \right)^2 dx = \frac{4(EI)_e}{L_e} \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando-se o caso de força distribuída uniformemente ao longo do comprimento do elemento, o vetor de forças nodais resulta:

$$\underline{F}^e = \begin{Bmatrix} \frac{q^e L_e}{2} + V_1^e \\ \frac{q^e L_e^2}{12} + M_1^e \\ \frac{q^e L_e}{2} + V_2^e \\ -\frac{q^e L_e^2}{12} + M_2^e \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Uma aplicação imediata para a aproximação deduzida consiste em determinar o deslocamento e o giro da seção na extremidade livre de uma viga em balanço submetida a uma força concentrada (P) aplicada naquela extremidade.

Discretizando-se a viga com um único elemento, os graus de liberdade nodais do elemento se confundem com os graus de liberdade nodais da estrutura: v_1, v_1', v_2, v_2' . Assim, o sistema resolvente é montado diretamente com a matriz de rigidez do elemento (12) e o vetor de forças nodais (13), este particularizado, uma vez que: $q^e = M_2^e = 0$. Além disso, a força nodal V_2^e coincide com a força P aplicada e as forças nodais V_1^e e M_1^e passam a coincidir com as reações de apoio na extremidade fixa da viga.

Na montagem do sistema resolvente, pode-se optar por introduzir no sistema as condições de contorno do problema, isto é: $v_1, v_1' = 0$. Essas duas condições passam a substituir as duas primeiras relações de equilíbrio do sistema, de tal modo que o mesmo assume a forma:

$$EI \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2 \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Finalmente, o sistema resolvente fica dado por:

$$EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Da solução do sistema resultam: $v_2 = \frac{PL^3}{3EI}$; $v_2' = \frac{PL^2}{2EI}$.

Esta solução coincide com a resposta analítica do problema obtida, por exemplo, pela integração da equação diferencial da linha elástica. Isto acontece porque a solução aproximativa adotada é um polinômio do terceiro grau, justamente a função que exprime a solução analítica.

3 Discretização de estruturas em viga

No caso de arranjos estruturais em viga mais complexos também se aplicam as considerações feitas nas aplicações às barras sob força axial, relativas à montagem do sistema global a partir das contribuições de cada elemento finito da discretização. Por exemplo, a viga ilustrada na Figura 4 pode ser discretizada em três elementos e ter seu sistema global resolvente montado pela contribuição de cada elemento, seguindo a mesma regra de compatibilidade, ou correspondência, entre graus de liberdade exibida quando da abordagem dos problemas de barras sob força normal.

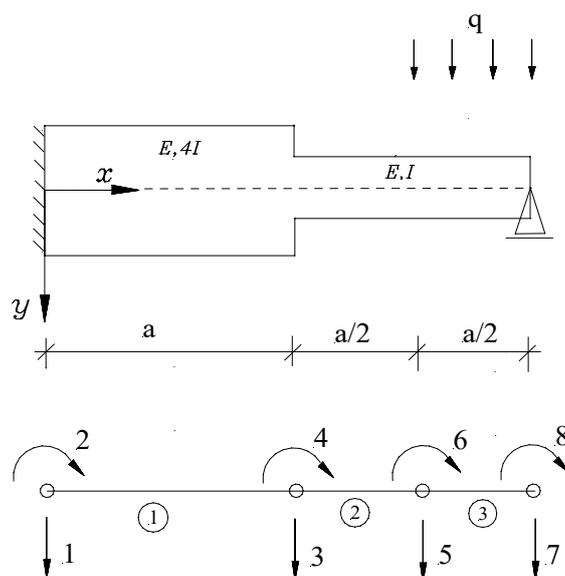


Figura 4 - Discretização em três elementos

Neste caso, a ordem inicial da matriz de rigidez do sistema global (sem a imposição das condições de contorno) é (8X8). Assim sendo, optando-se pela indicação na matriz de rigidez e vetor de força nodal de cada elemento da correspondência entre os graus de liberdade locais, numerados de um a quatro, e os graus de liberdade nodais globais indicados na Figura 4, esquematicamente a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais globais

equivalentes resultam compostos pelas seguintes contribuições dos elementos:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & (\bullet + *) & (\bullet + *) & * & * & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & (\bullet + *) & (\bullet + *) & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & (* + \circ) & (* + \circ) & \circ & \circ \\ 0 & 0 & * & * & (* + \circ) & (* + \circ) & \circ & \circ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ (\bullet + *) \\ (\bullet + *) \\ (* + \circ) \\ (* + \circ) \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

A solução se completa impondo-se as condições de contorno e considerando as relações de balanço (resumidamente, não havendo, em correspondência aos graus de liberdade dos nós internos, força ou momento concentrado aplicados, devem ser nulas as somas de forças e de momentos resultantes das contribuições dos elementos; nos graus de liberdade de vinculação, as somas daquelas contribuições devem corresponder às respectivas forças de reação).

CAPÍTULO 10 PÓRTICOS PLANOS PELO MEF

1. Extensão do MEF para a análise de pórticos planos

As barras de pórticos planos podem estar submetidas a efeitos combinados de deformação por flexão e por força normal. Dentro dos limites do comportamento linear é possível admitir válida a sobreposição de efeitos, de modo que uma barra de pórtico acumula ambas as rigidezes, por flexão e por força normal, estudadas anteriormente nas barras de treliça e viga. Assim sendo, em cada nó do elemento, agora dito de barra geral, aparecem três graus de liberdade, relacionados aos deslocamentos axial e transversal ao eixo, e ao giro. Este elemento admite ainda forças axialmente e transversalmente distribuídas, além de forças concentradas aplicadas diretamente nos nós. Em razão do número total de graus de liberdade, a matriz de rigidez possui ordem (6X6) e o vetor de forças nodais equivalentes ordem (6X1).

Por outro lado, as barras de pórtico podem estar dispostas em direção qualquer no plano, de modo que seus eixos estejam desalinhados com as direções dos eixos de referência adotados para a estrutura no plano.

Tendo por base o mesmo desenvolvimento feito para as treliças planas, um dado pórtico plano a ser analisado deve ser discretizado, inicialmente, por certo número de nós e barras. Em cada nó define-se um conjunto de três graus de liberdade associados às componentes de deslocamento segundo as direções dos eixos de referência adotados e ao giro no plano. O conjunto formado pelos graus de liberdade independentes de cada nó do pórtico compõe o vetor de deslocamentos nodais generalizados.

Ao pórtico corresponde, então, uma matriz de rigidez cuja ordem decorre do número total de graus de liberdade nodais definidos na discretização e que pode ser gerada pelas contribuições das matrizes de rigidez de cada uma de suas barras. Por outro lado, às forças aplicadas diretamente nas barras ou nos nós corresponde um vetor de forças nodais equivalentes, o qual também pode ser montado pelas contribuições dos vetores de forças equivalentes de cada elemento.

Assim sendo, para o pórtico, vale o seguinte sistema:

$$\underline{\underline{K}}_g \underline{u}_g = \underline{F}_g \quad (1)$$

onde o índice g refere-se ao sistema global adotado para posicionar a estrutura.

Para realizar a montagem da matriz de rigidez global a partir das contribuições das matrizes de rigidez de cada elemento é preciso inicialmente gerar a matriz do elemento, de ordem (6×6) , por sobreposição dos efeitos de treliça e viga e, posteriormente referenciá-la ao sistema de referência global. Nesse sentido, considerem-se as representações de barras e graus de liberdade indicados na Figura 1.

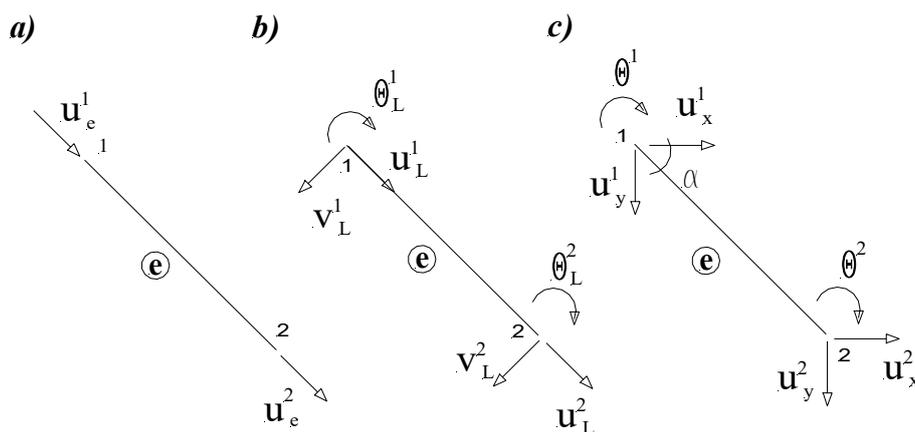


Figura 1 – Graus de liberdade para geração da barra de pórtico plano

Na Figura 1a apresenta-se o caso de elemento finito de barra de treliça, com graus de liberdade locais formados somente por deslocamentos axiais. Na Figura 1b apresenta-se o elemento finito de pórtico, já com seis graus de liberdade nodais dispostos segundo um referencial local atrelado às direções do eixo da barra e transversal a ele. Na Figura 1c apresenta-se o elemento de pórtico com graus de liberdade dispostos segundo um referencial global.

Um passo essencial é a sobreposição dos casos de treliça e viga para gerar o elemento de pórtico indicado na Figura 1b. Nesse sentido, primeiramente as matrizes de rigidez de cada caso são expandidas para a dimensão (6×6) , com conveniente posicionamento dos seus elementos não-nulos. No passo seguinte as matrizes expandidas são somadas.

Considerando-se, inicialmente, a barra de treliça, entre os graus de liberdade mostrados nas figuras 1a e 1b pode-se construir a seguinte relação, caracterizada pela matriz de mapeamento $\underline{A}^{(e)}$:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} u_L^1 \\ v_L^1 \\ \mathcal{G}_L^1 \\ u_L^2 \\ v_L^2 \\ \mathcal{G}_L^2 \end{Bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^{(e)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{(e)}^1 \\ u_{(e)}^2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

A mesma matriz de mapeamento pode ser empregada para aumentar a ordem da matriz de rigidez do elemento, passando de (2X2) para (6X6), em correspondência com o novo conjunto de graus de liberdade locais, mediante a seguinte relação:

$$\underline{\underline{K}}_L^{tr} = \underline{\underline{A}}^{(e)} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{A}}^{(e)T} \quad (3)$$

De modo explícito, a relação anterior fornece:

$$\underline{\underline{K}}_L^{tr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ES/L & -ES/L \\ -ES/L & ES/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$\underline{\underline{K}}_L^{tr} = \begin{bmatrix} ES/L & 0 & 0 & -ES/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ES/L & 0 & 0 & ES/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Nota-se, claramente, que as linhas e colunas nulas na nova matriz expandida indicam que a barra tem preservada a característica de rigidez apenas às deformações axiais.

O vetor de forças nodais do elemento finito de barra de treliça também pode ser expandido para a ordem (6X1) mediante a matriz $\underline{\underline{A}}^{(e)}$:

$$\underline{\underline{F}}_L^{tr} = \underline{\underline{A}}^{(e)} \underline{\underline{F}} \quad (5)$$

Assim, para o caso de força uniformemente distribuída ao longo do elemento:

$$\underline{\underline{F}}_L^{tr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} qL/2 + N_1 \\ qL/2 + N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL/2 + N_1 \\ 0 \\ 0 \\ qL/2 + N_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Em relação à barra de viga vale desenvolvimento análogo, isto é, estabelece-se primeiramente a matriz de mapeamento:

$$\begin{Bmatrix} u_L^1 \\ v_L^1 \\ \theta_L^1 \\ u_L^2 \\ v_L^2 \\ \theta_L^2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^{(e)}} \begin{Bmatrix} v_L^1 \\ \theta_L^1 \\ v_L^2 \\ \theta_L^2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Empregando-se relação análoga à (3), a matriz de rigidez do elemento passa a:

$$\underline{\underline{K}}_L^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_L^v = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Analogamente o vetor expandido de forças nodais equivalentes resulta:

$$\underline{F}^v = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^{(e)}} \begin{Bmatrix} pL/2 + V_1 \\ pL^2/12 + M_1 \\ pL/2 + V_2 \\ -pL^2/12 + M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ pL/2 + V_1 \\ pL^2/12 + M_1 \\ 0 \\ pL/2 + V_2 \\ -pL^2/12 + M_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

As relações (6) e (9) somadas geram o vetor de forças nodais equivalentes do elemento de pórtico. Já as matrizes (4) e (8) somadas fornecem a matriz de rigidez do elemento de pórtico:

$$\underline{\underline{K}}_L^p = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3L & 0 & -6 & 3L \\ 0 & 3L & 2L^2 & 0 & -3L & L^2 \\ -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3L & 0 & 6 & -3L \\ 0 & 3L & L^2 & 0 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad c / \mu = \frac{SL^2}{2I} \quad (10)$$

Por outro lado, entre as direções atreladas ao eixo da barra, mostradas na Figura 1b, e as direções globais mostradas na Figura 1c existe uma relação de transformação por rotação conhecida e que pode ser escrita para cada nó:

$$\begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ \theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L^1 \\ v_L^1 \\ \theta_L^1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_x^2 \\ u_y^2 \\ \theta^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L^2 \\ v_L^2 \\ \theta_L^2 \end{Bmatrix}$$

As relações anteriores podem ainda ser reunidas numa única transformação:

$$\begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ \theta^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \\ \theta^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L^1 \\ v_L^1 \\ \theta_L^1 \\ u_L^2 \\ v_L^2 \\ \theta_L^2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Em forma condensada, a (11) fica escrita como:

$$\underline{\underline{u}}_g = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{u}}_L \quad (12)$$

Uma relação análoga vale para o vetor de forças nodais, o qual pode passar a ser escrito em relação aos graus de liberdade globais:

$$\underline{F}_g = \underline{R} \underline{F}_L \quad (13)$$

A relação (13) desenvolvida fornece:

$$\underline{F}_g = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} qL/2 + N_1 \\ pL/2 + V_1 \\ pL^2/12 + M_1 \\ qL/2 + N_2 \\ pL/2 + V_2 \\ -pL^2/12 + M_2 \end{array} \right\} \quad (14)$$

$$\underline{F}_g = \left\{ \begin{array}{l} \left(qL/2 + N_1 \right) \cos \alpha - \left(pL/2 + V_1 \right) \operatorname{sen} \alpha \\ \left(pL/2 + V_1 \right) \cos \alpha + \left(qL/2 + N_1 \right) \operatorname{sen} \alpha \\ \left(pL^2/12 + M_1 \right) \\ \left(qL/2 + N_2 \right) \cos \alpha - \left(pL/2 + V_2 \right) \operatorname{sen} \alpha \\ \left(pL/2 + V_2 \right) \cos \alpha + \left(qL/2 + N_2 \right) \operatorname{sen} \alpha \\ \left(-pL^2/12 + M_2 \right) \end{array} \right\} \quad (15)$$

Nota-se que a matriz R é também ortogonal, no sentido que sua inversa coincide com a sua transposta.

Com a ajuda das formas inversas das (12) e (13), pode-se obter a relação para o cálculo da matriz de rigidez da barra no sistema global de graus de liberdade:

$$\begin{aligned} \underline{K}_L^p \underline{u}_L &= \underline{F}_L^p \\ \underline{K}_L^p \underline{R}^T \underline{u}_g &= \underline{R}^T \underline{F}_g \\ \underline{R} \underline{K}_L^p \underline{R}^T \underline{u}_g &= \underline{F}_g \end{aligned} \quad (16)$$

Segue da última relação que:

$$\underline{\underline{K}}_g = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{K}}_L^p \underline{\underline{R}}^T \quad (17)$$

Fazendo-se as substituições e desenvolvendo a (17), obtém-se:

$$\underline{\underline{K}}_g = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} (\mu c^2 + 6s^2) & (\mu - 6)cs & -3Ls & -(\mu c^2 + 6s^2) & -(\mu - 6)cs & -3Ls \\ (\mu - 6)cs & (\mu s^2 + 6c^2) & 3Lc & -(\mu - 6)cs & -(\mu s^2 + 6c^2) & 3Lc \\ -3Ls & 3Lc & 2L^2 & 3Ls & -3Lc & L^2 \\ -(\mu c^2 + 6s^2) & -(\mu - 6)cs & 3Ls & (\mu c^2 + 6s^2) & (\mu - 6)cs & 3Ls \\ -(\mu - 6)cs & -(\mu s^2 + 6c^2) & -3Lc & (\mu - 6)cs & (\mu s^2 + 6c^2) & -3Lc \\ -3Ls & 3Lc & L^2 & 3Ls & -3Lc & 2L^2 \end{bmatrix}$$

$$c / \mu = \frac{SL^2}{2I} \quad (18)$$

Onde as letras c e s resumem, respectivamente, $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$.

Exemplo1. Determinar os deslocamentos do ponto B e os esforços solicitantes nas barras do pórtico plano indicado na Figura 1.

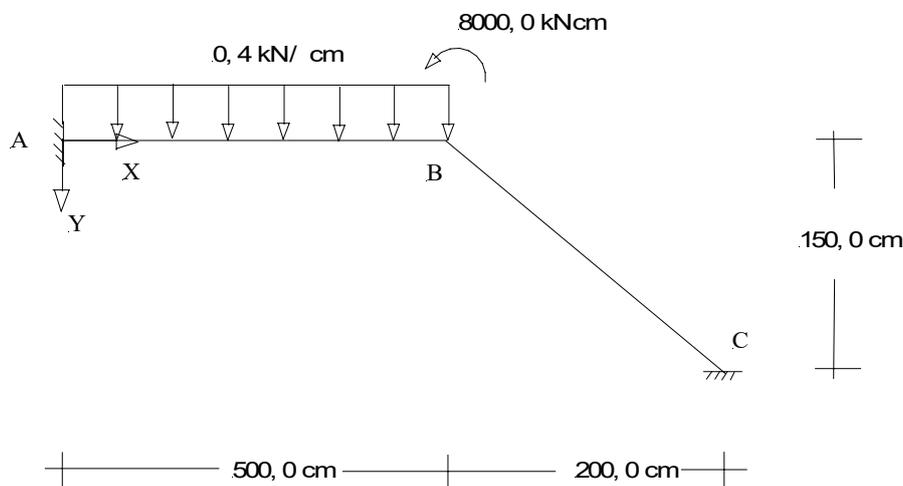


Figura 1 – Pórtico Plano

Dados complementares: $E = 20000,0 \text{ kN/cm}^2$; $S = 60,0 \text{ cm}^2$; $I = 500,0 \text{ cm}^4$.

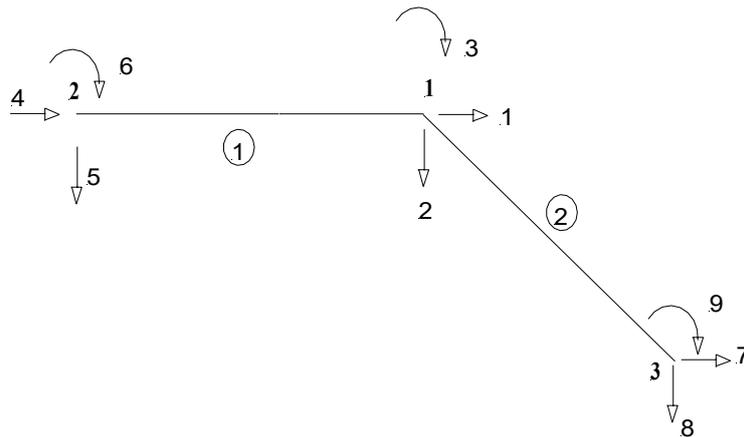


Figura 2 – Discretização adotada

O pórtico é discretizado por três nós e duas barras, com numeração indicada na Figura 2, incluindo os graus de liberdade nodais.

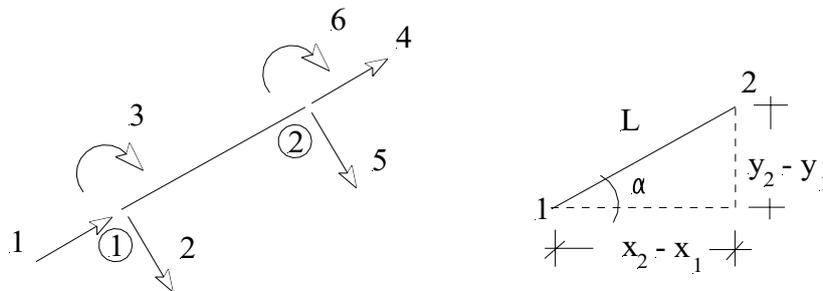


Figura 3 – Discretização adotada

Na Figura 3 mostra-se a numeração local de nós e graus de liberdade do elemento de pórtico genérico e a indicação para o cálculo do seu comprimento, do seno e do cosseno do ângulo de inclinação em relação à horizontal já para a barra inserida num domínio bidimensional:

$$L = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{(x_2 - x_1)}{L}; \quad \text{sen} \alpha = \frac{(y_2 - y_1)}{L}$$

No caso do exemplo, para as barras 1 e 2 pode-se construir a seguinte tabela de valores:

Elemento	x ₁	x ₂	y ₁	y ₂	L	cosα	senα
1	0	500	0	0	500	1	0
2	500	700	0	150	250	0,8	0,6

As matrizes de rigidez de cada elemento em relação ao sistema global de graus de liberdade resultam de particularizações feitas sobre a matriz:

$$\underline{\underline{K}}_g = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} (\mu c^2 + 6s^2) & (\mu - 6)cs & -3Ls & -(\mu c^2 + 6s^2) & -(\mu - 6)cs & -3Ls \\ (\mu - 6)cs & (\mu s^2 + 6c^2) & 3Lc & -(\mu - 6)cs & -(\mu s^2 + 6c^2) & 3Lc \\ -3Ls & 3Lc & 2L^2 & 3Ls & -3Lc & L^2 \\ -(\mu c^2 + 6s^2) & -(\mu - 6)cs & 3Ls & (\mu c^2 + 6s^2) & (\mu - 6)cs & 3Ls \\ -(\mu - 6)cs & -(\mu s^2 + 6c^2) & -3Lc & (\mu - 6)cs & (\mu s^2 + 6c^2) & -3Lc \\ -3Ls & 3Lc & L^2 & 3Ls & -3Lc & 2L^2 \end{bmatrix} \quad c / \mu = \frac{SL^2}{2I}$$

Resultam as seguintes matrizes:

$$\underline{\underline{K}}_g^1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2400 & 0 & 0 & -2400 & 0 & 0 \\ 0 & 0,96 & 240 & 0 & -0,96 & 240 \\ 0 & 240 & 80000 & 0 & -240 & 40000 \\ -2400 & 0 & 0 & 2400 & 0 & 0 \\ 0 & -0,96 & -240 & 0 & 0,96 & -240 \\ 0 & 240 & 40000 & 0 & -240 & 80000 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \quad c / \mu = 15000$$

$$\underline{\underline{K}}_g^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3074,7 & 2300,3 & -576 & -3074,7 & -2300,3 & -576 \\ 2300,3 & 1733 & 768 & -2300,3 & -1733 & 768 \\ -576 & 768 & 160000 & 576 & -768 & 80000 \\ -3074,7 & -2300,3 & 576 & 3074,7 & 2300,3 & 576 \\ -2300,3 & -1733 & -768 & 2300,3 & 1733 & -768 \\ -576 & 768 & 80000 & 576 & -768 & 160000 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix} \quad c / \mu = 3750$$

A montagem da matriz de rigidez global da estrutura, de ordem (6X6), obedece à mesma regra de mapeamento descrita em capítulo anterior, relacionando as numerações locais e globais dos graus de liberdade; as numerações estão indicadas nas matrizes de cada elemento.

Após a sobreposição, a matriz de rigidez da estrutura escreve-se:

$$\underline{\underline{K}}_g = \begin{bmatrix} 5474,7 & 2300,3 & -576 & -2400 & 0 & 0 & -3074,7 & -2300,3 & -576 \\ 2300,3 & 1734 & 528 & 0 & -0,96 & -240 & -2300,3 & -1733 & 768 \\ -576 & 528 & 240000 & 0 & 240 & 40000 & 576 & -768 & 80000 \\ -2400 & 0 & 0 & 2400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,96 & 240 & 0 & 0,96 & 240 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -240 & 40000 & 0 & 240 & 80000 & 0 & 0 & 0 \\ -3074,7 & -2300,3 & 576 & 0 & 0 & 0 & 3074,7 & 2300,3 & 576 \\ -2300,3 & -1733 & -768 & 0 & 0 & 0 & 2300,3 & 1733 & -768 \\ -576 & 768 & 80000 & 0 & 0 & 0 & 576 & -768 & 160000 \end{bmatrix}$$

Os vetores de forças nodais globais equivalentes e de reações escrevem-se como:

$$\underline{\underline{F}}_g = \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ -16333,33 \\ 0 \\ 100 \\ 8333,33 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \underline{\underline{R}}_g = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_2 \\ V_2 \\ M_2 \\ H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

A partir da imposição das condições de contorno obtém-se um sistema linear formado pelas componentes da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais em destaque. A solução do sistema, a menos de erros de arredondamento, fornece:

Deslocamento na direção do grau de liberdade 1: -0,09 cm.

Deslocamento na direção do grau de liberdade 2: 0,20 cm.

Giro correspondente ao grau de liberdade 3: -0,07 rd.

As reações nos apoios da estrutura podem ser calculadas mediante a seguinte operação:

$$\underline{\underline{R}}_g = \underline{\underline{K}}_g \underline{\underline{u}} - \underline{\underline{F}}_g$$

Onde $\underline{\underline{u}}$ representa o vetor de deslocamentos nodais obtidos na solução do sistema. Fazendo a operação indicada determina-se:

$$\underline{R}_g = \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ -16333,33 \\ 218,4 \\ -16,7 \\ -2796 \\ -219,8 \\ -84,5 \\ -5290 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ -16333,33 \\ 0 \\ 100 \\ 8333,33 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 218,4 \\ -116,7 \\ -11129,3 \\ -219,8 \\ -84,5 \\ -5290 \end{Bmatrix}$$

Os esforços internos: momento de flexão, força de corte e força normal podem ser determinados pelas suas definições, envolvendo as derivadas dos campos de deslocamentos transversais e axiais. Em cada barra empregam-se, portanto, as funções locais de aproximação levando-se em conta a correspondência entre os graus de liberdade locais e os globais calculados. Para os esforços de flexão empregam-se as seguintes relações de derivadas por elemento:

$$v''(x) = v_1 \left(\frac{12x}{h_e^3} - \frac{6}{h_e^2} \right) + \mathcal{G}_1 \left(\frac{6x}{h_e^2} - \frac{4}{h_e} \right) + v_2 \left(-\frac{12x}{h_e^3} + \frac{6}{h_e^2} \right) + \mathcal{G}_2 \left(\frac{6x}{h_e^2} - \frac{2}{h_e} \right)$$

$$v'''(x) = v_1 \left(\frac{12}{h_e^3} \right) + \mathcal{G}_1 \left(\frac{6}{h_e^2} \right) + v_2 \left(-\frac{12}{h_e^3} \right) + \mathcal{G}_2 \left(\frac{6}{h_e^2} \right)$$