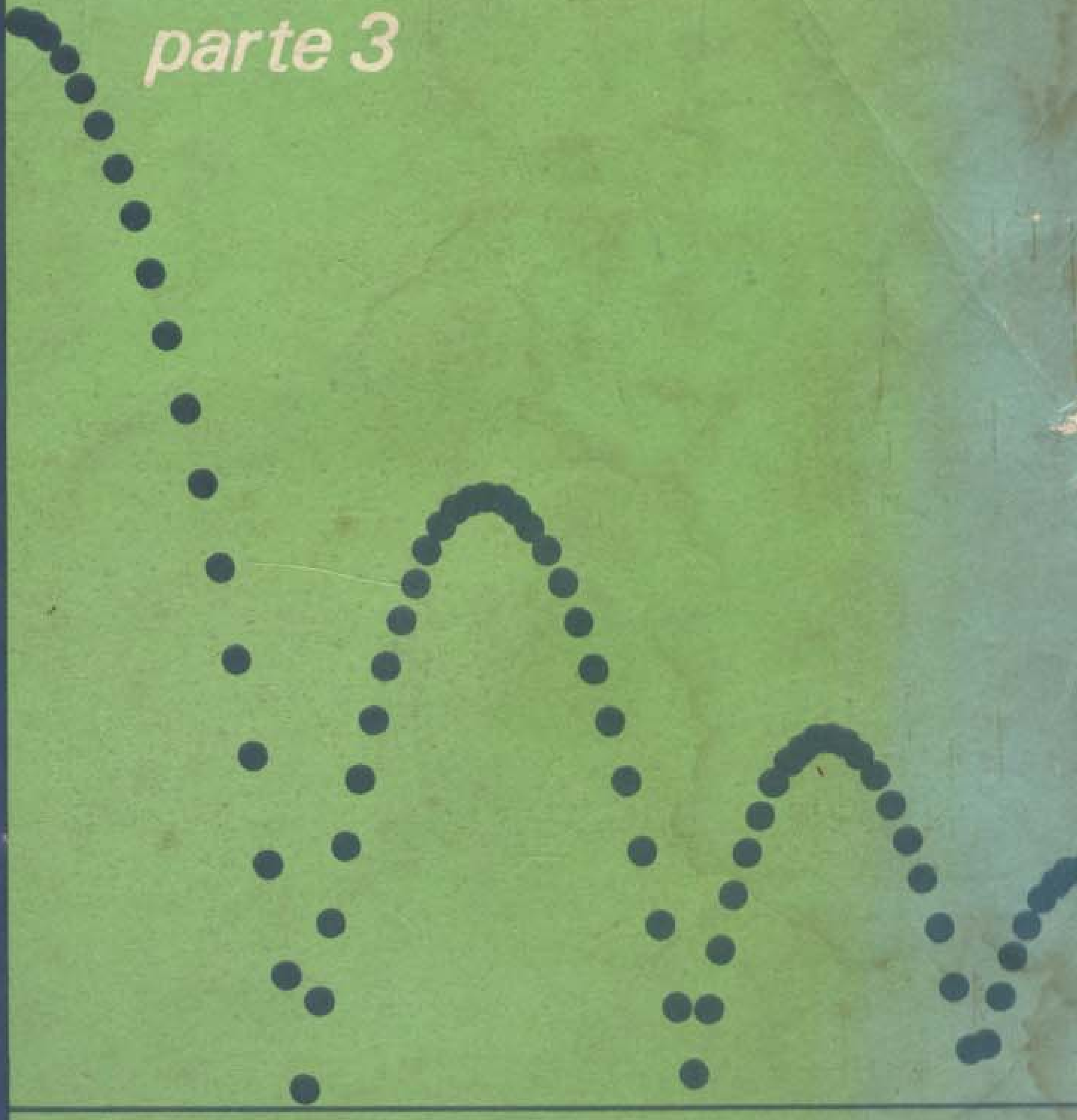
PHYSICAL SCIENCE
STUDY COMMITTEE

FÍSICA

parte 3



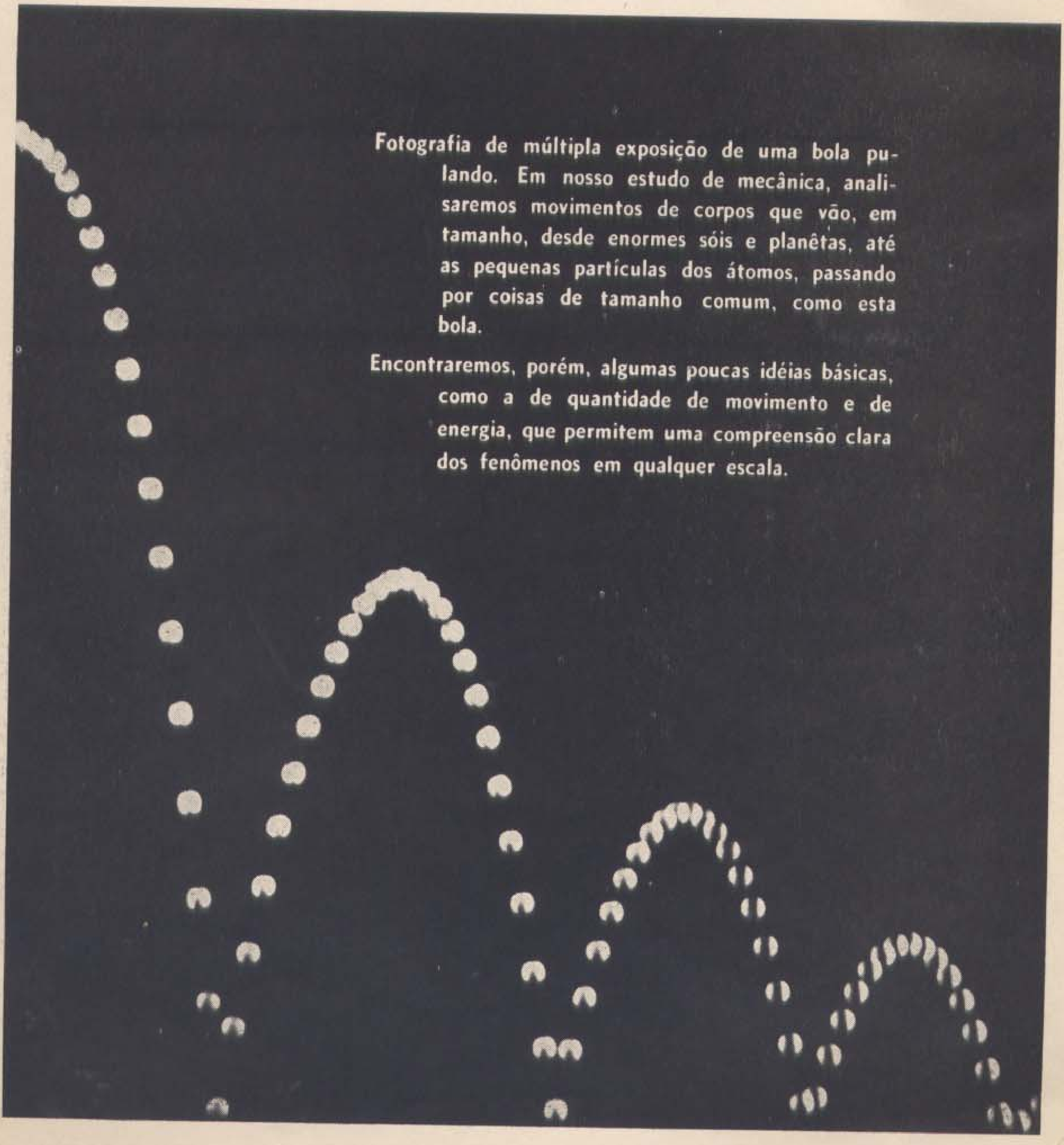
EDART-SÃO PAULO

CONTEÚDO

PARTE III MECÂNICA

PARTE III

MECÂNICA



A LEI DO MOVIMENTO DE NEWTON

CAPÍTULO **20**

Automóveis percorrem rodovias, entram no tráfego ou saem dêle, aviões de passageiros voam acima de nós; aviões a jato e satélites artificiais cruzam os céus; as estrêlas seguem na sua progressão regular. O que movimenta cada um dêsses corpos? O que põe em movimento qualquer objeto? Há uma causa única comum a todo movimento? É necessária alguma causa?

Até agora, em nosso estudo de Física, nossa preocupação quase exclusiva foi criar um modo sistemático de descrever e analisar os fenômenos físicos. Medimos os tamanhos dos átomos, as distâncias até as estrêlas e a duração de intervalos de tempo; aprendemos a determinar os ângulos de reflexão e as figuras de interferência de ondas. No estudo do movimento, esta descrição sistemática das observações é chamada cinemática (Capítulo 5). É a descrição do movimento independentemente de suas causas. Mas a simples descrição não permite satisfazer nosso desejo de realizar algo de novo, controlar os movimentos, ir além da mera descrição do que ocorre. Nesta parte do livro daremos mais um passo: examinaremos as causas dos movimentos ou de suas variações. Este estudo é chamado *dinâmica*.

A lei do movimento de Newton, sôbre a qual baseamos atualmente nossa compreensão da dinâmica, vai além da descrição cinemática. Por exemplo, nós a utilizamos ao projetar foguetes e lançar satélites artificiais. Nesta parte do livro, uma vez entendida a lei de Newton, vamos aplicá-la aos movimentos da Lua e dos planêtas. Tal como Newton, estabeleceremos a relação entre o tempo necessário a uma planêta para mover-se em tôrno do Sol e a atração gravitacional entre quaisquer porções de matéria. Na Parte IV, usaremos a mesma lei do movimento para estudar fôrças elétricas e entrar no mundo submicroscópico. Apenas com esta lei, investigaremos todos êsses tipos de movimentos.

Entre os movimentos complexos de corpos complicados voando, caindo e vibrando, encontraremos certos aspectos de simplicidade. Com auxílio da lei de Newton, encontraremos, em todos êsses movimentos, algumas propriedades que permanecem inalteradas, novas quantidades que são conservadas quando tudo mais varia. As leis de conservação nos conduzem finalmente fora do domínio do comportamento mecânico. Podemos transformar energia mecânica em elétrica. Mas, para entender a energia, devemos começar com a lei de Newton.

20 — 1. Idéias Sôbre Fôrça e Movimento.

As questões relativas às causas do movimento ocorreram ao espírito humano há mais de vinte e cinco séculos, mas as respostas atuais só foram encontradas na época de Galileu (1564-1642) e Newton (1642-1727).

Comecemos com nossa própria experiência pessoal. Que espécie de idéia associamos com a "causa do movimento"? A resposta é: esforços musculares (Fig. 20-1). Para mover um piano através de uma sala você tem de realizar um enorme esfôrço. Pelo contrário, para deslocar

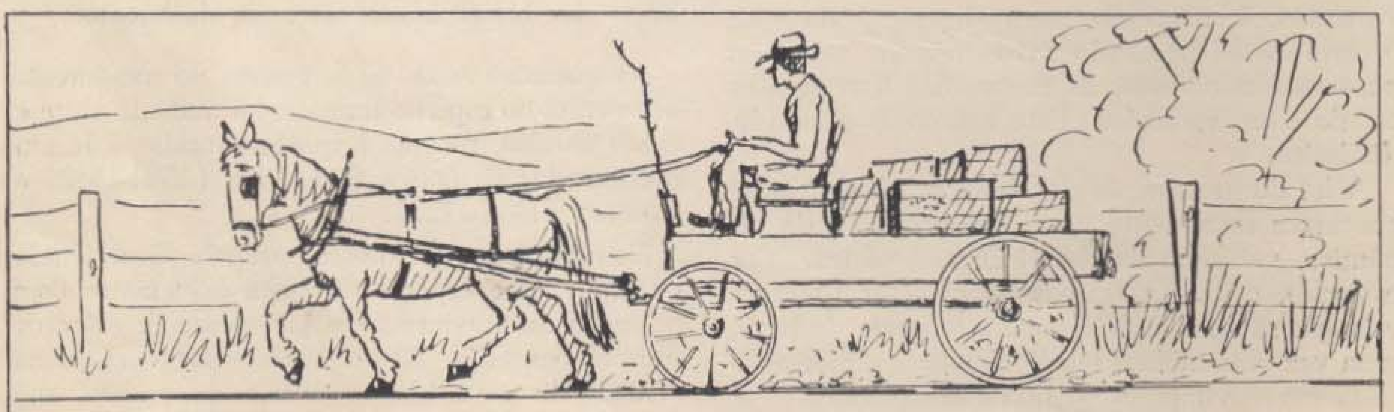
20-1 — Todos os empurrões e puxões são chamados fôrças.

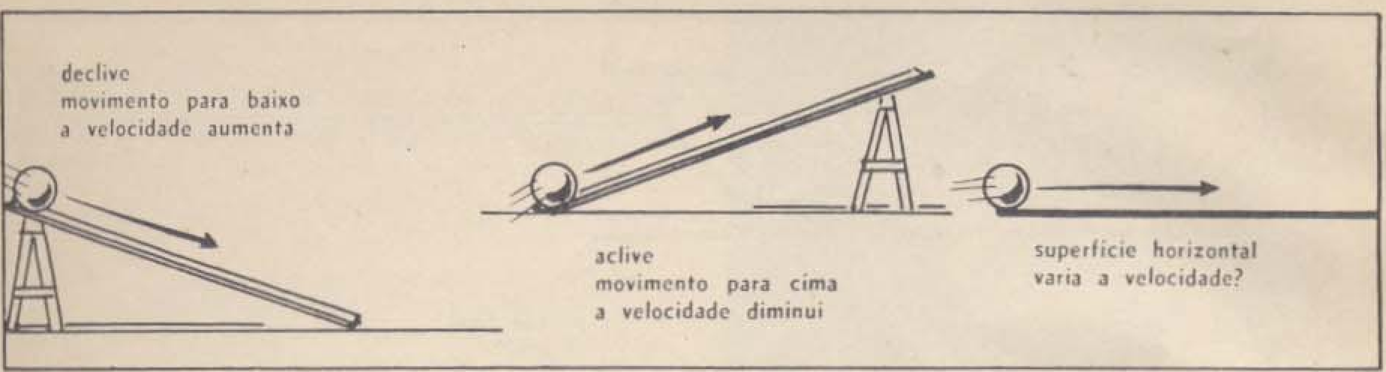
uma fôlha de papel sôbre sua carteira, você dispende um esfôrço diminuto. A êsses esforços musculares, nós chamamos *fôrças*. A noção de fôrça que se usa em Física certamente teve origem dêsse modo. Mais tarde, com o progresso do conhecimento, ela foi ampliada de modo a incluir tôdas as causas do movimento. A atração de um imã sôbre um prego é uma fôrça; faz variar o seu movimento do mesmo modo que um esfôrço muscular.

Mais especìficamente, qual é a relação entre fôrça e movimento? Suponha que arrastamos uma carteira sôbre o assoalho. Devemos aplicar-lhe uma fôrça durante todo o tempo, para que ela se mova uniformemente de um lado ao outro do aposento. De modo semelhante, um cavalo deve puxar continuamente uma carroça para mantê-la em movimento com velocidade constante. A experiência diária parece indicar que é necessário aplicar constantemente uma fôrça para manter um movimento contínuo, por exemplo, o movimento retilíneo com velocidade constante (Fig. 20-2). Aristóteles (384-322 A. C.) havia notado êste fato, concluindo que era necessária uma fôrça constante para produzir uma velocidade constante. Segue-se, portanto, que, na ausência de fôrças, os corpos voltariam ao repouso.

A hipótese de que, na ausência de fôrças externas, os corpos voltariam ao repouso, assim permanecendo, ajuda-nos a compreender grande número de movimentos observados, mas não explica *todos* os movimentos que ocorrem na natureza. Por exemplo, os gregos sabiam que os corpos caem com velocidade crescente sem nenhuma fôrça externa evidente, Eles estavam familiarizados com os movimentos do Sol, da Lua e das estrêlas, que parecem ocorrer sem empurrões ou puxões que os mantenham. Parecia haver três espécies de movimento. Devemos explicar não apenas o movimento das coisas que empurramos na superfície da Terra, mas também o movimento dos corpos que caem para a Terra e o movimento incessante dos corpos celestes. Aristóteles explicava que a matéria comum cai para a Terra porque ela é o centro do Universo, para o qual a matéria naturalmente se move. Êle admitia que a matéria celeste era fundamentalmente diferente da terrestre e que, portanto, obedecia a leis diferentes. Para Aristóteles a matéria celeste tinha a propriedade intrínseca de auto-suprir a fôrça necessária para manter os

20-2 — O movimento uniforme parece necessitar uma fôrça constante.





20-3 — Observando movimentos sôbre planos inclinados, Galileu concluiu que o movimento num plano horizontal é uniforme.

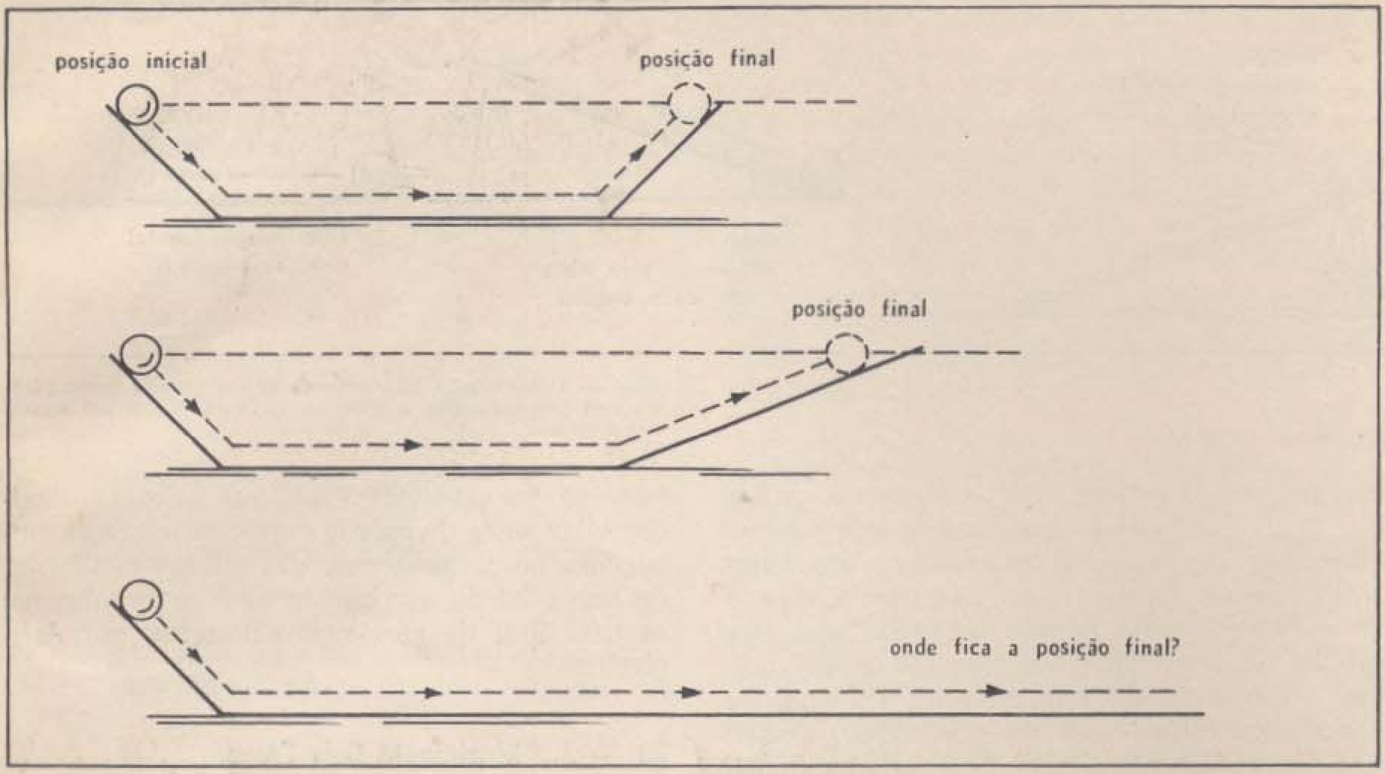
movimentos observados. Não devemos pensar que essas explicações separadas de três espécies diferentes de movimentos fossem insensatas. Nós próprios, muitas vezes, fazemos o mesmo. Quando vemos um pedaço de metal que atrai pregos de ferro, dizemos que êle é um imã: uma espécie de matéria diferente da madeira, e podemos estudar seu comportamento magnético separadamente de seu comportamento não magnético. Quando vemos um pente atrair nosso cabêlo, dizemos que êle está eletrizado, e podemos explicar seu comportamento elétrico separadamente de seu comportamento mecânico usual. Naturalmente tentamos, como fizeram os gregos, explicar tudo que observamos, mas há outros objetivos desejáveis. Explicar tanto quanto pudermos, com o menor número possível de suposições é preferível a fazer um modêlo separado para cada nova observação. Sempre que fôr possível, descreveremos a madeira, os ímãs e pentes eletrizados, com um único modêlo, tão simples quanto o possamos fazer. De modo semelhante, tentamos explicar todos os movintos com uma única teoria, em lugar de usarmos três.

Um moderno Aristóteles dificilmente explicaria o movimento incessante dos corpos celestes invocando uma espécie diferente de matéria. Podemos enviar aos céus nossa própria matéria terrestre. O mundo dos movimentos terrestres está agora unido aos movimentos eternos dos planêtas. Os satélites astificiais nos oferecem excelente demonstração de que não é necessário supor qualquer diferença entre a matéria terrestre e a celeste. Nossa compreensão dos movimentos dos corpos que caem, dos corpos celestes e dos que nós próprios empurramos ou puxamos, na superfície da Terra, é baseada, atualmente, numa única lei fundamental de movimento. Os satélites foram projetados, construidos e lançados de acôrdo com esta lei. Seu comportamento fornece uma das muitas evidências de que a lei do movimento de Newton abrange os três tipos de movimento descritos por Aristóteles.

20 — 2. Movimento Sem Fôrça.

Durante dois mil anos após a época de Aristóteles, a diferença aparente entre os movimentos celestes e o movimento sôbre a Terra, impediu qualquer progresso significativo em dinâmica. Foi então que, no século desessete, Galileu deu o primeiro grande passo para explicar de uma só vez ambos os tipos de movimento. Êle assegurava que "... qualquer velocidade, uma vez transmitida a um corpo, será mantida rìgidamente, desde que não haja causas de aceleração ou retardamento, condição esta da qual nos aproximamos nos planos horizontais, em que a fôrça de atrito tenha sido reduzida ao mínimo". Êste enunciado constitui a lei de inércia de Galileu. Em resumo, ela diz: quando nenhuma fôrça atua sôbre um corpo, êle permanece em repouso ou se move em linha reta com velocidade constante.

Como chegou Galileu a essa conclusão notável, tão diferente da experiência diária, de que o movimento retilíneo uniforme não exige fôrça? Ele estava estudando o movimento de vários objetos num plano inclinado. Notou que, "no caso do objeto estar descendo, já há uma causa de aceleração, enquanto que, se o objeto está subindo, há retardamento" (Fig. 20-3). A partir dessa experiência êle concluiu que, se um plano não está em declive nem em aclive, não haverá nem aceleração nem retardamento.



20-4 — Galileu observou que uma bola tende a subir até sua altura original, não importando a inclinação do plano. Com inclinação zero, a altura inicial nunca pode ser alcançada. Portanto o movimento num plano horizontal seria perpétuo.

"... o movimento sôbre um plano horizontal seria constante". Naturalmente Galileu sabia que, em geral, movimentos em planos horizontais não são uniformes mas êle percebeu que, se a fôrça de atrito era pequena, os corpos se moviam por mais tempo com velocidade quase constante. Com êsses argumentos, êle se convenceu de que o atrito fornecia as fôrças que detêm os corpos que se movem horizontalmente e que, na ausência de quaisquer fôrças, os corpos continuariam a se mover para sempre. Enunciou, portanto, seus resultados para a situação ideal em que não agisse *nenhuma* fôrça.

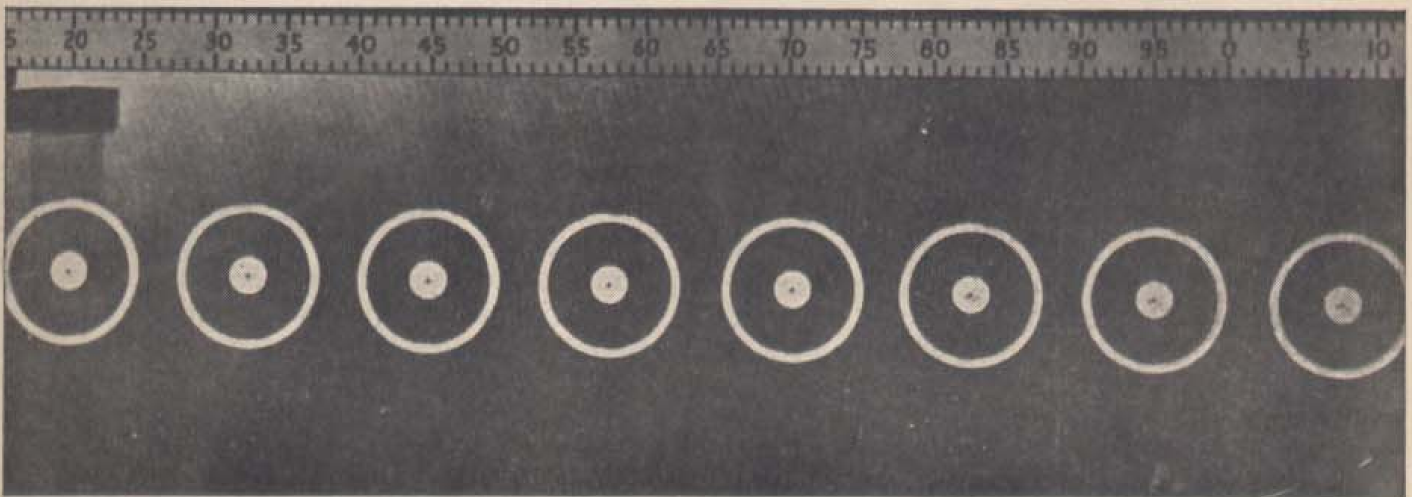
Numa segunda série de experiências, Galileu mostrou que, se colocasse dois de seus planos inclinados um em frente ao outro (Fig. 20-4 no alto), um objeto que partisse do repouso desceria rolando num dêles e subiria no outro até quase alcançar a altura original. O atrito o impedia de atingir essa altura, mas Galileu compreendeu que essa altura era o limite para o movimento. Êle raciocinou que, se diminuísse a inclinação do plano em aclive, como na parte central da Fig. 20-4, a distância percorrida pelo objeto para alcançar sua altura original, aumentaria. Se, como na parte inferior da Fig. 20-4, a inclinação fôsse finalmente reduzida a zero, de modo que o segundo plano fôsse uma superfície horizontal, o objeto nunca atingiria sua altura original: êle se moveria eternamente. "Daí", concluía ainda Galileu, "segue-se que o movimento num plano horizontal é perpétuo".

As experiências de Galileu não são difíceis, nem há qualquer prova de que êle as realizou com habilidade excepcional. Algumas, como a extensão da experiência da parte inferior da Fig. 20-4 ao caso idealizado de movimento perpétuo, não eram experiências "reais". Eram apenas experiências pensadas. Mas estavam baseadas em fatos concretos. É justamente essa combinação de pensamento e fatos que distingue a obra de Galileu. Foi essa combinação que lhe permitiu encontrar a idealização útil, a despeito da grande variedade de movimentos observados. Seu princípio de inércia foi a grande via que permitiu a Newton construir nosso atual conhecimento de dinâmica.

Muitos dos movimentos analizados por Galileu, e os que Newton estudou mais tarde, eram tão altamente idealizados que pareciam ter muito pouco em comum com os movimentos dos sistemas reais que observamos. Mas foi sòmente

20-5 — a) Disco metálico sôbre uma camada de gêlo sêco, repousando sôbre uma fôlha grossa de alumínio. Com tal aparêlho, podemos estudar o movimento quase sem atrito.

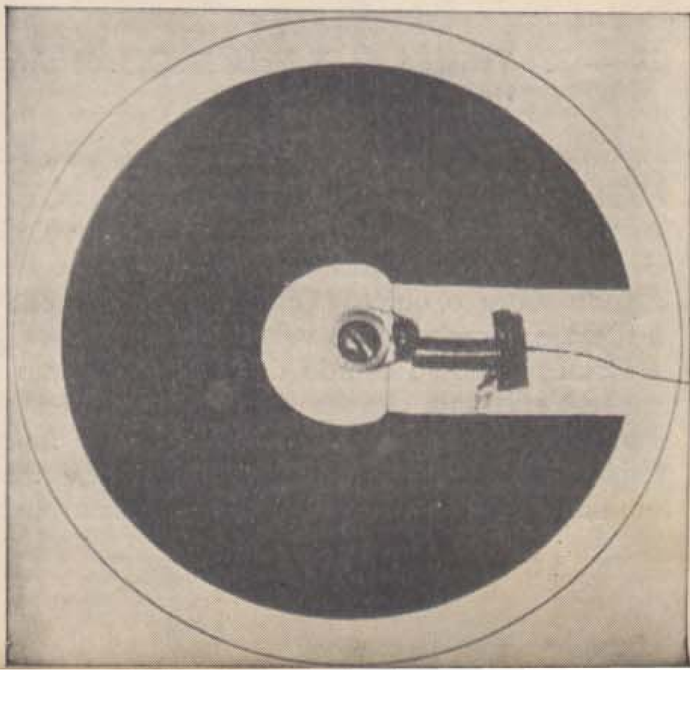
b) Movimento de um disco com suporte de gêlo sêco. O disco move-se da esquerda para a direita, acendendo-se uma lâmpada cada 1/10 de segundo. A escala no alto é em centímetros. Temos, assim, uma ótima aproximação da situação ideal de movimento sem fôrça. O disco percorre distâncias quasi iguais em intervalos de tempo iguais.

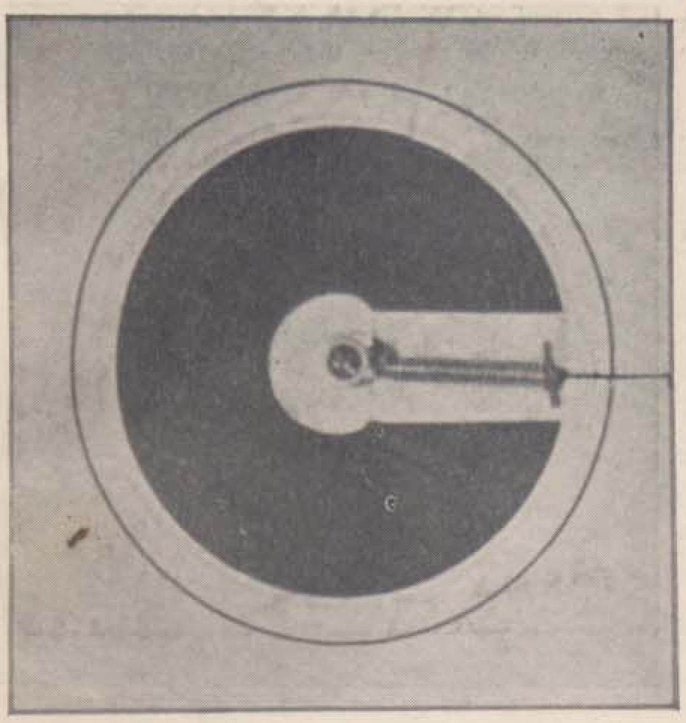


pela consideração cuidadosa dessas situações idealizadas que Galileu e Newton deram suas grandes contribuições à mecânica. Do mesmo modo, devemos observar cuidadosamente os movimentos simples e idealizados para obter uma compreensão real das bases da dinâmica. Então, e sòmente então, conseguiremos aplicar a dinâmica ao mundo complexo que nos rodeia.

Com equipamento moderno conseguimos fazer experiências que quase realizam as experiências idealizadas por Galileu, sôbre movimento sem fôrça. Para conseguir a série de instantâneos da Fig. 20-5 (b) usamos um disco que desliza sôbre uma placa metálica apoiado em uma camada de gás que quase elimina o atrito. Na Fig. 20-5 (a) você pode ver um disco dêsse tipo. O topo do disco é pintado de preto e branco, para tornar fácil a localização do centro. Em

20-6 — a) Mola não distendida presa a um disco.





b) A mola distendida. Sempre que a mola sofre a mesma distensão, obtemos a mesma fôrça.

baixo há uma camada de gêlo sêco. Êsse dióxido de carbono congelado transforma-se em gás lentamente, fornecendo o suporte gasoso sôbre o qual desliza o disco. A fotografia da Fig. 20-5 (b) foi feita disparando um flash a cada décimo de segundo, enquanto o disco se movia sôbre a placa de alumínio polido. Como você pode ver, a distância percorrida entre as exposições é quase constante; a velocidade quase não varia. Com essas experiências, podemos calcular que, se êsse disco se movesse inicialmente a 18 km/h numa placa horizontal bastante comprida, êle percorreria cêrca de 3,6 km até parar.

20 — 3. Variação da Velocidade Quando Atua Uma Fôrça Constante.

A lei de inércia de Galileu nos diz que um objeto, sôbre o qual não atua fôrça alguma, move-se com velocidade inalterada. Se a velocidade varia, concluímos que alguma fôrça está agindo sôbre o objeto. Qual é a relação entre a fôrça e a variação de velocidade?

Começaremos o estudo dessa questão com a experiência mais simples que possamos imaginar. Aplicaremos uma única fôrça a um único objeto. Para minimizar outros efeitos usaremos um dos discos de gêlo sêco sôbre a mesma placa metálica que nos serviu para examinar o movimento sem fôrça aplicada. A fôrça que agora aplicarmos será então a única que precisaremos considerar.

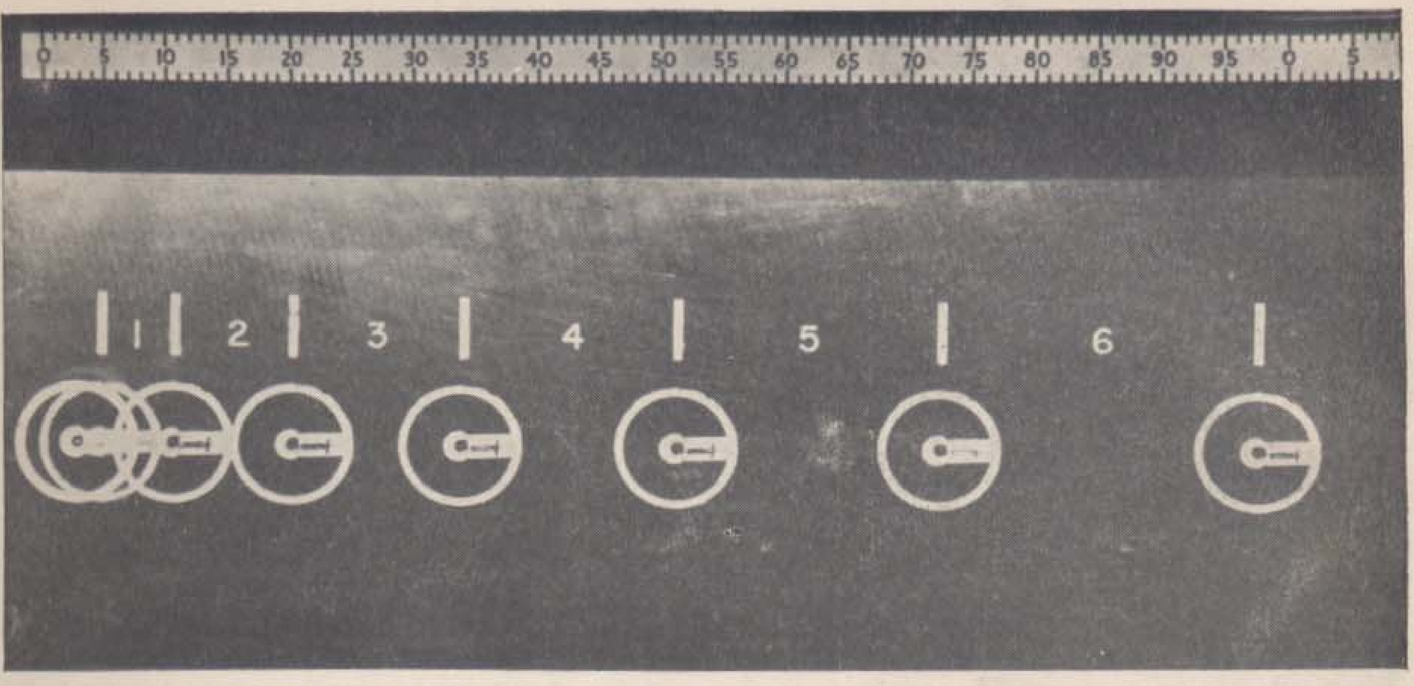
Precisamos saber se a fôrça aplicada é constante. Para êsse fim, empregamos uma mola ligada ao disco [Fig. 20-6 (a)]. É um fato de experiência que a fôrça exercida por uma mola aumenta de algum modo com a distensão da mola. Ademais, se determinada mola sofre certa distensão, ela parece exercer uma fôrça bem determinada. Admitiremos que a fôrça exercida por nossa mola é sempre a mesma para a mesma distensão. [Fig. 20-6 (b)].

Puxamos, agora, nosso disco de tal modo que a mola se distenda sempre do mesmo comprimento, e registramos o movimento do disco com fotografias instantâneas. O resultado de tal experiência é mostrado na Fig. 20-7. Nesta experiência, os instantâneos foram feitos a intervalos de 1/5 de segundo. Podemos ver as posições sucessivas do disco e verificamos que a distensão da mola permanece constante. O disco partiu do repouso e deslocou-se na direção da fôrça aplicada. Vê-se claramente que, em cada intervalo de tempo, a distância percorrida pelo disco aumentou. Portanto, a velocidade $v = \triangle x/\triangle t$ aumentou. Medindo as variações sucesisvas de posição, podemos estabelecer quantitativamente como variou a velocidade. Como indica a Tabela 1, em cada 1/5 de segundo após o início do movimento, a velocidade mudou de quase exatamente 20 cm/s. Dividindo a variação de 20 cm/s pelo intervalo de tempo de 1/5 s, vemos que a velocidade variou à taxa constante de 100 cm/s/s. A variação de v em qualquer intervalo de tempo $\triangle t$ é

$$\triangle v = 100 \triangle t$$

onde as velocidades são medidas em cm/s e o tempo em segundos.

O valor particular 100 cm/s^2 ocorre nesta experiência porque puxamos determinado objeto com determinada fôrça, Quando puxamos com outras fôrças, ou sôbre outros objetos, usualmente obtemos outros valôres do fator de proporcionalidade. Mas tôdas as experiências semelhantes à que acabamos de descrever mostram que, sob a influência de uma fôrça constante, as variações de velocidade são diretamente proporcionais ao tempo durante o qual a fôrça atua.



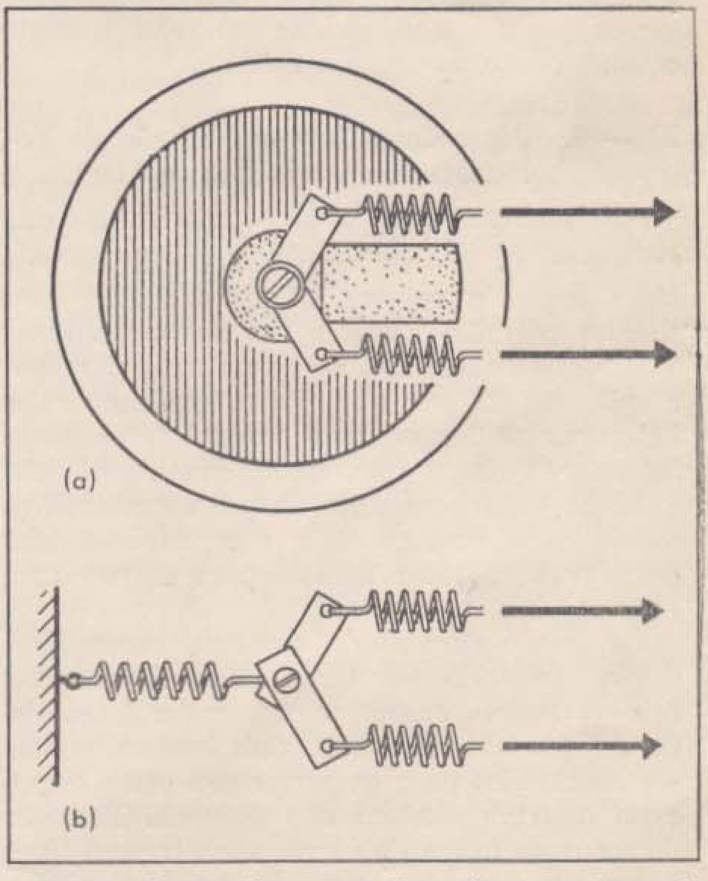
20-7 — Êste conjunto de instantâneos mostra o disco sendo puxado para a direita. As exposições foram feitas a intervalos de 1/5 de segundo. Aplicou-se uma fôrça constante mantendo-se constante a distensão da mola. A distância percorrida pelo disco em cada intervalo marcado na fotografia foi medida e registrada na Tabela 1.

TABELA 1

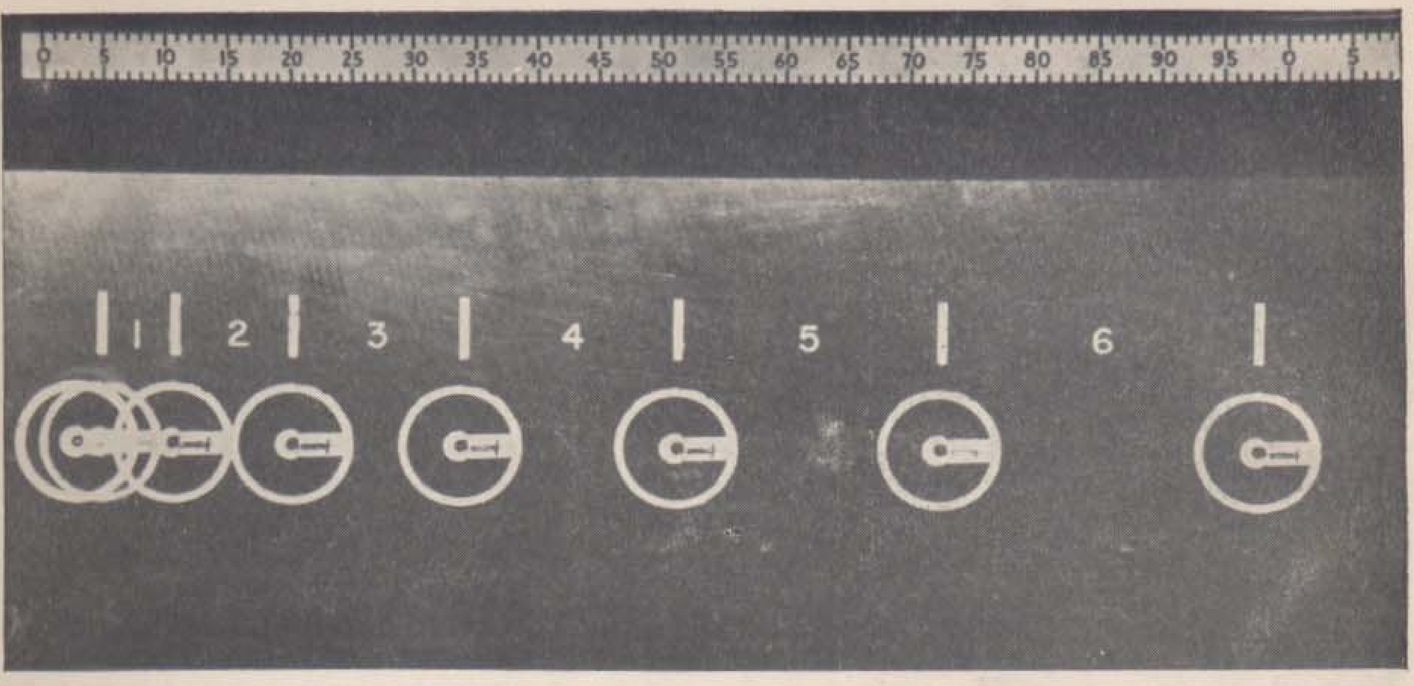
Dados obtidos na experiência da Fig. 20-7

Distância n.º	*Intervalo percor-rido* Δx *(cm)*	*Velocidade média no intervalo* $\Delta x/\Delta t = v$ *(cm/s)*	*Variação da velo-cidade* Δv *(cm/s)*
1	5,68	28,4	19,0
2	9,48	47,4	20,1
3	13,5	67,5	19,0
4	17,3	86,5	20,0
5	21,3	106,5	20,0
6	25,3	126,5	

Começamos nossas medidas com o intervalo 1, pois é duvidoso que o primeiro instantâneo tenha sido feito no instante em que o objeto começou a se mover. Todos os intervalos de tempo foram de 1/5 de segundo. A coluna da velocidade média foi completada, portanto, dividindo a segunda coluna por 1/5 de segundo. A última coluna mostra como a velocidade aumentou em cada um dos intervalos de 1/5 de segundo; foi obtida determinando-se as diferenças de velocidade em intervalos sucessivos. Por exemplo, a diferença entre a velocidade 28,4 cm/s, no intervalo 1, e a velocidade 47,4 cm/s, no intervalo 2, é 19,0 cm/s. Dentro dos limites de nossa precisão experimental, a variação de velocidade Δv *é constante (20 cm/s) em intervalos de tempo* Δt *iguais a 0,20 s.*



20-8 — Para aplicar uma fôrça igual ao dôbro da original, ligamos duas molas idênticas ao disco (a). Por conveniência, podemos usar uma terceira mola, que exerce a mesma fôrça que as duas molas idênticas agindo conjuntamente. O diagrama em (b) mostra como as molas poderiam ser dispostas para se obter a distensão correta da terceira mola.



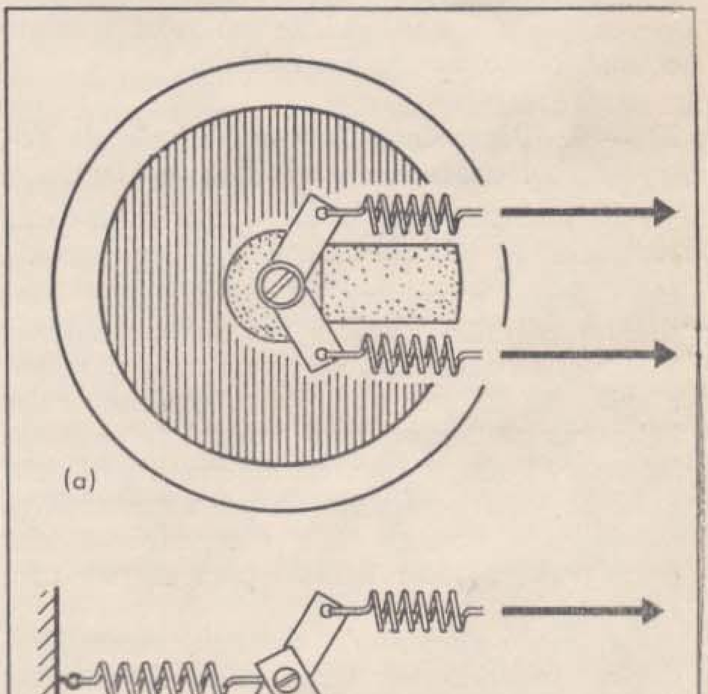
20-7 — Êste conjunto de instantâneos mostra o disco sendo puxado para a direita. As exposições foram feitas a intervalos de 1/5 de segundo. Aplicou-se uma fôrça constante mantendo-se constante a distensão da mola. A distância percorrida pelo disco em cada intervalo marcado na fotografia foi medida e registrada na Tabela 1.

TABELA 1

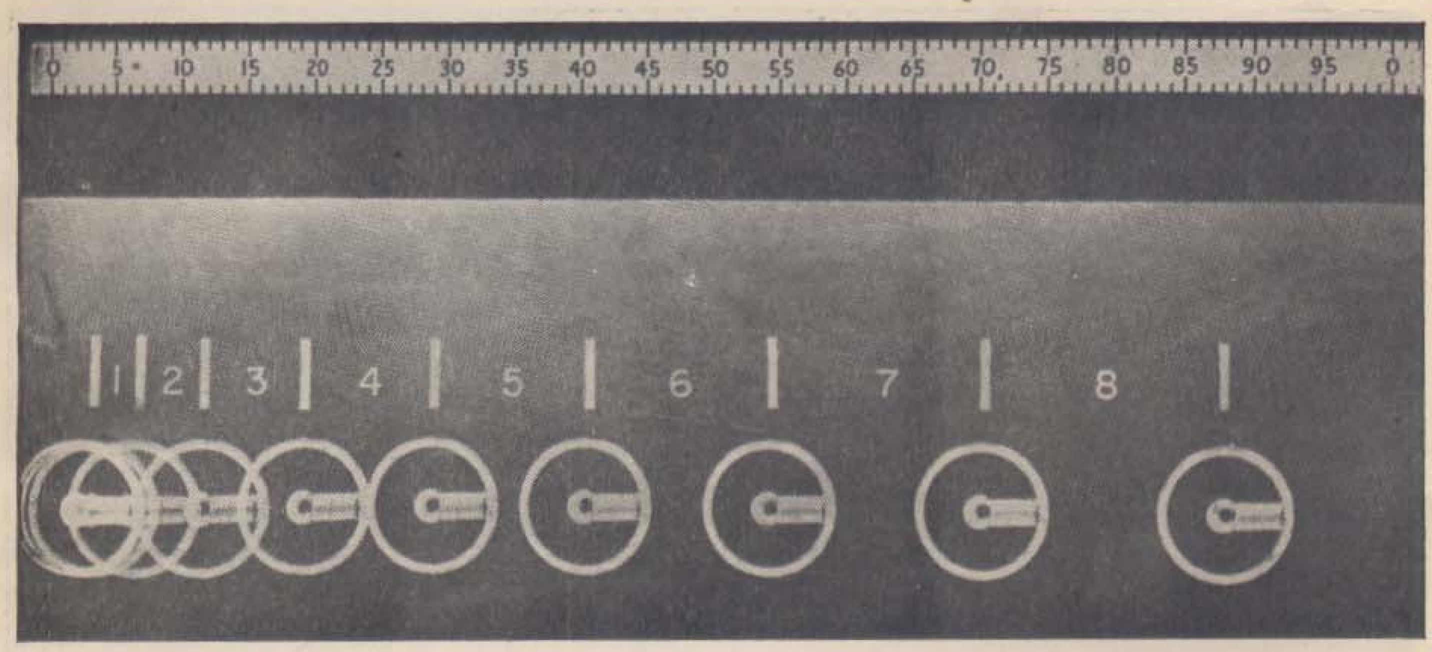
Dados obtidos na experiência da Fig. 20-7

Distância n.º	*Intervalo percor-rido* Δx *(cm)*	*Velocidade média no intervalo* $\Delta x/\Delta t = v$ *(cm/s)*	*Variação da velo-cidade* Δv *(cm/s)*
1	5,68	28,4	19,0
2	9,48	47,4	20,1
3	13,5	67,5	19,0
4	17,3	86,5	20,0
5	21,3	106,5	20,0
6	25,3	126,5	

Começamos nossas medidas com o intervalo 1, pois é duvidoso que o primeiro instantâneo tenha sido feito no instante em que o objeto começou a se mover. Todos os intervalos de tempo foram de 1/5 de segundo. A coluna da velocidade média foi completada, portanto, dividindo a segunda coluna por 1/5 de segundo. A última coluna mostra como a velocidade aumentou em cada um dos intervalos de 1/5 de segundo; foi obtida determinando-se as diferenças de velocidade em intervalos sucessivos. Por exemplo, a diferença entre a velocidade 28,4 cm/s, no intervalo 1, e a velocidade 47,4 cm/s, no intervalo 2, é 19,0 cm/s. Dentro dos limites de nossa precisão experimental, a variação de velocidade Δv *é constante (20 cm/s) em intervalos de tempo* Δt *iguais a 0,20 s.*



20-8 — Para aplicar uma fôrça igual ao dôbro da original, ligamos duas molas idênticas ao disco (a). Por conveniência, podemos usar uma terceira mola, que exerce a mesma fôrça que as duas molas idênticas agindo conjuntamente. O diagrama em (b) mostra como as molas poderiam ser dispostas para se obter a distensão correta da terceira mola.



20-9 — O disco usado nesta experiência é acelerado por uma fôrça duas vêzes maior do que a usada antes. O intervalo entre os instantâneos foi reduzido a 1/10 de segundo, porque o movimento aqui é mais rápido.

Neste exemplo, o disco se move sempre no mesmo sentido, sem retornar. Mas se o disco fosse retardado e o sentido do movimento invertido, v se tornaria negativo. Conseqüentemente, vemos que v é a velocidade em valor absoluto e sinal, e não apenas em módulo.

20 — 4. Dependência Entre a Variação de Velocidade e a Intensidade da Fôrça.

Que acontece quando aplicamos outra fôrça constante ao mesmo corpo? Apliquemos uma fôrça dupla, e vejamos o que acontece. Esta simples sugestão acarreta um novo problema. Vimos que poderíamos usar uma mola para que a aplicação de uma fôrça de determinado valor independesse tanto quanto possível do elemento humano. Assim é que, na última experiência, podíamos estar confiantes de que a mesma fôrça foi aplicada durante tôda a experiência. Mas como podemos usar a mola para exercer uma fôrça dupla?

Um modo simples de conseguir uma fôrça dupla é sugerido pelo fato familiar de que dois homens podem empurrar com maior intensidade do que um só. Assim, dois homens podem ser necessários para empurrar um carro enguiçado que um sòzinho não moveria. Podemos dispor duas molas de forma a obter uma fôrça dupla da que seria exercida por uma única. Construamos uma segunda mola idêntica à primeira, na medida do possível. Quando distendemos a segunda mola do mesmo comprimento que a primeira, ela exerce uma fôrça igual. Podemos ter certeza de que as fôrças são iguais usando a nova mola para realizar de novo a última experiência. Quando a fôrça é a mesma que antes, o disco é acelerado da mesma maneira que no primeiro caso. Mostramos assim que a nova mola exerce a mesma fôrça que a antiga.

Apliquemos agora ao disco uma fôrça igual ao dôbro da primitiva. Com ambas as molas presas ao disco, lado a lado, puxamos as duas juntas, na mesma direção [Fig. 20-8 (a)]. Depois de conseguir que cada mola se distenda do mesmo comprimento que na experiência original com uma só mola, observamos o movimento do mesmo modo que antes. Desta maneira, obtemos o dôbro da fôrça sôbre o disco, tudo mais permanecendo inalterado.

Pode não ser conveniente colocar duas molas, lado a lado, no objeto com que experimentamos. Mas podemos aplicar fàcilmente ao disco uma fôrça de intensidade dupla, utilizando uma terceira mola. Com as duas molas idênticas juntas e atreladas à terceira, registramos a distensão desta terceira mola em conseqüência de aplicarmos uma fôrça dupla [Fig. 20-8 (b)]. Feito isto, poderemos sempre aplicar uma fôrça dupla usando a terceira mola distendida daquêle comprimento. Usamos êsse processo para aplicar uma fôrça dupla ao nosso disco. O resultado está indicado na Fig. 20-9.

Que verificamos? Os dados da Tabela 2, tomados com o mesmo dispositivo de antes, mas com exposições a intervalos de 1/10 de segundo, e com fôrça dupla, mostram que a taxa de aumento da velocidade é o dôbro de antes. Em lugar de $\triangle v = 100 \triangle t$, obtemos $\triangle v = 200 \triangle t$, medindo ainda a velocidade em cm/s e o tempo em segundos.

Outras experiências mostram que êsse resultado é geral. Sempre que dobramos a fôrça aplicada a certo objeto, dobramos também a taxa em que varia a velocidade. Ademais, se triplicarmos a fôrça, colocando lado a lado três molas idênticas, triplicaremos a taxa de variação da velocidade. De muitas medidas análogas concluimos que a variação da velocidade de um corpo num dado intervalo de tempo é proporcional à fôrça F que atua sôbre o corpo.

Verificamos então duas coisas. A variação da velocidade $\triangle v$ aumenta com a duração do intervalo de tempo $\triangle t$ e é tanto maior quanto maior é a fôrça. Podemos combinar estas duas informações num só enunciado: $\triangle v$ é proporcional a $F \triangle t$.

TABELA 2

Dados obtidos na experiência da Fig. 20—9.

Intervalo n.º	*Distância percorrida* $\triangle x$ *(cm)*	*Velocidade média no intervalo* $\triangle x/\triangle t = v$ *(cm/s)*	*Variação da velocidade* $\triangle v$ *(cm/s)*
3	7,7	77	19
4	9,6	96	19
5	11,5	115	21
6	13,6	136	20
7	15,6	156	21
8	17,7	177	

Êstes são os resultados de uma experiência em que a fôrça aplicada era o dôbro da que foi usada na primeira experiência (Tabela 1). As fotografias foram feitas a intervalos de 1/10 de segundo. Note, portanto, que a variação de velocidade ocorreu na metade do intervalo de tempo de antes. A taxa de variação da velocidade é, portanto, cêrca de 200 cm/s/s. Os intervalos 1 e 2 não foram usados porque a superposição das imagens sucessivas na fotografia torna difícil fazer medidas nessa região; mesmo o intervalo 3 é ainda um pouco mais duvidoso do que os seguintes.

20 — 5. Massa Inercial

A variação $\triangle v$ produzida por uma fôrça F, que atua durante certo tempo $\triangle t$, depende do objeto sôbre o qual ela age. Aplicando fôrças iguais durante o mesmo intervalo de tempo, a uma bola de futebol e a um elefante, produzimos menor variação na velocidade do elefante.

Como os corpos maiores são acelerados menos fàcilmente por fôrças, é conveniente escrever a proporcionalidade entre $F \triangle t$ e $\triangle v$ sob a forma

$$F\triangle t = m\triangle v$$

A constante de proporcionalidade m depende do objeto. Seu valor aumenta com o tamanho do corpo, pelo menos para objetos feitos da mesma substância.

A constante m é chamada *massa inercial* do corpo. Reescrevendo a equação acima, definimos m como $F\triangle t/\triangle v$ para um dado objeto. Esta razão é experimentalmente constante e nos diz qual a dificuldade para variar a velocidade do corpo. Como você já sabe, $\triangle v/\triangle t$ é a taxa de variação da velocidade, ou aceleração a na direção da fôrça. A massa inercial pode, portanto, ser escrita como $m = F/a$. Quanto maior a fôrça necessária para produzir uma dada aceleração, tanto maior a massa inercial do objeto.

Naturalmente queremos saber se a massa inercial, esta medida da dificuldade de acelerar um corpo, é uma nova propriedade do corpo. Será ela independente de qualquer coisa que já conhecemos, será alguma propriedade familiar sob aspecto diferente, ou uma combinação de propriedades familiares? Para responder a essas perguntas, investigaremos a relação entre a massa inercial e a forma, o tamanho, a composição, ou qualquer outra propriedade conhecida de um objeto.

Está claro que não procuraremos ao acaso. Como mostra o exemplo do elefante e da bola de futebol, nossa experiência já indica que o tamanho é um bom ponto de partida. Mas o volume apenas não basta. Um elefante ôco, como se usa em certos cortejos de carnaval, não é tão difícil de acelerar como um elefante verdadeiro; comecemos, pois, com objetos de composição uniforme. Investiguemos qual o efeito de dobrar o tamanho de um objeto, mantendo uniforme sua composição. Um método fácil consiste em usar dois discos idênticos. Podemos decidir se dois discos são idênticos submetendo-os à mesma fôrça durante o mesmo tempo. Se ambos adquirirem a mesma rapidez, êles terão massas inerciais idênticas.

Puxemos os dois discos idênticos lado a lado, aplicando a mesma fôrça a cada um, com molas idênticas. Os dois discos se deslocam juntos, ganhando o mesmo $\triangle v$ enquanto se movem. Em seguida, ligamos rìgidamente os discos e puxamos com ambas as molas presas lado a lado. Esperamos de novo a mesma taxa de variação da velocidade e a experiência mostra que efetivamente é isto que acontece. Tentemos, agora, puxar os discos ligados, usando a fôrça de uma única mola. Esta fôrça é a metade da anterior, e pelo que já sabemos, esperamos que o disco duplo seja acelerado com apenas a metade da taxa precedente. De novo a experiência confirma nossa previsão. Em outras palavras, quando aplicamos uma fôrça determinada a dois discos determinados, o disco duplo é acelerado justamente com uma taxa igual à metade da que corresponde a um disco único.

Em tôdas as experiências com discos duplos, a razão F/a é dobrada. Mas esta razão é definida como a massa inercial do corpo; assim, dobramos a massa inercial usando dois discos idênticos. Essas experiências indicam que a massa inercial é diretamente proporcional ao tamanho dos corpos constituidos do mesmo material. Outras experiências feitas com números variados de peças idênticas e feitas da mesma substância, concordam todas com essa conclusão.

Não há nada de mágico acêrca de discos e suportes de gêlo sêco. Podemos investigar a dependência entre massa inercial e número de objetos, usando modelos de vagões idênticos, igualmente carregados, e com mancais feitos cuidadosamente, para diminuir o atrito nas rodas. Tais experiências não se aproximam tanto do caso ideal, em que eliminamos tôdas as fôrças exceto aquelas que nós aplicamos de propósito, mas a proporcionalidade entre a massa inercial e o número de vagões ainda é claramente evidente.

Os resultados obtidos com objetos idênticos não são surpreendentes. Os problemas reais relativos à massa inercial surgem quando consideramos objetos constituidos de substâncias diferentes. Não podemos conseguir que um pedaço de prata seja idêntico a um de ouro. Mas podemos obter pedaços que tenham a mesma massa inercial, pedaços para os quais F/a é o mesmo. Tais pedaços certamente não são idênticos em tamanho ou composição. A massa inercial, portanto, não é inteiramente um questão de tamanho.

Que acontece quando juntamos um pedaço de prata e um de ouro de mesma massa inercial? Para determinar a massa inercial do novo corpo, nós o puxamos com várias fôrças F durante certos intervalos de tempo $\triangle t$. Verificamos que F/a, a massa inercial do novo corpo, é exatamente o dôbro da massa inercial de cada pedaço original. Assim, quando juntamos os pedaços, adicionamos também suas massas inerciais. De fato, podemos tomar qualquer pedaço de ouro e qualquer pedaço de prata e medir suas massas inerciais individuais, m_1 e m_2. Quando juntamos êsses corpos, verificamos que a massa inercial, m, da combinação, sempre medida pela razão F/a, é igual à soma das duas massas inerciais originais: $m = m_1 + m_2$. O mesmo é verdadeiro para corpos constituidos de quaisquer outras substâncias. As massas inerciais são aditivas.

Juntamente com a conclusão de que as massas inerciais se adicionam, chegamos ao resultado de que a massa inercial não depende da forma ou da natureza química de um objeto. Não especificamos como foram combinadas a prata e o ouro, nem precisamos fazê-lo. Se fundirmos um objeto e o modelarmos numa forma qualquer, a razão F/a não será afetada.

Vamos mais adiante: medimos a massa inercial de uma lâmpada de flash e acendemo-la de forma que o magnésio e o oxigênio no seu interior se combinem, formando óxido de magnésio. Verificamos que a combinação química não afeta a massa inercial. Ou podemos colocar soluções separadas de carbonato de sódio e cloreto de cálcio num vaso fechado (Fig. 20-10). Medimos a massa inercial dêsse sistema, depois viramos o recipiente de forma que as substâncias reajam, formando carbonato de cálcio (sólido branco insolúvel) e uma solução de sal de cosinha. Medindo novamente a massa inercial, não encontramos qualquer variação.

O que sabemos, pois, acerca da massa inercial? Ela aumenta proporcionalmente à quantidade de substância de um corpo. Quando várias espécies de matéria se juntam, as massas inerciais se somam, apesar das diferenças na natureza das substâncias envolvidas. Finalmente, a massa inercial se conserva nas reações químicas.

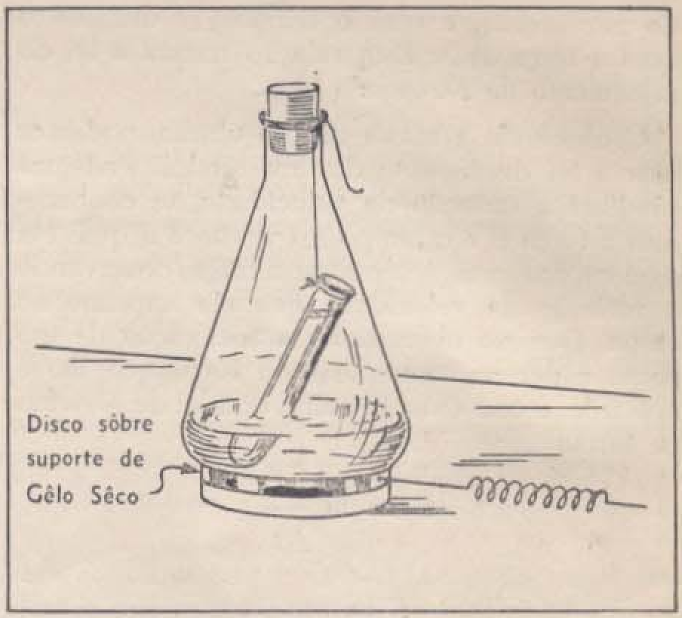
20 — 6. Massa Inercial e Massa Gravitacional.

As propriedades da massa inercial lembram-nos das propriedades que medimos com a balança (Capítulo 7). Quando uma balança está em equilíbrio, dizemos que há massas iguais dos dois lados. As massas medidas assim são chamadas massas *gravitacionais,* porque, havendo equilíbrio, a atração gravitacional da Terra é a mesma sôbre ambas as massas. Na realidade a Terra não é importante; a propriedade que medimos é apenas do corpo. A balança funciona igualmente bem no cume de uma montanha, onde a atração da Terra sôbre cada corpo é mais fraca. Funcionaria do mesmo modo na Lua, onde as massas que comparamos seriam atraidas ainda mais fracamente. A única coisa importante na medida da massa gravitacional é que comparemos as atrações gravitacionais sôbre os corpos quando êles estão no mesmo lugar em relação a outros corpos do Universo.

Em têrmos das medidas que fazemos para determiná-las, a massa gravitacional e a massa inercial não têm qualquer relação. Para medir a massa inercial aplicamos uma fôrça ao corpo e determinamos sua aceleração. A gravidade é irrelevante. Por outro lado, quando medimos a massa gravitacional usando uma balança em equilíbrio, não temos qualquer movimento; mas temos fôrças gravitacionais. Duas medidas dificilmente poderiam ser mais diferentes. Não obstante, as propriedades da massa gravitacional são extraordinàriamente semelhantes às que acabamos de determinar para a massa inercial. A massa gravitacional de uma substância é proporcional à quantidade de substância presente. As massas gravitacionais de quaisquer substâncias se somam. A massa gravitacional se conserva nas reações químicas.

A aditividade das massas de cada espécie e a sua conservação nas reações químicas sugerem que as massas gravitacional e inercial possam ser proporcionais para um dado objeto. Esta proporcionalidade pode ser testada medindo a massa inercial e a massa gravitacional de muitos objetos diferentes e de diversas composições. Tais experiências foram realizadas muitas vezes. Dentro da maior precisão experimental de que somos capazes, as massas inerciais de todos os objetos são proporcionais a suas massas gravitacionais.

A equivalência entre a massa inercial e a gravitacional, isto é, a proporcionalidade experimentalmente observada entre elas, torna conveniente usar a mesma unidade para ambas. O quilograma, aquêle cilindro de liga de platina cuidadosamente guardado em Sèvres, é o padrão da unidade de massa, tanto inercial quanto gravitacional. Para determinar a massa inercial m de um objeto, em quilogramas, aceleramos o objeto



20-10 — Aparêlho usado numa experiência para mostrar que a massa inercial não muda em reações químicas.

e o quilograma padrão com a mesma fôrça. Sabemos, então, que $m = F/a$ e $m_p = F/a_p$ portanto:

$$\frac{m}{m_p} = \frac{a_p}{a}$$

Como $m_p = 1$ kg, a masa m em kg é dada pela razão a_p/a. Por exemplo, se certa fôrça acelera a massa de 1 kg à razão de 1/2 m/s^2, e outro objeto à razão de 2 m /s^2 a massa do segundo objeto é 1/4 kg.

É muitas vêzes difícil encontrar as condições ideais em que podemos aplicar determinada fôrça a um objeto, estando ao mesmo tempo seguros de que nenhuma outra fôrça influencia seu movimento. Felizmente, não é necessário medir dessa maneira direta a massa inercial de cada objeto em que estamos interessados. Devido à equivalência entre massa inercial e gravitacional, a medida desta última nos dá a massa inercial. Normalmente não precisamos nos preocupar em distinguí-las, e, em geral, usamos simplesmente a palavra "massa" para referir-nos a ambas.

20 — 7. Lei de Newton: Medida Dinâmica da Fôrça; Unidades.

A relação $F\triangle t = m\triangle v$ nos mostra como a variação de velocidade $\triangle v$ está relacionada com a massa inercial m, com a causa F da variação do movimento, e com o tempo $\triangle t$ durante o qual a fôrça atua. Esta relação traduz a lei do movimento de Newton. (*)

Conhecendo a massa de um objeto, podemos usar a lei de Newton de dois modos. Podemos predizer a variação da velocidade, se conhecemos a fôrça F e o tempo $\triangle t$ durante o qual ela age; ou podemos determinar a fôrça, observando a variação da velocidade que ela imprime ao corpo. Quando observamos a aceleração de um corpo e determinamos assim a fôrça que lhe é aplicada, é conveniente escrever a lei de Newton na forma

$$F = m \frac{\triangle v}{\triangle t}$$

ou

$$F = ma$$

mostrando explicitamente que a fôrça é proporcional à aceleração. Nesta forma, a causa da variação do movimento está num membro da equação e a massa inercial do corpo e sua aceleração ficam no outro membro.

Suponha que observemos o mesmo objeto em duas experiências diferentes, e que constatemos que êle é acelerado três vezes mais na segunda experiência do que na primeira. Poderemos então concluir que a fôrça que atua na segunda experiência é 3 vezes maior do que a fôrça aplicada na primeira. Em outras palavras, podemos usar a aceleração $a = \triangle v/\triangle t$ de um dado objeto como uma medida da fôrça, tal como a usamos antes para estabelecer a igualdade das fôrças exercidas por duas molas idênticas quando produziam acelerações iguais no mesmo objeto.

Temos agora um método dinâmico de determinar tanto as massas inerciais como as fôrças. Começamos com a massa de 1 quilograma. Escolhemos como unidade de fôrça a fôrça que acelera essa massa à razão de 1 m/s^2. Essa fôrça é chamada *newton*. Para medir outra massa, determinamos sua aceleração quando se lhe aplica a fôrça de 1 newton. Por definição, sua massa inercial é F/a, e, neste caso, em que a fôrça é de 1 newton, a massa em quilogramas será $m = \frac{1\ newton}{a}$, em que a é expresso em metros/s^2. Assim a massa padrão forneceu-nos uma fôrça padrão. Depois usamos a fôrça padrão e a relação $m = F/a$ para medir as massas de outros objetos que nos interessam.

Podemos, também, usar a mesma relação para determinar outras fôrças. Pela equação $F = ma$, podemos determinar qualquer fôrça que atue sôbre uma de nossas massas conhecidas, bastando para isso medir a aceleração que ela produz. A aceleração, em m/s^2, multiplicada pela massa, em quilogramas, dá a fôrça, em newtons.

20 — 8. Aplicação da Lei de Newton a Fôrças Variáveis.

Estivemos discutindo a lei do movimento de Newton em condições que parecem muito especiais. Para simplificar, supusemos as massas aceleradas a partir do repouso por fôrças constantes. A relação que encontramos entre fôrça e aceleração será igualmente válida se variarmos a intensidade da fôrça enquanto o corpo se move?

Suponha que empurramos um objeto, inicialmente em repouso, com uma fôrça invariável, durante determinado tempo. Enquanto o empurramos êle é acelerado. Se deixamos de empurrar, cessa a aceleração; o corpo se move com velocidade constante. Se recomeçamos a empurrar, de novo provocamos aceleração. Suponha que aplicamos uma fôrça oposta à direção do movimento. Prevemos que a aceleração terá o sentido da fôrça. Sendo a fôrça oposta ao movimento, o corpo diminui de velocidade, ao invés de ser acelerado. A experiência revela que a taxa de diminuição da velocidade é, de fato, F/m, sendo F a fôrça e m a massa inercial.

Quer o corpo esteja parado, quer viajando pelo espaço interplanetário a 10^5 m/s, se uma fôrça o acelera, teremos: $a = F/m$. Não precisamos conhecer a velocidade no instante em que se aplica a fôrça, nem que processos produziram tal velocidade. Não importa qual a história passada ou qual o movimento presente do corpo: determinada fôrça aplicada na direção do movimento produzirá sempre a mesma aceleração. A equação $F\triangle t = m\triangle v$ expressa que podemos isolar qualquer intervalo de tempo, grande ou pequeno: durante êste $\triangle t$ encontraremos um

(*) O que chamamos lei de Newton é frequentemente denominado segunda lei, e o princípio de inércia de Galileu, que é um caso particular da lei geral, é, então, chamado primeira lei de Newton. Os nomes: primeira e segunda leis de Newton, não alteram o conteúdo, mas é importante conhecê-los, para que você possa entender o que alguém quer dizer quando diz "de acôrdo com a primeira lei de Newton..."

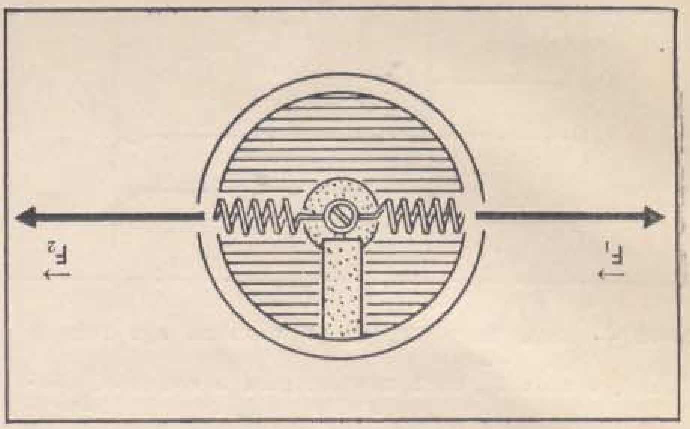
$\triangle v$ definido, que depende apenas da massa inercial e da fôrça aplicada. Não importa o que aconteça ao corpo antes ou depois.

O que dissemos nesta seção é comprovado experimentalmente com altíssima precisão. Mas quando estudamos massas que se movem com velocidade cada vez maior, aparecem algumas discrepâncias entre o comportamento observado e a lei de Newton. Quando a velocidade alcança 10^8 m/s, a diferença já é mensurável. A equação $F\triangle t = m\triangle v$ já não constitui mais uma descrição adequada. Ampliando o domínio das observações, aprendemos que a lei de Newton deve ser modificada. Ela deve ser mudada de modo que, em sua nova forma, inclua as pequenas diferenças observadas quando a velocidade assume valôres suficientemente elevados. Por outro lado, para velocidades pequenas, ela deve continuar dizendo o que foi estabelecido neste capítulo. Einstein e outros formularam as correções necessárias para velocidades ultra elevadas. Essas modificações não inutilizam a lei de Newton, mas a incluem e ampliam.

20 — 9. Como as Fôrças se Somam; a Fôrça Resultante

Até agora estudamos o movimento de um objeto sôbre o qual atua uma única fôrça. O que acontece quando duas ou mais fôrças agem sôbre o mesmo objeto? Lembre, por exemplo, o disco de gêlo sêco puxado por duas molas idênticas, presas ao disco uma a seguir da outra. Como vimos, com tal arranjo a fôrça sôbre o disco é o dôbro da que exerce uma única mola; e a aceleração que resulta é o dôbro da aceleração devida a uma só mola. A aceleração é proporcional à soma das fôrças das molas individuais.

Podemos também fazer duas molas idênticas, esticadas do mesmo comprimento, puxarem em sentidos opostos (Fig. 20-11). Então não ocorrerá qualquer aceleração. Por exemplo, se você e um colega puxam um livro com fôrças iguais, mas em sentidos opostos, o livro não é acelerado. Como elas são opostas, as fôrças aplicadas ao livro se somam com resultado nulo. Aparentemente a fôrça resultante, a que modifica o movimento, é obtida somando as fôrças do mesmo modo pelo qual somamos deslocamentos ou vetores na Parte I. No que se refere ao seu efeito sôbre o movimento, duas fôrças de mesma intensidade e sentidos opostos se can-

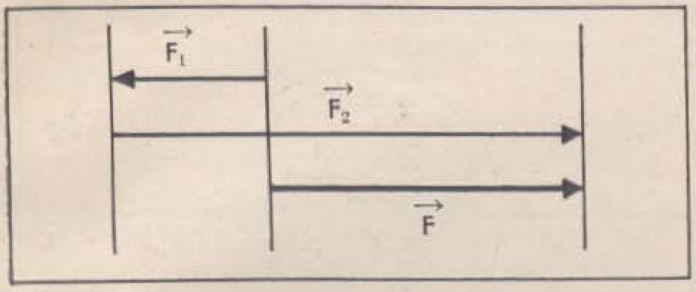


20-11 — Duas fôrças, iguais em intensidade mas de sentidos opostos, atuam sôbre um disco de gêlo sêco. A fôrça resultante e a aceleração são nulas.

celam exatamente, e uma delas pode considerar-se o oposto da outra.

Em geral, quando aplicamos a um objeto fôrças em sentidos opostos, verificamos que a aceleração do objeto é proporcional à soma das fôrças, tomadas com seu sentido. Quando uma fôrça de 1 newton atua para a esquerda, e uma de 3 newtons, para a direita, sôbre um disco de gêlo sêco, êle é acelerado para a direita como se uma única fôrça de 2 newtons agisse sôbre êle. A fôrça resultante de 2 newtons é a soma das fôrças individuais tomadas como indica a Fig. 20-12. Ademais, quando um número qualquer de fôrças atua sôbre um objeto, verificamos que a lei de movimento de Newton é válida, e a aceleração observada é provocada pela fôrça resultante.

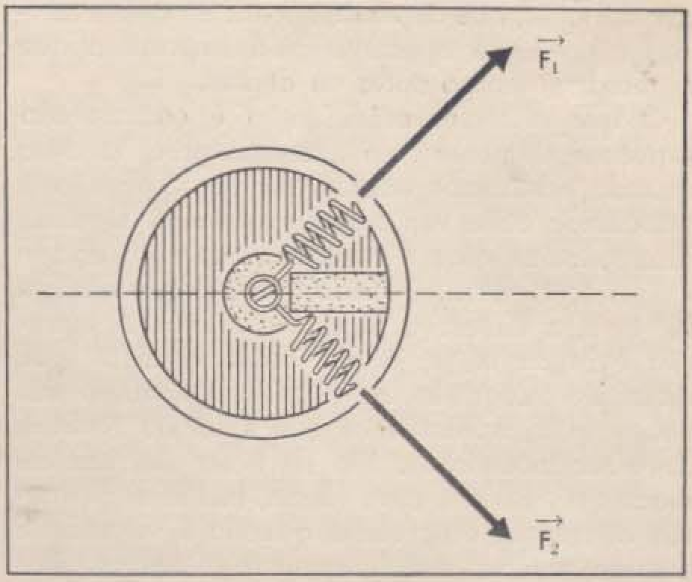
Nem sempre duas fôrças atuam no mesmo sentido ou em sentidos opostos; suas direções podem formar entre si um ângulo qualquer. Qual é pois a direção e o sentido da resultante? Suponha que puxamos um objeto com duas molas, igualmente esticadas, como na Fig. 20-13. Verificamos que o objeto é acelerado segundo a bissetriz do ângulo formado pela direção das fôrças (linha pontilhada na figura). Aparentemente aplicamos uma fôrça resultante na direção da bissetriz. Chegamos fàcilmente à conclusão de que a resultante é a soma vetorial das duas fôrças individuais exercidas pelas molas. A experiência confirma isto. A aceleração causada pelas duas molas da Fig. 20-13 é dada por $F = ma$, sendo F a intensidade do vetor que obtemos tratando cada fôrça como um vetor, e somando êsses vetores para obter a resultante (Fig. 20-14). Mesmo quando as duas fôrças não são iguais., ou quando há mais de duas fôrças



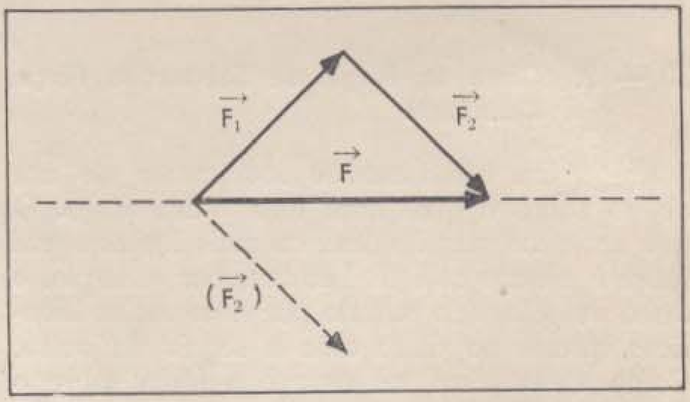
20-12 — Uma fôrça $\vec{F_2}$ de 3 newtons, age para a direita, e uma $\vec{F_1}$, de 1 newton, para a esquerda. Somando-as como deslocamentos, obtemos a fôrça $\vec{F}$, de 2 newtons, dirigida para a direita. Esta é a fôrça resultante que aparece na lei de Newton.

a intensidade e direção da resultante são dados pela soma vetorial das fôrças individuais. Esta fôrça resultante determina a aceleração de acôrdo com a equação $a = \dfrac{F}{m}$.

Resumamos o que aprendemos até agora. Começamos estudando a aceleração de corpos a partir do repouso, sob a influência de uma só fôrça. Isto nos levou à lei do movimento de Newton. Investigamos, a seguir, o que acontece a um corpo que já está em movimento quando atua sôbre êle uma fôrça no sentido do movimento ou no sentido oposto. Verificamos que a lei de Newton ainda é válida. Perguntamos, então, o que acontece quando atuam sôbre o corpo várias fôrças. A lei de Newton é ainda válida, como se uma fôrça única, a resultante, agisse sôbre o corpo. A fôrça resultante é a soma vetorial de tôdas as fôrças.



20-13 — Duas fôrças de mesma intensidade atuam segundo direções que formam entre si certo ângulo. O objeto é acelerado ao longo da bissetriz dêsse ângulo (linha pontilhada). Concluímos que a resultante atua nessa direção.



20-14 — A soma vetorial das duas fôrças indicadas na Fig. 20-13. A soma é a resultante que determina o sentido e o valor da aceleração de uma dada massa.

20 — 10. Natureza Vetorial da Lei de Newton.

A lei de Newton é ainda mais geral. Até agora, a fôrça resultante tem sido aplicada sòmente no sentido do movimento do objeto, ou no sentido oposto. Então, a velocidade do objeto muda, mas não a direção do movimento. Entretanto, as fôrças podem ser aplicadas em direções quaisquer. Podemos desviar de sua trajetória uma bola em movimento empurrando-a lateralmente. Em geral, portanto, vemos que as fôrças modificam o vetor velocidade que descreve o movimento de um objeto, em módulo, ou em direção, ou em ambos. A própria fôrça é um vetor e a lei de Newton a relaciona com a taxa de variação da velocidade vetorial. Escreveremos a lei como

$$\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v}$$

ou

$$\vec{F} = m\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a}$$

em que $\vec{a}$ é o vetor aceleração. No capítulo seguinte, encontraremos evidência da natureza vetorial da lei de Newton, e discutiremos algumas de suas aplicações.

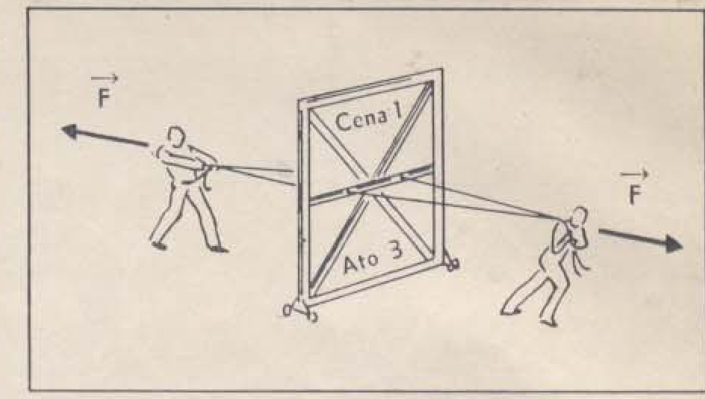
20 — 11. Fôrças na Natureza.

Quando puxamos um objeto, geralmente não podemos ter certeza de que exercemos a única fôrça que age sôbre êle (Fig. 20-15).

Algumas vezes, a origem das fôrças que agem sôbre um objeto não é imediatamente evidente. Podem também aparecer fôrças decorrentes do movimento do objeto. Por exemplo, o vento que sopra sôbre a superfície de um balão pode exercer uma fôrça, e devemos puxar no sentido oposto para evitar que o balão seja arrastado pelo vento. Mesmo se o ar está tranquilo, quando o balão se move, o ar exerce uma fôrça que se opõe ao movimento. Quando o balão está em movimento, sua aceleração não é dada pela fôrça que nós aplicamos, mas pela fôrça resultante. Se esta for zero, a aceleração será nula e o balão se moverá com velocidade constante.

Podemos medir a fôrça exercida por um vento invariável que sopra sôbre o balão, medindo a distensão de uma mola numa corda que mantém o balão parado. Esta fôrça aumenta com a velocidade do vento. Como sabemos, quanto mais rápido o vento, mais fôrça êle exerce. Portanto, quando puxamos o balão no ar tranquilo, devemos subtrair esta fôrça da que exercemos, para obter a fôrça resultante responsável pela aceleração.

As fôrças de atrito aparecem quando tentamos puxar um objeto sôbre uma superfície. Ao contrário da fôrça retardadora que aparece quando puxamos um balão pelo ar, as fôrças de atrito muitas vezes são quase independentes da velocidade do objeto. Foi sem dúvida porque o atrito é tão comum que os Gregos concluiram



20-15 — A fôrça que exercemos pode não ser a única que atua.

que uma fôrça é necessária para manter um movimento constante. A fôrça necessária é igual e oposta à fôrça de atrito e à resistência do ar. A fôrça resultante é zero.

A idéia de fôrça como causa de movimento é valiosa porque nos permite predizer que movimento ocorrerá numa dada situação. As mesmas fôrças aparecem sempre que ocorre a mesma situação. Algumas fôrças são independentes do movimento; por exemplo, a fôrça de atração gravitacional, o pêso de um corpo. Como veremos no próximo capítulo, esta fôrça é a mesma quer o corpo se mova ou esteja parado. Se conhecermos nossa posição geográfica, saberemos que fôrça gravitacional deve ser esperada e poderemos predizer os movimentos de um corpo que cai. Outras fôrças dependem do movimento relativo de um corpo em relação a outro. Uma de nossas tarefas essenciais é conhecer as fôrças da natureza. Podemos então usar as fôrças observadas para predizer os movimentos e projetar aparelhos mecânicos.

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO

1 — Uma bola é abandonada a partir do repouso no plano inclinado da esquerda (Fig. 20-4) de uma altura 10 cm acima do ponto mais baixo.

(a) Se não houver atrito, que altura, segundo a vertical, atingirá ela no plano inclinado da direita?

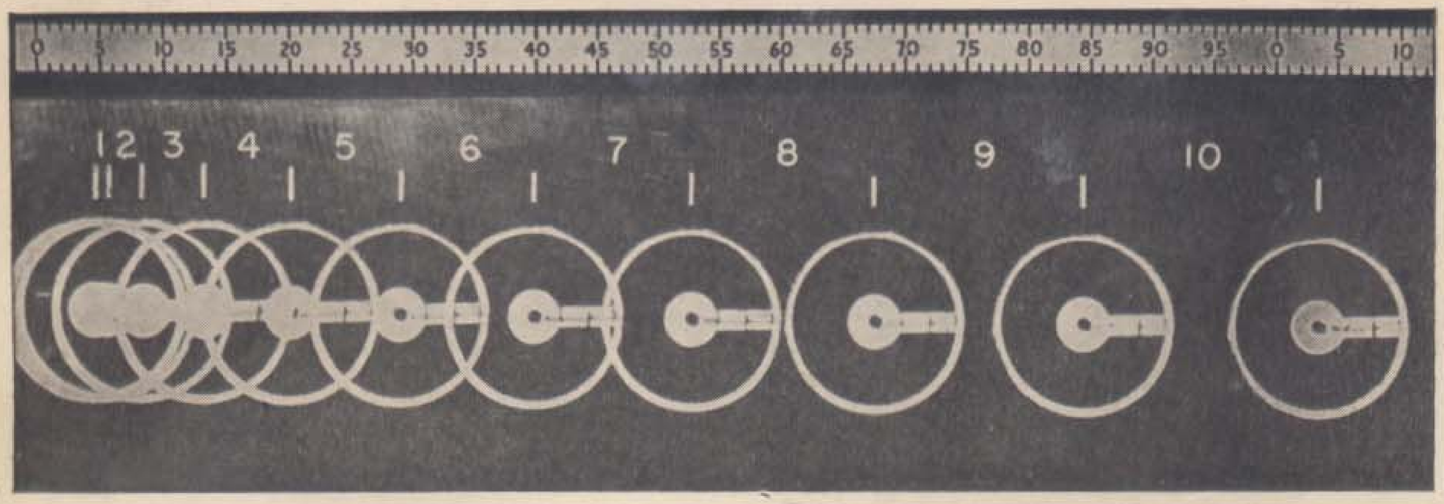
(b) Se a inclinação do plano da direita fôr de 1 cm para cada 10 cm de distância horizontal, que distância a bola percorrerá sôbre o plano?

(c) Se a inclinação fôr apenas 0,5 cm para cada 10 cm de distância horizontal, que distância alcançará a bola?

2 — Por que é perigoso saltar de um veículo em movimento? Em que direção tendemos a cair quando fazemos isso?

3 — Por que é particularmente perigoso dirigir numa estrada molhada

4 — Certa fôrça, exercida durante 1,2 s, eleva a velocidade de um objeto de 1,8 m/s, a



4,2 m/s. Depois, esta mesma fôrça é aplicada durante 2,0 s. De quanto varia a velocidade no período de 2,0 s? (Em ambos os casos a fôrça é aplicada no sentido do movimento).

5 — Certo corpo é puxado sôbre um superfície horizontal lisa, por uma mola mantida em distensão constante. Verifica-se que o corpo é acelerado a 15 cm/s². Qual será a aceleração do corpo se êle for puxado por duas molas, cada uma exatamente igual à primeira, lado a lado, e distendidas igualmente? Veja Fig. 20-8 (a).

6 — Um objeto desliza sôbre mancais com atrito despresível, puxado com fôrça constante. No intervalo de tempo de 0,3 s, a velocidade varia de 0,2 m/s para 0,4 m/s. Numa segunda experiência, o objeto é puxado com outra fôrça; no mesmo intervalo de tempo, a velocidade varia, então, de 0,5 m/s a 0,8 m/s.

a) Qual a razão entre a segunda fôrça e a primeira?

b) Se o corpo for puxado pela segunda fôrça durante 0,9 s, qual será a variação de velocidade?

(Note que as fôrças têm o sentido do movimento).

* 7 — Na seção 20-4, discutimos um modo pelo qual uma mola distendida poderia ser calibrada de forma a exercer o dôbro da fôrça de uma mola padrão, esticada de um dado comprimento. Prepare-se para discutir em classe como você saberia se uma mola esticada está exercendo a metade da fôrça da mola padrão.

8 — Suponha que você acelera certo objeto com uma fôrça constante e verifica que a variação de velocidade durante o intervalo de tempo $\Delta t = 1$ s é 2,4 m/s. Depois você repete a medida, aplicando a mesma fôrça a um segundo objeto, que adquire a velocidade de 3,3 m/s em 0,5 s.

a) Que corpo tem maior massa inercial?

b) Qual a razão entre a massa inercial do segundo objeto e a do primeiro?

9 — a) Fôrças iguais atuam sôbre dois blocos de metais diferentes, idênticos em forma e tamanho, que deslizam sôbre uma superfície horizontal lisa. Verifica-se que a aceleração do segundo bloco é 4,18 vezes a do primeiro. Qual a razão entre a massa do segundo bloco e a do primeiro?

b) Sabe-se que o primeiro bloco é de chumbo. Usando as densidades referidas na Tabela 2, Seção 7-4, decida de que material é feito, possívelmente, o segundo bloco.

10 — Por que é fechado o frasco da Fig. 20-10? Esteja preparado para explicá-lo em classe.

11 — Um corpo cuja massa é 0,5 kg é acelerado a 4 m/s². Que fôrça atua sôbre êle?

12 — Uma fôrça de 3 newtons atua sôbre a massa de 0,6 kg. Qual a aceleração produzida?

13 — Uma fôrça de 5 newtons imprime à massa m_1 a aceleração de 8 m/s² e à massa m_2 a aceleração de 24 m/s²? Que aceleração ela imprimiria aos dois corpos reunidos?

14 — Você tem dois objetos, *A* e *B*, que se equilibram quando colocados em pratos opostos de uma balança de braços iguais. Quando você os coloca do mesmo lado, êles equilibram um terceiro objeto, *C*, do outro lado. O objeto *A* é acelerado a 3,8 m/s² quando você lhe aplica certa fôrça. Suponha agora que você aplica a mesma fôrça a *C*. Qual será a aceleração?

15 — Na Fig. 20-16, meça $\triangle x$, a distância percorrida em cada intervalo, para os intervalos numerados de 5 a 10.

a) Qual é a velocidade $\triangle x/\triangle t$ em cada intervalo?

b) Quais as variações de velocidade em cada intervalo?

d) Está agindo uma fôrça constante?

e) Admitindo que o disco tem massa de 2 kg, qual a fôrça média aplicada?

16 — Uma fôrça de 3,0 newtons é aplicada a um objeto, acelerando-o a 1,5 m/s².

a) Admitindo que esta seja a única fôrça exercida sôbre o objeto, qual é sua massa?

b) Por que outro método faria você outra medida da mesma massa?

c) Suponha que esta medida indique que a massa determinada pelo primeiro método é maior. De que suspeitaria você?

17 — Dois corpos, de massas 8,0 kg e 2,0 kg, estão em repouso sôbre uma mesa lisa, lado a lado. A massa de 8,0 kg é acelerada a partir do repouso pela fôrça de 0,70 newtons e a de 2,0 kg é acelerada no mesmo sentido, também a partir do repouso, pela fôrça de 1,4 newtons. Ambos os corpos começam a ser acelerados no mesmo instante.

a) Que tempo decorre até que a distância entre os corpos seja de 5,0 m?

b) Qual a velocidade de cada corpo nesse instante?

18 — Um bloco de massa 3,0 kg move-se sôbre uma superfície horizontal lisa, com velocidade v_0 no instante $t = 0$. Aplica-se ao corpo a fôrça de 18 newtons, em sentido contrário ao do movimento. Esta fôrça reduz v_0 à metade de seu valor, enquanto o corpo percorre 9,0 m.

a) Que tempo êle gasta para percorrer essa distância?

b) Quanto vale v_0?

19 — Se a distância percorrida por um móvel varia diretamente com o tempo, que conclusões tiraria você em relação ao movimento e às fôrças?

20 — Você observa um objeto que percorre distâncias diretamente proporcionais a t^3, sendo t o tempo decorrido.

a) Que conclusão você tiraria quanto à aceleração? Ela é constante? Aumenta? Decresce? É nula?

b) Que conclusão tiraria você quanto às fôrças? Prepare-se para discutir em classe.

21 — Você puxa um disco deslizante com fôrça constante, a partir do repouso. A velocidade aumenta 0,10 m/s em cada $\triangle t$ igual a 0,30 s.

a) Qual a velocidade do corpo após 1,2 s?

b) Você agora começa a puxar com a mesma fôrça, mas no sentido oposto, durante 0,90 s. Qual a velocidade do corpo no fim dêsse tempo?

c) Em que sentido está êle se movendo?

22 — Um bloco de massa 2,0 kg é puxado sôbre uma mesa sem atrito pela fôrça constante de 6,0 newtons, a partir do repouso.

a) Qual a aceleração do bloco, em m/s²?

b) Qual a velocidade do bloco 3,0 s depois que a fôrça começou a agir?

c) Que distância percorre o bloco em 2,0 s?

d) Se, no fim de 3,0 s, o bloco se divide em duas partes iguais — uma ainda puxada pela fôrça de 3,0 newtons e a outra livre — qual a distância entre elas 2,0 s após se terem separado?

23 — Um bloco de massa 8,0 kg, partindo do repouso, é puxado sôbre uma mesa horizontal pela fôrça constante de 2,0 newtons. Verifica-se que êsse corpo percorre 3,0 m em 6,0 s.

a) Qual a aceleração do corpo?

b) Qual a razão entre a fôrça aplicada e a massa?

c) Como sua resposta à parte (b) não é igual à da parte (a) (pelo menos não deve ser), que conclusões pode você tirar a respeito dêsse movimento? Dê resultados numerêricos, se possível.

24 – Sôbre um objeto de 6,0 kg, atuam duas fôrças, cada uma de 3,0 newtons.

a) Se essas fôrças formam um ângulo de 90.°, qual a direção e o valor da aceleração?

b) Qual será a aceleração, se as fôrças tiverem o mesmo sentido? Se os sentidos forem opostos?

25 — Uma fôrça de 3,0 newtons e uma de 4,0 newtons atuam sôbre a massa de 9,0 kg. As duas fôrças formam entre si o ângulo de 60°.

a) Se o objeto parte do repouso, qual será sua velocidade no fim de 3,0 s?

b) Em que direção êle se moverá?

26 — Dois homens querem derrubar uma árvore por meio de uma corda amarrada próximo ao tôpo. Se usarem uma única corda, a árvore cairá sôbre êles. Para evitar isso, amarraram ao mesmo ponto duas cordas de 10,0 m de comprimento, ficando a 10,0 m de distância um do outro ao puxar. Se a fôrça exercida por cada um é de 300 newtons, qual a fôrça exercida pelas cordas na árvore?

27 — Determine a fôrça necessária para acelerar um foguete de 450 kg, a partir do repouso, até a velocidade de 60 m/s, ao longo de um trilho horizontal de 100 m de extensão. A fôrça retardadora de atrito é de 93 newtons.

28 — A fôrça retardadora da resistência do ar sôbre um balão é proporcional ao quadrado da velocidade. Para certo balão, inflado até certo volume, esta fôrça é dada, em newtons, por $F_r = 0{,}2\, v^2$, sendo v a velocidade do balão em m/s. A massa do balão e do ar dentro dêle é de 10 g.

a) Desenhe um gráfico da aceleração do balão em função da velocidade, quando você o puxa com uma fôrça de 1,8 newtons e com a fôrça de 7,2 newtons.

b) Qual a velocidade máxima que o balão alcançará em cada caso?

c) Se a massa fôsse de 5,0 g, como isso afetaria a velocidade máxima?

d) Qual seria, em sua opinião, o efeito sôbre a velocidade máxima, se você inflassa o balão a um volume maior?

29 — Aristóteles ensinou que era necessária uma fôrça constante para produzir uma velocidade constante e daí concluiu que, na ausência de fôrças, os corpos parariam.

a) Indique várias situações em que uma fôrça constante parece produzir uma velocidade constante.

b) Como explica você cada uma das situações do ítem (a) à luz da lei do movimento de Newton?

30 — Como definiria você uma unidade de massa se, em Sèvres, fosse mantida uma mola padrão e não uma massa padrão?

LEITURA COMPLEMENTAR

COHEN, I. B., "Isaac Newton". *Scientific American*, dezembro, 1955. Um breve relato de sua vida.

COHEN, I.B., *The Birth of a new Physics*. Double day, 1960: uma brochura da Science Study Series.

GALILEU, *Moments of discovery*. Editado por G. Schwartz e P. Bishop, Basic Books, 1958 (pg. 332). Descrição do próprio Galileu sôbre as leis da aceleração na queda dos corpos.

HOLTON, GERALD, *Introduction to concepts and theories in Physical Science*. Addison-Wesley, 1952. O Capítulo 4 dá um resumo da lei de Newton e do princípio da inércia de Galileu.

KNEDLER, J. W., Jr., *Masterworks of Science*. Doubleday, 1947. Os capítulos referentes a Galileu e Newton descrevem suas vidas e seus trabalhos.

NEWTON, Sir ISAAC, *Mathematical Principles of Natural Philosophy* e seu *System of the World*. Editado por Florian Cajori, University of California Press, 1947.

SCIAMA, D., "Inertia". *Scientific American*, fevereiro, 1957. Um novo e sugestivo contacto com a idéia de inércia descrita neste Capítulo.

MOVIMENTO NA SUPERFÍCIE DA TERRA

CAPÍTULO 21

Neste capítulo começaremos nosso estudo das fôrças que se manifestam na natureza. Nós as determinaremos analisando os movimentos dos corpos sôbre os quais elas atuam ou, quando possível, equilibrando as fôrças desconhecidas com outras conhecidas que possamos aplicar. Aqui, na superfície da Terra, a fôrça da gravidade, que puxa os objetos para o centro da Terra, é familiar a todos nós. Estudaremos primeiro esta atração gravitacional.

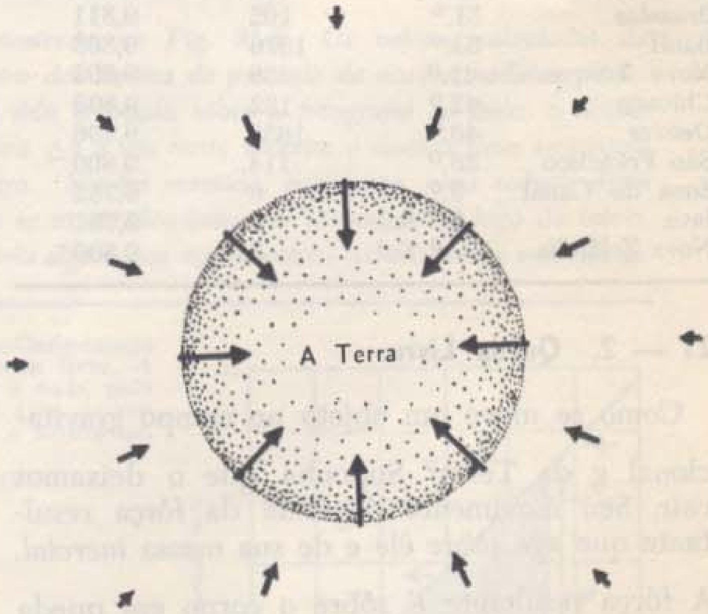
21 — 1. Pêso e Campo Gravitacional da Terra.

Já aprendemos, no Capítulo 7, que os objetos situados na superfície da Terra são puxados para o centro da Terra. Objetos diferentes são puxados por fôrças gravitacionais de diferentes intensidades. A intensidade dessa fôrça é chamada *pêso* do objeto, e pode ser medida suspendendo o corpo a uma mola calibrada em newtons.

Se tomarmos a massa padrão de um quilograma e medirmos seu pêso, em qualquer ponto da superfície terrestre, verificaremos que é muito aproximadamente de 9,8 newtons. Na realidade o pêso de um objeto difere ligeiramente de um lugar para outro. Entretanto, a variação relativa de pêso é a mesma para todos os corpos. Por exemplo, no Polo Norte, a massa de 1 kg pesa 9,83 newtons e, no equador, 9,78 newtons. No Polo, a massa de 2 kg pesa 19,66 newtons e, no equador, 19,56 newtons. Ambas variam seu pêso de 0,5%, quando se movem do Polo para o equador. O pêso da massa de 2 kg é sempre exatamente o dôbro do pêso da massa de 1 kg no mesmo lugar. Portanto, a fôrça gravitacional F que atua sôbre um corpo de massa gravitacional m_g pode ser escrita:

$$\vec{F} = m_g \vec{g}$$

sendo $\vec{g}$ o fator de proporcionalidade entre a fôrça gravitacional e a massa gravitacional. A massa é independente da posição na superfície



21-1 — Campo gravitacional da Terra. Os vetores internos representam a intensidade e direção do campo na superfície da Terra. O conjunto intermediário dá os valores a 3×10^6 metros de altura. Os vetores externos referem-se à altitude de 6×10^6 metros (igual ao raio da Terra).

da Terra; se duas massas se equilibram (numa balança de braços iguais) num lugar da Terra, elas se equilibrarão em qualquer outro lugar. Portanto, aprendemos que o fator de proporcionalidade $\vec{g}$ varia ligeiramente de um ponto a outro da superfície da Terra, e é o mesmo para tôdas as massas em qualquer lugar.

O fator $\vec{g}$ é a fôrça gravitacional por unidade de massa. É um vetor com as dimensões de newton por quilograma. Podemos medí-lo e tabelá-lo para muitos lugares na superfície da Terra. Uma coleção de grandezas físicas dependentes da posição é chamada campo; em particular, a fôrça gravitacional por unidade de massa gravitacional, em diferentes lugares em relação à Terra é chamada campo gravitacional da Terra. A Fig. 21-1 representa parte do campo gravitacional em tôrno da Terra, e a Tabela 1 fornece sua intensidade em diversos lugares.

TABELA 1

Campo gravitacional da Terra

Local	Latitude	Altitude metros	Intensidade do campo newtons/kg
Polo Norte	70.°	0	9,832
Groenlândia	90.°	20	9,825
Estocolmo	59.°	45	9,818
Bruxelas	51.°	102	9,811
Banff	51.°	1376	9,808
Nova Yorque	41.°	38	9,803
Chicago	42.°	182	9,803
Denver	40.°	1638	9,796
São Francisco	38.°	114	9,800
Zona do Canal	9.°	6	9,782
Java	6.° Sul	7	9,782
Nova Zelândia	37.° Sul	3	9,800

21 — 2. Queda Livre.

Como se move um objeto no campo gravitacional $\vec{g}$ da Terra? Suponha que o deixamos cair. Seu movimento depende da fôrça resultante que age sôbre êle e de sua massa *inercial*.

A fôrça resultante $\vec{F}$ sôbre o corpo em queda é dada pela soma vetorial da atração gravitacional $F_g = m_g g$ (o pêso do corpo) com a resistência do ar, F_a, isto é,

$$\vec{F} = \vec{F}_a + m_g\vec{g}$$

De acôrdo com a lei de movimento de Newton, a aceleração do corpo é proporcional a esta resultante e inversamente proporcional à massa inercial m_i, ou seja,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_i} = \frac{\vec{F}_a + m_g\vec{g}}{m_i}$$

Ora, para objetos relativamente densos, a resistência do ar é muito pequena a baixas velocidades e podemos desprezá-la em comparação com o pêso. Em tais circunstâncias, só é importante a atração gravitacional e, portanto, a aceleração do objeto será:

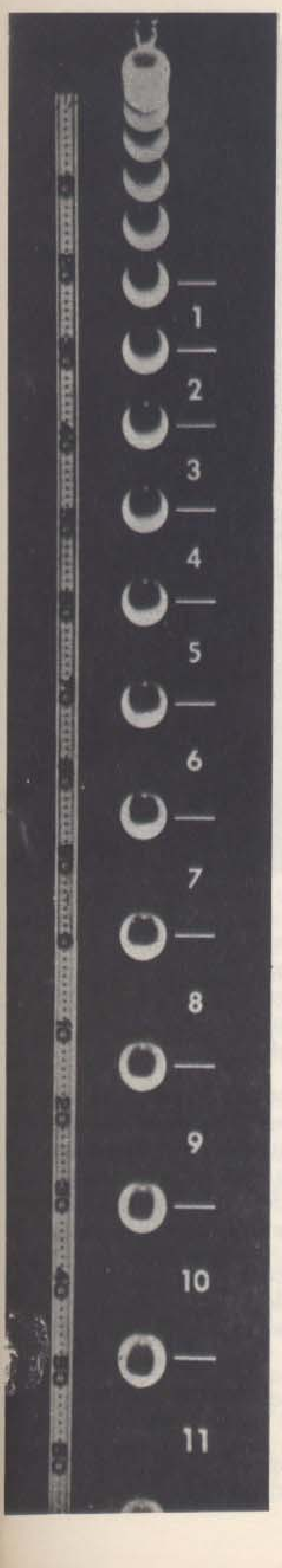
$$\vec{a} = \frac{m_g}{m_i}\vec{g}$$

Aqui, ocorre uma coisa notável. Como verificamos no Capítulo 20, a razão $\frac{m_g}{m_i}$ é a mesma para todos os objetos. Conseqüentemente, a aceleração não depende da massa do objeto. Com efeito, medindo m_i e m_g em têrmos do mesmo quilograma padrão, fizemos m_i igual a m_g, isto é, $\frac{m_g}{m_i} = 1$. Segue-se portanto que, para um corpo em queda livre,

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

Em outras palavras, predizemos que todos os objetos que se movem exclusivamente sob o efeito da gravitação são acelerados exatamente do mesmo modo, quando colocados no mesmo lugar no campo gravitacional. Ademais, conseguiremos medir a intensidade do campo gravitacional g em qualquer lugar, observando a aceleração de qualquer corpo que, caindo, passe por essa posição.

De fato, o que se verifica? Todos os corpos de densidade suficientemente alta (grande massa por unidade de volume) caem com a mesma aceleração no mesmo lugar. O valor da aceleração com a qual êles caem é muito aproximadamente 9,8 m/s^2 em qualquer ponto próximo da superfície da Terra. Não importa se a medimos num laboratório siuado no primeiro andar de um edifício ou se no último pavimento, se o corpo cái a partir do repouso ou



se foi projetado verticalmente com uma velocidade razoável qualquer.

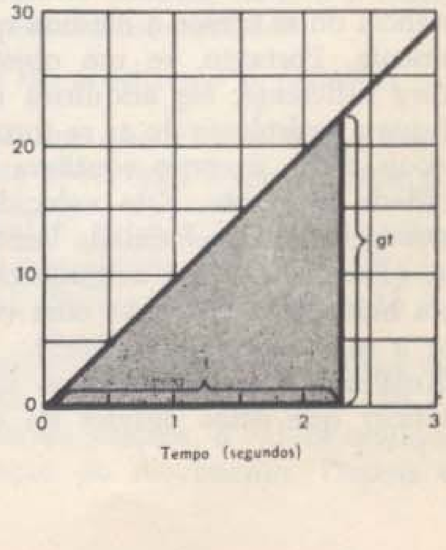
Medidas cuidadosas da fotografia de múltipla exposição de um objeto em queda (Fig. 21-2) levam aos resultados indicados na Tabela 2. As exposições foram feitas a intervalos de 1/30s. Êstes resultados ilustram nossa afirmativa de que o campo gravitacional próximo da superfície da Terra produz em todos os objetos que caem uma aceleração de 9,8 m/s², dirigida para baixo.

TABELA 2

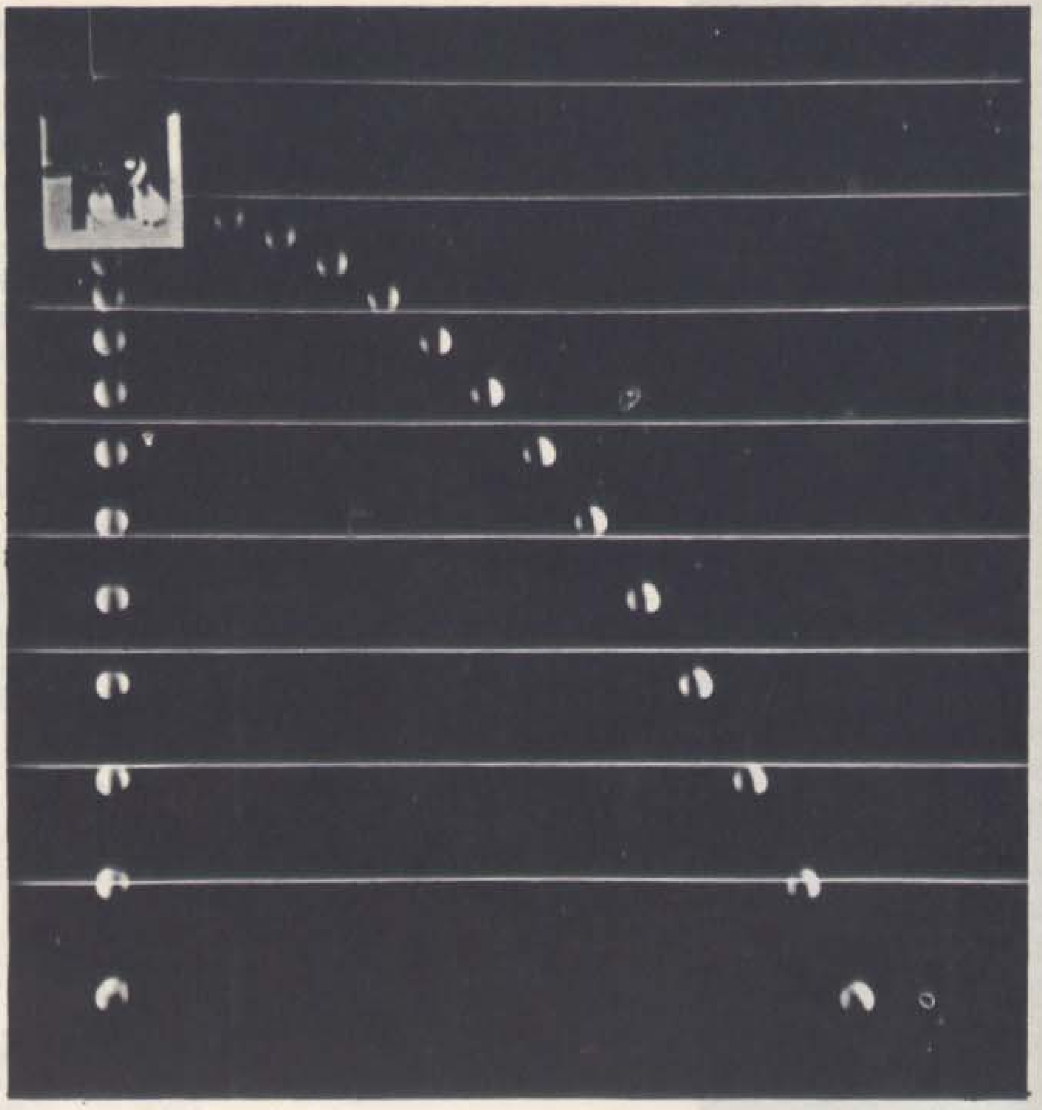
N.º do intervalo	*Comprimento do intervalo* Δx *(cm)*	*Velocidade média* $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ *(cm/s)*	*Variação da velocidade* Δv *(cm/s)*	*Aceleração* $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ *(cm/s²)*
1	7,70	231	32	9,6
2	8,75	263	31	9,3
3	9,80	294	32	9,6
4	10,85	326	34	10,2
5	11,99	360	33	9,9
6	13,09	393	32	9,6
7	14,18	425	32	9,6
8	15,22	457	32	9,6
9	16,31	489	35	10,5
10	17,45	524	32	9,6
11	18,52	556		
			Aceleração média	9,8

Análise do movimento mostrado na Fig. 21-2. Os valores calculados da aceleração são constantes, dentro dos limites de precisão de nossas medidas. Apesar de uma régua precisa ter sido colocada sôbre a fotografia da bola, o último algarismo significativo na coluna Δx *é um tanto incerto; é apenas uma estimativa razoável de fração de milímetro. Ele foi mantido, entretanto, para reduzir êrros sucessivos que se acumulariam se os arredondamentos fossem feitos logo de início. Note que mantivemos apenas três algarismos significativos na coluna da velocidade.*

21-3 — Gráfico velocidade-tempo de um corpo em queda livre. A distância percorrida é dada pela área sob a curva — área de um triângulo de base t e altura gt. Essa área vale $\frac{1}{2}gt^2$.



21-2 — Fotografia de múltipla exposição de uma bola de bilhar em queda livre. A escala de distâncias é em centímetros e o intervalo de tempo entre posições sucessivas da bola é de 1/30 s. Êste movimento é analizado na Tabela 2.



21-4 — Fotografia de múltipla exposição de duas bolas de golfe, uma projetada horizontalmente no mesmo instante em que a outra começava a cair. Os fios que se vêm estendidos transversalmente na figura estão distanciados de 15 cm e o intervalo entre os instantâneos foi de 1/30 de segundo. Esta fotografia é idêntica à da Fig. 6-19.

Limitamos nossa atenção a objetos densos, compactos, escolhidos cuidadosamente para tornar mínima a resistência do ar. Mas, se deixarmos cair uma bola de ping-pong, ela percorrerá sòmente uma pequena distância até que a fôrça de resistência do ar equilibre a fôrça gravitacional e, a partir dêsse instante, a bola se moverá com velocidade constante. Em geral a resistência do ar cresce à medida que a velocidade aumenta. Portanto, se um objeto cai de uma altura suficiente, êle adquirirá uma velocidade tal que a resistência do ar se torne igual ao pêso. Depois disso, o corpo continua a cair com velocidade constante. Esta velocidade final constante é chamada velocidade limite do corpo que cai. (Problema: Que acontecerá se você jogar para baixo uma bola leve com velocidade superior a sua velocidade limite?).

Realizando experiências no vácuo, podemos verificar que êsses desvios da queda livre são de fato resultantes da resistência do ar. Quando removemos o ar, verificamos que todos os objetos, quaisquer que sejam suas formas ou densidades, caem com a mesma aceleração num dado lugar próximo da superfície da Terra. Ademais, como $\vec{g}$ não muda apreciàvelmente de direção ou valor, a menos que nos afastemos a distâncias comparáveis com o tamanho da Terra, a aceleração é quase a mesma para objetos que cáem dentro de uma sala, de um edifício, de uma cidade, ou mesmo de um estado. Na região dentro da qual o campo gravitacional $\vec{g}$ é efetivamente constante e onde só a gravitação, tem importância, todos os objetos caem com aceleração constante igual a $\vec{g}$. Partindo do repouso, no instante t, êles adquirem uma velocidade *dirigida para baixo,*

$$v = gt$$

e percorrem uma distância

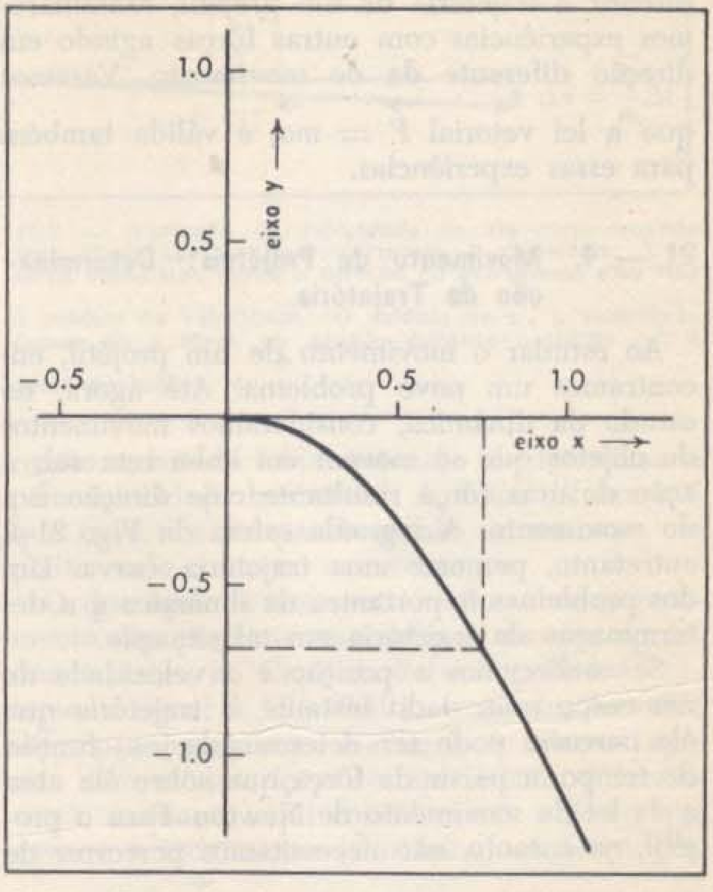
$$d = \frac{1}{2} gt^2$$

dada pela área sob a curva da velocidade em função do tempo (Fig. 21-3). Usando de novo as fotografias da Fig. 21-2, você pode mostrar que a distância d percorrida a partir do repouso aumenta como $\frac{1}{2} gt^2$.

21 — 3. Movimento de Projéteis: Natureza Vetorial da Lei do Movimento de Newton.

Todos os objetos que caem verticalmente sob a influência apenas da atração gravitacional são acelerados da mesma maneira. Serão também todos os objetos igualmente acelerados quando se movem em outras direções no campo gravitacional? A Fig. 21-4 mostra uma série de instantâneos fotográficos de duas esferas. A primeira começou a cair, partindo do repouso, no momento em que a segunda foi projetada horizontalmente. Vemos que os movimentos verticais das duas esferas são idênticos, embora os movimentos horizontais sejam diferentes. Vemos também que o movimento horizontal tem velocidade horizontal constante, como quando não há fôrça. A presença da fôrça dirigida para baixo não altera o movimento horizontal; e a existência de movimento horizontal não influencia o efeito da fôrça dirigida para baixo sôbre o movimento vertical. Nossa observação mostra que os movimentos horizontal e vertical são independentes. Cada um decorre da correspondente componente vetorial da fôrça: $\vec{F}_v = mg$, e o movimento vertical é de queda livre; $F_h = 0$, e o movimento horizontal não é acelerado.

No fim do último capítulo, verificamos que a fôrça resultante $\vec{F}$ que atua sôbre um corpo é um vetor. Como aprendemos no Capítulo 6, a aceleração $\vec{a}$ é também um vetor. Isto sugere que a lei do movimento de Newton seja uma lei vetorial. Ademais, quando a fôrça $\vec{F}$ atua na direção do movimento, a aceleração $\vec{a}$ está relacionada com a fôrça pela equação $\vec{F} = m\vec{a}$. No último capítulo, entretanto, não estudamos nenhum movimento em que a fôrça resultante $\vec{F}$ formasse um ângulo com a velocidade $\vec{v}$. Podemos portanto fazer as perguntas: A lei do movimento de Newton é válida quando $\vec{F}$ e $\vec{v}$ têm direções diferentes? A aceleração tem ainda a direção da fôrça? O módulo de $\vec{a}$ é o mesmo para fôrças de mesma intensidade?



21-5 — Trajetória da segunda bola da Fig. 21-4 desenhada num sistema de eixos coordenados. Em ambos os eixos, as distâncias estão dadas em metros. A coordenada x da bola a qualquer instante t é $v_0 t$ ($v_0 = 2$ m/s) e sua coordenada y é $-\frac{1}{2} gt^2$. Por exemplo, quando $t = 0{,}38$ s, $x = 0{,}75$ m e $y = 0{,}7$ m.

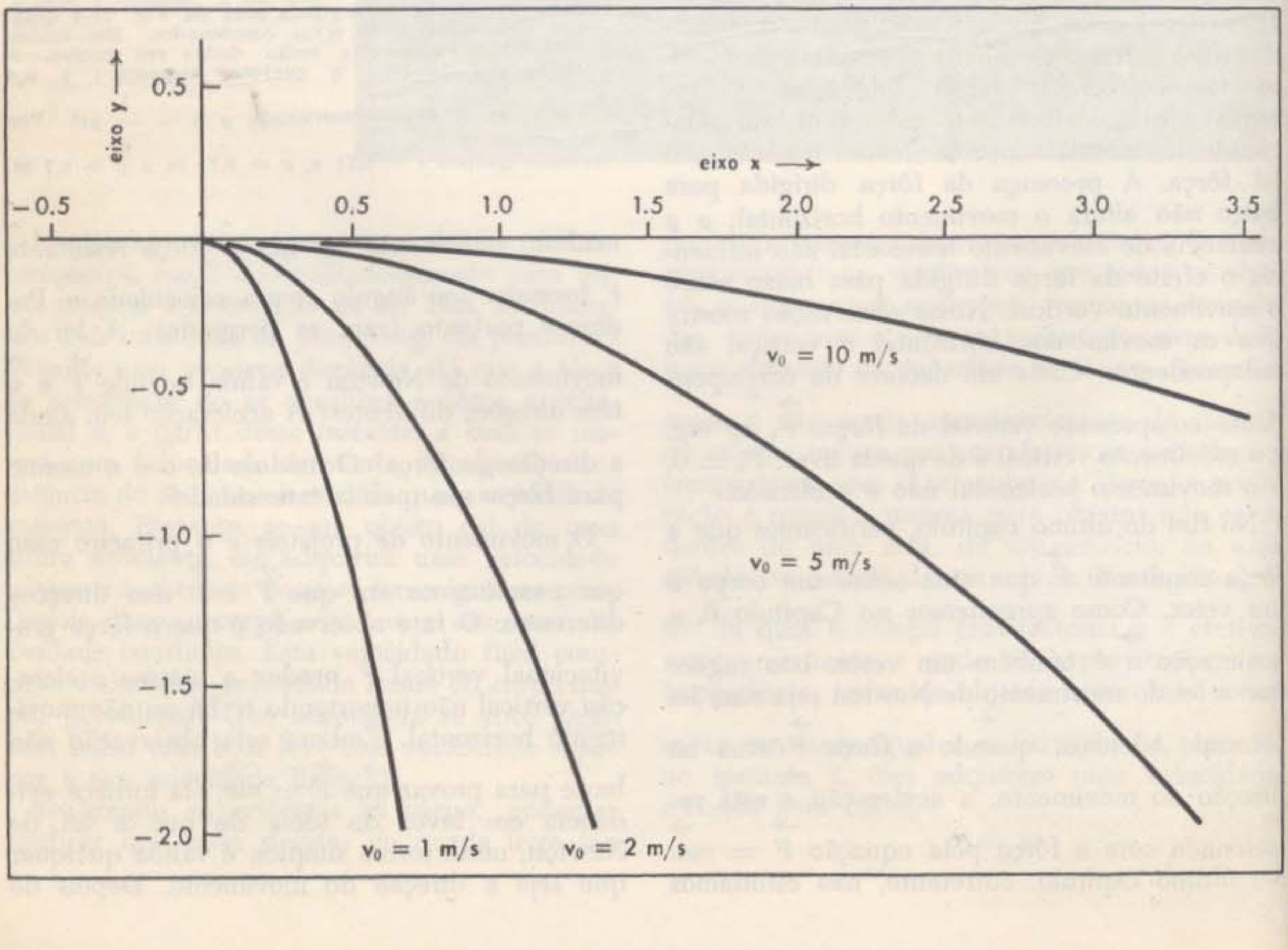
O movimento de projéteis é o primeiro caso que examinamos em que $\vec{F}$ e $\vec{v}$ têm direções diferentes. O fato observado é que a fôrça gravitacional vertical $\vec{F}$ produz a mesma aceleração vertical não importando se há ou não movimento horizontal. Embora esta observação não baste para provar que $\vec{F} = m\vec{a}$, ela fornece evidência em favor da idéia de que a lei de Newton, nesta forma simples, é válida qualquer que seja a direção do movimento. Depois de discutir a trajetória de um projétil, examinaremos experiências com outras fôrças agindo em direção diferente da do movimento. Veremos que a lei vetorial $\vec{F} = m\vec{a}$, é válida também para essas experiências.

21 — 4. Movimento de Projéteis: Determinação da Trajetória.

Ao estudar o movimento de um projétil, encontramos um novo problema. Até agora, no estudo da dinâmica, consideramos movimentos de objetos que se movem em linha reta sob a ação de uma fôrça resultante cuja direção é a do movimento. A segunda esfera da Fig. 21-4, entretanto, percorre uma trajetória curva. Um dos problemas importantes da dinâmica é a determinação da trajetória em tal situação.

Se conhecemos a posição e a velocidade de um corpo num dado instante, a trajetória que êle percorre pode ser determinada, em função do tempo, a partir da fôrça que sôbre êle atua e da lei do movimento de Newton. Para o projétil, no entanto, não necessitamos percorrer de volta todo o caminho até a lei de Newton e a fôrça gravitacional. Podemos determinar a trajetória combinando os movimentos horizontal e vertical que são conhecidos. (Como vimos na última seção, êles são independentes e estão de acôrdo com a lei de Newton e a fôrça gravitacional conhecida). Para êsse fim, escolhemos um eixo horizontal de referência (eixo x) e um outro vertical (eixo y), dispostos de modo que sua origem ($x = 0$, $y = 0$) esteja no ponto de onde é lançado o corpo (Fig. 21-5). Quando a esfera é projetada com velocidade inicial v_o, sabemos que ela continua a se mover na direção x com essa velocidade. Depois do intervalo de tempo t a coordenada x da posição da esfera será portanto $x = v_o t$. Sabemos também que o movimento vertical é de queda livre. A coordenada y, no mesmo instante t, é pois $y = -1/2\, gt^2$ (o sinal negativo nos diz apenas que a bola cai). Estas equações contêm tôda a informação acêrca dos corpos projetados hori-

21-6 — Várias trajetórias possíveis para um corpo projetado horizontalmente. Note que a forma da parábola depende do valor da velocidade horizontal v_o.



zontalmente com velocidade inicial v_0. O valor comum t do tempo nas duas equações mostra que elas se referem ao movimento de um único corpo e não ao movimento de dois corpos diferentes.

A trajetória que o corpo percorre é uma curva, e podemos exprimir essa curva por uma equação que relacione a posição vertical y com a posição horizontal x no mesmo instante. Para obter esta equação, devemos eliminar o tempo t das duas equações $y = -\frac{1}{2}gt^2$ e $x = v_0t$. A segunda equação nos mostra que $t = x/v_0$, valor que, introduzido na primeira, fornece:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}g\,(x/v_0) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

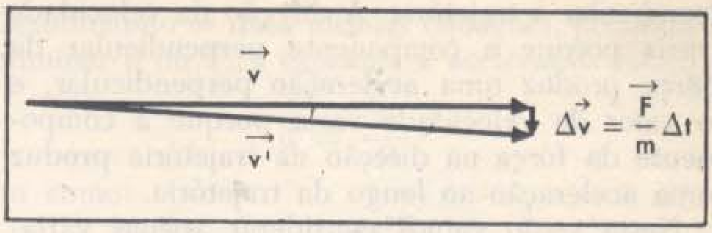
A equação $y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$ é a equação da trajetória do objeto. Como se vê na Fig. 21-5, trata-se de uma parábola cujo vértice encontra-se no ponto de onde foi lançado o corpo.

Na Fig. 21-6 representamos várias trajetórias possíveis, correspondentes a diferentes valores da velocidade horizontal inicial v_0. Como vemos, quando esta é grande, a parábola é bastante achatada; o projétil percorre uma grande distância horizontal antes de percorrer, caindo uma altura apreciável. Por outro lado, pequenos valores de v_0 fornecem parábolas nitidamente curvadas; a distância percorrida horizontalmente pelo projétil enquanto êle percorre uma dada altura é menor neste caso.

Analisamos aqui o movimento de um projétil lançado horizontalmente. O caso mais geral isto é, um projétil lançado com velocidade v_0 segundo um ângulo qualquer com a horizontal, pode ser manejado do mesmo modo. Valemo-nos ainda do fato de que os movimentos horizontal e vertical são independentes. A partir do vetor velocidade inicial v_0, determinamos a componente horizontal e a componente vertical da velocidade inicial. A componente horizontal nunca varia, e a vertical sofre uma variação constante dada por:

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -g.$$

O cálculo detalhado leva à conclusão de que a trajetória será ainda uma parábola, com uma



21-7 — Variação da velocidade de um corpo quando uma fôrça age perpendicularmente à trajetória. Uma fôrça dêsse tipo muda a direção do movimento mas não o módulo da velocidade. O módulo de $\vec{v}'$, a velocidade depois de a fôrça ter atuado durante o tempo Δt, é igual ao módulo de $\vec{v}$.

região achatada cuja extensão é determinada pela velocidade horizontal. A única diferença é que o vértice da parábola não se encontra no ponto onde começou o movimento.

O que aprendemos nesta seção sôbre o movimento dos projéteis assemelha-se ao que aprendemos antes, no Capítulo 6 (a Fig. 21-4 é exatamente igual à Fig. 6-19). Contudo, há uma diferença importante. Na Parte I lidamos apenas com a descrição do movimento (cinemática), enquanto aqui consideramos a fôrça que causou o movimento (dinâmica). A fôrça gravitacional $m\vec{g}$ e a forma vetorial da lei de Newton permitem-nos tanto predizer quanto descrever o que acontece. Em nosso estudo da dinâmica de outros movimentos nós nos apoiaremos muito nas descrições cinemáticas dadas na Parte I. Se você reestudar, agora, as seções 6-5, 6-6 e 6-7, o resto dêste capítulo será muito mais fácil de entender.

21 — 5. Fôrças Deflectoras e Movimento Circular.

Um projétil percorre uma trajetória curvilínea porque a fôrça que age sôbre êle tem uma componente perpendicular à direção do movimento. A componente da fôrça na direção do movimento altera o valor da velocidade mas não a sua direção. Por outro lado, uma fôrça perpendicular ao movimento "empurra" lateralmente o projétil, obrigando-o a seguir uma trajetória curvilínea. Isto leva a uma aceleração perpendicular que altera a direção sem alterar o valor do vetor velocidade, como vemos na Fig. 21-7.

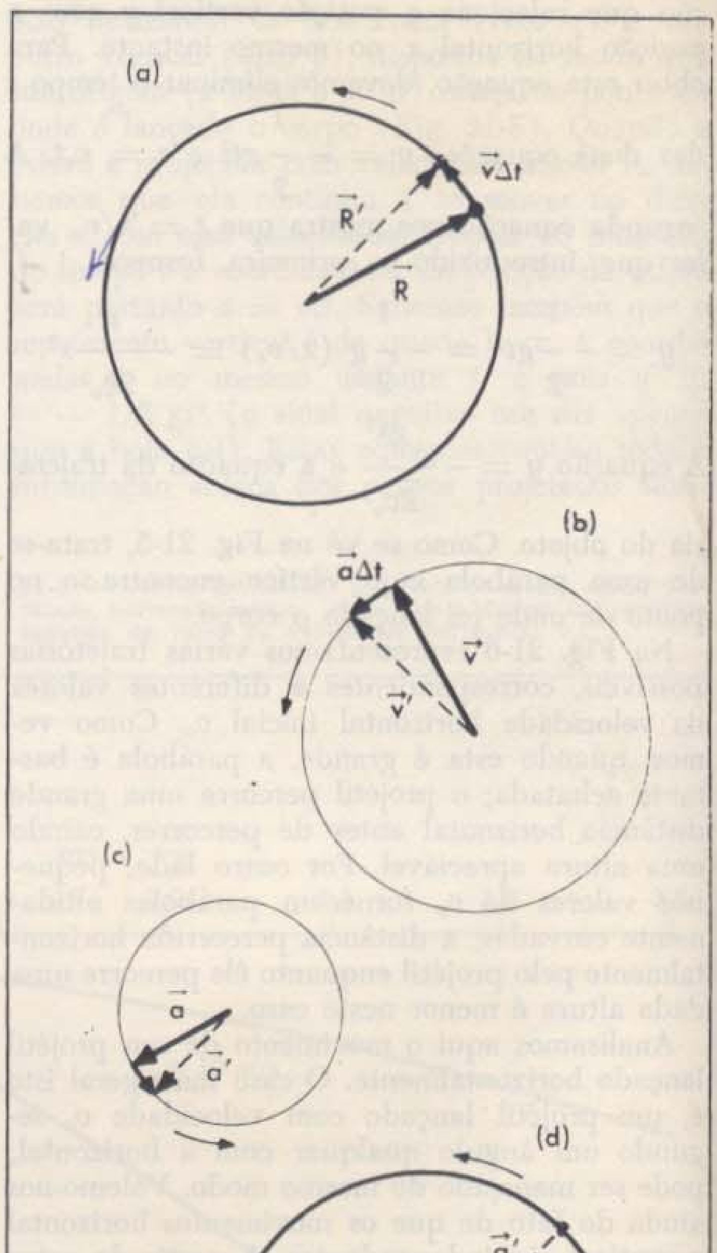
Enquanto o projétil se move em sua trajetória parabólica, a fôrça da gravidade que age sôbre êle tem uma componente paralela e outra perpendicular à trajetória. A direção da velocidade varia porque a componente perpendicular da fôrça produz uma aceleração perpendicular, e o valor da velocidade varia porque a componente da fôrça na direção da trajetória produz uma aceleração ao longo da trajetória.

Nesta seção vamos considerar apenas variações em direção. Procuraremos, portanto, exemplos de movimentos nos quais o módulo da velocidade seja constante; isto é, movimentos nos quais só varie a direção.

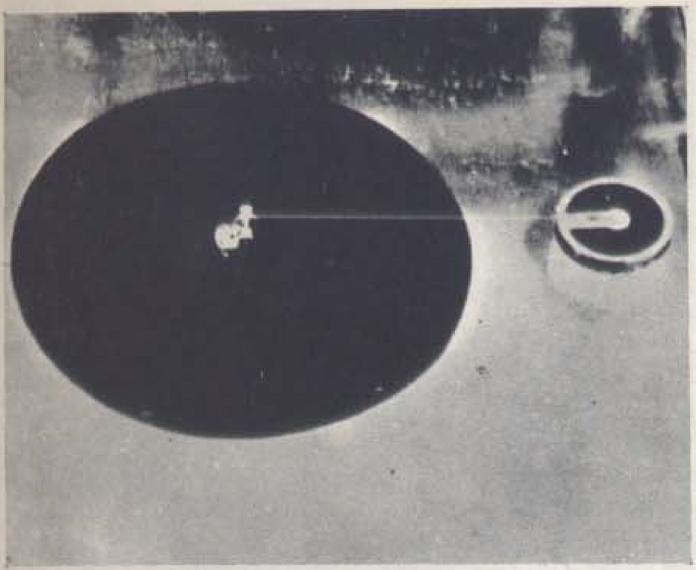
A direção de um movimento é a do vetor velocidade. O exemplo mais simples de movimento com direção variável ocorre quando o vetor velocidade gira uniformemente. A rotação uniforme é familiar a todos nós. O ponteiro dos segundos de um relógio, o prato de um toca-discos, a própria Terra, giram uniformemente. Na parte I, Fig. 6-29, já encontramos uma seqüência de vetores correspondentes a uma rotação uniforme.

Como é produzida tal rotação uniforme? Suponha que empurramos contìnuamente um corpo, sempre normalmente a seu movimento. Como nunca há uma componente da fôrça na direção do movimento, não há aceleração ao longo da trajetória. O módulo da velocidade do corpo permanece constante, enquanto varia a direção do movimento. Ora, se mantivermos constante a intensidade da fôrça, a direção da trajetória sofrerá variações iguais em intervalos de tempo iguais e a trajetória será uma circunferência. Cada vez que o corpo completa uma volta em tôrno da circunferência, o vetor velocidade gira uniformemente de 360 graus.

Assim, chegamos à importante conclusão de que uma fôrça deflectora de intensidade constante, perpendicular ao movimento, obriga o corpo a percorrer uniformemente uma circunferência. A fôrça sôbre o corpo e a aceleração que ela produz são dirigidas para o centro da circunferência e o vetor velocidade é tangente à circunferência em cada ponto. O vetor posição desenhado a partir do centro da circunferência tem comprimento constante e igual ao raio do círculo (Fig. 21-8).



21-8 — (a) Trajetória de um corpo que percorre uma circunferência com velocidade constante. O vetor posição $\vec{R}$ gira uniformemente. Durante um período completo T, o corpo percorre uma distância $vt = 2\pi R$ sôbre a circunferência. (b) O vetor $\vec{v}$, velocidade variável do corpo, gira com a mesma rapidez que $\vec{R}$, mas perpendicularmente a êle: Num curto intervalo de tempo Δt, a velocidade varia de $a\Delta t$. Em uma revolução completa, a extremidade de $\vec{v}$ percorre a distância $aT = 2\pi v$. A parte (c) mostra o vetor aceleração variável, sempre perpendicular à velocidade. A parte (d) mostra, de nôvo, a trajetória circular do corpo. Desenhamos aqui os vetores aceleração na mesma direção que em (c), mas com suas origens no corpo. O vetor aceleração aponta sempre do corpo para o centro da circunferência.



21-9 — Dispositivo para medir a fôrça centrípeta que age sôbre um corpo que percorre uma trajetória circular. O disco está em repouso; a fôrça resultante é nula; a mola ligada ao disco não está distendida.

Vamos agora estabelecer, para a aceleração do movimento circular, duas fórmulas matemáticas úteis. Como o movimento tem velocidade escalar constante v e como o corpo percorre uma circunferência de comprimento $2\pi R$ durante o tempo T,

$$v = \frac{2\pi R}{T}.$$

T é chamado período do movimento. Durante o mesmo tempo T a direção do movimento deu também uma volta completa e, no fim dêsse intervalo de tempo, aponta na mesma direção que no início. A direção do movimento gira regularmente, ficando sempre perpendicular ao raio, mas a velocidade escalar não muda. Conseqüentemente, o vetor velocidade apenas gira regularmente, com o mesmo período T (Veja Fig. 21-8).

Vemos na Fig. 21-8 (b) (como já havíamos notado no Capítulo 6) que a velocidade gira acompanhando a aceleração que é perpendicular a ela — tal como o raio vetor gira acompanhando a velocidade perpendicular a êle. Portanto, a extremidade do vetor velocidade percorre uma circunferência de raio v e comprimento $2\pi v$ durante o tempo T; e o valor da aceleração que produz esta variação é:

$$a = \frac{2\pi v}{T}$$

Combinando as duas últimas equações, podemos eliminar v ou T, e exprimir a aceleração como:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

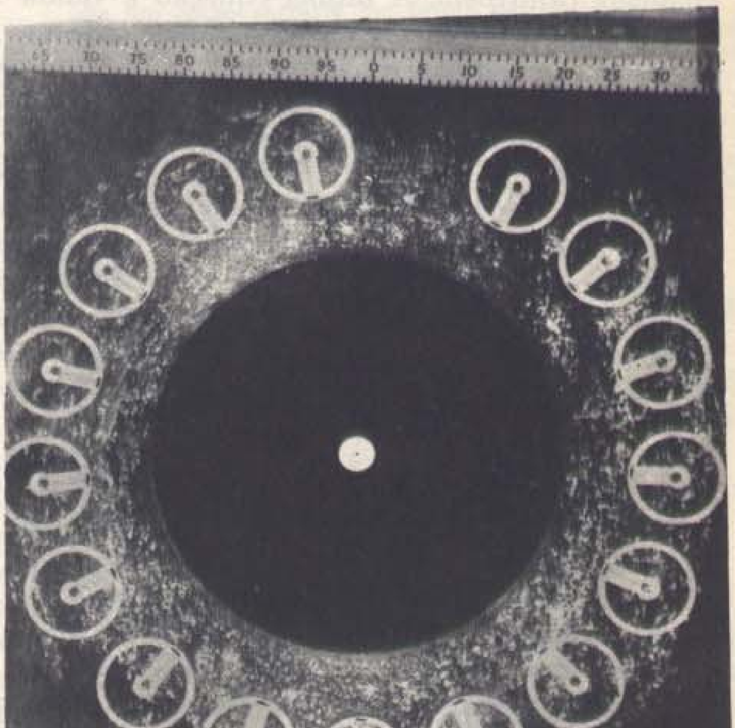
ou como:

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Essas expressões serão úteis no estudo do movimento dos satélites, do sistema planetário e na Física Atômica.

O vetor aceleração é perpendicular ao vetor velocidade que, por sua vêz, é perpendicular ao vetor posição $\vec{R}$. Os dois ângulos retos se adicionam, dando 180.° Portanto, o sentido do vetor aceleração é oposto ao de $\vec{R}$ (Fig. 21-8). Usando esta informação sôbre a direção de $\vec{a}$ e a fórmula obtida há pouco para o valor de $\vec{a}$, podemos escrever a relação vetorial:

$$\vec{a} = -\frac{4\pi^2 \vec{R}}{T^2}.$$



21-10 — Disco percorrendo uma circunferência com velocidade constante em módulo. Note que a mola está igualmente distendida em tôdas as posições, indicando que a fôrça é constante.

Se imaginarmos $\vec{a}$ com sua origem no corpo, veremos que ela aponta do corpo para o centro da curva percorrida pelo móvel. Por esta razão a aceleração é chamada *aceleração centrípeta* (que busca o centro).

Voltemos, agora, à fôrça que produz esta aceleração. A lei de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ nos diz como a fôrça se relaciona com a aceleração. Portanto, usando a expressão matemática da aceleração em função do raio R da trajetória e do período T, podemos relacionar a fôrça com o movimento circular que ela produz. Obtemos:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -\frac{m4\pi^2\vec{R}}{T^2}$$

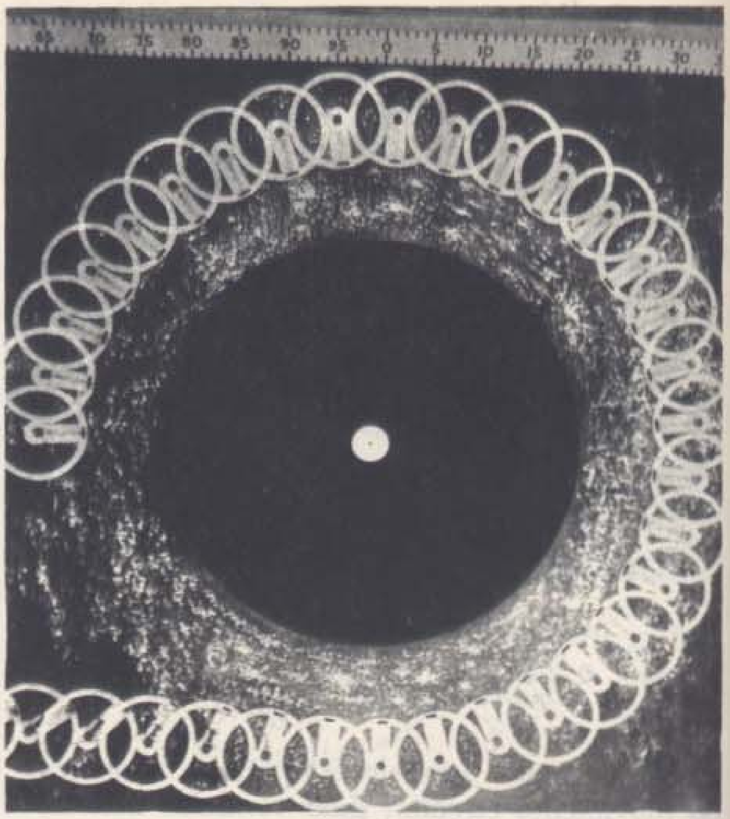
A intensidade da fôrça pode, também, ser relacionada com a velocidade escalar v e o raio R pela equação

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

Lembre-se que o sentido de F é da periferia para o interior do círculo; porisso esta fôrça é chamada *centrípeta*. A última equação é válida para qualquer trajetória em que F seja a fôrça deflectora perpendicular à trajetória e R o raio de curvatura (o raio de um círculo que coincida exatamente com a trajetória próximo ao ponto em questão).

Podemos comprovar experimentalmente nossas equações. A Fig. 21-9 mostra um aparêlho projetado para isso e que usa um disco de gêlo sêco. O disco repousa sôbre uma mesa. Um extremo de uma corda fica prêso ao centro da mesa; o outro extremo é ligado a uma mola presa ao disco. A distensão da mola mede a fôrça centrípeta.

Na experiência aplicou-se ao disco a fôrça justamente necessária para que êle se movesse em círculo. A fig. 21-10 é uma fotografia estroboscópica do movimento. A luz acendia-se cinco vezes por segundo e foi desligada antes de completar-se uma revolução. As distâncias entre as posições sucessivas do disco mostram que a velocidade escalar era, em essência, constante. A mola prêsa ao disco está distendida como você pode perceber comparando esta figura com a Fig. 21-9. A distensão permanece a mesma durante todo o movimento e nos permite determinar a fôrça que faz girar o disco.



21-11 — Fotografia de um disco em movimento circular, à taxa de 10 instantâneos por segundo. Quando o disco alcançou a parte inferior da fotografia, o cordão ligado a êle foi queimado com um bico de gás. O disco continuou a se mover em linha reta com a velocidade que tinha ao romper-se o cordão.

Medindo a distensão da mola ficamos sabendo que a fôrça vale 1,18 newtons. O tempo necessário para percorrer os 15 intervalos entre a primeira e a última posição foi $0{,}2 \times 15 = 3{,}0$ s. Durante êste tempo o disco percorreu o ângulo de 320° ou 8/9 de uma revolução completa. Portanto o período T de uma revolução é $\left(\frac{9}{8}\right) \times (3{,}0 \text{ s}) = 3{,}4$ s. O raio tinha 0,33 m de comprimento e a massa do disco e da mola era 1,03 kg. Introduzindo êsses valôres em nossa expressão para a intensidade da fôrça centrípeta, F, que obriga o disco a percorrer o círculo, encontramos:

$$F = \frac{m4\pi^2R}{T^2} =$$

$$= \frac{(1{,}03 \text{ kg}) \times 4\pi^2 \times (0{,}33 \text{ m})}{(3{,}4 \text{ s})^2} = 1{,}2 \text{ newtons.}$$

Vemos que esta experiência confirma, dentro da precisão de nossas medidas, a expressão que obtivemos para a fôrça centrípeta.

Suponha que a corda se rompe. O disco não mais se moverá segundo uma circunferência, pois foi removida a fôrça centrípeta. Como a fôrça resultante que age agora sôbre o disco é nula, êle se move em linha reta, com velocidade constante. É o que vemos na Fig. 21-11, onde a corda foi queimada com um bico de gás. Note que, depois de romper-se a corda, o disco se move segundo uma tangente ao círculo original, e não segundo um raio.

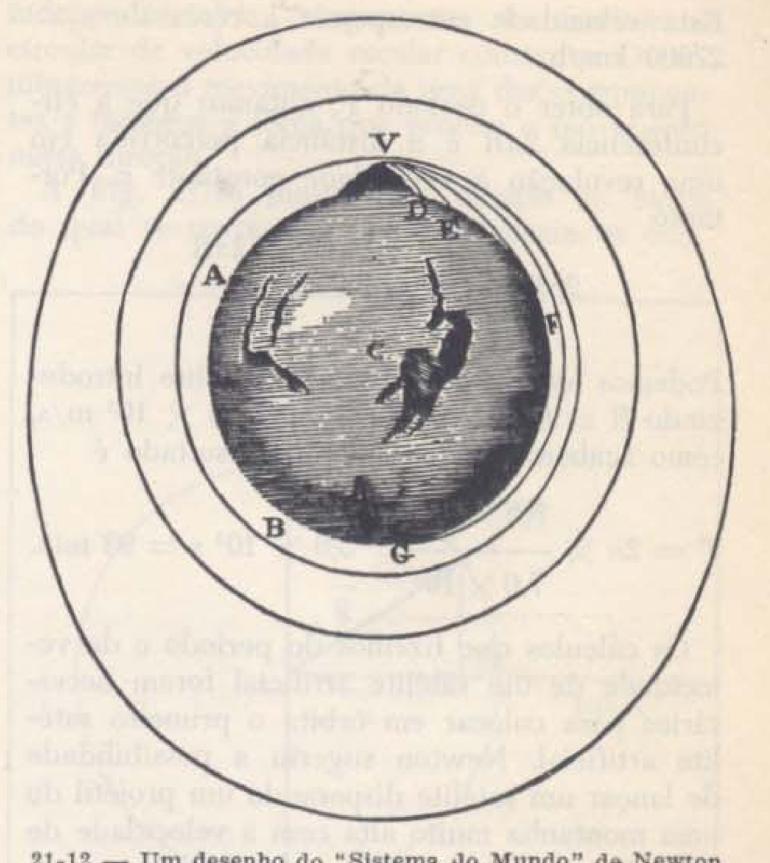
21 — 6. Satélites da Terra.

O pêso de um corpo só é constante em intensidade e direção quando consideramos regiões pequenas em comparação com o raio da Terra. Quando lançamos um projétil com velocidade muito grande, como agora podemos fazer por meio de foguetes, êle pode ir tão longe que não podemos desprezar as variações na direção da fôrça da gravidade. Como a Terra é quase esférica, concluímos que a fôrça da gravidade está sempre dirigida para o seu centro. Mas, se nos pudéssemos colocar no espaço cósmico e olhássemos a Terra, veríamos fàcilmente que a direção "para o centro da Terra" muda de 180° quando olhamos de pontos diametralmente opostos (Fig. 21-1).

Se um projétil for lançado horizontalmente com a velocidade inicial adequada, êle se moverá com velocidade constante numa órbita circular em tôrno da Terra. Entretanto, como é muito difícil lançar um objeto rigorosamente na direção certa e com a velocidade apropriada, os satélites artificiais percorrem, na realidade, órbitas elíticas (veja o próximo capítulo). Analisaremos apenas o caso especial de um satélite em movimento circular por causa de sua relativa simplicidade matemática.

Os satélites terrestes que já foram lançados com êxito são foguetes de vários estágios. O último estágio é lançado quase horizontalmente a grande altitude, onde a resistência do ar é pequena. Não há diferença essencial no comportamento dinâmico de um satélite fabricado pelo homem e de um satélite natural, como a Lua. Mas os raios de suas órbitas são diferentes, e o resultado é que seus períodos de rotação (isto é, o tempo gasto para uma volta completa em tôrno da Terra) são diferentes.

Calculemos o período de revolução de um satélite que gira em tôrno da Terra. Para o movimento circular o valor da aceleração é



21-12 — Um desenho do "Sistema do Mundo" de Newton (apêndice a edições posteriores dos "Principios"), mostrando as trajetórias que um corpo seguiria se fôsse projetado com velocidades diferentes de uma montanha alta. Como você pode ver, Newton estava ciente de que um corpo entraria em órbita em tôrno da Terra se sua velocidade fôsse suficientemente grande. As órbitas que começam em V e terminam em D, E, F e G são do projéteis de velocidades horizontais cada vez maiores. Newton compreendeu que a resistência do ar sôbre os satélites que se movessem próximo da Terra os impediria de seguir suas trajetórias ideais ou de se moverem por muito tempo. Mostrou que os satélites poderiam se mover permanentemente apenas nas órbitas mais externas.

$a = \dfrac{v^2}{R}$ e, como a fôrça centrípeta é a atração gravitacional da Terra, o valor dessa aceleração deve ser g, o campo gravitacional. Logo a velocidade do satélite é dada por

$$\frac{v^2}{R} = g \text{ ou } v^2 = gR,$$

onde R é o raio do círculo e g o valor da aceleração da gravidade no lugar onde se encontra o satélite. Suponha que o satélite esteja a 400 km de altura. Portanto R = raio da Terra + 400 km. = $6{,}8 \times 10^6$ m, e g, nessa altitude, vale aproximadamente 8,6 m/s². Portanto,

$$v^2 = gR = 8{,}6 \times 6{,}8 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v = 7{,}6 \times 10^3 \text{ m/s.} = 7{,}6 \text{ km/s}$$

Esta velocidade corresponde a cêrca de .... 27000 km/h.

Para obter o período T, notamos que a circunferência $2\pi R$ é a distância percorrida em uma revolução à velocidade constante v. Portanto

$$2\pi R = vT \text{ ou } T = \frac{2\pi R}{v}$$

Podemos avaliar o período do satélite introduzindo $R = 6{,}8 \times 10^6$ m e $v = 7{,}6 \times 10^3$ m/s, como acabamos de calcular. O resultado é

$$T = 2\pi \times \frac{6{,}8 \times 10^6}{7{,}6 \times 10^3} = 5{,}6 \times 10^3 \text{ s} = 93 \text{ min.}$$

Os cálculos que fizemos do período e da velocidade de um satélite artificial foram necessários para colocar em órbita o primeiro satélite artificial. Newton sugeriu a possibilidade de lançar um satélite disparando um projétil de uma montanha muito alta com a velocidade de 9 km/s aproximadamente, e fez o esquema da Fig. 21-12 para explicar sua proposta. O fato de ter sido possível discutir tais projetos sabendo que êles eram realizáveis constitui um dos triunfos do desenvolvimento da dinâmica de Galileu, Newton e outros. Então, por que motivo o primeiro satélite artificial não foi posto em órbita no século dezessete? Você pode advinhar a resposta. Não havia canhões ou foguetes suficientemente poderosos. A descoberta pelo homem de importantes leis científicas muitas vezes vai à frente da tecnologia. A aplicação pormenorizada do conhecimento científico requer muito tempo e trabalho.

Às vêzes acontece o contrário — a tecnologia progride mais ràpidamente que a ciência. Agora que a tecnologia permitiu colocar em órbita satélites artificiais, poderemos fazer novas observações do Universo. Algumas dessas observações não foram possíveis antes porque a atmosfera da Terra funciona como uma cortina. Os novos dados fornecerão novos conhecimentos sôbre os raios cósmicos, sôbre a densidade da matéria no espaço interplanetário, e nos ajudarão a formar nossas idéias sôbre o Universo. A longo prazo, o conhecimento básico e as aplicações tecnológicas andam lado a lado — ajudam-se mùtuamente.

21 — 7. O Movimento da Lua.

A Lua é um satélite da Terra e podemos calcular sua aceleração centrípeta a partir das seguintes observações. O período do movimento da Lua é de 27,3 dias ou $2{,}3 \times 10^6$ s, e sua distância à Terra é cerca de $3{,}8 \times 10^8$ m. O valor da aceleração da Lua para a Terra é, pois:

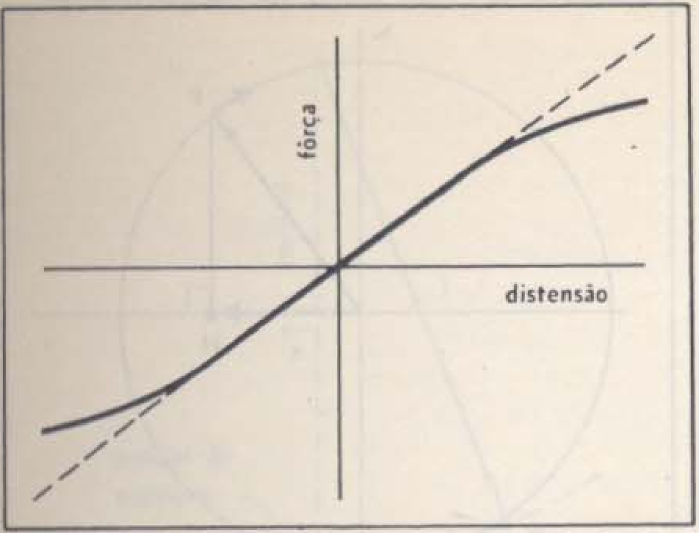
$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4 \times \pi^2 \times 3{,}8 \times 10^8 \text{ m}}{(2{,}3 \times 10^6 \text{ s})^2} = \\ = 2{,}7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Esta aceleração é muito menor do que a de um satélite próximo à superfície da Terra. Comparando-a com $g = 9{,}8$ m/s^2, vemos que a atração gravitacional ficou reduzida por um fator igual a, aproximadamente, $2{,}7 \times 10^{-4}$. Esta evidência do enfraquecimento do campo gravitacional à medida que a distância aumenta foi uma dos indícios que conduziram Newton à sua lei de gravitação, como veremos no próximo capítulo.

21 — 8. Movimento Harmônico Simples.

Quando distendemos, uma mola, ela exerce sôbre nossa mão uma fôrça oposta à que nós exercemos e proporcional à deformação (Fig. 21-13). Se prendermos um objeto à mola distendida e a soltarmos, êle oscilará. Encontram-se freqüentmente fôrças como esta, proporcionais à deformação, pelo menos para distâncias pequenas. Podemos descrevê-las por meio da equação $\vec{F} = -k\vec{x}$, em que x é, essencialmente, a deformação, e o sinal negativo indica que a fôrça é restauradora, isto é, puxa o sistema de volta à sua posição de equilíbrio.

Fôrças restauradoras lineares tais como estas, levam sempre a movimentos de vai-e-vem semelhantes, chamados movimentos harmônicos simples, que vamos estudar agora. Se usássemos a lei de Newton diretamente para predizer o movimento, depararíamos com um problema matemático complicado, mas o movimento pode ser deduzido de um movimento circular, como veremos a seguir. O movimento circular nos parecerá justamente um movimento harmônico simples, se colocarmos nossos olhos no mesmo plano em que se dá o movimento. Para entender isso, mova seu polegar segundo um círculo horizontal à altura de seus olhos. O movimento retilíneo que você vê é exatamente o movimento harmônico simples, como podemos concluir

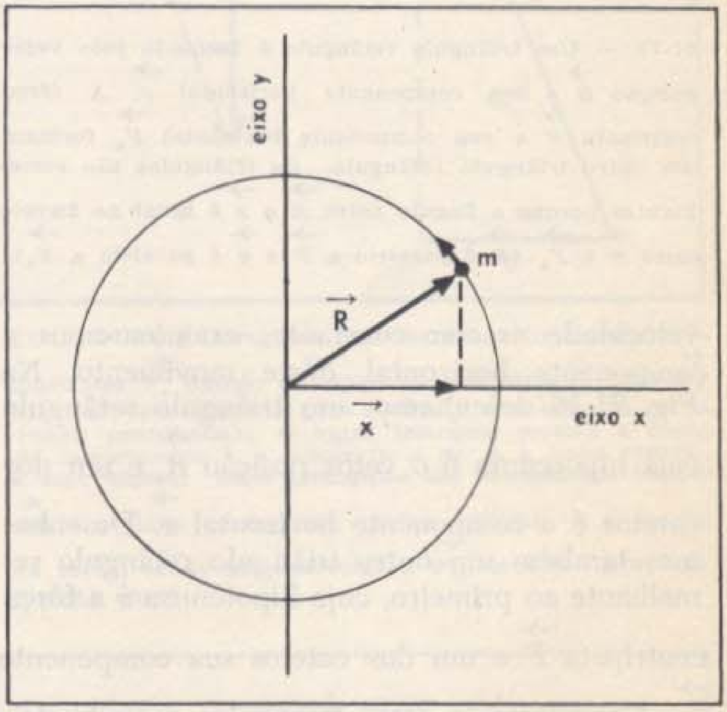


21-13 — A fôrça exercida por uma mola em função do seu alongamento, ou de sua compressão. Quando a deformação da mola não é muito grande, a fôrça é diretamente proporcional à deformação. Nesta região, a curva aproxima-se de uma reta, que foi prolongada por uma linha pontilhada.

comparando-o com o movimento de um corpo prêso ao extremo de uma mola (Fig. 21-14).

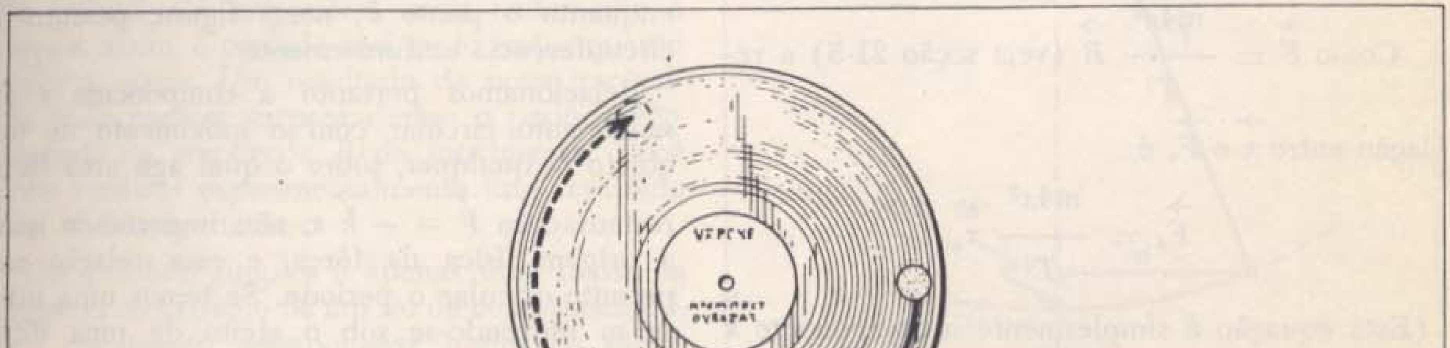
Para estudar êste movimento, devemos, de novo, retornar às propriedades fundamentais dos vetores, que nos permitem representar qualquer movimento plano como uma combinação de dois movimentos independentes segundo direções perpendiculares entre si. Aplicaremos esta independência às componentes do movimento circular de velocidade escalar constante. Determinaremos o movimento de uma das componentes e também a fôrça que produz o movimento nessa direção.

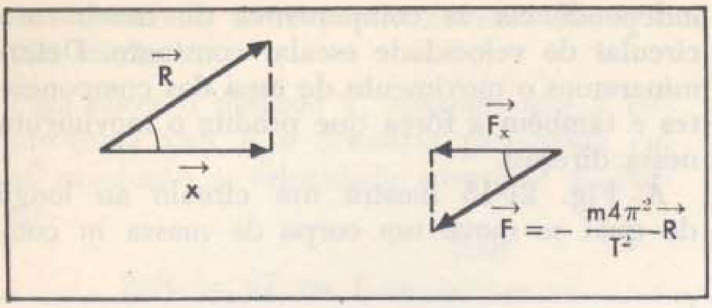
A Fig. 21-15 mostra um círculo ao longo do qual se move um corpo de massa m com



21-15 — A massa m está se movendo sôbre uma circunferência com velocidade constante em módulo. Êste movimento pode ser considerado como resultante de duas componentes perpendiculares entre si: uma horizontal e outra vertical. Estudaremos a componente horizontal.

21-14 — O movimento de vai-e-vem de um objeto prêso a uma mola pode ser acompanhado por uma das componentes do movimento de um objeto apoiado sôbre uma mesa girante. Devemos escolher um raio conveniente e girar a mesa com a velocidade certa.





21-16 — Um triângulo retângulo é formado pelo vetor posição $\vec{R}$ e sua componente horizontal $\vec{x}$. A fôrça centrípeta $\vec{F}$ e sua componente horizontal $\vec{F}_x$ formam um outro triângulo retângulo. Os triângulos são semelhantes porque o ângulo entre $\vec{R}$ e $\vec{x}$ é igual ao ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{F}_x$ ($\vec{R}$ é paralelo a $\vec{F}$ e $\vec{x}$ é paralelo a $\vec{F}_x$).

velocidade escalar constante; examinaremos a componente horizontal dêste movimento. Na Fig. 21-16 desenhamos um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o vetor posição $\vec{R}$, e um dos catetos é a componente horizontal $\vec{x}$. Desenhamos também um outro triângulo retângulo semelhante ao primeiro, cuja hipotenusa é a fôrça centrípeta $\vec{F}$ e um dos catetos sua componente $\vec{F}_x$. Considerando êsses triângulos semelhantes, vemos que os valores de $\vec{F}_x$ e de $\vec{x}$ estão na mesma razão que os de $\vec{F}$ e de $\vec{R}$, mas têm sentidos opostos.

Como $\vec{F} = \dfrac{m4\pi^2}{T^2}\vec{R}$ (veja seção 21-5) a relação entre $\vec{x}$ e $\vec{F}_x$ é:

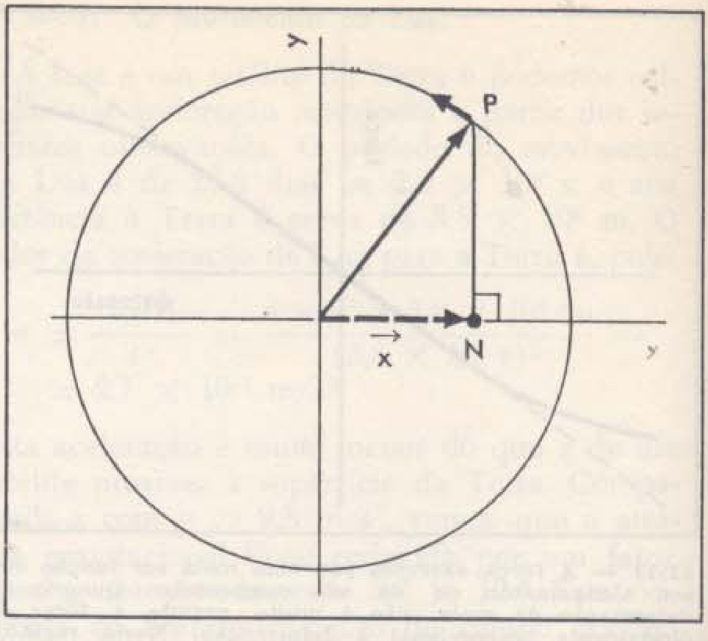
$$\vec{F}_x = \frac{m4\pi^2}{T^2}\vec{x}$$

(Esta equação é simplesmente a componente $\vec{x}$ da equação $\vec{F} = -\dfrac{m4\pi^2}{T^2}\vec{R}$).

Como a massa m e o período T são constantes para cada movimento, $m4\pi^2/T^2$ é também constante, e a equação pode ser escrita mais simplesmente:

$$\vec{F}_x = -\vec{k}\,x$$

onde o fator $k = m\ 4\pi^2/T^2$ é a constante de

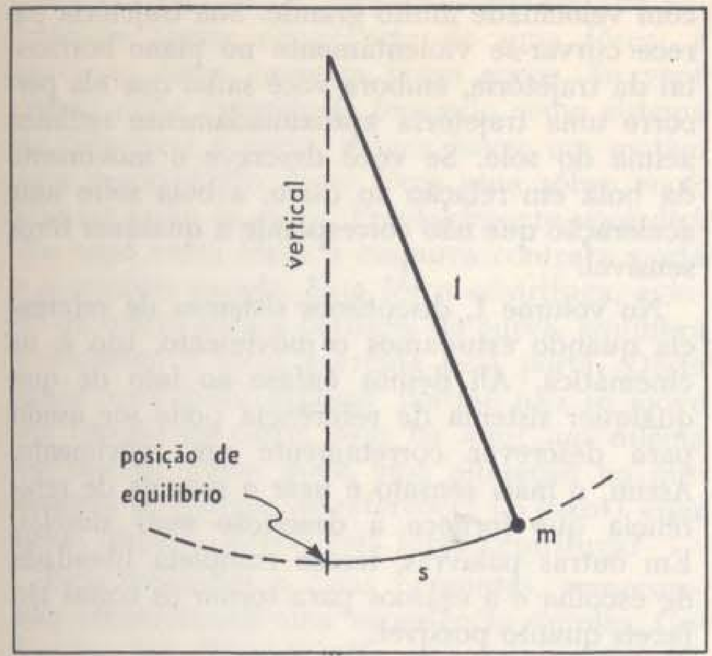


21-17 — Se a um objeto localizado em N fôr aplicada uma fôrça $\vec{F} = -k\vec{x}$, êle se moverá ao longo do eixo dos x. Seu movimento será o mesmo que o da componente $\vec{x}$ do movimento de um ponto P que se move uniformemente sôbre uma circunferência.

proporcionalidade entre $\vec{F}$ e $\vec{x}$. Isto mostra que a fôrça $\vec{F}_x = -\vec{k}\,x$ é a responsável pelo movimento de vai-e-vem de $\vec{x}$. Como o movimento ao longo do eixo x depende apenas da fôrça nesta direção, qualquer fôrça nessa direção produz um movimento exatamente semelhante ao do ponto N na extremidade de $\vec{x}$ na Fig. 21-17, enquanto o ponto P, nessa figura, percorre a circunferência uniformemente.

Relacionamos portanto a componente x do movimento circular com o movimento de um objeto m qualquer, sôbre o qual age uma fôrça restauradora $\vec{F} = -\vec{k}\,x$, não importando qual a origem física da fôrça, e essa relação nos permite calcular o período. Se temos uma massa m movendo-se sob o efeito de uma fôrça $\vec{F} = -\vec{k}\,x$, podemos sempre imaginar um movimento circular adequado que reproduzirá o movimento de m. O período do movimento real de m é o mesmo que o dêsse movimento circular que acompanha o de m.

Podemos usar nossa discussão anterior para determinar a relação entre a constante de fôrça, k, na equação $\vec{F} = -\vec{k}\,x$ e o período da oscilação de m. O período depende apenas da mas-



21-18 — Pêndulo simples: a massa m, suspensa por um fio de comprimento l, percorre a trajetória s.

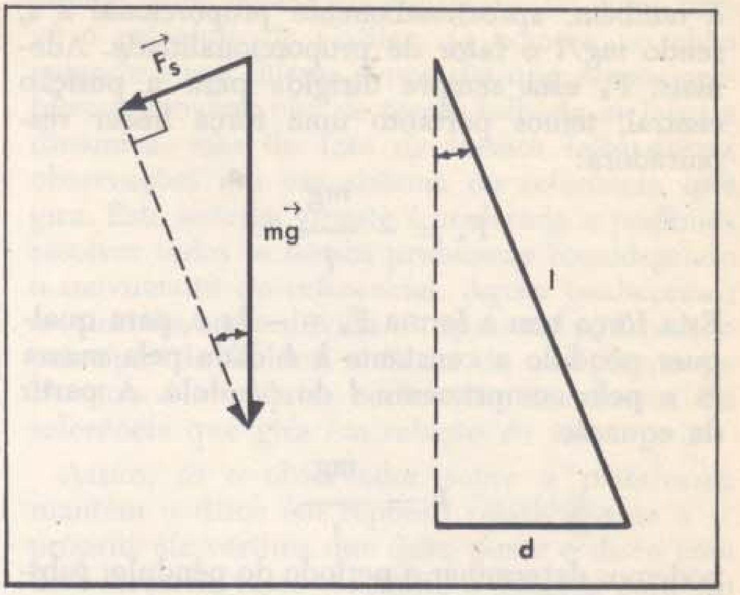
sa m e da constante de fôrça k. Reescrevendo a equação $k = \dfrac{m4\pi^2}{T^2}$, obtemos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

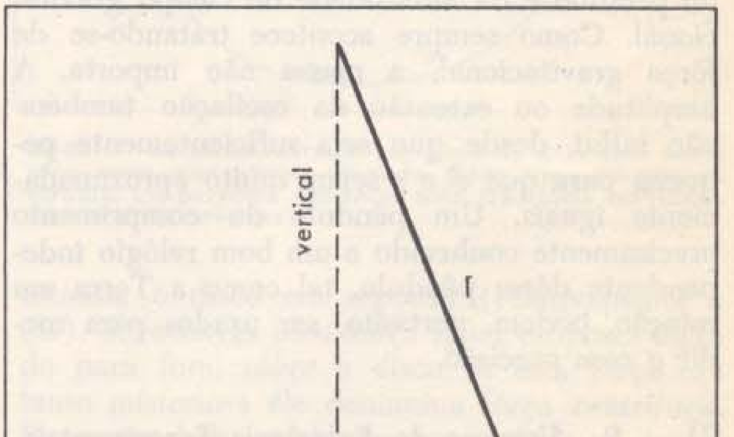
Esta expressão é razoável. Se a fôrça restauradora aumenta ràpidamente com a distância (isto é, se k fôr grande), a massa oscila ràpidamente: T torna-se pequeno. Por outro lado, se a massa fôr grande, ela responderá mais lentamente à fôrça e, assim, o período será tanto maior quanto maior a massa. Um resultado de nosso raciocínio pode parecer surpreendente: o período *não* depende da amplitude R do movimento. Você pode verificar experimentalmente êste resultado com facilidade; tente-o.

Um pêndulo simples é apenas uma massa m suspensa ao extremo de um fio de comprimento l. Seu movimento assemelha-se muito ao movimento harmônico simples. Para mostrá-lo, começamos determinando a fôrça ao longo da trajetória s (Fig. 21-18); esta fôrça puxa a massa m para sua posição de equilíbrio. Como vemos na Fig. 21-19, o valor da fôrça $\vec{F}_s$ ao longo da trajetória é

$$\frac{F_s}{mg} = \frac{d}{l} \text{ ou } F_s = \frac{mg}{l}\,d,$$



21-19 — Dois triângulos semelhantes. No da esquerda mostra-se $\vec{F}_s$ agindo ao longo da trajetória, o pêso $m\vec{g}$ atuando verticalmente para baixo, e a tensão da corda (linha pontilhada). O outro triângulo mostra a corda de comprimento l, a distância d de m à linha central, e esta última. Êstes triângulos são semelhastes porque $m\vec{g}$ e a linha central são ambos verticais, e a tensão da corda, sendo perpendicular a $\vec{F}_s$, deve ter a mesma direção que l.



21-20 — Quando a massa é ligeiramente deslocada de sua posição de equilíbrio, há uma diferença muito pequena entre o comprimento s da trajetória e o deslocamento horizontal d. Imagine o deslocamento muito menor do que indica a figura (em relação ao comprimento do pêndulo).

onde d é o deslocamento horizontal de m a partir da posição de equilíbrio. Quase não há diferença entre os comprimentos e as direções de d e de s (Fig. 21-20); vemos, assim, que F_s

é também, aproximadamente proporcional a s, sendo mg/l o fator de proporcionalidade. Ademais, F_s está sempre dirigida para a posição central; temos portanto uma fôrça linear restauradora:

$$F_s = -\frac{mg}{l}s.$$

Esta fôrça tem a forma $F_s = -ks$ e, para qualquer pêndulo a constante k é dada pela massa m e pelo comprimento l do pêndulo. A partir da equação

$$k = \frac{mg}{l},$$

podemos determinar o período do pêndulo; substituindo k por êsse valor na relação

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

obtemos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

O período depende apenas do comprimento do pêndulo e da intensidade do campo gravitacional. Como sempre acontece tratando-se de fôrça gravitacional, a massa não importa. A amplitude ou extensão da oscilação também não influi, desde que seja suficientemente pequena para que d e s sejam muito aproximadamente iguais. Um pêndulo de comprimento precisamente conhecido e um bom relógio independente dêsse pêndulo, tal como a Terra em rotação, podem, portanto, ser usados para medir g com precisão.

21 — 9. Sistemas de Referência Experimentais.

Gire sôbre si próprio. Aparentemente o aposento gira no sentido oposto. Um canto do aposento percorre uma circunferência, assim como uma bola de gude sôbre a mesa. Mas nenhuma fôrça do tipo mv^2/r é necessária para acelerar a bola enquanto ela percorre sua trajetória aparentemente circular. A bola está simplesmente em repouso, sob a ação de uma resultante nula, quando referimos sua posição ao aposento, mas parece acelerada quando você se toma como sistema de referência.

Suponha que você está num carro que é acelerado segundo uma reta. Você olha para fora e vê uma bola que foi atirada horizontalmente com velocidade muito grande. Sua trajetória parece curvar-se violentamente no plano horizontal da trajetória, embora você saiba que ela percorre uma trajetória aproximadamente retilínea acima do solo. Se você descreve o movimento da bola em relação ao carro, a bola sofre uma aceleração que não corresponde a qualquer fôrça sensível.

No volume I, discutimos sistemas de referência quando estudamos o movimento, isto é, na cinemática. Ali demos ênfase ao fato de que qualquer sistema de referência pode ser usado para descrever corretamente um movimento. Assim, o mais sensato é usar o sistema de referência que fornece a descrição *mais simples*. Em outras palavras, temos completa liberdade de escolha e a usamos para tornar as coisas tão fáceis quanto possível.

E em dinâmica? Tenho aqui a mesma liberdade? É desagradável, mas é o fato, que, aqui, não podemos usar qualquer sistema de referência e, ao mesmo tempo, preservar a validade da lei do movimento de Newton. A lei do movimento de Newton *não* é válida em todos os sistema de referência. A descrição dinâmica, em alguns sistemas, requer leis mais complicadas. Como, então, saberemos quais são os sistemas de referência em que é correta a lei do movimento de Newton? A resposta é esta: pela observação experimental. Lembre-se como fomos levados ao princípio de inércia de Galileu e ao enunciado da lei do movimento de Newton; e lembre-se de que qualquer conclusão tirada da observação experimental é verdadeira apenas dentro dos limites de precisão das medidas. Como chegamos à lei do movimento de Newton a partir de experiências de laboratório na Terra, sabemos que um sistema de referência ligado rìgidamente a Terra é bom — pelo menos dentro da precisão de nossas medidas. Por outro lado, um carro acelerado é um sistema de referência onde a lei do movimento de Newton *não é valida.*

21 — 10. Fôrças Fictícias em Sistemas Acelerados.

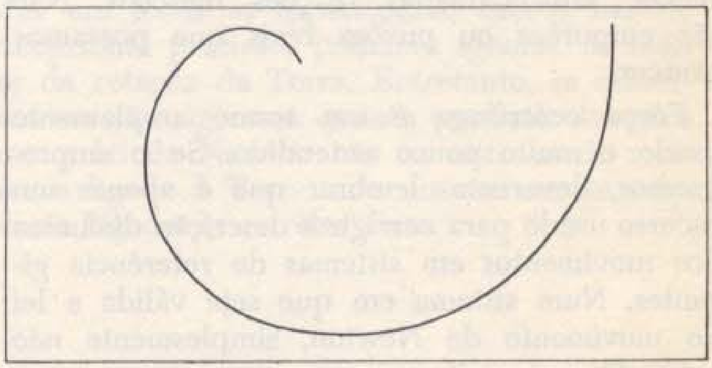
Estamos todos a par das estranhas fôrças que aparecem quando se observa o movimento em certos sistemas de referência. Se andamos num carro fechado a velocidade constante, numa estrada retilínea e sem acidentes, agem sôbre nós apenas as fôrças que atuam quando estamos sentados parados numa cadeira. Mas quando o carro faz uma curva, especialmente em alta velocidade, temos consciência de uma fôrça; a porta do carro empurra nosso corpo. Se você pensar nesta experiência tomando como sistema de referência o carro, parece haver um motivo para preocupação. Uma fôrça atua sôbre você, mas você não se move. Provàvelmente você dirá que uma outra fôrça o empurra contra a porta e o mantém parado. Esta fôrça centrífuga, agindo do centro para a periferia da curva, equilibra exatamente a fôrça exercida pela porta. Dêste modo você pode explicar porque não se move em relação ao carro. Mas há aqui um dilema verdaderio: como pode uma alteração no movimento do sistema de referência (o carro) criar novas fôrças? É real esta fôrça centrífuga?

Para responder a estas perguntas, começaremos considerando uma experiência simples. Colocamos um disco de gêlo sêco em repouso sôbre uma superfície plana e sem atrito e o soltamos. Que acontece? Exatamente nada. O disco continua em repouso e concluimos dessa observação que é nula a fôrça resultante que age sôbre êle. Em particular, nenhuma fôrça horizontal age sôbre o disco.

Realizemos agora a mesma experiência numa mesa sem atrito colocada sôbre uma plataforma girante. Todo o nosso laboratório gira uniformemente em relação à Terra. Que observaremos então ao soltar o disco? Êste *não* permanece em repouso, mas se move em relação a nós — isto é, em relação à plataforma — descrevendo uma curva como a que está desenhada na Fig. 21-21, chamada involuta. Agora estamos realmente confusos. Nesta experiência nossas observações mostram que, na ausência de fôrças, um corpo se move segundo uma involuta, e não em linha reta com velocidade constante. Que contradição com o princípio de inércia de Galileu! Como podemos reconciliar corretamente nossas observações com a lei de Galileu? Podiamos dizer: estamos enganados ao pensar que fôrça alguma age sôbre o disco; tal movimento mostra que há uma fôrça complicada. Mas, *o que* exerce tal fôrça? Nada que possamos localizar. Voltamos, pois, exatamente à dúvida de que partimos.

Consideremos, agora, a questão do ponto de vista de um observador no solo. Êle nos vê em movimento, segundo, uma circunferência, com velocidade constante. Estamos segurando um disco de gêlo sêco que descreve a circunferência conosco. Quando largamos o disco, êste se move em linha reta, segundo uma tangente ao círculo, com velocidade constante, tal como prevê o princípio de Galileu. O homem no chão entende nosso dilema e nos diz que nossos problemas provêm, não de terem falhado as leis da dinâmica, mas do fato de termos feito nossas observações em um sistema de referência que gira. Êste sistema girante é acelerado e podemos resolver todos os nossos problemas considerando o movimento do referencial. Agora conhecemos a causa de nossa dúvida. A aparente violação do princípio de Galileu e da lei do movimento de Newton é devida à *aceleração* do sistema de referência que gira em relação ao solo.

Assim, se o observador sobre a plataforma mantém o disco em repouso relativamente a si próprio, êle verifica que deve puxar o disco com uma fôrça de valor constante e dirigida para um ponto fixo interno à curva. Êle raciocina que,



21-21 — Se abandonarmos um disco de gêlo sêco sôbre uma mesa sem atrito, colocada sôbre uma plataforma girante, êle parecerá descrever uma trajetória curvilínea denominada involuta.

estando o disco em repouso (relativamente a êle), deve haver uma fôrça igual e oposta agindo para fora, *sôbre o disco.* A esta fôrça um tanto misteriosa êle denomina fôrça *centrífuga.* Por outro lado, o observador no solo vê que o disco está acelerado para o centro da plataforma e que o observador girante lhe está aplicando a necessária fôrça centrípeta. O observador no solo não precisa recorrer à idéia de uma fôrça centrífuga.

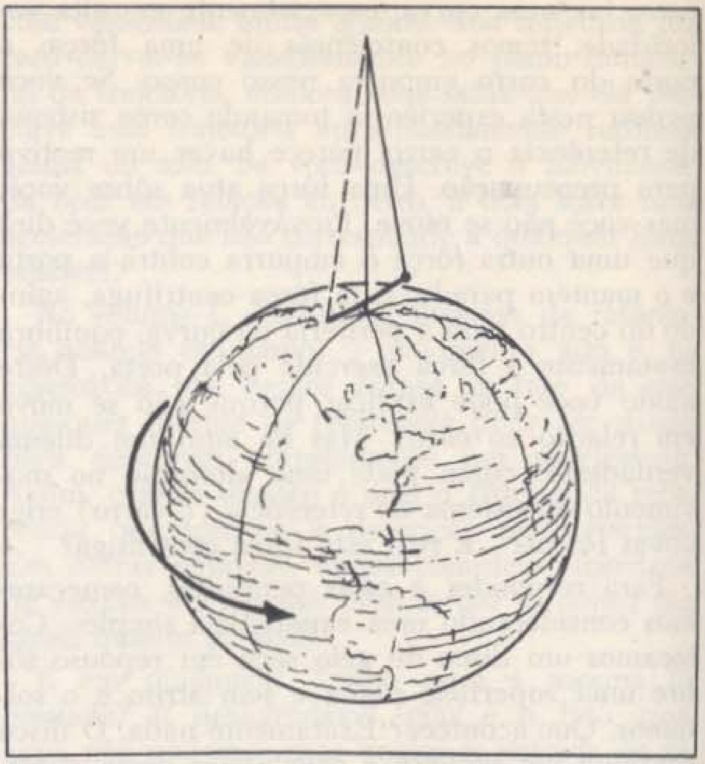
Então o que dizer sôbre a fôrça que realmente sentimos quando estamos num carro que faz uma curva? Esta fôrça é devida à porta, e é bastante real; mas pode parecer misteriosa se esquecermos que nos movemos segundo uma curva. No sistema de referência da Terra tudo é claro. A porta do carro deve exercer uma fôrça *centrípeta* real sôbre nós, levando-nos a descrever uma curva em vez de seguirmos em linha reta. Neste exemplo, o movimento no sistema de referência em que é válida a lei de Newton é acelerado e as fôrças que produzem a aceleração são reais. O carro, incluindo a porta e nós mesmos não fará a curva a menos que seja empurrado lateralmente pelo chão da estrada. A fôrça *centrífuga,* por outro lado, não é real. Se fôsse, a fôrça resultante seria zero e nós não faríamos a curva. A fôrça centrifuga é uma ficção, alguma coisa que inventamos para parecer que a lei de movimento de Newton é válida no sistema de referência ligado ao carro.

Vemos que a fôrça centrífuga não é realmente uma fôrça no sentido de um puxão ou empurrão exercido por um objeto sôbre outro; é, antes, uma fôrça fictícia que introduzimos para corrigir a aceleração de nosso sistema de referência. Tais fôrças fictícias, necessárias para levar em conta a aceleração dos sistemas de referência, são chamadas reações inerciais. Não são empurões ou puxões reais que possamos exercer.

Fôrça centrífuga é um termo amplamente usado e muito pouco entendido. Se o empregarmos, deveremos lembrar que é apenas um recurso usado para corrigir a descrição dinâmica dos movimentos em sistemas de referência girantes. Num sistema em que seja válida a lei do movimento de Newton, simplesmente *não* existe fôrça centrífuga.

21 — 11. A Lei de Newton e a Rotação da Tera.

Acabamos de levantar um outro problema. Sabemos que a Terra, em relação ao Sol e às estrêlas fixas, efetua uma rotação em tôrno de seu eixo em 24 horas. Estamos num sistema de referência em rotação, ou o Sol e as estrêlas fixas giram em tôrno da Terra? Em outros termos, a lei de Newton é "realmente" válida se usarmos a Terra como sistema de referência, ou será mais precisa em algum outro sistema em relação ao qual a Terra esteja girando? Se a lei de Newton de fato se aplica a algum outro sistema de referência diferente da Terra, conseguiríamos sabê-lo notando que, para explicar os movimentos dos corpos, observados em relação à Terra, devemos introduzir fôrças fictícias semelhantes à fôrça centrífuga. Estas fôrças fictícias devem ser pequenas, senão já as teríamos notado em nossas experiências. Aliás, se correspondem à rotação diária da Terra, é natural



21-22 — Um pêndulo de Foucault no Polo Norte. O pêndulo oscila em movimento quase retilíneo, enquanto a Terra gira embaixo dêle. Para um observador sôbre a Terra, o plano do movimento do pêndulo parece girar.

que sejam pequenas. Para forçar uma massa m a descrever uma circunferência em 24 horas, no equador, é preciso uma fôrça centrípeta igual a:

$$\frac{4\pi^2 mR}{T^2} = 3 \times 10^{-2} \times m,$$

em newtons (Seção 21-5). Isto é, cêrca de 1/300 da fôrça da gravidade. Uma experiência capaz de mostrar que 1/3 % de g é usado para produzir êsse movimento tem que ser mais precisa do que as realizadas para estabelecer a lei do movimento de Newton.

O físico francês Foucault realizou uma experiência famosa para mostrar que a Terra gira sôbre seu eixo num sistema de referência em que é válida a lei de Newton. Para realizar uma experiência como a de Foucault, construimos um pêndulo prendendo uma esfera a um cordão cujo extremo superior é fixado ao teto. Quando pôsto em movimento, êste pêndulo oscila e, se a amplitude do movimento não for demasiado grande, a esfera realizará um movimento harmônico simples, como vimos na Seção 21-8.

Para colocar tal corpo em movimento, podemos, por exemplo, tirá-lo de sua posição de equilíbrio e abandoná-lo a partir do repouso. Êle oscilará efetuando um movimento muito aproximadamente retilíneo. Se estivermos num sistema de referência em que seja válida a lei de Newton, o movimento do pêndulo continuará indefinidamente no plano que contém a linha de oscilação e o ponto de suspensão do pêndulo (veja Fig. 21-18). Não há componente de fôrça normal a êsse plano, nem a velocidade inicial do pêndulo possuia uma componente perpendicular a êsse plano. Portanto a lei do movimento de Newton prediz que, se tal pêndulo começar a oscilar nesse plano, continuará a oscilar nêle indefinidamente. É isto que acontece num sistema de referência inercial, isto é, num sistema em que seja válida a lei do movimento de Newton.

Quando realizamos essa experiência no laboratório, verificamos que o pêndulo se comporta muito bem. Êle parece permanecer no plano em que começou e obedece perfeitament à lei do movimento de Newton. Mas se esperarmos bastante tempo – horas, em vez de minutos – verificaremos que, lenta mas inexoràvelmente, o plano do movimento gira em relação a sua orientação inicial. Com efeito, se realizássemos a experincia do pêndulo de Foucault no Polo Norte, verificaríamos que exatamente em 24 horas o plano de oscilação do pêndulo giraria de 360º (Fig. 21-22). Isto fornece a evidência experimental, por meio de uma experiência feita na Terra, de que a Terra está, de fato, em rotação e de que os sistemas de referência ligados rìgidamente a ela são referenciais acelerados. Mostra-nos também, de novo, como é improvável notarmos a rotação da Terra em experiências de laboratório. Um pêndulo cujo período seja de 1 segundo oscila cêrca de 10^5 vezes em um dia. Se as fôrças de atrito sôbre tal pêndulo fôssem tão pequenas que êle pudesse realmente oscilar completamente livre no sistema de referência inercial, o plano de oscilação pareceria descrever um ângulo de cêrca de 10^{-3} de grau em cada oscilação, no Polo Norte.

Estas experiências mostram que a Terra é, com efeito, um sistema de referência acelerado, no qual a lei de Newton não é exatamente válida. Mas em todas as experiências, exceto nas de excepcional precisão, podemos ignorar os efeitos da rotação da Terra. Entretanto, se quisermos ser tão rigorosos quanto possível, devemos usar a lei de Newton não no sistema de referência ligado à Terra, mas no sistema de referência ligado às estrêlas fixas.

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO

1 — (a) Qual é, aproximadamente, a fôrça gravitacional que atua sôbre a massa de 100 g na superfície da Terra?
(b) Qual é, aproximadamente, a massa de um objeto que pesa 49,0 newtons?

2 — O campo gravitacional na superfície da Lua é um sexto do campo gravitacional na superfície da Terra.
(a) Quanto pesaria, na Lua, um homem de massa igual a 70 g? E na Terra?
(b) Qual seria sua massa na Terra? E na Lua?

3 — O campo gravitacional da Terra em determinado ponto do espaço imprime à massa de 1 kg a aceleração de 5 m/s². Qual seria a aceleração comunicada à massa de 3 kg?

4 — Se a razão da massa gravitacional para a massa inercial fôsse diferente para diferentes objetos, adquiririam êles a mesma aceleração no campo gravitacional da Terra? Explique.

5 — * Jogue uma bola de borracha com o máximo de fôrça que puder e observe sua velocidade. Jogue, agora, com a mesma fôrça, uma bola de papel amassado.
(a) Parece esta última retardar-se consideràvelmente?
(b) Qual é a velocidade limite, na direção horizontal, para qualquer objeto lançado no ar?
(c) Na sua opinião, o que aconteceria a um objeto lançado para baixo com velocidade maior que a velocidade terminal?

6 — Na sua opinião, o que aconteceria a uma pedra que caisse num buraco que varasse a Terra de Norte a Sul passando pelo centro da Terra? Acha você que a aceleração da pedra seria constante enquanto a pedra estivesse se dirigindo

para o centro? Raciocinando grosseiramente, pode você dizer como o campo g varia dentro do buraco? Prepare-se para discutir isso em classe.

7 — Uma pedra cai da borda de um telhado.

(a) Quanto tempo leva para percorer 4,9 m?

(b) Qual a sua velocidade no fim dêsse tempo?

(c) Quanto tempo mais será preciso para que ela percorra uma distância adicional de 3 m?

(d) Qual a sua velocidade no fim desta queda de 7,9 m?

(e) Que distância a pedra percorre durante o terceiro segundo?

8 — Uma bola é lançada verticalmente para cima, com velocidade de 15 m/s.

(a) Que velocidade terá depois de 1,2 s?

(b) A que distância acima do solo estará nesse instante?

(c) Que velocidade terá depois de 2,3 s?

(d) A que distância acima do solo estará nesse instante?

(e) Qual é a aceleração da bola no ponto mais alto da trajetória?

9 — Uma pedra é abandonada de uma escarpa de altura h (em metros). No mesmo instante uma bola é atirada verticalmente para cima, da base da escarpa, com a velocidade de v m/s.

(a) Supondo que a bola seja lançada com fôrça suficiente, em que instante t a bola e a pedra se encontrarão?

(b) Nesse instante, a bola ainda está subindo?

10 — Dois discos de gêlo sêco estão sôbre uma mesa lisa, ligados por um cordão. A massa de cada um é 0,5 kg.

(a) Qual é a fôrça gravitacional total que atua sôbre os discos?

(b) Qual será a taxa de aumento de suas velocidades se forem empurrados por uma fôrça horizontal igual à fôrça gravitacional encontrada em (a)?

(c) Se um disco ficar sôbre a mesa e o outro dependurado pelo cordão, qual será a aceleração dos discos? Despreze o atrito.

11 — Um objeto de massa m move-se num plano inclinado sem atrito que forma um ângulo de 30° com a horizontal.

(a) Qual é a fôrça resultante sôbre o objeto?

(b) Qual é sua aceleração ao descer o plano?

12 —* Tente deixar cair uma bola de gude da beirada de uma mesa ao mesmo tempo que lança horizontalmente (da beirada da mesa) uma outra bola. Atingirão elas o solo ao mesmo tempo? Explique.

13 — Uma bola é lançada horizontalmente da altura de 2,0 m com velocidade de 30 m/s.

(a) Trace a trajetória da bola, marcando suas posições de décimo em décimo de segundo.

(b) Quanto tempo leva a bola para atingir o chão?

(c) Determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade da bola no instante em que ela atinge o chão.

14 — Um projétil cai da mesma altura e no mesmo instante em que um outro é disparado horizontalmente. Discuta o movimento de cada projétil.

15 — Uma bola é lançada do centro de um campo de futebol para o gol. Se ela permaneceu no ar durante 3,00 s, que altura vertical terá alcançado? (Despreze a resistência do ar).

16 — Trace a trajetória de um objeto que é lançado no ar com velocidade de 10 m/s, a um ângulo de 45° com a horizontal.

(a) Que altura atingirá?

(b) Que distância alcançará (segundo a horizontal)?

(c) Com que velocidade atingirá o solo?

17 — Uma pedra cai de cima de um telhado e gasta 0,10 s para percorrer o vão de uma janela de 2,0 m de altura. Qual é a distância entre o telhado e o tôpo da janela?

18 — Um garôto deixa cair uma pedra de uma escarpa de 49 m de altura e, um segundo mais tarde, lança uma segunda pedra.

Ambas chegam ao solo ao mesmo tempo. Com que velocidade lançou êle a segunda? Despreze a resistência do ar.

19 — Mostre que a expressão v^2/R para a aceleração centrípeta tem unidades de aceleração.

20 — O ponteiro dos minutos do relógio de uma tôrre tem 2,0 m de comprimento.

(a) A uma hora e um quarto qual a direção, o sentido e o módulo da velocidade da extremidade do ponteiro dos minutos?

(b) Qual é sua aceleração?

21 — (a) Qual é a aceleração centrípeta do martelo de um lançador de martelo se o eixo de rotação está a 2,0 m do martelo e se êste leva 2/3 de segundo para dar uma volta?

(b) Se o martelo pesa 70 newtons, que fôrça deve o lançador exercer para manter essa aceleração centrípeta?

22 — Qual deve ser a velocidade de um avião num "loop-the-loop" de raio 1,00 km para que o pilôto, no tôpo da curva, não sofra a ação de nenhuma fôrça, quer do assento, quer do cinto de segurança? (Nestas circunstâncias diz-se que o piloto está "sem pêso").

23 — Dizem que o pilôto de um avião a jato quando efetua um mergulho violento pesa várias vezes o seu próprio pêso. Dizemos que o mesmo pilôto, em queda livre, antes de abrir o para-quedas, não tem pêso.

(a) Têm sentido tais afirmações quando consideramos a definição de pêso como a fôrça gravitacional sôbre o objeto?

(b) Que queremos dizer por "várias vêzes o seu próprio pêso" e "sem pêso"? Prepare-se para discutir essas questões em classe.

24 — A massa de um pêndulo é 0,40 kg e sua velocidade na parte mais baixa da trajetória é 0,70 m/s. O comprimento do pêndulo é 1,0 m. Qual é a tensão no cordão no ponto mais baixo da trajetória?

25 — Um cordão de 5,0 m de comprimento e 2,0 mm de diâmetro mantém uma bola dependurada, mas está em ponto de arrebentar.

(a) Se fizermos a bola oscilar, o cordão arrebentará. Por que?

(b) Qual deveria ser o diâmetro de um cordão feito do mesmo material para que fôsse capaz de manter a bola oscilando, de modo que ela tivesse a velocidade de 7,0 m/s no ponto mais baixo da trajetória, sem arrebentar o fio?

26 — Um eléctron (massa $0{,}90 \times 10^{-30}$ kg), sob a ação de uma fôrça magnética, percorre uma circunferência de 2,0 cm de raio com a velocidade de $3{,}0 \times 10^6$ m/s. Com que velocidade se moveria um próton (massa $1{,}6 \times 10^{-27}$ kg) segundo a mesma circunferência, se atuasse sôbre êle a mesma fôrça?

27 — Um corpo dotado de velocidade v fica sujeito a uma fôrça sempre perpendicular a v, mas que aumenta de intensidade regularmente.

(a) Faça um esquema da trajetória do corpo.

(b) O módulo da velocidade do objeto aumenta, diminui, ou permanece invariável?

28 —*Como trabalho para casa, realize a experiência indicada na Fig. 21-14. Você poderá usar um pêndulo em vez de um objeto prêso à extremidade de uma mola. Faça seu próprio pêndulo. Se o período do pêndulo não combinar com o período do toca-discos, o que deve você fazer?

29 — Uma mola cuja constante de fôrça vale $k = 196$ newtons/metro está dependurada verticalmente com sua extremidade inferior no ponto $y = 0$. Dependura-se a ela um objeto de massa 2,00 kg.

(a) Faça um gráfico da fôrça resultante sôbre a mola como função da coordenada y, desde $y = -0{,}250$ m até $y = +0{,}250$ m.

(b) De que posição, no eixo y, deverá a massa ser abandonada para que permaneça em repouso?

(c) Suponha que a massa é abandonada do repouso, na posição $y = 0$. Descreva seu movimento subseqüente. Que distância percorrerá ela até ficar de novo momentâneamente em repouso? Quanto tempo transcorrerá até que isto aconteça?

30 — Um objeto de massa m repousa sôbre uma plataforma horizontal. Comunica-se à plataforma um movimento harmônico simples vertical, de amplitude 0,098 m. No ponto mais alto da trajetória, o objeto está apenas tocando a plataforma sem chegar a nela se apoiar. (Isto significa que, nesse ponto, a aceleração da plataforma é 9,8 m/s^2 para baixo).

(a) Qual é o período do movimento harmônico simples?

(b) Qual é a aceleração do objeto no ponto mais baixo da trajetória?

(c) Qual é a fôrça exercida pela plataforma sôbre o objeto nesse ponto?

31 — (a) Qual é o período de um pêndulo constituido por um pequeno objeto de massa 2,0 kg suspenso por uma corda de comprimento 2,4 m, se $g = 9{,}8$ newtons/kg?

(b) Observe que podemos usar um pêndulo para determinar g. Se o período dêsse pêndulo fôr 3,0 s, qual é o valor de g?

32 — Enquanto um ônibus se movimenta sôbre uma estrada retilínea e horizontal, fazemos uma bola de gude rolar sôbre o assoalho do ônibus transversalmente ao veículo. A trajetória da bola é retilínea em relação ao ônibus. Depois fazemos a bola rolar de novo, mas, desta vez, a trajetória é uma parábola cuja concavidade está voltada para a frente do ônibus. Descreva o movimento do ônibus em cada caso. Prepare-se para discutir em classe.

LEITURA COMPLEMENTAR

EINSTEIN, A., e INFELD, L. *The Evolution of Physics.* Simon & Schuster, 1938 (pp. 12 ff.).

HEISKANAN, W. A., "The Earth's Gravity". *Scientific American,* September, 1955. Por que o campo gravitacional varia ligeiramente de lugar para lugar e os efeitos dêsse fato sôbre os recordes atléticos.

HOLTON, GERALD, *Introduction to Concepts and Theories in Physical Science.* Addison-Wesley, 1952. O movimento dos projéteis, o movimento circular e o movimento harmônico simples estão descritos detalhadamente nos Capítulos 2, 3 e 5.

NEWTON, SIR ISAAC, *Mathematical Principles of Natural Philosophy* e seu *System of the World.* Editado por Florian Cajori, University of California Press, 1947.

NEWTON, SIR ISAAC, *Moments of Discovery.* Editado por G. Schwartz e P. Bishop, Basic Books, 1958 (p. 278). Descrição feita pelo próprio Newton sôbre suas leis universais do movimento.

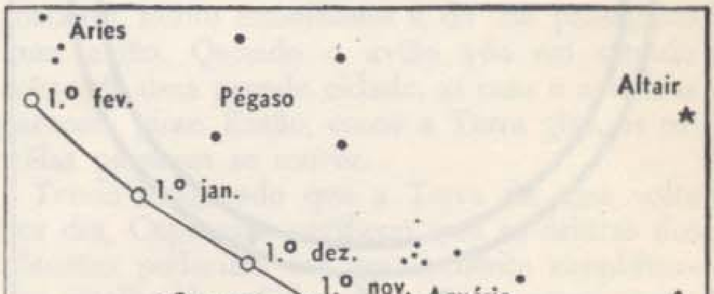
A GRAVITAÇÃO UNIVERSAL E O SISTEMA SOLAR

CAPÍTULO 22

Poucas pessoas não reconhecem no céu, à noite, o Cruzeiro do Sul. O fato mais notável que podemos observar nos céus é que as constelações, grupos de estrêlas como o Cruzeiro do Sul, nunca mudam de forma. Elas se movem como se estivessem coladas no interior de uma grande esfera girante, e nós estivéssemos no centro dessa esfera, observando (Fig. 22-1). O Sol e a Lua movem-se continuamente, em relação a êsse fundo de "estrêlas fixas" como se estivessem presos a outras esferas que girassem com velocidades diferente em tôrno da Terra. De acôrdo com êsse ponto de vista, a Terra, grande e imóvel, estaria localizada no centro do Universo, constituido de matéria celeste a revolver em tôrno dela. Tal Universo é chamado geocêntrico (com centro na Terra).

22-1 — Exposição fotográfica de uma hora, feita com a câmara dirigida para a estrêla polar. Os círculos mostram o movimento aparente das estrêlas. Foi êste movimento circular que levou os gregos a supor que as estrêlas estivessem presas a uma esfera que girava em tôrno da Terra. (Fotografia do Observatório Yerkes).

O homem primitivo conhecia sete corpos celestes que parecem mover-se entre as estrêlas fixas. O Sol e a Lua, Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno, eram chamados planêtas, têr-



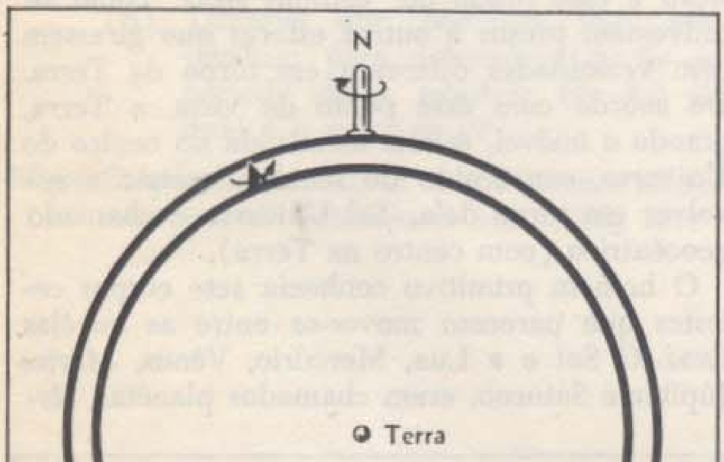
22-2 — O movimento aparente peculiar do planeta Marte, em relação às estrêlas fixas. Marte, em vários trechos, parece inverter o sentido de seu movimento. De R. H. Baker, "Astronomy", D. Van Nostrand Co. Inc.

mo grego que significa "viajante". Com exceção do movimento do Sol e da Lua, os movimentos dêsses corpos parecem irregulares quando observados durante largos períodos de tempo (Fig. 22-2). Seu movimento errático chamou a atenção dos homens antigos sôbre os planêtas. Êles eram mais brilhantes do que as estrêlas; e, como seu brilho variava, suas distâncias à Terra pareciam mudar. Eles ficaram associados com várias emprêsas e emoções humanas (Vênus com o amor, Marte com a guerra, etc.), como se fossem intermediários entre a perfeição imutável das estrêlas e a imperfeição inquieta da Terra. Mais tarde, os astrólogos viram nas posições dos planêtas indicações do curso futuro das vidas dos sêres humanos.

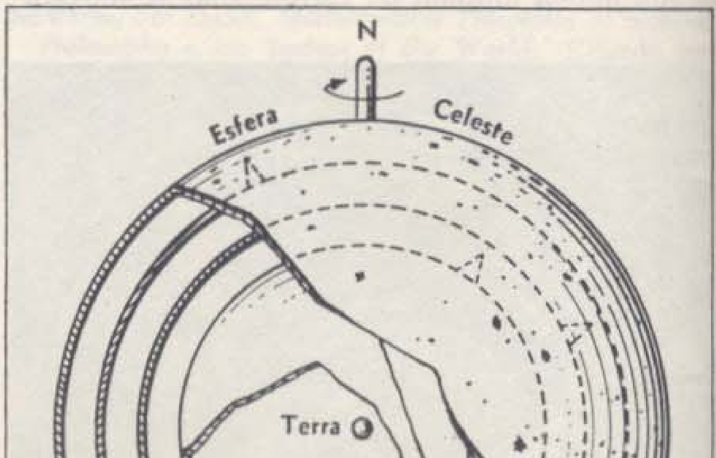
Uma das grandes preocupações dos antigos astrônomos foi encontrar explicação razoável para o movimento observado dos planêtas. Relata-se que Platão, filósofo grego (427-347 A. C.) propôs o seguinte problema a seus estudantes: As estrêlas, como podemos ver, movem-se em trajetórias circulares perfeitas em tôrno da Terra, mas os planêtas parecem traçar figuras irregulares. Quais são as combinações de trajetórias circulares perfeitas que os planêtas realmente percorrem? A forma desta pergunta revela que se considerava o círculo a mais perfeita de tôdas as curvas e, portanto, a única digna de descrever os movimentos celestes. Os esforços dos astrônomos, por muitos séculos, foram devotados, pelo menos parcialmente, a responder a essa questão.

22 — 1. Sistemas Planetários Primitivos.

Eudóxio, discípulo de Platão, tentou representar os movimentos planetários por uma coleção de esferas móveis centradas na Terra. Cada planêta estaria prêso à superfície de uma esfera que girava uniformemente em tôrno de um eixo ligado a dois pontos opostos sôbre a superfície de uma esfera maior (Fig. 22-3). Enquanto a esfera interna rodava uniformemente sôbre seu



22-3 — (a) O sistema planetário de Eudóxio. Os movimentos do Sol, da Lua e dos planêtas podem ser aproximadamente reproduzidos por um arranjo de esferas que giram dentro de outras esferas. Aqui a esfera externa é a das estrêlas fixas. Ela gira uma vez cada 24 horas, de leste para oeste, em tôrno de um eixo que passa pelos polos norte e sul da Terra. A esfera interna tem o Sol fixo num ponto de sua superfície. Essa esfera gira quase uma vez em um ano.



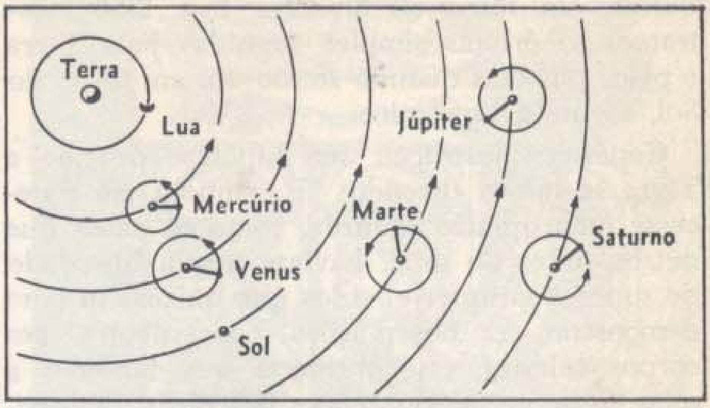
22-3 — b) Aqui um planeta está prêso à superfície da esfera de dentro. O eixo de cada esfera está ligado a um par de pontos sôbre a superfície interna da esfera seguinte. Dando aos eixos inclinações apropriadas, e escolhendo velocidades e sentidos de rotação adequados, podemos reproduzir com boa aproximação o movimento de um planêta em relação ao fundo de estrêlas fixas como êle é observado da Terra.

eixo, o próprio eixo era transportado pelo movimento uniforme da esfera externa. Na realidade, o eixo da esfera externa podia estar ligado à superfície de uma esfera ainda maior; dêste modo o número de esferas podia ser aumentado para representar movimentos mais complexos. Finalmente, todo o sistema girava dentro da esfera celeste, que continha as estrêlas fixas. Com um número suficiente de esferas movendo-se dentro de outras, Eudóxio obteve uma boa aproximação para o movimento de um planêta. Seus sucessores aperfeiçoaram êste modêlo, usando ainda mais esferas. No curso da história, foram desenvolvidos muitos sistemas planetários, dependentes de movimentos de esferas, empregando-se mesmo grandes números delas. Em um dos sistemas, sòmente para Mercúrio havia treze esferas.

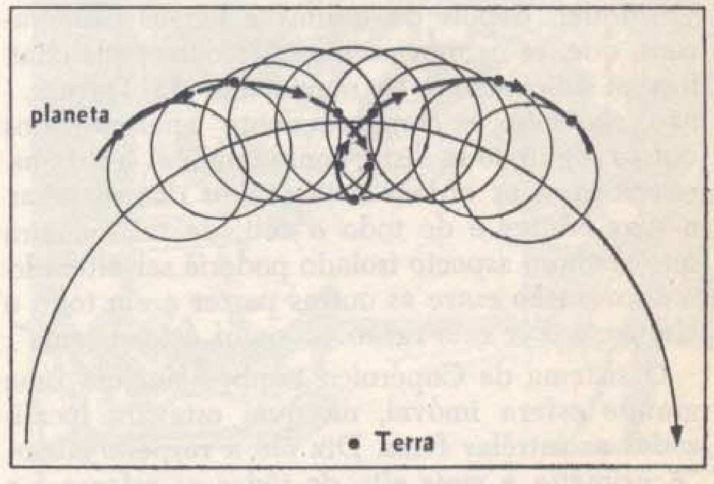
Outros astrônomos gregos tentaram resolver o problema de Platão de modo diferente. Por exemplo, Apolônio e Hiparco (terceiro e segundo séculos A. C.) desenvolveram um sistema no qual cada planêta move-se num círculo cujo centro move-se sôbre outro círculo. O trabalho dêsses primeiros astrônomos gregos levou ao sistema de Claudio Ptolomeu de Alexandria, no II século D.C. Seu sistema de círculos movendo-se sôbre outros círculos reproduzia os movimentos observados com razoável precisão (Fig. 22-4). Mas suas curvas, que descreviam as órbitas planetárias, eram tão complicadas que havia muitas queixas dos que as estudavam. Afonso X, rei de Castela em 1200, chegou a dizer que, se tivesse sido consultado durante a criação, teria feito o mundo segundo um plano mais simples e melhor. A órbita ptolemaica simplificada de um planêta está indicada pela linha grossa da Fig. 22-5; os movimentos circulares dos quais essa órbita ter-se-ia originando estão indicados também.

22 — 2. O Sistema Planetário de Copérnico.

O astrônomo polonês Nicolau Copérnico (nascido em 1473) percebeu que o sistema ptolemaico era demasiado complexo. A simplicidade do movimento circular uniforme desejada por Platão tinha sido encoberta por construções complicadas. A verdade, pensava Copérnico, deve ser mais simples. E, assim, dispôs-se a dar uma resposta mais simples ao problema de Platão, escolhendo um centro diferente para o sistema de círculos.



22-4 — Diagrama simplificado do sistema ptolemaico dos movimentos planetários.



22-5 — Movimento de um único planeta no sistema ptolomaico. Supunha-se que o planeta girasse em tôrno de um pequeno círculo cujo centro se movesse numa órbita circular em tôrno da Terra.

Tal como outros antes dêle, Copérnico, deu-se conta de que o movimento das estrêlas fixas podia ser explicado admitindo que a Terra girasse. (*). Nossa situação em relação ao céu é, portanto, muito semelhante à de um passageiro num avião. Quando o avião vôa em círculo acima de uma grande cidade, as ruas e avenidas parecem girar. Então, como a Terra gira, as estrêlas parecem se mover.

Tendo imaginado que a Terra dá uma volta por dia, Copérnico verificou que as órbitas dos planêtas poderiam ser grandemente simplificadas escolhendo o Sol e não a Terra como centro do sistema planetário. Então a Terra não estaria no centro do Universo nem em repouso. Talvez fôsse um planêta e girasse, como os

(*) Embora a corrente principal do pensamento grego e medieval seguisse uma teoria geocêntrica, Heráclides (cêrca de 370 A. C.) acreditava que a Terra girava sôbre seu eixo, e Aristarco (III Séc. A. C.) pensava que a Terra se movia em tôrno do Sol.

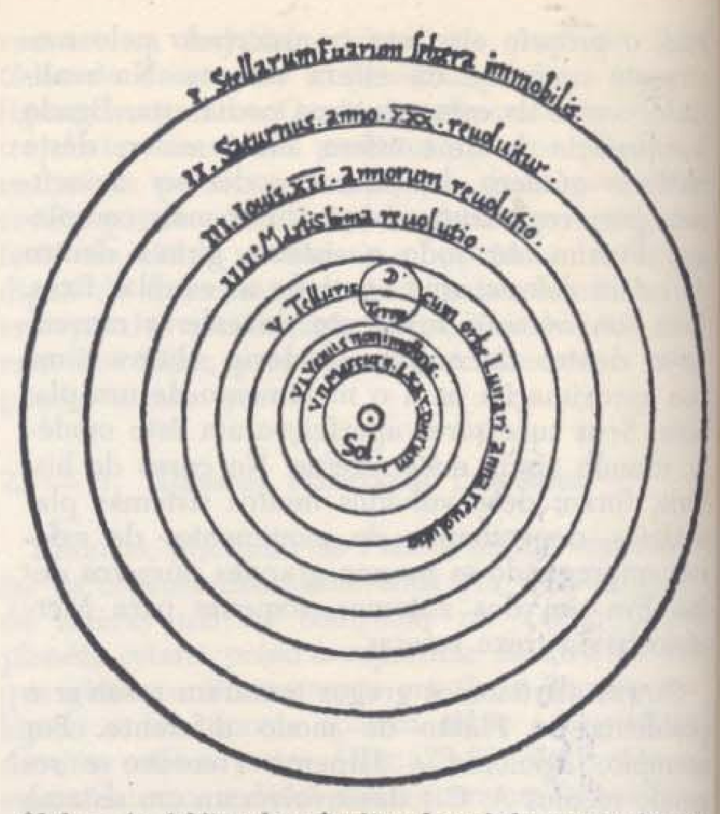
outros, em tôrno do Sol. Na Fig. 22-6 mostramos as órbitas simples seguidas pela Terra e pelos planêtas quando se movem em tôrno do Sol, segundo Copérnico.

Copérnico justificou sua hipótese de que a Terra se movia dizendo: "E, embora me parecesse uma opinião absurda, como eu sabia que outros, antes de mim, haviam tido a liberdade de supor quaisquer círculos que quizessem para demonstrar as observações concernentes aos corpos celestes, eu considerei que também a mim seria permitido tentar descobrir demonstrações mais seguras das revoluções dos corpos celestes, supondo algum movimento da Terra... Verifiquei, depois de muitas e longas observações, que, se os movimentos dos outros planêtas fossem adicionados ao movimento da Terra,... não sòmente o comportamento aparente dos outros seguir-se-ia disto, como também o sistema relacionaria as ordens e tamanhos dos planêtas e suas órbitas e de todo o céu, de tal maneira que nenhum aspecto isolado poderia ser alterado sem confusão entre as outras partes e em todo o Universo. Por esta razão... seguí êste sistema".

O sistema de Copérnico também incluía uma grande esfera imóvel, na qual estavam localizadas as estrêlas fixas. Diz êle a respeito disso: "A primeira e mais alta de tôdas as esferas é a esfera das estrêlas fixas. Ela contém tôdas as outras e é auto-contida; está imóvel; é certamente a porção do Universo em relação à qual o movimento e as posições de todos os outros corpos celestes devem ser considerados. Todavia, se algumas pessoas são de opinião que esta esfera se move, nós somos de opinião contrária;..." Depois, descrevendo as esferas planetárias e seus períodos de rotação em que a Terra aparece como um dos seis planêtas, enquanto a Lua é designada claramente como um satélite da Terra, êle concluia: "No meio de tudo, o Sol repousa imóvel. Com efeito, quem colocaria, neste templo de máxima beleza, o doador de luz em qualquer outro lugar que não aquêle de onde êle pode iluminar tôdas as outras partes?..."

22 — 3. Objeções à Teoria de Copérnico.

Deve ficar bem claro que, afim de conseguir suas órbitas simplificadas, Copérnico foi obrigado a desprezar todo o quadro do Universo construido desde a época de Aristóteles. A questão de saber se a Terra se movia ou não

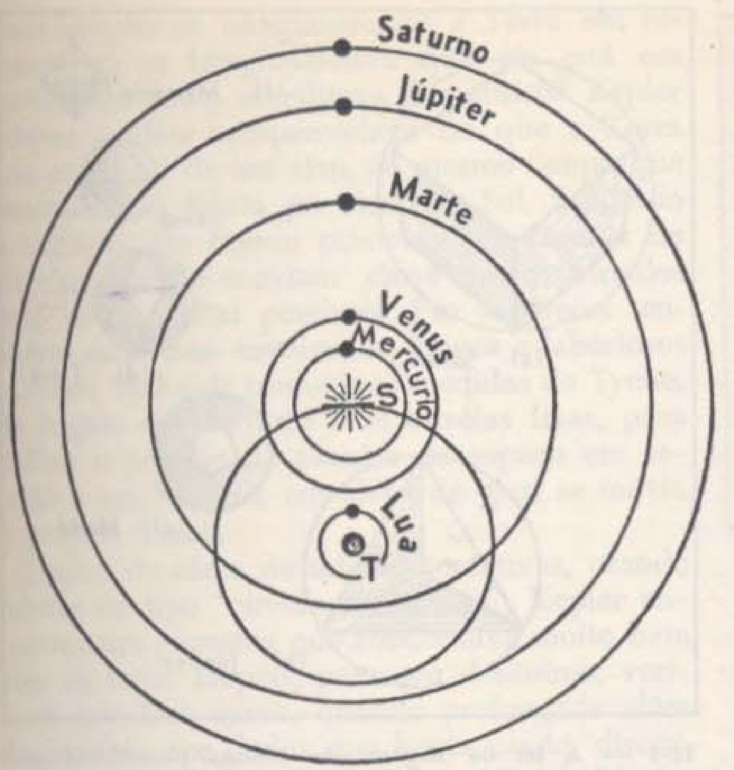


22-6 — As órbitas dos planêtas de acôrdo com o sistema planetário de Copérnico.

era muito séria. Tôda a cosmologia e a Física medieval estavam baseadas na idéia de que a Terra estivesse em repouso no centro do Universo. Em parte esta crença estava baseada na convicção íntima do homem de que a Terra deve estar no centro das coisas. Mas, além disso, parecia haver boa evidência da posição especial da Terra. De fato, se a Terra se move, o que é que a empurra, e por que êste movimento não é sentido? Ou, tomando outro exemplo, por que as pedras caem para a Terra, se ela não é o centro do Universo?

Copérnico previa muitas críticas, e retardou a publicação de seu livro tanto tempo que viu seu primeiro exemplar no dia de sua morte. Antecipando muitas das objeções, procurou respondê-las de antemão. Ao argumento de que a Terra, girando tão ràpidamente em tôrno do próprio eixo, seguramente rebentaria, como uma roda impelida com demasiada velocidade, êle respondia: "Por que o autor da teoria geocêntrica não teme o mesmo fato para sua esfera celeste girante — tão mais rápida porque tão maior?" Ao argumento de que os pássaros em vôo seriam deixados para trás pela Terra em movimento rápido, Copérnico respondia que a atmosfera é arrastada juntamente com a Terra.

Havia, realmente, muitos argumentos e contra-argumetnos. A teoria copernicianа foi denun-



22-7 — (a) O sistema geocêntrico de Tycho Brahe.

ciadas como "falsa e totalmente oposta às sagradas Escrituras". Martinho Lutero chamou Copérnico de louco e herético. Discussões violentas sôbre êsse conceito audacioso e inteiramente nôvo do Universo duraram mais de 100 anos, até que a idéia de que a Terra podia mover-se fôsse geralmente aceita.

22 — 4. Tycho Brahe.

Tycho Brahe, astrônomo dinamarquês, nascido em 1546, não aceitou o sistema copernicano, a despeito de sua simplicidade. Em substituição, propôs um sistema geocêntrico melhorado, em que o Sol gira ao redor da Terra e os outros planêtas em tôrno do Sol [Fig. 22-7 (a)]. Ademais, para testar os modêlos astronômicos, decidiu-se a fazer um mapa realmente preciso das posições das estrêlas fixas e determinar as posições aparentes dos planêtas, como vistos da Terra, durante um longo intervalo de tempo. Começou suas observações com um instrumento formado por um par de varetas articuladas, uma delas apontando para uma estrêla fixa, a outra para um planêta. Dêsse modo êle conseguia medir sua separação angular. Mais tarde construiu grandes sextantes e compassos, com os quais fêz medidas maravilhosamente cuidadosas [Fig. 22-7 (b)]. Catalogou as posições de

22-7 — (b) Quadrante mural de Tycho Brahe. Um arco de latão de raio superior a 1,8 m foi montado num muro e equipado com visores móveis. Um observador (em cima, à direita) olhava uma estrêla por uma janela situada na parede à esquerda. Outros assistentes anotavam o tempo e o ângulo de observação. O setor da parede correspondente ao arco está coberto com uma pintura mural de Tycho e de outros aspectos de seu trabalho.

um milhar de estrêlas tão precisamente que suas observações são usadas até hoje, e suas medidas das posições angulares dos planêtas, num período de vinte anos, não contém êrro superior a 1/60 de grau. Êsse ângulo é quase o mesmo que o subtendido pela cabeça de um alfinete colocado a cinco metros de seu ôlho.

As observações de Tycho das posições planetárias eram muito mais precisas do que aquelas de que Copérnico dispunha. Elas mostraram logo que as órbitas copernicianas eram apenas grosseiramente corretas. Iniciou-se então a procura de uma descrição mais precisa das órbitas. Êste objetivo foi alcançado, após a morte de Tycho, por um de seus alunos, o acadêmico alemão Kepler.

22 — 5. Kepler.

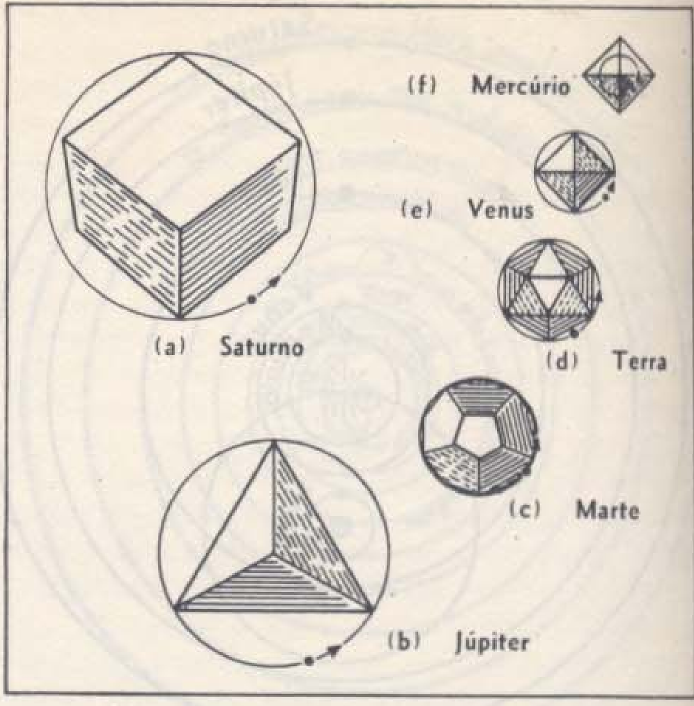
Johannes Kepler, nascido em 1571, estava em nítido contraste com Tycho Brahe. Tycho possuía tremenda habilidade e destreza mecânica, mas interêsse relativamente pequeno em matemática. Kepler era desajeitado como experimentador mas era fascinado pelo poder da matemática. Era semelhante aos antigos gregos em sua reverência pelo poder dos números e interessava-se por quebra-cabeças relativos a número e tamanho.

Depois de haver aprendido os elementos de astronomia, Kepler ficou obcecado com o problema de encontrar uma esquema numérico para o sistema planetário. Êle escreveu: "Eu refletia com tôda a energia de meu espírito sôbre êsse assunto". Devotou sua vida à análise das tabelas das posições planetárias que Tycho lhe havia deixado. Enfrentando o problema de traduzir as observações de Tycho Brahe em descrições matemáticas dos movimentos planetários, Kepler agiu como qualquer cientista de hoje que tenta explicar dados experimentais em têrmos de leis matemáticas simples, e não apenas mediante tabelas de números. Com leis matemáticas podemos não só reproduzir os dados observados como predizer os resultados de observações que ainda não tenham sido feitas. Ademais, as leis matemáticas são mais fáceis de lembrar e de comunicar do que meras tabelas de números.

Em seu primeiro livro, Kepler descreveu suas tentativas de entender por que havia precisamente seis planêtas no sistema solar. Estabeleceu uma ligação entre as seis órbitas e os cinco sólidos geométricos regulares (*) (Fig. 22-8). A partir desta construção obteve razões entre os raios que concordavam muito bem com os valôres então conhecidos das órbitas planetárias.

Kepler ficou extasiado. Escreveu: "O intenso prazer que sentí com essa descoberta não pode ser descrito em palavras. Não me importo mais com o tempo despendido; não me incomodo de nenhum trabalho; não fugí a nenhum trabalho de verificação, dias e noites despendidos em cálculos, até que pudesse ver se minhas hipóteses concordavam com as órbitas de Copérnico, ou se minha alegria devia desvanecer-se no ar."

(*) Por corpo sólido regular entende-se um corpo simétrico com faces planas iguais. Só podem ser construidas cinco espécies de corpos sólidos regulares.



22-8 — A lei de Kepler das órbitas planetárias baseava-se nos cinco sólidos regulares. De acôrdo com a lei, uma esfera de raio igual ao da órbita de Saturno circunscreve um cubo (a). Uma esfera inscrita nesse cubo tem raio igual ao da órbita de Júpiter. Em (b) mostra-se a esfera da órbita de Júpiter, com um tetraedro inscrito. Uma esfera inscrita no tetraedro dá o raio da órbita de Marte. Em (c) a esfera relativa a Marte tem um dodecaedro inscrito. Uma esfera inscrita nêle dá a órbita da Terra (d). Podemos continuar êsse processo de inscrição alternada de esferas e sólidos regulares, usando o icosaedro (vinte lados) e o octaedro. Êsses nos darão as órbitas de Vênus (e) e de Mercúrio (f), que está numa esfera inscrita dentro do octaedro. Kepler considerava os cinco sólidos como preenchendo os intervalos entre as órbitas planetárias. Como há sòmente cinco sólidos regulares, Kepler acreditava que poderia haver apenas cinco planêtas.

A relação entre os raios das órbitas planetárias é típica da espécie de resultado que Kepler esperava obter com os dados de Tycho. Ocorre freqüentemente, entretanto, que mesmo a mais bela correlação entre dados não tem qualquer significado profundo para explicar a natureza das coisas. Hoje, essa descoberta de Kepler está inteiramente esquecida. Seu sistema está destruido pelo fato de haver mais de seis planêtas. Mas o sétimo só foi descoberto muito anos depois de sua morte.

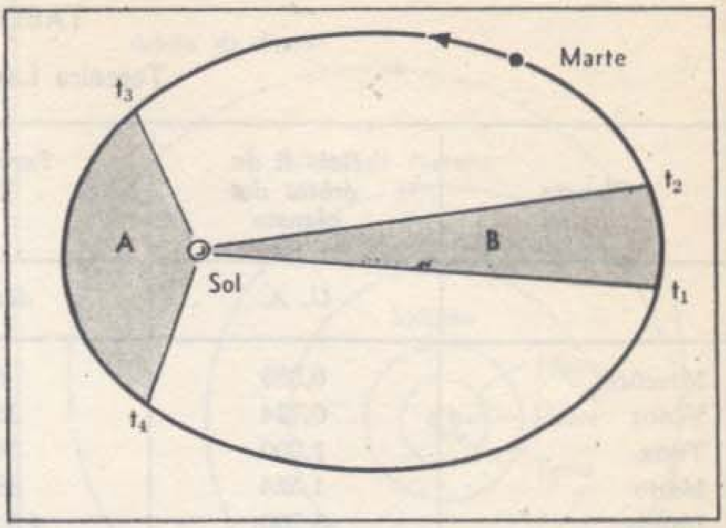
Kepler descobriu outras relações matemáticas, que sobreviveram ao teste de observações posteriores. Começou sua grande análise dos dados de Tycho com um estudo exaustivo do movimento de Marte. Que espécie de curva teria Marte percorrido durante os vinte anos de observações de Tycho? As observações dos movimentos planetários eram feitas necessàriamente da Terra. Marte se moveria segundo uma curva mais simples se imaginássemos a Terra em repouso, ou se imaginássemos que ela está em movimento como acreditava Copérnico? Kepler adotou a idéia comperniciana de que a Terra gira em redor de seu eixo, ao mesmo tempo que percorre uma órbita em tôrno do Sol. Seguindo a tradição, êle tentou primeiro um sistema de círculos que se moviam sôbre outros círculos para obter órbitas possíveis. Fez inúmeras tentativas cada uma envolvendo longos e laboriosos cálculos. Tinha de traduzir as medidas de Tycho, do ângulo entre Marte e as estrêlas fixas, para definir a posição do planêta no espaço em relação a um Sol fixo, em tôrno do qual se movia a própria Terra.

Depois de cêrca de setenta tentativas, usando órbitas do tipo "círculo excêntrico", Kepler encontrou um esquema que concordava muito bem com os fatos. Depois, para seu desânimo, verificou que essa curva, quando prolongada além do domínio dos dados que havia usado, discordava de outras observações da posição de Marte, feitas por Tycho.

A discordância entre os dados de Brahe e os cálculos de Kepler eram de cêrca de 8/60 de grau (êste é o ângulo percorrido pelo ponteiro menor de um relógio em 0,02 segundo). Não poderia Tycho ter cometido êsse pequeno êrro? Não poderia o frio de uma noite de inverno ter entorpecido seus dedos, ou confundido suas observações? Kepler conhecia os métodos de Tycho e seu cuidado escrupuloso. Tycho nunca teria cometido nem êsse pequeno êrro. Assim, baseado nos dados de Tycho, Kepler rejeitou as curvas que tinha construido. Que tributo era isto à memória de seu mestre!

Dizendo que "Sôbre êsses oito minutos poderia ainda construir uma teoria do Universo", Kepler recomeçou. Desprezando a antiga e estimada crença no movimento uniforme, considerou possíveis variações na velocidade de um planêta quando êste se move em tôrno do Sol. Fez então sua primeira grande descoberta. Verificou que uma linha tirada do Sol ao planêta descreve áreas iguais em tempos iguais. Isto veio a ser conhecido como a segunda lei de Kepler (Fig. 22-9).

Após a descoberta de sua segunda lei, Kepler abandonou finalmente suas tentativas de construir os movimentos planetários a partir de combinações de movimentos circulares uniformes e começou a tentar várias ovais como órbitas possíveis. Depois de muitos cálculos mais compli-



22-9 — Lei de Kepler das áreas iguais. Marte percorre sua órbita com velocidade variável, movendo-se mais ràpidamente quando está mais próximo do Sol. Kepler verificou que, para intervalos de tempo iguais, $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, as áreas varridas pela linha que vai do Sol ao planeta eram iguais. (Área B = Área A). No desenho o alongamento da elipse foi exagerado para ilustrar mais claramente a lei das áreas iguais.

cados, conseguiu finalmente um de seus resultados mais importantes: a assim chamada primeira lei. Verificou que cada planêta move-se numa órbita elítica, estando o Sol num dos focos. Imagine-se o deleite de Kepler. Após tantos anos de esfôrço, tinha finalmente encontrado uma curva simples que descrevia o movimento dos planêtas.

Kepler pôs-se, então, a procurar uma conexão entre o tamanho da órbita de um planêta e seu período, isto é, o tempo de uma revolução do planêta em tôrno do Sol. Após muitas tentativas, obtêve a relação precisa que procurava: para todos os planêtas, a razão entre o cubo do raio da órbita e o quadrado do período é a mesma (*). Uma vez calculada esta razão, a regularidade era flagrante (Ver Tabela 1). A constância da razão R^3/T^2 é chamada a terceira lei de Kepler.

Com êste triunfo, Kepler escreveu: "...o que dezesseis anos atrás eu exigia, com uma coisa a ser procurada... o motivo pelo qual procurei Tycho Brahe... por fim eu trouxe à luz e reconheço sua verdade além de minhas esperanças mais apaixonadas... A sorte está lançada, o

(*) O raio R de uma órbita é definido como a média aritmética entre a maior e a menor distância do Sol ao planêta. Como as órbitas planetárias não são muito diferentes de círculos, a distância do Sol a qualquer ponto da órbita bastará para a maioria dos fins.

TABELA 1

Terceira Lei de Kepler

Planeta	*Raio R da órbita do planeta*	*Período* T	$R)^3/T^2$	*Valores modernos de* R^3/T^2 m^3/s^2
	U. A.	*dias*	$(U.A.)^3/(dias)^2$	$7{,}64 \times 10^{-6}$
Mercúrio	0,389	87,77	$7{,}64 \times 10^{-6}$	$3{,}354 \times 10^{18}$
Vênus	0,724	224,70	7,52	3,352
Terra	1,000	365,25	7,50	3,354
Marte	1,524	686,98	7,50	3,354
Júpiter	5,200	4 332,62	7,490	3,355
Saturno	9,510	10 759,20	7,430	3,353

Os valôres das órbitas e períodos desta tabela são os usados por Kepler. No tempo de Kepler os raios eram conhecidos sòmente em têrmos do raio da órbita da Terra. O raio da órbita da Terra é chamado unidade astronômica (U. A.) de comprimento. Os valores quase constantes de R^3/T^2 *ilustram a terceira lei de Kepler. A última coluna está baseada em medidas modernas precisas das órbitas e períodos.*

livro está escrito para ser lido agora ou pela posteridade. Não me preocupo — êle bem pode esperar por um leitor durante um século, como Deus esperou seis mil anos por um observador".

Kepler tinha conduzido a astronomia a avanços importantes. Tinha traduzido as magníficas tabelas de dados de Tycho Brahe em um sistema simples e amplo de curvas e regras. O sistema de Kepler valeu-lhe o título de "Legislador dos Céus".

Eis aqui os enunciados das três leis de Kepler:

I. Cada planêta se move numa trajetória elítica, com o Sol num dos focos.

TABELA 2

O Sistema Solar

Objeto	*Massa*	*Raio*	*Período de Rotação*	*Raio Médio da Órbita*	*Período de Revolução*
	kg	*m*	*segundos*	*m*	*segundos*
Sol	$1{,}98 \times 10^{30}$	$6{,}95 \times 10^{8}$	$2{,}14 \times 10^{6}$	—	—
Mercúrio	$3{,}28 \times 10^{23}$	$2{,}57 \times 10^{6}$	$7{,}60 \times 10^{6}$	$5{,}79 \times 10^{10}$	$7{,}60 \times 10^{6}$
Vênus	$4{,}83 \times 10^{24}$	$6{,}31 \times 10^{6}$	$2{,}6 \times 10^{6}$?	$1{,}08 \times 10^{11}$	$1{,}94 \times 10^{7}$
Terra	$5{,}98 \times 10^{24}$	$6{,}38 \times 10^{6}$	$8{,}61 \times 10^{4}$	$1{,}49 \times 10^{11}$	$3{,}16 \times 10^{7}$
Marte	$6{,}37 \times 10^{23}$	$3{,}43 \times 10^{6}$	$8{,}85 \times 10^{4}$	$2{,}28 \times 10^{11}$	$5{,}94 \times 10^{7}$
Júpiter	$1{,}90 \times 10^{27}$	$7{,}18 \times 10^{7}$	$3{,}54 \times 10^{4}$	$7{,}78 \times 10^{11}$	$3{,}74 \times 10^{8}$
Saturno	$5{,}67 \times 10^{26}$	$6{,}03 \times 10^{7}$	$3{,}60 \times 10^{4}$	$1{,}43 \times 10^{12}$	$9{,}30 \times 10^{8}$
Urano	$8{,}80 \times 10^{25}$	$2{,}67 \times 10^{7}$	$3{,}88 \times 10^{4}$	$2{,}87 \times 10^{12}$	$2{,}66 \times 10^{9}$
Netuno	$1{,}03 \times 10^{26}$	$2{,}48 \times 10^{7}$	$5{,}69 \times 10^{4}$	$4{,}50 \times 10^{12}$	$5{,}20 \times 10^{9}$
Plutão	?	?	?	$5{,}9 \times 10^{12}$	$7{,}82 \times 10^{9}$
Lua	$7{,}34 \times 10^{22}$	$1{,}74 \times 10^{6}$	$2{,}36 \times 10^{6}$	$3{,}8 \times 10^{8}$	$2{,}36 \times 10^{6}$

II. A linha que liga o Sol ao planêta descreve áreas iguais em tempo iguais.

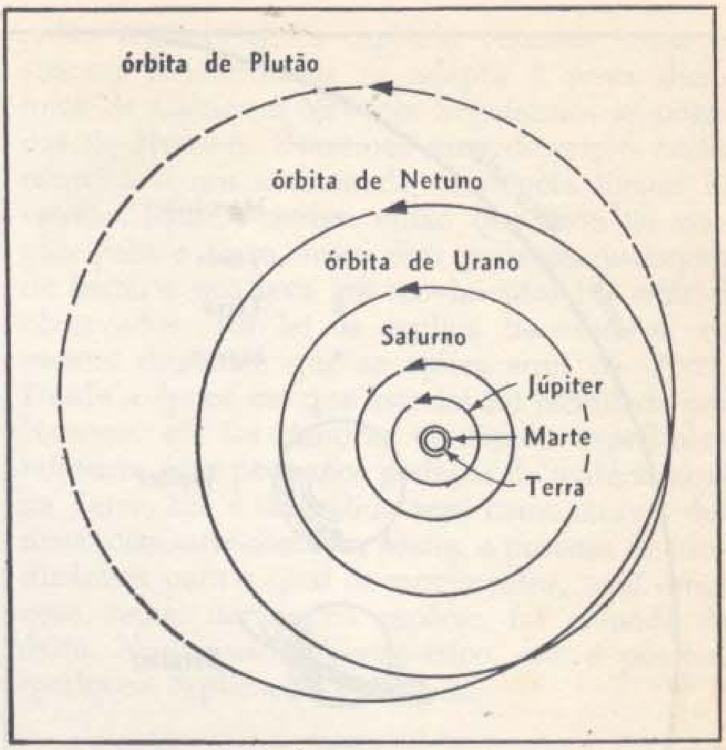
III. A razão R^3/T^2 é a mesma para todos os planêtas. Chamando K esta constante, a terceira lei pode ser escrita

$$\frac{R^3}{T^2} = K.$$

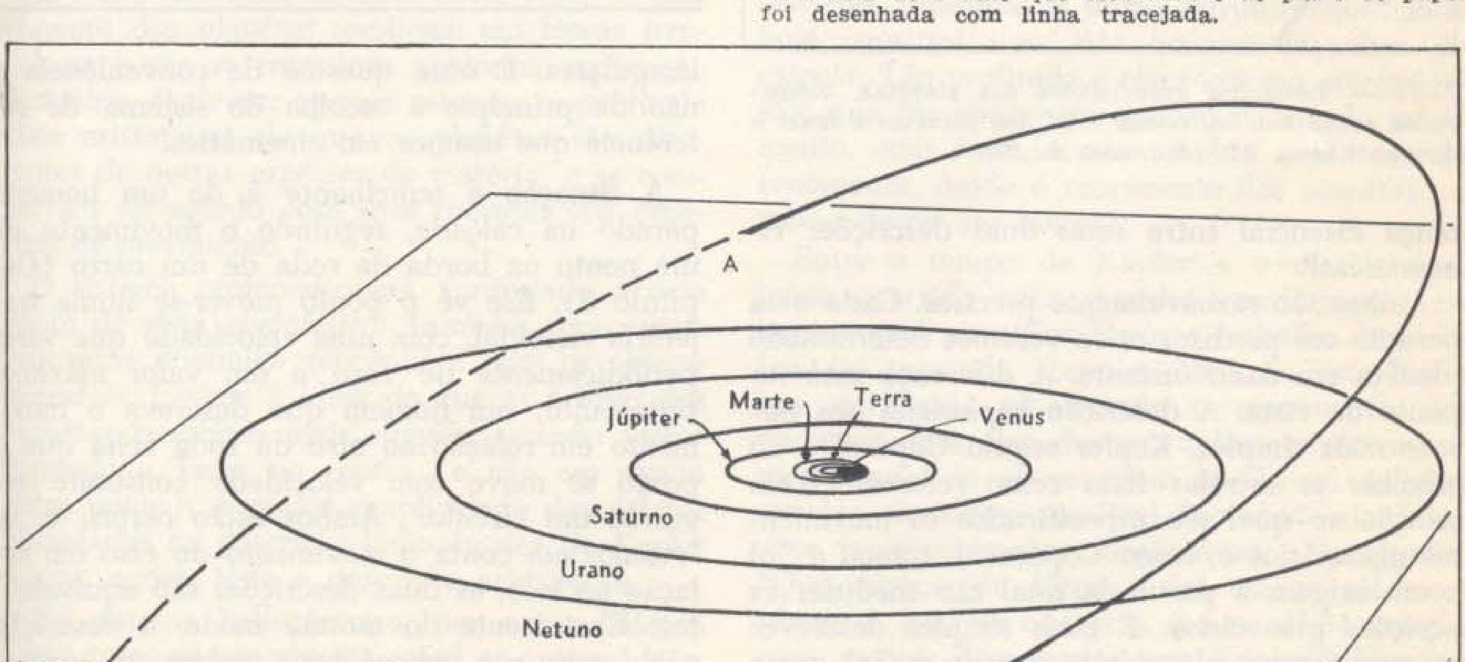
As três leis de Kepler dão uma representação mais precisa das órbitas planetárias do que o sistema ptolemaico ou o coperniciano, com tôda sua complexidade de círculos móveis sôbre outros círculos.

22 — 6. A Descrição Cinemática e o Problema Dinâmico.

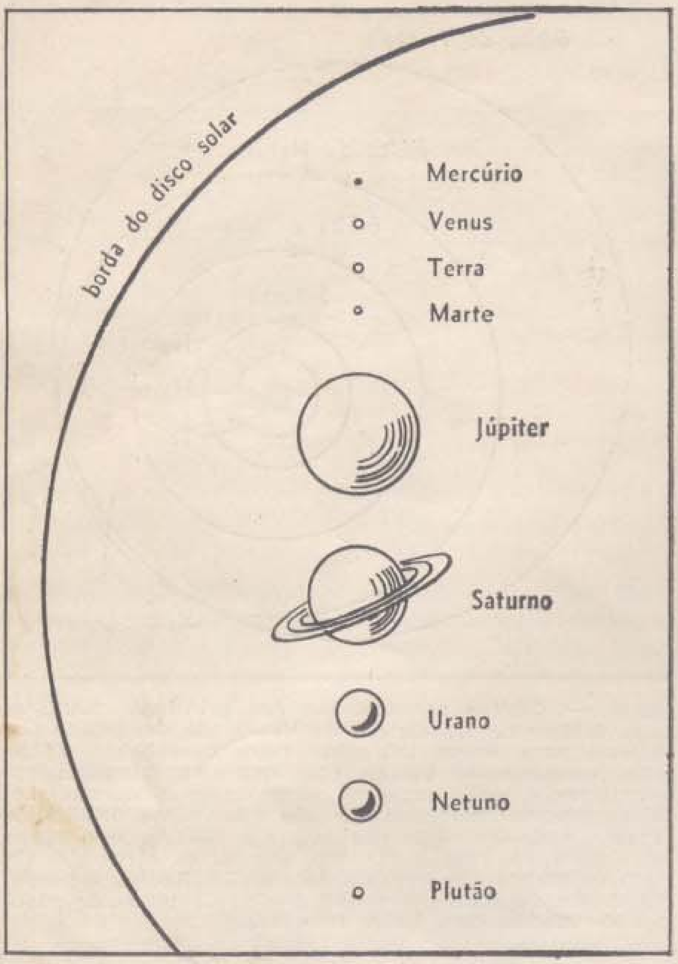
As leis de Kepler constituem a cinemática do sistema planetário. Fornecem uma descrição simples e precisa do movimento dos planêtas mas não explicam os movimentos em têrmos de fôrças. A descrição ptolemaica do movimento planetário é também cinemática. Qual a dife-



22-10 — Órbitas aproximadas dos principais planêtas. (As órbitas de Mercúrio e de Vênus são demasiado pequenas para serem indicadas neste desenho). Tôdas elas, exceto a de Plutão, são muito aproximadamente circulares, e estão quase no mesmo plano. Sòmente medidas precisas mostram que são elipses. As órbitas de Plutão e de Mercúrio são as mais elíticas, e o plano da órbita de Plutão faz um ângulo de cêrca de 17° com os planos das outras órbitas. Na figura, a porção da órbita de Plutão que está abaixo do plano do papel foi desenhada com linha tracejada.



22-11 — As órbitas dos planêtas conhecidos, como são vistas em perspectiva. Note que, exceto Plutão, todos os planêtas giram em tôrno do Sol quase no mesmo plano. A órbita de Mercúrio é demasiadamente pequena para ser indicada nesta figura.



22-12 — Tamanhos aproximados dos planêtas, comparados ao do Sol. A massa total dos planêtas é igual a apenas $1{,}34 \times 10^{-3}$ da massa do Sol.

TABELA 3

Modêlo em Escala do Sistema Solar

É impossível mostrar num desenho pequeno, na mesma escala, os tamanhos relativos e as distâncias dos planêtas. A tabela seguinte dá alguma idéia dos tamanhos relativos e das distâncias tomando como referência objetos comuns. Para obter as verdadeiras dimensões do sistema solar, cada dimensão deveria ser multiplicada por $4{,}4 \times 10^9$.

Objeto no sistema solar	*Objeto no modêlo*	*Distância ao "sol"*
Sol	Bola de basquete	
Mercúrio	Metade de uma cabeça de alfinete	13 m
Vênus	Semente de maçã	25 m
Terra	Semente de maçã	34 m
Marte	Pequena semente de maçã	52 m
Júpiter	Bola de golf	180 m
Saturno	Bola de ping-pong	320 m
Urano	Bola de gude	0,65 km
Netuno	Bola de gude	1,0 km
Plutão	?	1,3 km
Estrêla mais próxima	Bola de basquete	8×10^3 km

rença essencial entre essas duas descrições cinemáticas?

Ambas são razoàvelmente precisas. Cada uma permite-nos predizer onde veremos determinado planêta em dado instante. A diferença está no ponto de vista. A descrição kepleriana nos parece mais simples. Kepler seguiu Copérnico ao escolher as estrêlas fixas como referencial em relação ao qual são especificados os movimentos planetários e, como Copérnico, tomou o Sol como origem a partir da qual são medidas as posições planetárias. É mais simples descrever os movimentos planetários usando o Sol como origem do que descrevê-los como são vistos da Terra e, a partir desta descrição simples, podemos deduzir que aparência terão os movimentos planetários quando observados da Terra.

Por outro lado, não há êrro em descrever o movimento diretamente, usando a Terra como origem. Apenas é difícil e confuso, porque os movimentos que vemos parecem complicados e irregulares. É uma questão de conveniência e não de princípio a escolha do sistema de referência que usamos em cinemática.

A situação é semelhante à de um homem, parado na calçada, seguindo o movimento de um ponto na borda da roda de um carro (Capítulo 6). Êle vê o ponto mover-se numa trajetória cicloidal, com uma velocidade que varia periòdicamente de zero a um valor máximo. Entretanto, um homem que descreva o movimento em relação ao eixo da roda acha que o ponto se move com velocidade constante segundo um círculo. Ambos estão certos; e, se levamos em conta o movimento do eixo em relação ao solo, as duas descrições são equivalentes. Exatamente do mesmo modo, a descrição geocêntrica e a heliocêntrica podem ser equivalentes, como o são os sistemas de Tycho Brahe e de Copérnico (Figs. 22-6 e 22-7); escolhermos um ou outro é questão de conveniência. Para a navegação, por exemplo, o ponto de vista geocêntrico é preferível — não nos interessa saber como pareceriam simples os movimentos se observados do Sol. O que desejamos é saber onde estamos quando vemos os planêtas em certas direções em determinados instantes. Conseqüentemente, a liguagem geocêntrica ainda hoje é usada na navegação marítima e aérea.

Quando queremos explicar os movimentos planetários, entretanto, a situação é diferente. Em primeiro lugar, certamente suspeitamos que a explicação dinâmica será mais fácil de obter e de entender quanto mais simples fôr a descrição do movimento. Em segundo lugar, já sabemos que a lei do movimento de Newton sòmente se aplica a certos sistemas de referência. Mesmo o movimento uniforme, que ocorre na ausência de fôrça resultante sôbre um objeto, não parecerá uniforme a um observador que gire como um pião. Nêsse caso sabemos que fôrças fictícias complicadas irão aparecer, e não encontraremos uma explicação dinâmica simples. Conseqüentemente, ao fazer a transição da cinemática para a dinâmica é importante escolher um sistema de referência em que as fôrças fictícias não nos confundam.

Para explicar dinâmicamente o movimento planetário, precisamos escolher um sistema de referência adequado. Podemos escolher um sistema em relação ao qual a Terra esteja em repouso? A resposta a esta pergunta parece ser "não". Em qualquer sistema dêsse tipo, os movimento dos planêtas implicam em fôrças irregulares e não se encontrou nenhuma explicação dinâmica. Podemos apenas retomar o ponto de vista aristotélico de que os planêtas são diferentes de outras espécies de matéria, e se comportam de acôrdo com suas próprias leis especiais de movimento.

O sistema ptolemaico era apropriado a êsse ponto de vista aristotélico. Também concordava com uma dinâmica geocêntrica para os objetos terrestres. Levava à idéia de que as órbitas dos planêtas pareciam mais simples quando vistas supondo a Terra no centro (e não em algum outro ponto). A maior simplicidade das órbitas planetárias na descrição heliocêntrica de Kepler solapa, assim, tôda a descrição aristotélica.

No sistema heliocêntrico, por outro lado, a Terra torna-se um planêta como os outros. Não há, portanto, razão para termos uma dinâmica geocêntrica especial. Ao invés disso, podemos procurar uma dinâmica única que inclua os movimentos dos objetos sôbre a Terra e de todos os planêtas, inclusive o nosso. De fato, o ponto de vista heliocêntrico forneceu o ponto de partida para construirmos uma explicação dinâmica do movimento planetário.

No restante dêste capítulo veremos como o sistema heliocêntrico se adapta à nova dinâmica de Galileu e Newton. Seguiremos as pegadas de Newton. Usaremos uma descrição heliocêntrica e um sistema de referência ligado às estrêlas fixas. Veremos então que uma lei simples para a fôrça entre dois pedaços quaisquer de matéria nos leva aos movimentos planetários observados. Tal lei os explica baseando-se na mesma dinâmica que se aplica aqui na Terra. Desde a época em que esta lei foi postulada por Newton, ela foi também verificada experimentalmente para pequenos pedaços de matéria aqui na Terra. Ela é tão válida aqui como através das distâncias astronômicas. Assim, a procura de uma dinâmica para a qual os movimentos, aqui e nos céus, sejam da mesma espécie, foi coroada de êxito. Num quadro geocêntrico, não é possivel qualquer explicação unificada.

22 — 7. Newton.

Isaac Newton nasceu em 1642, o ano da morte de Galileu. Êle reuniu as descobertas de Copérnico, Kepler, Galileu e outros em astronomia e em dinâmica. A estas, êle acrescentou as suas próprias, fundindo-as numa estrutura que ainda hoje constitui uma das maiores façanhas da ciência. Tão profunda e clara era sua compreensão, que êle conseguiu aplicar as leis do movimento, com êxito, a um número espantoso de fenômenos, desde o movimento dos planêtas ao sobe-e-desce das marés.

Entre o tempo de Kepler e o de Newton, havia ocorrido uma grande transformação no pensamento científico. Após o trabalho de Galileu, foi tomando corpo a idéia de que havia leis universais governando o movimento dos corpos e que elas deviam aplicar-se ao movimento no Céu assim como na Terra. As discussões científicas na Real Sociedade de Londres freqüentemente focalizavam a pergunta: "Que espécie de fôrça o Sol exerce sôbre os planêtas, que os obriga a mover-se de acôrdo com as leis descobertas por Kepler?" Newton respondeu a essa pergunta, guiando-se pelas leis de Kepler. Criou uma dinâmica planetária de tanto êxito que, durante muitos anos, os cientistas queixavam-se de que nada restasse para ser feito.

O primeiro esfôrço de Newton para entender o movimento dos corpos celestes foi dirigido para o estudo do movimento da Lua. Newton

22-13 — Sir Isaac Newton.

sabia que, se nenhuma fôrça atuasse sôbre a Lua, ela se moveria em linha reta com velocidade constante. No entanto, vista da Terra, a Lua seguia uma trajetória quase circular. Conseqüentemente, devia haver uma aceleração dirigida para a Terra e uma fôrça que a produzisse. Dizia êle:

"Sem tal fôrça, a Lua não poderia ser mantida em sua órbita. Se esta fôrça fôsse demasiado pequena, não seria capaz de desviar a Lua de um caminho retilíneo; se fôsse excessivamente grande, produziria um desvio tão grande que lançaria a Lua de sua trajetória sôbre a Terra."

Que fôrça obriga a Lua a mover-se em tôrno da Terra? Newton dizia que a resposta ocorreu-lhe quando estava sentado num jardim. Estava pensando sôbre êste problema quando caiu ao chão uma maçã; a fôrça que a Terra exerce sôbre a maçã, pensou êle, podia também exercer-se sôbre a Lua. A Lua podia ser um corpo em queda.

No Capítulo 21, calculamos a aceleração da Lua para a Terra e encontramos $2{,}7 \times 10^{-3}$ m/s^2, nada próximo do valor 9,8 m/s^2 que é a aceleração de um corpo em queda na superfície da Terra. Newton realizou essencialmente o mesmo cálculo. A princípio êle não dispunha de um valor muito preciso para o raio da órbita da Lua. Sabia, entretanto, que era cêrca de sessenta vêzes o raio da Terra; e, usando um valor grosseiro para o raio da Terra, êle pôde obter o raio da órbita da Lua e calcular a aceleração desta. Quando verificou como era pequena essa aceleração, Newton deve ter-se feito perguntas como as seguintes: Porque a aceleração de um corpo que cái é tão maior que a da Lua? A fôrça com que a Terra atrai um corpo decresce quando êste se afasta? Se fôr assim, qual a relação exata entre a fôrça e a distância que separa os corpos?

Newton havia suposto que a Terra puxava a Lua do mesmo modo como puxava a maçã. Mantendo esta suposição, qualquer lei de fôrça postulada teria de explicar a aceleração g de um corpo na superfície da Terra e o valor muito menor da aceleração da Lua. Muitos anos mais tarde, Newton explicou que foi conduzido à lei de fôrça correta partindo da terceira lei de Kepler. Êle abandonou temporàriamente as fôrças exercidas pela Terra e considerou, ao invés, as fôrças exercidas pelo Sol sôbre os planêtas, as fôrças centripetas que mantêm os planêtas em movimento em suas órbitas. Newton queria saber como a fôrça sôbre um planêta variava com o raio da órbita do planêta. Veremos, agora, como pode ser calculada esta fôrça.

Um dos triunfos de Kepler foi sua descrição das órbitas planetárias como elipses. Essas órbitas são entretanto quase círculos e, por simplicidade, podemos considerá-las como circunferências cujo centro comum é o Sol. Consideremos um planêta que se mova em tôrno do Sol com o período T, numa órbita circular de raio R. Como aprendemos na secção 21-5, a aceleração centrípeta de um planêta ou qualquer objeto que gira uniformemente em uma circunferência é

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Portanto, a fôrça centrípeta sôbre o planêta deve ser

$$F = ma = \frac{m\, 4\pi^2 R}{T^2}$$

onde m é a massa do planêta. Essa é, pois, a fôrça que atua no planêta.

A fim de eliminar o período T, e exprimir a fôrça em função de R e m apenas, Newton usou a terceira lei de Kepler, $R^3/T^2 = K$, ou $T^2 = R^3/K$. Substituindo T^2 por R^3/K, na equação da fôrça centrípeta, encontramos que a fôrça que age no planêta é

$$F = 4\pi^2 K \frac{m}{R^2}$$

A fôrça é proporcional à massa do planêta e inversamente proporcional ao quadrado de sua distância ao Sol (Fig. 22-14).

Finalmente, Newton conseguiu mostrar que qualquer corpo que se move sob a ação desta fôrça deve descrever uma órbita elítica, estando o Sol num dos focos, e que a linha que liga o o Sol ao corpo varre áreas iguais em tempos iguais. Ademais, o próprio método pelo qual encontramos a fôrça, nos mostra que a 3.ª lei de Kepler é conseqüência daquela fôrça. Todo o sistema do movimento planetário descrito pela lei de Kepler segue-se desta lei de fôrça e da lei do movimento de Newton (*).

22 — 8. Gravitação Universal.

Note que o fator $4\pi^2 K$ que figura na lei de fôrça entre o Sol e um planêta entra na equação a partir da lei dos períodos. Aplica-se a qualquer planêta, de qualquer massa e em qualquer órbita em tôrno do Sol. Portanto, $4\pi^2 K$ depende sòmente das propriedades do Sol; mede a intensidade do Sol como fonte da fôrça de atração.

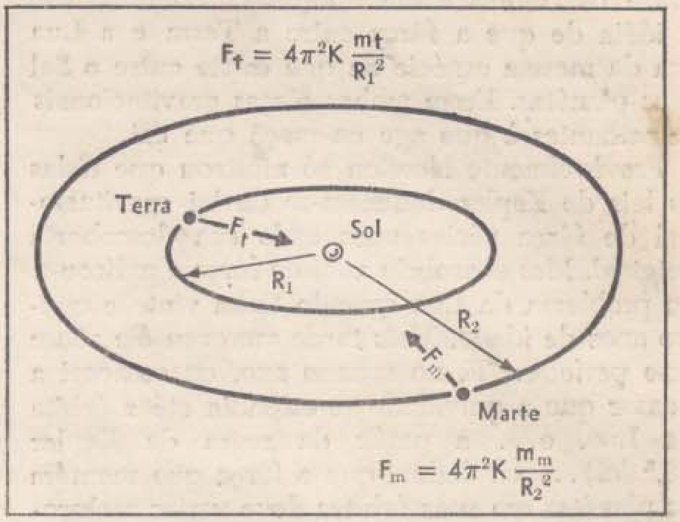
A fôrça de atração entre o Sol e uma massa m é

$$F = \frac{4\pi^2 K_s m}{R^2}$$

onde $4\pi^2 K_s$ refere-se ao Sol e R é a distância do Sol à massa m. Talvez a fôrça entre a Terra e uma massa m seja

$$F = \frac{4\pi^2 K_T\, m}{R^2}$$

onde $4\pi^2 K_T$ é a intensidade da atração gravitacional da Terra e R é agora a distância entre a Terra e a massa m. Com tais idéias, Newton retornou ao problema do movimento da Lua em tôrno da Terra. Medindo R a partir do



22-14 — A fôrça gravitacional exercida pelo Sol sôbre um planêta é proporcional à massa dêste e inversamente proporcional ao quadrado de sua distância ao Sol.

centro da Terra, o valor do campo gravitacional g (a aceleração de um corpo que caia na superfície da Terra) é, pois,

$$g = \frac{F}{m} = \frac{4\pi^2 K_T}{R^2{}_T}$$

onde R_T é o raio da Terra (distância entre o centro da Terra e a massa m em sua superfície). Ademais, o valor do campo gravitacional na posição em que está a Lua, que é a aceleração da Lua para a Terra, será

$$a_L = \frac{4\pi^2 K_T}{R^2{}_L}$$

sendo R_L a distância entre os centros da Lua e da Terra. Dividindo essa equação pela anterior obtem-se

$$\frac{a_L}{g} = \frac{R^2{}_T}{R^2{}_L} \text{ ou } a_L = g \cdot \frac{R^2{}_T}{R^2{}_L}$$

Como Newton sabia que R_T/R_L é cêrca de 1/60 e g é 9,8 m/s², êle encontrou $a_L =$ $= 2{,}7 \times 10^{-3}$ m/s². Êste é quase o mesmo valor de a_L que obtivera a partir do raio e do período da Lua (Seção 22-7).

Pois bem, Newton havia calculado a aceleração da Lua por dois processos diferentes: a partir de R_L e do período do movimento da Lua, sem qualquer referência à lei de fôrça do inverso do quadrado, e a partir do valor de g na superfície da Terra, estando essa lei incluida na razão $(R_T/R_L)^2$. A concordância aproximada

(*) Huygens e Hooke usaram também a 3.ª lei de Kepler e a lei do movimento de Newton para inferir que F é proporcional a $1/R^2$, mas não mostraram que as outras leis de Kepler também podiam ser obtidas. Newton forneceu a lei do movimento, encontrou a lei de fôrça e também mostrou que essas duas leis conjuntamente resultavam na descrição kepleriana dos movimentos planetários.

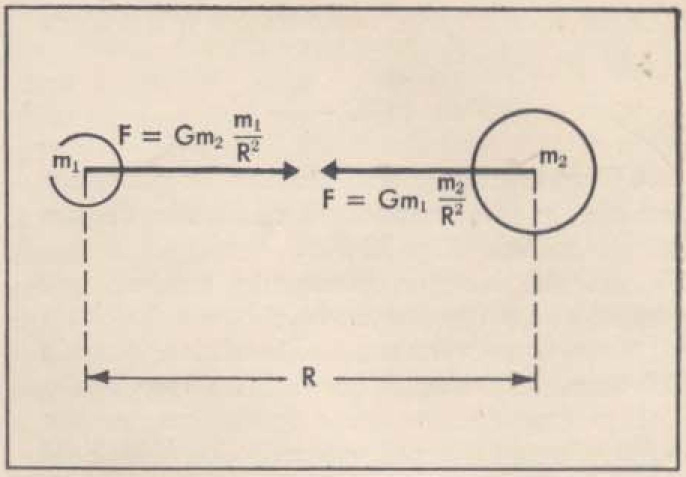
entre os valôres assim obtidos consolidou nêle a idéia de que a fôrça entre a Terra e a Lua era da mesma espécie da que existe entre o Sol e os planêtas. Eram ambas fôrças gravitacionais semelhantes à que age na maçã que cai.

Provàvelmente Newton só mostrou que tôdas as leis de Kepler deduzem-se da lei gravitacional de fôrça vários anos após sua descoberta original. Mas descobriu a lei de fôrça e aplicou-a ao problema da Lua quando tinha vinte e quatro anos de idade. Mais tarde escreveu êle sôbre êsse período: "E, no mesmo ano, eu comecei a pensar que a gravidade se estendia até a órbita da Lua, e... a partir da regra de Kepler (3.ª lei)... eu deduzi que a fôrça que mantém os planêtas em suas órbitas deve variar recìprocamente com o quadrado de suas distâncias aos centros em tôrno dos quais êles giram: dêsse modo, comparei a fôrça necessária para manter a Lua em sua órbita com a fôrça de gravidade na superfície da Terra, e verifiquei que concordavam quase inteiramente. Tudo isto foi nos anos da peste de 1665 e 1666, pois naqueles dias eu estava no auge de minha fôrça de invenção, e pensei em Matemática e em Filosofia mais do que em qualquer outra época desde então".

Newton certamente suspeitava que a lei de atração do inverso do quadrado se aplicava não apenas ao Sol e aos planêtas, como também a dois pedaços quaisquer de matéria. Esta suspeita levou imediatamente à pergunta: Que propriedade de um corpo determina sua atração gravitacional por outras massas? Que propriedade da Terra determina o valor de $4\pi^2K_T$ para a Terra? O que determina o valor de $4\pi^2K_s$ para o Sol? Talvez $4\pi^2K$ dependa de uma nova propriedade dos corpos; mas se a atração gravitacional é uma propriedade de todos os corpos, é razoável supor que $4\pi^2K$ dependa da quantidade de matéria existente no corpo. A suposição mais simples é que $4\pi^2K$ seja proporcional à massa do corpo. Então $4\pi^2K_T = Gm_T$ para a Terra; e $4\pi^2K_s = Gm_s$ para o Sol. G é o fator de proporcionalidade entre $4\pi^2K$ e m, para qualquer corpo.

Newton fez essa suposição. Com ela, a fôrça de atração gravitacional que um corpo de massa m_1 exerce sôbre outro corpo de massa m_2, à distância R, torna-se

$$F = 4\pi^2K_1 \frac{m_2}{R^2} = Gm_1 \frac{m_2}{R^2}$$



22-15 — A fôrça de gravitação exercida por m_1 sôbre m_2 é igual e oposta à fôrça exercida por m_2 sôbre m_1.

Além disso, como qualquer massa atrai gravitacionalmente qualquer pedaço de matéria, a massa m_2 também exerce uma fôra gravitacional sôbre o corpo m_1. Como $4\pi^2K_2 = Gm_2$, a fôrça de atração exercida por m_1 será

$$F = 4\pi^2K_2 \frac{m_1}{R^2} = Gm_2 \frac{m_1}{R^2}$$

Embora essas fôrças sejam de sentidos opostos, elas têm o mesmo valor (Fig. 22-15). A expressão $F = G \frac{m_1m_2}{R^2}$ para a intensidade da atração resume a lei de gravitação universal de Newton: dois corpos quaisquer se atraem com uma fôrça proporcional às massas dos dois corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre êles. A constante de gravitação universal, G, não depende de quais são os objetos considerados, de onde estão, ou se estão em movimento.

Não sabemos em minúcia como Newton descobriu a lei de gravitação universal. Além da razão que apresentamos para tornar plausível a lei, numerosas outras considerações podem ter sugerido o mesmo resultado. Por exemplo, como veremos no capítulo seguinte, Newton finalmente admitiu que as fôrças de interação entre dois corpos são sempre iguais e opostas, e êle podia já ter essa idéia no espírito quando formulou a lei de gravitação universal. Quaisquer que tenham sido os passos que conduziram Newton à lei de gravitação universal, ela finalmente se consolida ou sucumbe pela consistência entre as predições deduzidas dela e o com-

Fig. 22-16: Uma página dos "Philosophiae Naturalis Principia Mathemática" de Newton (Londres, 1687). Os períodos de revolução dos quatro maiores satélites de Júpiter estão registrados no alto da página. A tabela dá os raios das órbitas dos satélites, medidos por diferentes observadores. Na última linha da tabela figuram os raios calculados usando-se a terceira lei de Kepler.

Satellitum tempora periodica.

1d. 18h. 28'$\frac{3}{5}$. 3d. 13h. 17'$\frac{9}{10}$. 7d. 3h. 59'$\frac{3}{5}$. 16d. 18h. 5'$\frac{1}{5}$.

Diſtantiæ Satellitum à centro Jovis.

Ex Obſervationibus	1.	2	3	4	
Caſſini	5.	8.	13.	23.	
Borelli	5$\frac{2}{3}$.	8$\frac{2}{3}$.	14.	24$\frac{2}{3}$.	
Tounlei *per Micromet-*	5,51.	8,78.	13,47.	24,72.	Semidiam.
Flamſtedii *per Microm.*	5,31.	8,85.	13,98.	24,23.	Jovis.
Flamſt. *per Eclipſ. Satel.*	5,578.	8,876.	14,159.	24,903.	
Ex temporibus periodicis.	5,578.	8,878.	14,168.	24,968.	

Hypoth. VI. *Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus ſuis Solem cingere.*

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phaſibus lunaribus demonſtratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem ſiti ſunt, dimidiatâ è regione Solis, falcatâ cis Solem; per diſcum ejus ad modum macularum nonnunquam tranſeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibboſa in quadraturis, certum eſt quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phaſibus ſemper plenis demonſtratur.

Hypoth. VII. *Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica eſſe in ratione ſeſquialtera mediocrium diſtantiarum à Sole.*

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confeſſo eſt apud omnes. Eadem utique ſunt tempora periodica, eædemq; orbium dimenſiones, ſive Planetæ circa Terram, ſive iidem circa Solem revolvantur. Ac de menſura quidem temporum periodicorum convenit inter Aſtronomos univerſos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſimè ex Obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent, non

Aaa 2 diffe-

portanto real do Universo. Baseado nessa lei, Newton conseguiu abrir grandes caminhos na construção de um sistema teórico do Universo.

22 — 9. Algumas Realizações Posteriores de Newton.

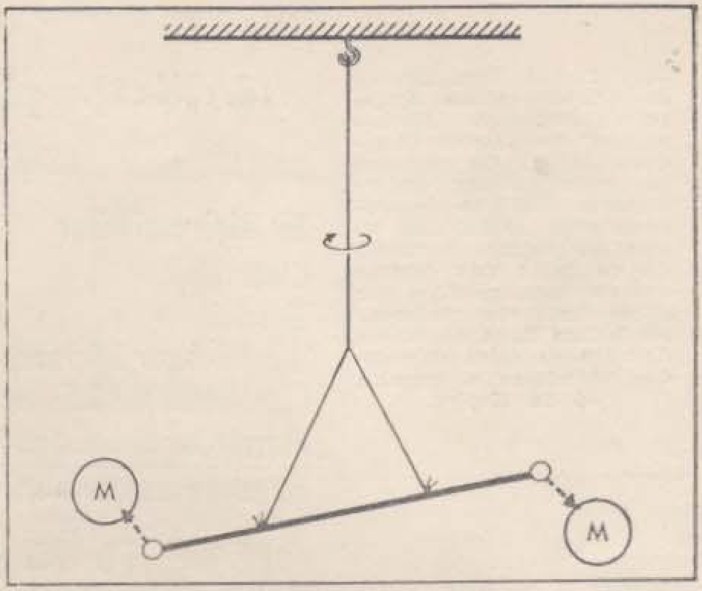
Newton aplicou a lei de gravitação universal a uma ampla variedade de problemas. Como já mencionamos, êle deduziu as três leis empíricas de Kepler a partir da lei de gravitação universal. Examinou, a seguir, as marés e explicou-as baseado na fôrça gravitacional exercida pela Lua tanto sôbre a parte sólida da Terra como sôbre os oceanos. Além disso, começou a analisar as pequenas irregularidades (pertubações) das órbitas planetárias. Ésses pequenos desvios dos planêtas das órbitas elíticas preditas podem ser explicados pelas pequenas interações gravitacionais entre os próprios planêtas. A Terra é atraída não só pelo Sol, como também, em grau variável, por cada um dos outros planêtas. Essas atrações são relativamente pequenas, devido às pequenas massas dos planêtas, em comparação com a massa do Sol; mas seus efeitos podem ser observados e são preditos corretamente pela teoria de Newton.

Mais tarde essa teoria das perturbações levou à descoberta de um nôvo planêta. No século XIX eram conhecidos sete planêtas. Dêstes, os seis primeiros se comportavam bem; mas o sétimo, Urano, que tinha sido descoberto por Herschel em 1781, não agia tão bem quanto se esperava. Quando foram calculadas as pertubações de sua órbita, devidas aos outros planêtas, o resultado não concordou com os detalhes do movimento observado. Os astrônomos Adams e Leverrier chegaram independentemente à conclusão de que devia haver um outro planêta, ainda desconhecido (mais afastado do Sol, mas bastante próximo para afetar o movimento de Urano); e em 23 de setembro de 1846 o astrônomo Galle achou o nôvo planêta onde Leverrier sugerira que êle o procurasse. Êste nôvo planêta foi denominado Netuno.

Entre os muitos outros problemas a que Newton aplicou a lei de gravitação universal, um é de particular interêsse para nós. Refere-se ao cálculo da aceleração da Lua a partir da lei de fôrça do inverso do quadrado e do valor de g na superfície da Terra (Seção 22-8). Quando realizou pela primeira vez êsse cálculo, Newton considerou as distâncias R_T e R_L a partir do centro da Terra. Embora fosse natural medir R a partir do centro da Terra, Newton não tinha certeza de que fosse correto. Como êle suspeitava que a lei de atração do inverso do quadrado se aplicasse a dois pedaços quaisquer de matéria, pensou que a atração gravitacional da Terra sôbre um objéto poderia ser a resultante das fôrças exercidas por cada pedaço de matéria da Terra.

Os diferentes pedaços de matéria que constituem a Terra estão localizados a diferentes distâncias de um objeto localizado sôbre a superfície da Terra. Agindo tôdos êles simultâneamente, produzem sôbre êsse objeto a mesma fôrça que produziriam se estivessem concentrados no centro da Terra? Decresce a fôrça com $1/R^2$, mesmo nas proximidades da superfície da Terra? Antes de considerar-se satisfeito, Newton tinha de resolver o problema matemático de somar tôdas as fôrças provenientes de todos os pedaços de matéria de que a Terra é constituida. Êle tinha de provar que essa soma vetorial fornecia a lei de fôrça do inverso do quadrado num ponto próximo à superfície da Terra.

Atualmente podemos resolver êste problema aplicando um teorema matemático elegante; mas na época de Newton êsse teorema e sua



22-17 — Desenho simplificado do aparêlho usado por Cavendish para verificar a validade da lei de gravitação universal para pequenos objetos e para medir a constante de gravitação G.

base eram desconhecidos. O próprio Newton inventou a matemática necessária (agora chamada Cálculo), para resolver êste problema e outros semelhantes. Quando obteve a resposta, verificou que sua hipótese original estava certa. Quando as fôrças devidas a cada pedaço de matéria decrescem com o quadrado da distância, os corpos esféricos se atraem como se tôda a sua massa estivesse concentrada nos seus centros. Newton exultou.

22 — 10. Verificações Experimentais da Lei de Gravitação Universal.

O modo direto de verificar se a lei de gravitação universal de Newton é consistente com o comportamento de qualquer porção de matéria é medir as fôrças gravitacionais entre pedaços de matéria no laboratório. Devemos observar a atração gravitacional entre duas massas e medir a fôrça sôbre cada uma; devemos usar objetos de vários materiais para constatar que apenas a massa determina a atração. Se verificarmos que a lei é consistente com nossas medidas, poderemos então, naturalmente, avaliar a constante universal de proporcionalidade, G.

Tais experiências são difíceis. Mesmo quando duas pedras são colocadas muito próximas uma da outra, elas não se atraem de maneira sensível. Um cálculo grosseiro de G mostra por que. De acôrdo com a lei de gravitação universal, a fôrça gravitacional sôbre a massa m na superfície da Terra é

$$F = G\frac{m_T m}{R^2}$$

O campo gravitacional g é portanto

$$g = \frac{F}{m} = G\frac{m_T}{R^2_T}$$

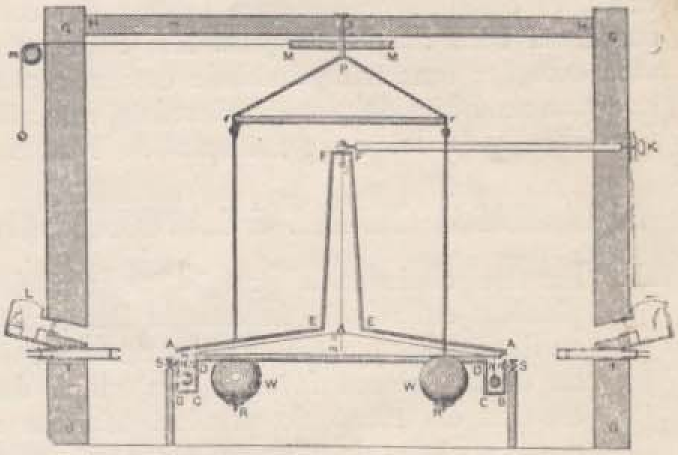
Nessa equação conhecemos g, que é 9,8 m/s^2, e o raio da Terra, $R = 6{,}38 \times 10^6$m, do qual Newton conhecia um valor aproximado. Logo, para determinar G, bastaria avaliar a massa da Terra.

Newton fez essa estimativa. Tomou um valor razoável para a densidade média da Terra, cêrca de cinco vêzes a densidade da água, e multiplicou-a pelo volume da Terra. A massa da Terra é, então, avaliada em aproximadamente, 6×10^{24} kg e a ordem de grandeza de G é 10^{-10} m^3/kg.s^2. Atualmente conhecemos G com precisão : $G = 0{,}667 \times 10^{-10}$ m^3/kg.s^2. Aplicando êste resultado a duas pedras de 1 kg separadas pela distância de 10 cm, encontramos que sua atração gravitacional é de aproximadamente 10^{-8} newtons, cêrca de um bilionésimo da fôrça com que a Terra as atrái. Newton também concluiu que a "gravitação (entre tais pedras) deve ser muito pequena para ser observada por nossos sentidos". Dirigiu, então, sua atenção para os cálculos das interações gravitacionais dos planêtas e de seus satélites, como mencionamos na ultima seção.

Cem anos mais tarde, em 1798, Lord Cavendish conseguiu medir a interação gravitacional entre objetos no laboratório. O aparêlho por êle usado está esquematizado na Fig. 22-17. Duas pequenas esferas são montadas nos extremos de uma barra de uns dois metros de comprimento. Esta barra está suspensa em posição horizontal por um fio fino, ficando o centro da barra na vertical do fio. Nos extremos da barra e no lado da caixa que continha o aparêlho, Cavendish montou réguas de marfim para medir a posição da barra. Quando Cavendish colocava grandes massas próximo das pequenas esferas, estas eram atraídas pelas massas maiores, torcendo o fio de suspensão.

Cavendish registrou a posição da barra com a suspensão torcida, quando as massas grandes estavam colocadas como mostra a Fig. 22-17. Depois removeu cada uma das massas grandes para posições simétricas (do outro lado das esferas pequenas). A atração gravitacional girou a suspensão no sentido oposto e êle mediu a nova posição. Medindo as variações de posição quando se aplicavam fôrças conhecidas às pequenas esferas, Cavendish pôde obter a intensidade das fôrças gravitacionais entre as esferas grandes e pequenas (*).

Cavendish realizou, de fato, várias experiências. Êle tinha de considerar possíveis efeitos estranhos, tais como correntes de convecção no ar, devidas a pequenas diferenças de temperatura. Êle queria estar certo de não estar medindo fôrças magnéticas por engano. Necessitava muitas determinações para certificar-se de que seus resultados eram reprodutíveis, e para determinar sua precisão. Com essas experiências, Cavendish determinou G. Exprimiu sua resposta em têrmos da densidade média da Terra, que verificou ser próxima de 5,5 vêzes a da água, bem concordante com a estimativa de Newton.



22-18 — Esbôço do aparêlho de Cavendish que apareceu em seu trabalho original. As duas massas grandes são chamadas W e as pequenas x. Note que todo o aparêlho é montado numa grande caixa G, provida de controles externos para mover os pesos e ajustar a barra horizontal. As escalas em A, próximas dos extremos da barra, eram iluminadas pelas lâmpadas L e observadas com as lunetas T.

(*) A fôrça para várias torções da suspensão pode ser obtida dinâmicamente afastando-se as massas grandes e permitindo que a barra com as duas esferas pequenas oscile horizontalmente, torcendo e destorcendo o fio de suspensão. O movimento da barra depende, então, das massas conhecidas das pequenas esferas e das fôrças exercidas sôbre elas pela suspensão torcida. O valôr dessas fôrças pode, portanto, ser determinado a partir do movimento. Consideremos, agora, todo o sistema em repouso com as massas grandes em posição. A fôrça resultante sôbre cada bola deve ser zero; mas a suspensão está torcida, devido às fôrças gravitacionais entre as massas grandes e as pequenas esferas. A fôrça resultante nula é a soma da fôrça gravitacional e da fôrça exercida pela suspensão torcida. A fôrça gravitacional é, portanto, de mesma intensidade e de sentido opôsto à fôrça exercida pela suspensão. Como conhecemos a fôrça exercida pela suspensão, conhecemos, também, a fôrça gravitacional.

Usando objetos de diferentes substâncias, podemos modificar a experiência de Cavendish para mostrar que apenas as massas determinam a atração gravitacional. Variando as posições relativas das massas grandes e pequenas, podemos verificar a lei do inverso do quadrado para distâncias dentro do laboratório e não mais para distâncias planetárias. Foram feitas muitas modificações na experiência de Cavendish, e, até agora, a lei de gravitação universal de Newton tem-se mostrado consistente com tôdas elas.

22 — 11. Uma Pequena Discrepância.

Decorreram quase trezentos anos desde que Newton estudou a gravitação. Durante êsse tempo, a lei de gravitação foi verificada pelos cálculos mais minuciosos dos movimentos dos planêtas e de seus satélites. Em quase todos os casos, os cálculos predisseram órbitas em concordância com as observações. Há, entretanto, uma exceção: uma irregularidade extremamente pequena na órbita do planêta Mercúrio, que não é predita pela lei de gravitação de Newton. Mesmo que seja diminuta a discrepância, torna-se necessário melhorar a teoria para explicá-lá.

Tal aperfeiçoamento foi proposto por Albert Einstein, em sua teoria geral da relatividade. No cerne dessa teoria está a notável equivalência entre massa inercial e massa gravitacional. Einstein fundiu-as numa única entidade. Sua teoria é construida sôbre a de Newton, tal como êste construiu a sua sôbre os trabalhos de Galileu e Kepler. Da teoria de Einstein decorrem todos os resultados da teoria de Newton (mas os cálculos são mais difíceis). Efetivamente, quando dizemos que dá os mesmos resultados, queremos dizer que as diferenças entre as predições da teoria gravitacional de Einstein e as da mecânica de Newton são usualmente tão pequenas que não podem ser fàcilmente observadas. Sòmente em circunstâncias excepcionais podem ser observadas as diferenças previstas. A órbita de Mecúrio é uma dessas raras exceções. Aqui as predições de Einstein relativas à órbita levam ao acôrdo da teoria e da observação.

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO

1. Procure observar a posição de um dos planêtas em relação às estrêlas fixas, uma ou duas vêzes por semana, durante um mês ou dois. Comece fazendo um mapa das estrêlas em tôrno do planêta. Marque a nova posição do planêta nesse mapa, a cada observação.
2. Outra sugestão: As quatro luas maiores de Júpiter podem ser vistas com um binóculo razoàvelmente bom. Uma delas se move tão depressa que seu movimento em relação a Júpiter pode ser detetado por observações a intervalos de apenas algumas horas. Com seu binóculo, observe as posições das luas em tôdas as noites claras, durante três semanas.
   (a) Marque suas posições em relação a Júpiter, para cada observação;
   (b) Você pode determinar o período de revolução de cada lua?
   (c) Qual dessas luas é a mais próxima de Júpiter?
3. As estrêlas fixas completam uma revolução em cêrca de um dia, vistas por um observador na Terra. Determine a duração aproximada das seguintes revoluções:
   (a) A esfera das estrêlas fixas, vista por alguém na Lua;
   (b) A Terra em tôrno da Lua vista da Lua.
   (c) O Sol visto da Lua. Parece o Sol girar como se fôsse uma das estrêlas fixas? Parece girar mais depressa ou mais devagar? Lembre que a Terra e a Lua giram em tôrno do Sol uma vêz por ano.
4. A órbita da Terra em tôrno do Sol é quase circular e a Lua move-se numa trajetória quase circular em tôrno da Terra. O raio da órbita da Terra é $1{,}5 \times 10^{11}$ metros, e o da órbita da Lua, 4×10^{8} metros.
   (a) Quantas vêzes a Lua passa entre a Terra e o Sol?
   (b) Que distância percorre a Lua em tôrno do Sol, no intervalo de tempo entre duas de suas passagens sucessivas entre a Terra e o Sol?
   (c) Trace num mesmo desenho as órbitas da Terra e da Lua em tôrno do Sol.
   (d) Aparentaria a Lua movimento retrógrado, se fôsse vista por um

observador situado no Sol? (Movimento retrógrado é semelhante ao que está indicado na Fig. 22-2).

5. Além dos planêtas, o sistema solar contém outros astros "errantes" chamados cometas. Muitos cometas reaparecem a intervalos regulares, tornando-se aparentemente mais brilhantes e maiores em poucas semanas à proporção que se aproximam da Terra; depois vão-se apagando e diminuindo até se tornarem invisíveis durante anos. Que espécie de órbita, pensa você, êles percorrem?

6. Com que rapidez, em m^2/s, é varrida uma área
   (a) pelo raio do Sol à Terra?
   (b) pelo raio da Lua a Terra?

7. Astrônomos observaram que o cometa de Halley tem um período de 75 anos e que sua menor distância ao Sol é de $8{,}9 \times 10^{10}$ metros, porém sua maior distância ao Sol não pode ser medida por não podermos vê-la. Com essa informação e com a que consta do segundo rodapé da seção 22-5, calcule sua distância máxima ao Sol. (Foi Newton quem ensinou a Halley como calcular a órbita de um cometa. Halley encontrou e calculou a órbita e o período do cometa que tem seu nome quando fazia uma análise geral das órbitas dos cometas).

8. Três pirilampos X, Y e Z estão numa bicicleta em movimento, à noite. X está bem no centro de um dos eixos, que gira com a roda. Y está na periferia da roda. Z está no quadro da bicicleta. Faça alguns desenhos e descreva em poucas palavras os seguintes movimentos:
   (a) de X e Y vistos por Z;
   (b) de Y e Z vistos por X;
   (c) de X e Z vistos por Y;
   (d) de todos três, vistos por um observador, em pé, parado, próximo à bicicleta.

9. Dois patinadores de mesma massa gastam o mesmo tempo para completar uma volta em tôrno de uma pista circular. A distância de um dos patinadores ao centro é o dôbro da distância do outro.
   (a) Compare as velocidades dos patinadores;
   (b) As fôrças centrípetas que agem sôbre êles.
   (c) O que exerce sôbre êles a fôrça centrípeta?

10. A que altura acima da superfície da Terra a fôrça de gravidade que age sôbre um foguete é igual à metade da que atúa ao nível do mar?

11. (a) A que altura deve estar um satélite, movendo-se no plano do equador, para permanecer sôbre um mesmo lugar, no equador da Terra? Um modo de obter a resposta consiste em comparar êsse satélite com a Lua, que dista 59,5 raios terrestres do centro da Terra, e leva 27 dias para contorná-la.
   (b) Qual a aceleração do satélite na direção da Terra?
   (c) Usando a lei do inverso do quadrado e o valor de g na superfície da Terra, determine o campo gravitacional à altura do satélite. Compare com a resposta obtida em (b).

12. Um satélite circunda a Terra em 98 minutos, à altura média de 500 km. Calcule a massa da Terra. As massas dos planêtas são realmente calculadas pelos movimentos dos satélites, e uma das razões para colocar em órbitas satélites artificiais da Terra é que se deseja obter um valor melhor para a massa da Terra. Como foi estabelecido na Seção 22-10, $G = 0{,}667 \times 10^{-10} m^3/kg.s^2$.

13. (a) Sendo T o período de um satélite que circula pouco acima da superfície de um planêta cuja densidade média é ϱ, mostre que ϱT^2 é uma constante universal.
   (b) Qual o valor desta constante?

14. Calcule os períodos de um satélite numa órbita próxima à superfície (a) da Terra, (b) do Sol.

15. Determine o pêso de um homem de 100 kg nos planêtas com as seguintes massas e raios:

Marte	$6{,}4 \times 10^{23}$kg	$3{,}4 \times 10^6$m
Terra	$6{,}0 \times 10^{24}$kg	$6{,}4 \times 10^6$m
Júpiter	$1{,}9 \times 10^{27}$kg	$7{,}2 \times 10^7$m

16. Um rapaz de 70 kg está em pé a um metro de uma moça de 60 kg. Calcule a fôrça de atração (gravitacional) entre êles.

17. Determine a atração gravitacional entre os dois átomos de uma molécula de hidrogênio.

18. (a) O diâmetro de um planêta é o dôbro do terrestre e sua massa é seis vêzes maior do que a da Terra. Qual a razão entre o campo gravitacional na sua superfície e o campo gravitacional na superfície da Terra?
    (b) Qual a razão das densidades dos dois planêtas?

19. Sôbre a Terra atua a fôrça gravitacional do Sol. Por que a Terra não cái sôbre o Sol? Esteja preparado para discutir sua resposta.

20. (a) Compare as velocidades da Lua e da Terra em tôrno do Sol.
    (b) Se a Terra pudesse ser removida repentinamente qual seria a trajetória subseqüente da Lua?
    (c) Calcule a razão entre a fôrça de atração exercida pelo Sol sôbre a Lua e a fôrça exercida pela Terra sôbre a Lua.
    (d) Por que o Sol não captura a Lua, subtraindo-a à influência da Terra?

21. Admita que a Terra seja perfeitamente redonda e tenha um raio de 6 400 quilômetros.
    (a) Qual seria, no equador, o pêso aparente de um homem que, no polo, pesasse 100 kg? De quanto por cento decresce, aparentemente seu pêso, nessa viagem?
    (b) Com que velocidade deveria girar a Terra a fim de não exercer fôrça alguma sôbre um dinamômetro no equador?
    (c) Quantas vêzes a velocidade de rotação em (b) é maior que a velocidade real?

22. Duas estrêlas que compõem uma estrêla dupla, bastante afastadas de qualquer outra massa considerável, giram em órbitas circulares, permanecendo sempre separadas pela mesma distância.
    (a) Esboce suas órbitas, se elas têm massas iguais;
    (b) Se uma tem o dôbro da massa da outra.
    (c) Qual a razão entre os raios de suas órbitas em cada caso?

23. Admita que a atração gravitacional exercida por m_1 sôbre m_3 na Fig. 22-19 não é influênciada pela presença de m_2, e que a atração de m_2 sôbre m_3 não é alterada pela presença de m_1.
    (a) Usando a lei de gravitação universal, mostre que a fôrça de atração exercida sôbre m_3 pelo "corpo" único constituido por m_1 e m_2 é proporcional à sua massa.
    (b) Se m_1 e m_2 estivessem muito afastados entre sí, em relação a suas distâncias até m_3, atuariam elas como corpo único?

LEITURA COMPLEMENTAR

ABETTI, G. *History of Astronomy.* Abelard — Schuman, 1952.

ANDRADE, E. N. da C., *Sir Isaac Newton.* — Doubleday Anchor Books, 1958.

BAKER, R. H., *Astronomy.* — Van Nostrand — Um livro padrão.

COPERNICUS, N., *Readings in the Literature of Science.* Editado por Dampier and Dampier, Harper, 1959 (pgs. 11-13). Também Galileu, pgs. 14-30.

HOLTON, G., e ROLLER, D.H.D., *Foundations of Modern Physical Science.* Addison — Wesley, 1957; Part. III, *The Study of Planetary Systems.*

Moments of Discovery. Copernicus, pg. 217; Tycho Brahe, pg. 232; Galileu, pg. 240; Kepler, pg. 265. Suas contribuições para as diferentes concepções dos sistemas planetários, relatadas por êles mesmos.

NEWTON, SIR ISAAC, *Mathematical Principles of Natural Phylosophy* e seu *System of the World.* Editado por Florian Cajori, University of California Press, 1947.

WHIPPLE, F. L. e HYNEK, V. A., "Observations of Satellite I", *Scientific American,* dezembro, 1957. Um relatório das observações feitas para determinar a órbita de um satélite artificial.

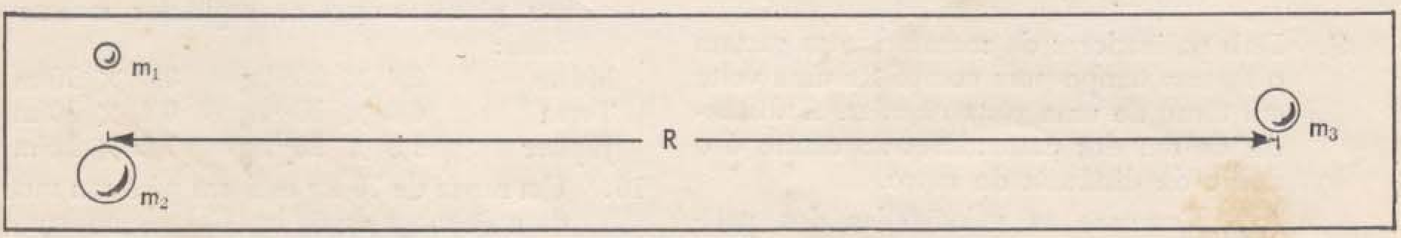


Fig. 22-19 — Para o Problema 23.

A QUANTIDADE DE MOVIMENTO E SUA CONSERVAÇÃO

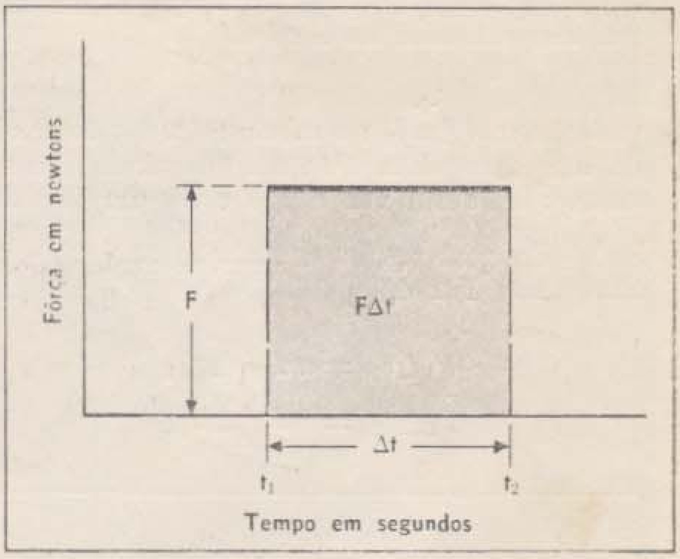
CAPÍTULO 23

23 — 1. Impulso.

Tente imprimir a mesma velocidade a uma bola de tênis e a um tijolo. Como você sabe, é muito mais difícil mover o tijolo. Se você aplica uma fôrça $\vec{F}$ constante durante o intervalo de tempo $\triangle t$, a variação de velocidade é dada por $m\triangle\vec{v} = \vec{F}\triangle t$. Assim, para obter-se o mesmo $\triangle\vec{v}$, o produto $\vec{F}\triangle t$ deve ser tanto maior quanto maior for a massa m que se está tentando acelerar.

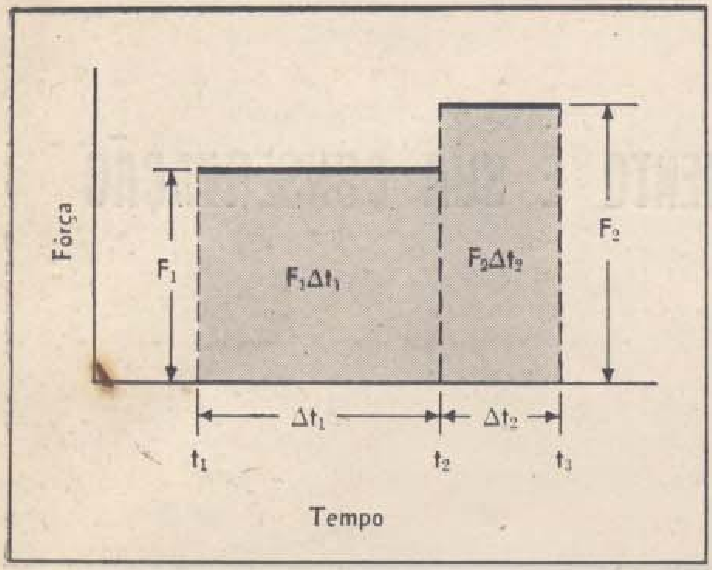
Para mover, a partir do repouso, um tijolo e dar-lhe a mesma velocidade final que a uma bola de tênis (também inicialmente em repouso), precisamos impulsioná-lo, ou com mais fôrça, ou durante mais tempo. O que se deve levar em conta é o produto $\vec{F}\triangle t$, que é a medida natural da intensidade e da duração da fôrça com que empurramos um objeto para variar seu movimento. Esse produto é chamado *impulso* da fôrça.

Podemos aplicar determinado impulso de diversos modos: aplicando uma fôrça intensa durante pouco tempo, ou uma fôrça menos intensa durante mais tempo, ou mesmo uma fôrça que varia enquanto atua. Na Fig. 23-1, representamos uma fôrça constante F em função do tempo durante o qual ela age. O gráfico é uma linha horizontal de altura F acima do eixo dos tempos e de comprimento $\triangle t = t_2 - t_1$, igual ao tempo durante o qual a fôrça atua. A área do retângulo sob esta linha é $F\triangle t$, valor do impulso durante êsse intervalo de tempo. (A direção do impulso é a mesma que a da fôrça). Para qualquer fôrça constante que atue durante qualquer intervalo de tempo, podemos sempre obter o valor do impulso calculando a área limitada pela curva fôrça-tempo para aquêle intervalo.



23-1 — Uma fôrça constante F está representada em função do tempo para o intervalo $t_2 - t_1 = \triangle t$. A área $F\triangle t$, sob a curva, dá o impulso desta fôrça no intervalo $\triangle t$.

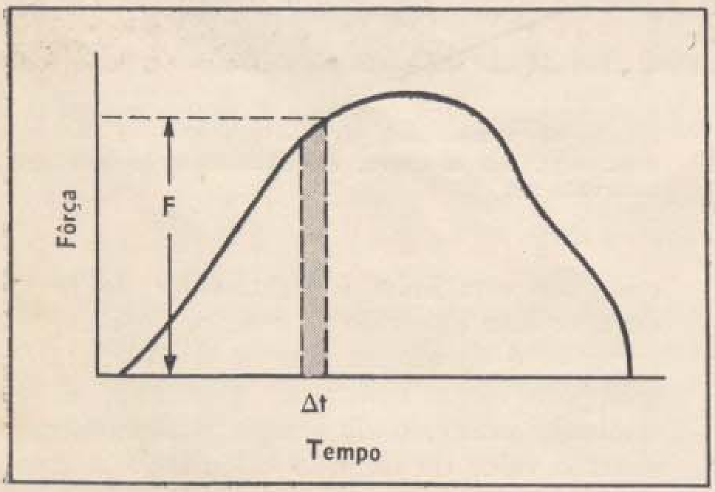
Suponhamos, agora, que a fôrça varie, como na Fig. 23-2. Durante o tempo $\triangle t_1$, a fôrça é constante e o impulso é $\vec{F}_1\triangle t_1$, que produz a



23-2 — A fôrça é F_1 no intervalo de tempo Δt_1, e muda para F_2 no intervalo de tempo Δt_2. Se o sentido da fôrça não muda, o impulso total no intervalo de tempo $\Delta t_1 + \Delta t_2$ é $F_1\,\Delta t_1 + F_2\,\Delta t_2$, representado pela área sombreada sob a curva.

variação $m\ (\vec{\Delta v})_1$ no movimento. No intervalo de tempo seguinte Δt_2, a fôrça ainda é constante, mas desta vez é F_2, e há um impulso $F_2\Delta t_2$ do qual resulta a variação $m\ (\vec{\Delta v})_2$ no movimento. Isto é,

$$\vec{F}_1\Delta t_1 = m\ (\vec{\Delta v})_1$$
$$\vec{F}_2\Delta t_2 = m\ (\vec{\Delta v})_2$$



23-3 — Quando a fôrça varia continuamente, podemos decompor a área sob a curva fôrça versus tempo em um grande número de pequenas áreas que são quase retangulares (veja a área sombreada). Cada área $F\Delta t$ representa um pequeno impulso. O impulso total é a soma de todos êsses pequenos impulsos. Portanto, desde que a direção da fôrça permaneça constante, a área sob a curva é o impulso total.

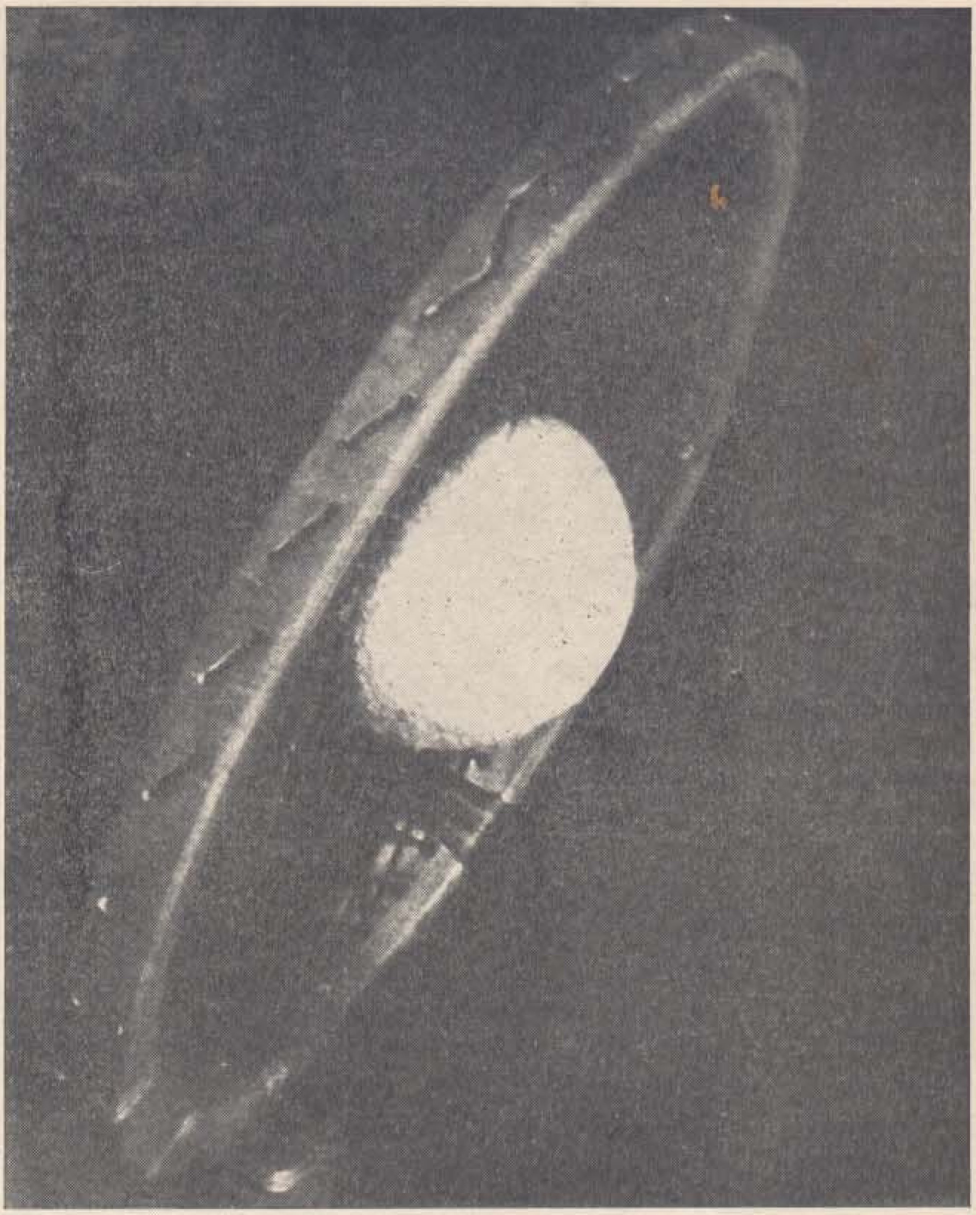
Se adicionarmos vetorialmente estas duas igualdades, teremos:

$$\vec{F}_1\Delta t_1 + \vec{F}_2\Delta t_2 = m\ (\vec{\Delta v})_1 + m\ (\vec{\Delta v})_2 =$$
$$= m\,[(\vec{\Delta v})_1 + (\vec{\Delta v})_2]$$

Será que podemos reunir os dois impulsos do primeiro membro da equação num único "impulso total"? Vimos anteriormente que impulso é a combinação de fôrça e tempo que produz a variação $\vec{\Delta v}$ na velocidade de determinada massa. Vemos, agora, que $\vec{F}_1\Delta t_1 + \vec{F}_2\Delta t_2$ produz a variação de velocidade $\vec{\Delta v} = \vec{\Delta v}_1 + \vec{\Delta v}_2$ que ocorre no movimento de m entre a aplicação inicial de $\vec{F}_1$ e a remoção da fôrça $\vec{F}_2$. Conseqüentemente, a soma $\vec{F}_1\Delta t_1 + \vec{F}_2\Delta t_2$ é igual ao impulso total durante êsse tempo. Finalmente, desde que $\vec{F}_1\Delta t_1$ e $\vec{F}_2\Delta t_2$ são os dois impulsos individuais que agem sôbre m naquele intervalo de tempo, podemos concluir que o vetor soma dos impulsos sucessivos dá o impulso total.

Quando lidamos com uma fôrça que varia continuamente, podemos ainda obter o impulso total adicionando os impulsos relativos a pequenos intervalos de tempo. Podemos tomar cada intervalo de tempo tão pequeno que $\vec{F}$ seja pràticamente constante para cada um dêles. Então, o impulso total, que é a soma de todos os $\vec{F}\Delta t$ dá a variação total $m\vec{\Delta v}$ no movimento.

Quando a fôrça varia em grandeza, mas tem sempre a mesma direção, podemos adicionar os impulsos determinando a área sob a curva $\vec{F}$ versus t. Um caso simples está indicado na Fig. 23-2 e, na Fig. 23-3, temos um exemplo em que a fôrça muda continuamente. Se, entretanto, a fôrça muda de direção, êste método gráfico não é suficiente. Precisamos adicionar os pequenos impulsos $\vec{F}\Delta t$ com suas direções corretas. O impulso total entre qualquer instante inicial, t, e final, t', deve ser obtido por *adição vetorial*, porque cada pequeno impulso causa uma variação $m\vec{\Delta v} = \vec{F}\Delta t$ na direção da fôrça atuante. Êste vetor soma dá a variação total $m\,\vec{v}' - m\vec{v}$ da quantidade de movimento (usa-



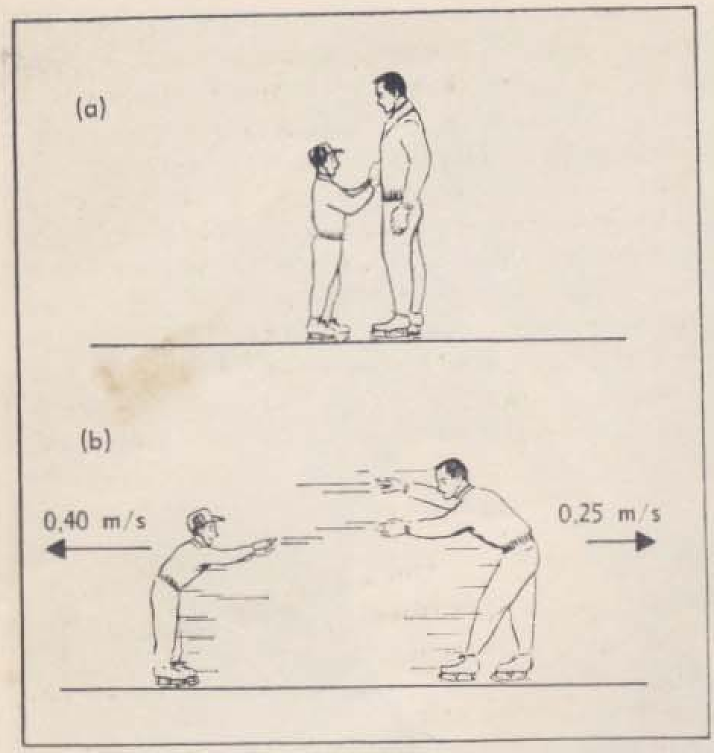
23-4 — Esta fotografia de alta velocidade mostra um exemplo familiar de fôrça impulsiva. Note a grande deformação da raquete e da bola (Cortesia de Harold E. Edgerton).

remos freqüentemente o símbolo ′, que se lê "linha", para designar a velocidade num instante posterior a um instante dado). Em resumo, o impulso total é o vetor soma de todos os pequenos $\vec{F}\triangle t$, e iguala a soma vetorial de todos os pequenos $m\triangle\vec{v}$. Isto é o mesmo que: m multiplicado pelo vetor soma de todos os pequenos $\triangle\vec{v}$, ou seja, $m\ (\vec{v}' - \vec{v})$.

Muitas vêzes uma grande fôrça atua durante um intervalo de tempo pequeno. Pense no que acontece quando você rebate uma bola de tênis com uma raquete, ou quando duas bolas de aço se chocam. Sem equipamento bastante complicado, é muito difícil dizer o valor das fôrças que atuam durante a colisão. Mas o impulso total da força é fàcilmente determinado observando a variação final de $m\ \vec{v}$. Fôrças que atuam durante pequenos intervalos de tempo, e para as quais sòmente o produto $\vec{F}\triangle t$ é conhecido, são chamadas fôrças impulsivas.

23 — 2. Quantidade de Movimento.

Quando a massa m está se movendo com velocidade v, sentimos que há certa quantidade de movimento. Ademais, se dois corpos, cada um de massa m, se movem com a mesma velocidade, deveriamos ter uma quantidade de movimento que é o dôbro da de um só corpo. Po-



23-5 — Num lago gelado, um rapaz de 50 kg empurra um homem de 80 kg com fôrça bastante para dar-lhe a velocidade de 0,25 m/s. O rapaz move-se a 0,40 m/s.

demos imaginar várias medidas do movimento, que seriam proporcionais à massa e aumentariam com a velocidade — por exemplo, mv, mv^2, mv^3, etc. Duas de tais medidas são de grande importância para a Física. Vamos estudar agora uma delas.

Uma medida da quantidade de movimento de um corpo que está se movendo com velocidade $\vec{v}$ é o impulso necessário para fazê-lo mover-se à velocidade $\vec{v}$ partindo do repouso. Como aprendemos na última seção, o impulso necessário é determinado por $m\triangle\vec{v}$, a massa multiplicada pela variação de velocidade; e, para uma massa que parte do repouso, a variação da velocidade é igual à velocidade final $\vec{v}$. O impulso que deveria ser dado ao corpo para dar-lhe a velocidade $\vec{v}$ que êle tem no instante considerado é, portanto, igual a $m\vec{v}$, a massa multiplicada pela sua velocidade naquele instante. Sendo o produto $m\vec{v}$ proporcional à massa e à velocidade, é uma medida do movimento, do tipo descrito no parágrafo acima. Chama-se *quantidade de movimento do corpo,* e sua unidade é o quilograma $\times$ metro por segundo. Como usaremos muitas vêzes as quantidades de movimento, introduziremsos o símbolo $\vec{p}$ para representá-la: $\vec{p} = m\vec{v}$.

Velocidade e quantidade de movimento, embora relacionadas, são coisas diferentes. O conhecimento da velocidade apenas nos indica a rapidez de um corpo e a direção em que êle se move. Nada nos diz sôbre o esfôrço necessário para comunicar-lhe o movimento ou para fazê-lo parar. A quantidade de movimento, por outro lado, nada diz sôbre a velocidade do objeto (ainda que nos diga a direção em que êle se move), mas determina o impulso necessário para colocá-lo em movimento ou para pará-lo. Resumidamente, velocidade é uma quantidade cinemática — ela dá uma descrição geométrica, enquanto a quantidade de movimento é uma quantidade dinâmica, ligada aos impulsos e, portanto, às causas das variações dos movimentos dos objetos.

Observe que a quantidade de movimento não depende do caminho segundo o qual o corpo adquiriu o movimento que possui; $\vec{p} = m\vec{v}$ nada mais contém que a massa e seu movimento no instante considerado. O impulso que colocou o corpo em movimento pode ter sido fornecido de um número infinito de maneiras (como aprendemos na última seção) ou então a massa sempre se moveu com a quantidade de movimento $\vec{p}$. Anàlogamente, o impulso requerido para levar a massa ao repouso pode ser aplicado de infinitas maneiras, ou pode não vir a ser aplicado; de qualquer forma, pela quantidade de movimento atual, sabemos qual seria o seu valor. Seria necessário um impulso igual a $-m\vec{v}$ para deter o corpo, quer usemos uma grande fôrça durante pouco tempo, quer uma pequena fôrça por longo tempo.

Devido à sua conexão com o impulso, que ocorre naturalmente na lei de Newton, $\vec{F}\triangle t = m\triangle\vec{v}$, é de se esperar que a quantidade de movimento se adapte bem à dinâmica newtoniana. Com efeito, Newton expressou sua lei do movimento em têrmos do produto $m\vec{v}$, que êle chamou quantidade de movimento. Podemos fàcilmente expressar a lei de Newton em têrmos da variação da quantidade de movimento, em vez da variação de velocidade: $\vec{F}\triangle t = m\,(\vec{v}' - \vec{v})$, onde $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ são as velocidades antes e depois do impulso $\vec{F}\triangle t$. Mas o segundo membro da última equação pode escrever-se $m\,(\vec{v}' - \vec{v}) = m\vec{v}' - m\vec{v} = \vec{p}' - \vec{p} = \triangle\vec{p}$, a variação da quantidade de movimento. Finalmente, dividindo por $\triangle t$ encontramos $\vec{F} = \triangle\vec{p}/\triangle t$; a fôrça é igual à taxa de variação da quantidade de movimento. Foi exatamente nessa forma, e não em termos de $\vec{F} = m\,\vec{a}$ que Newton formulou originalmente sua lei.

Para discutir o movimento de um único corpo, ambas as formas da lei de Newton são convenientes. A grande importância da quantidade de movimento ficará evidente nas próximas seções, onde consideraremos os movimentos de dois corpos que exercem fôrças um sôbre o outro.

23 — 3. Variações da Quantidade de Movimento quando dois Corpos Interagem.

Um menino e um homem estão de pé numa superfície gelada lisa, próximos um do outro. O menino empurra o homem e ambos começam a se mover, em sentidos opostos, o menino um pouco mais depressa do que o homem. Se realizar-mos tal experiência, verificaremos que, se duas pessôas estão em repouso, e uma empurra a outra, elas se movem em sentidos opostos. Também verificaremos que suas velocidades são inversamente proporcionais às suas massas. Por exemplo, se o menino tem 50 kg e o homem que êle empurra, 80 kg, e se o menino empurrar o homem com fôrça suficiente para que êste se mova a 0,25 m/s, constataremos que a velocidade do menino será de 0,40 m/s (Fig. 23-5).

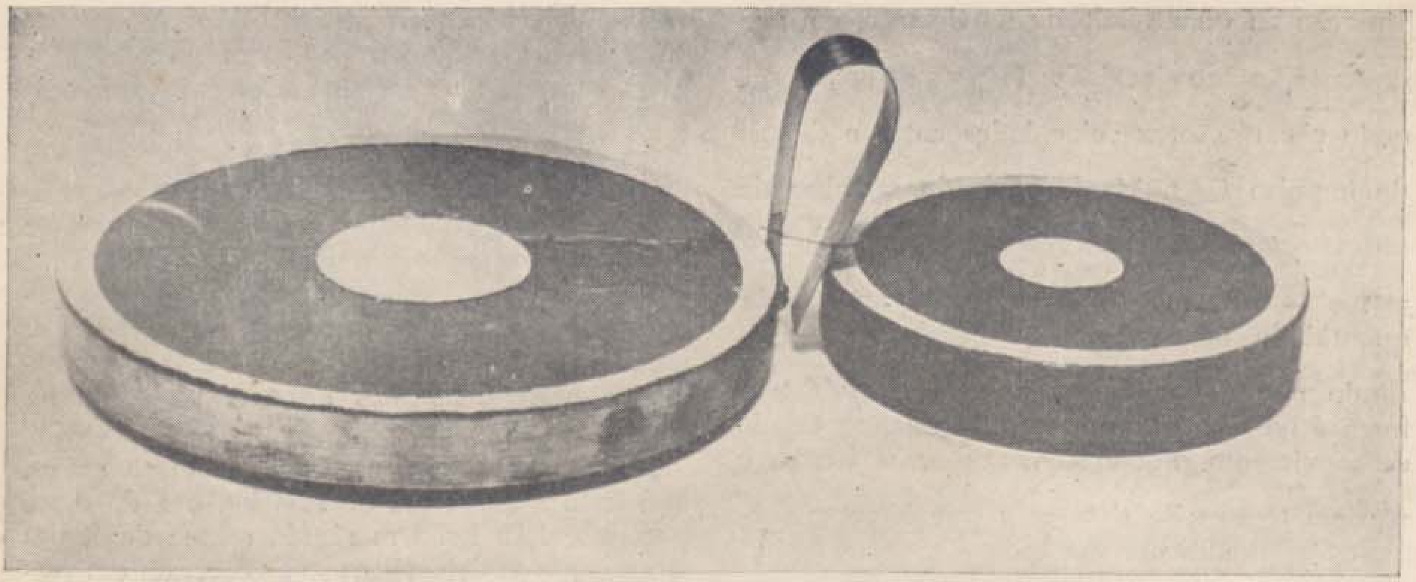
Êsses fatos experimentais são expressos mais fàcilmente em têrmos das quantidades de movimento do homem e do menino. A quantidade de movimento do homem é $mv = 80$ kg $\times$ $\times$ 0,25 m/s $=$ 20 kg. m/s, e a do menino, em sentido oposto, é $mv = 50$ kg $\times$ 0,40 m/s $=$ $=$ 20 kg. m/s. Após o empurrão, suas quantidades de movimento têm mesmo valor e sentidos opostos.

Com discos montados em suportes de gêlo sêco, podemos executar com precisão a experiência descrita acima. Fixamos a ponta de uma mola ao bordo de um dos discos, vergamos a mola e unimos as extremidades com um linha (Fig. 23-6). Depois colocamos um segundo disco junto ao primeiro, como se vê na figura. Quando cortamos o barbante, a mola se distende e bate contra o segundo disco, empurrando-o para longe do primeiro. Quando os dois discos estão em repouso numa superfície metálica horizontal, queimamos o barbante e vemos o que acontece quando a mola "explode". O movimento subseqüente dos discos é mostrado na Fig. 23-7.

Nesta experiência, a massa do disco maior, incluindo a mola, era de 2,28 kg, e a do disco pequeno, 1,10 kg. Um rápido exame da figura mostra que os dois discos se deslocaram em sentidos opostos, e que, em cada intervalo entre duas exposições consecutivas, o disco pequeno percorre maior distância do que o disco grande. O primeiro deve ter adquirido maior velocidade que o segundo. Fazendo medidas na fotografia, você poderá verificar que o disco pequeno se movia a 0,206 m/s após o empurrão, e o disco maior a 0,100 m/s. A quantidade de movimento, para a direita, do disco menor foi $mv =$ $=$ 1,10 kg $\times$ 0,206 m/s $=$ 0,227 kg. m/s, e a do disco maior, para a esquerda, era $mv =$ $=$ 2,28 kg $\times$ 0,100 m/s $=$ 0,228 kg. m/s. Dentro da precisão experimental, essas quantidades são iguais e opostas.

Observando-se o movimento de dois corpos que atuam um sôbre o outro e partem do repouso, constatamos sempre que as variações das quantidades de movimento são iguais e opostas. Não importa o que produz as fôrças de interação. Elas podem provir de nossos músculos, de uma mola deformada ou de uma explosão química.

Tomemos uma explosão química como outro exemplo. Quando um homem atira com uma uma carabina, os gases dos explosivos exercem fôrças violentas dentro da caixa da culatra. A bala é empurrada num sentido e a carabina no outro, para trás. Podemos mostrar que as quantidades de movimento da carabina e a da bala são iguais e opostas: suspendemos a carabina a uma corda comprida, fotografamos o movimento da bala utilizando um sistema conveniente de exposição múltipla, enquanto medimos diretamente o movimento muito mais lento da carabina. Nas condições normais o recuo da carabina é ràpidamente amortecido devido à re-



23-6 — Aparêlho usado para mostrar um tipo simples de explosão. Uma mola comprimida é colocada entre dois discos de gêlo sêco. A mola está parafusada ao disco maior e prêsa por um barbante.

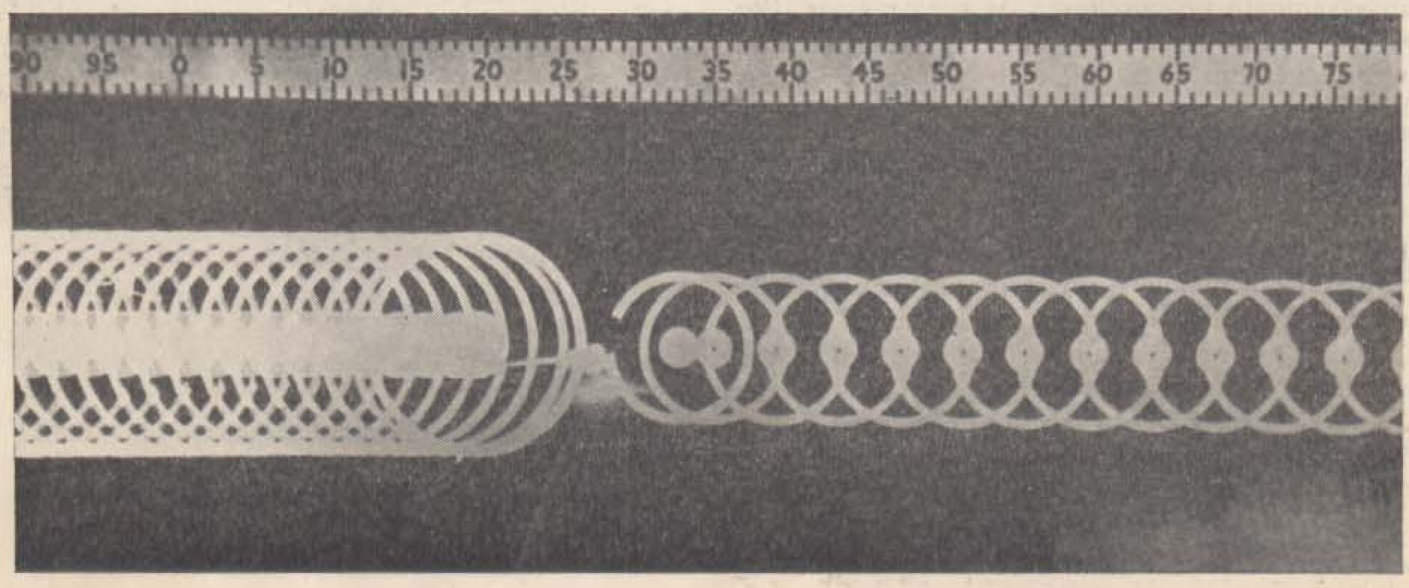
sistência do ombro do homem, e uma medida ulterior de sua quantidade de movimento não revela a igualdade e oposição tão claramente.

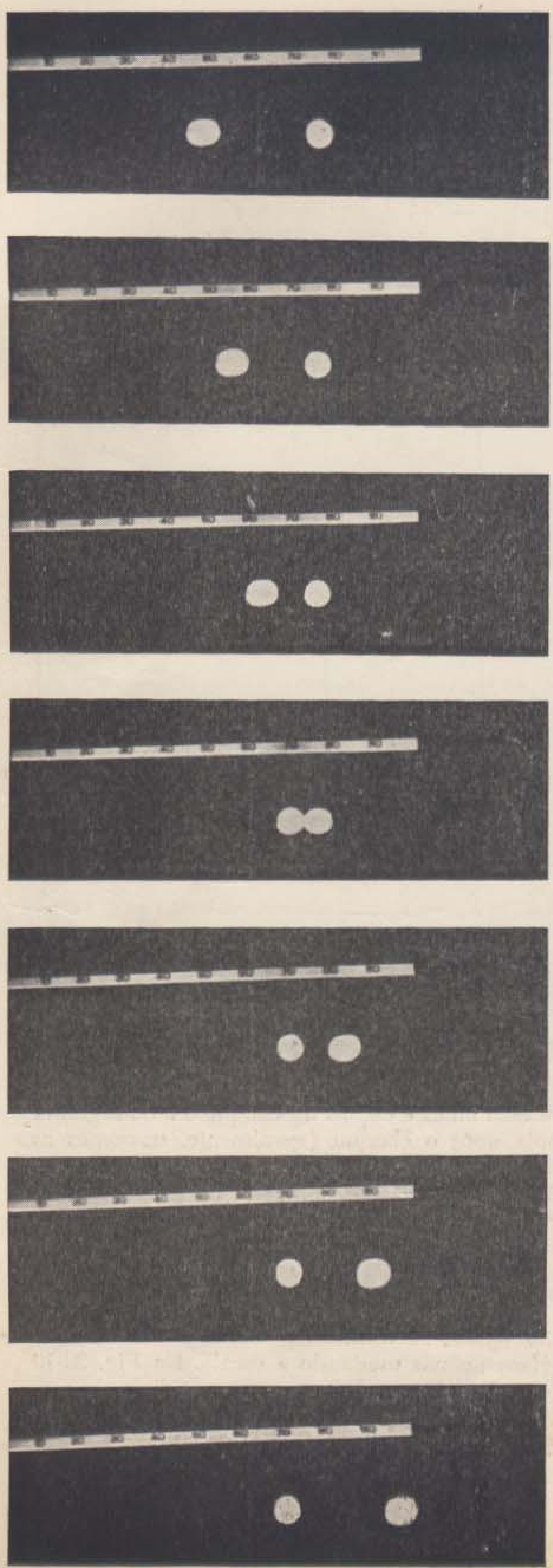
Até agora examinamos apenas casos em que os corpos que interagem estão inicialmente em repouso. Que podemos dizer sôbre as variações das quantidades de movimento de dois corpos que interagem, quando um dêles, ou ambos, estão inicialmente em movimento?

Na Fig. 23-8, uma bola de bilhar, em movimento, colide com outra, em repouso. A bola incidente pára e a outra passa a mover-se com a mesma velocidade que possuia a primeira. As duas têm a mesma massa. Portanto, a quantidade de movimento da segunda bola, após o impacto, é a mesma que a da bola incidente antes do choque. A bola incidente perdeu tôda a sua quantidade de movimento e a bola atingida ganhou exatamente a que foi perdida por aquela. As variações nas quantidades de movimento são ainda iguais e opostas.

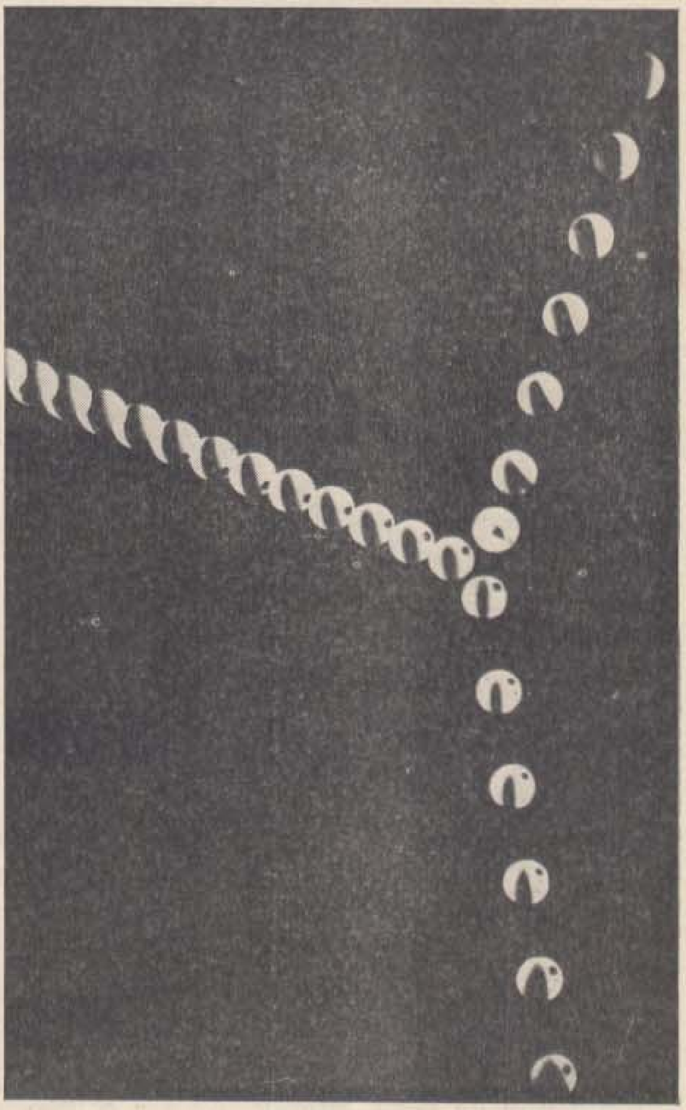
A colisão ilustrada na Fig. 23-8, é muito especial: a bola de bilhar incidente bate frontalmente na que está em repouso. Habitualmente uma bola de bilhar bate em outra um

23-7 — Fotografia de exposição múltipla do movimento dos dois discos depois de separados pela mola. As exposições foram feitas a intervalos de 5 segundos e a escala é em centímetros.

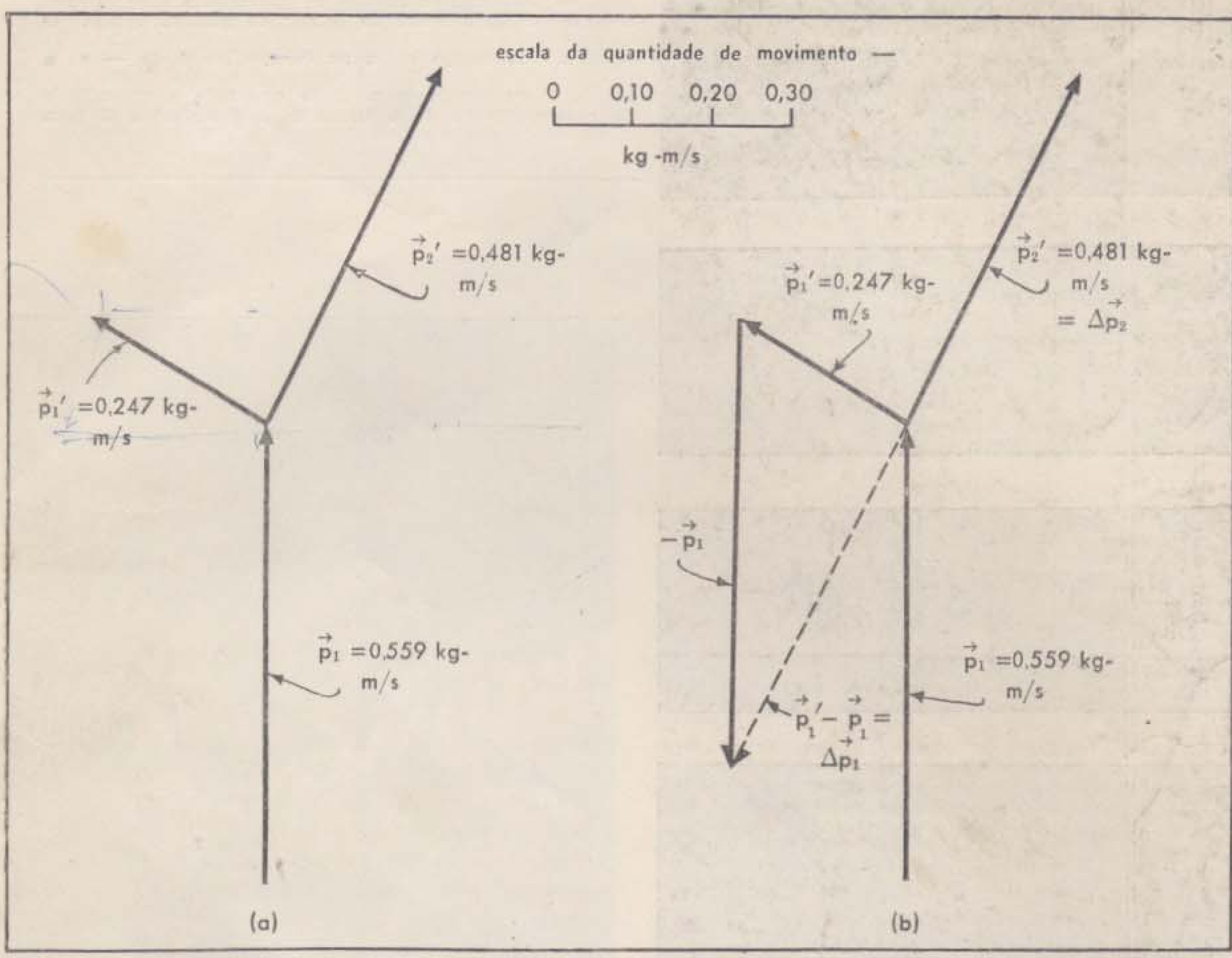




23-8 — Fotografias ampliadas mostrando uma colisão frontal de duas bolas de bilhar de massas iguais. O intervalo de tempo entre as fotografias é de $\frac{1}{48}$ s; a escala é em centímetros. Note que tôda a quantidade de movimento da bola incidente é transferida à bola inicialmente em repouso.



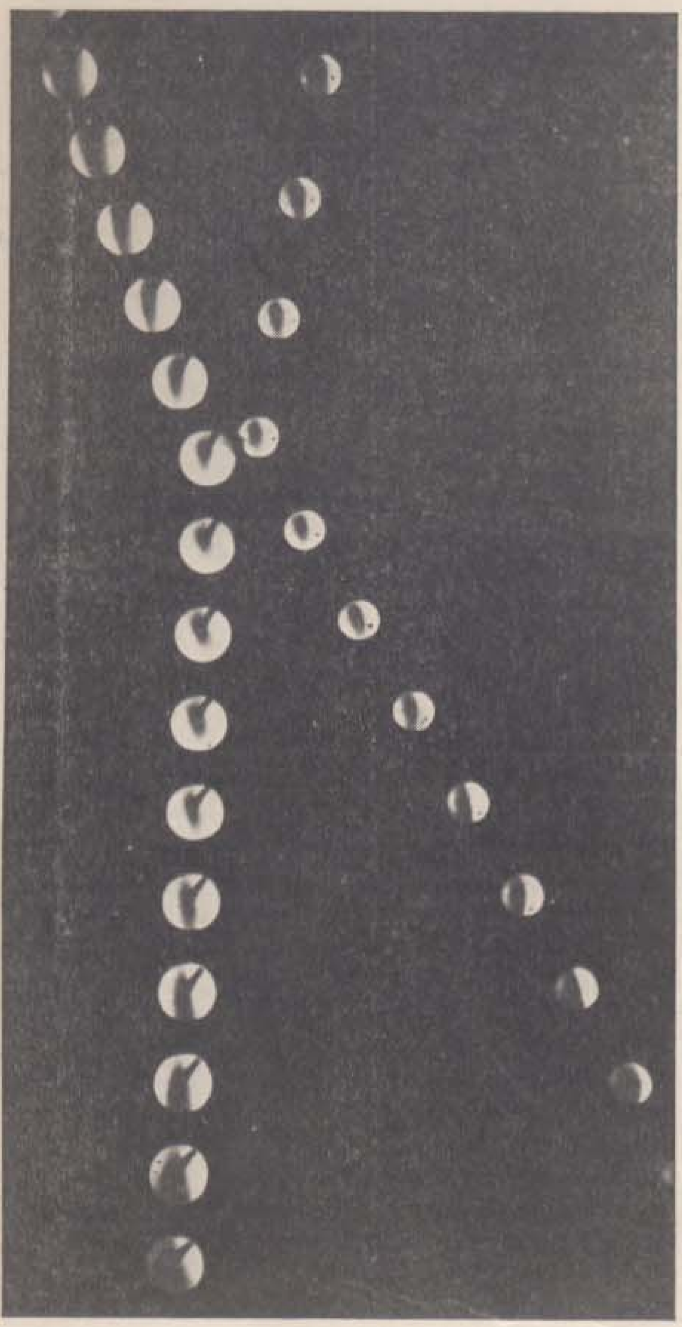
23-9 — Fotografia de exposição múltipla (30 exposições por segundo) de uma colisão lateral de duas bolas de massas iguais (173 g). A bola marcada com um ponto negro vem da parte inferior da fotografia, e atinge a bola marcada com uma risca e que estava em repouso. (A câmara apontava para baixo e as bolas se moviam horizontalmente). Para obter as velocidades e quantidades de movimento desenhadas na Fig. 23-10, levamos em conta o fato de que a fotografia tem cêrca de $\frac{1}{7}$ do tamanho real. Esquecer isto afetaria a conclusão de que $\overrightarrow{\Delta p_1} = - \overrightarrow{\Delta p_2}$?



23-10 — (a) Os vetores que representam as quantidades de movimento das bolas da Fig. 23-9; $\vec{p}_1$ é a quantidade de movimento inicial da bola marcada com um ponto; $\vec{p'}_1$ é sua quantidade de movimento após a colisão; $\vec{p'}_2$ é a quantidade de movimento adquirida pela bola que estava inicialmente em repouso. Em (b) obtemos $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p'}_1 - \vec{p}_1$ gràficamente. Subtraímos $\vec{p}_1$ de $\vec{p'}_1$ desenhando $-\vec{p}_1$ a partir do extremo de $\vec{p'}_1$, depois traçando a resultante (mostrada em linha pontilhada na figura). Note que $\Delta\vec{p}_1$, é muito aproximadamente igual e oposto a $\Delta\vec{p}_2 = \vec{p'}_2$.

pouco de lado, e as duas se afastam em direções diferentes. Tal colisão é ilustrada na Fig. 23-9, na qual a bola originalmente em movimento vem da parte inferior. Após a colisão, como poderíamos esperar, uma das bolas vai para a esquerda e a outra para a direita.

A série de instantâneos mostra as velocidades e direções das bolas tanto antes como após a colisão. As velocidades são medidas pelas distâncias percorridas entre as exposições. Destas velocidades, bem como das direções observadas, deduzimos os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v'}_1$, $\vec{v'}_2$, que representam respectivamente a velocidade da primeira bola antes e depois do choque e a da segunda bola após o choque (geralmente, usaremos as linhas, para distinguir as velocidades antes e depois da colisão). Obtemos, então, as quantidades de movimento das bolas multiplicando os vetores velocidade pelas massas de cada bola: $\vec{p} = m\,\vec{v}$. Como, neste caso, as massas das bolas são iguais, se usarmos $\vec{p}$ em lugar de $\vec{v}$, estaremos apenas mudando a escala. Na Fig. 23-10 (a), desenhamos os vetores quantidade de movimento $\vec{p}_1$, $\vec{p'}_1$, e $\vec{p'}_2$, que representam a quantidade de movimento da bola incidente antes da



23-11 — Fotografia de exposição múltipla da colisão de duas bolas — uma de massa 201,1 g e a outra de 85,4 g. Também aqui foram feitas 30 exposições por segundo e a montagem é idêntica à da Fig. 23-9. Ambas as bolas estavam inicialmente em movimento e vinham da parte superior da fotografia.

colisão, e as quantidades de movimento de cada bola após a colisão (como a segunda bola estatava em repouso antes do choque, ela não possuia quantidade de movimento inicial).

Vejamos, agora, se, nessa experiência, as quantidade de movimento das duas bolas sofrem variações de mesmo valor absoluto e sentidos opostos.

Na Fig. 23-10 (b), $\Delta \vec{p}_1$ é obtido gràficamente. Desenhamos $-\vec{p}_1$ a partir da extremidade de $\vec{p}'_1$. O vetor $\Delta \vec{p}_1$ é a resultante de $\vec{p}'_1$ e $-\vec{p}_1$. Vai da origem de $\vec{p}'_1$ à extremidade de $-\vec{p}_1$. Constatamos que $\Delta \vec{p}_1$ é igual à variação $\Delta \vec{p}_2$ da quantidade de movimento da bola que estava inicialmente em repouso; observe que $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}'_2$. A variação da quantidade de movimento da bola incidente é compensada por uma variação igual e oposta na quantidade de movimento da outra bola, isto é,

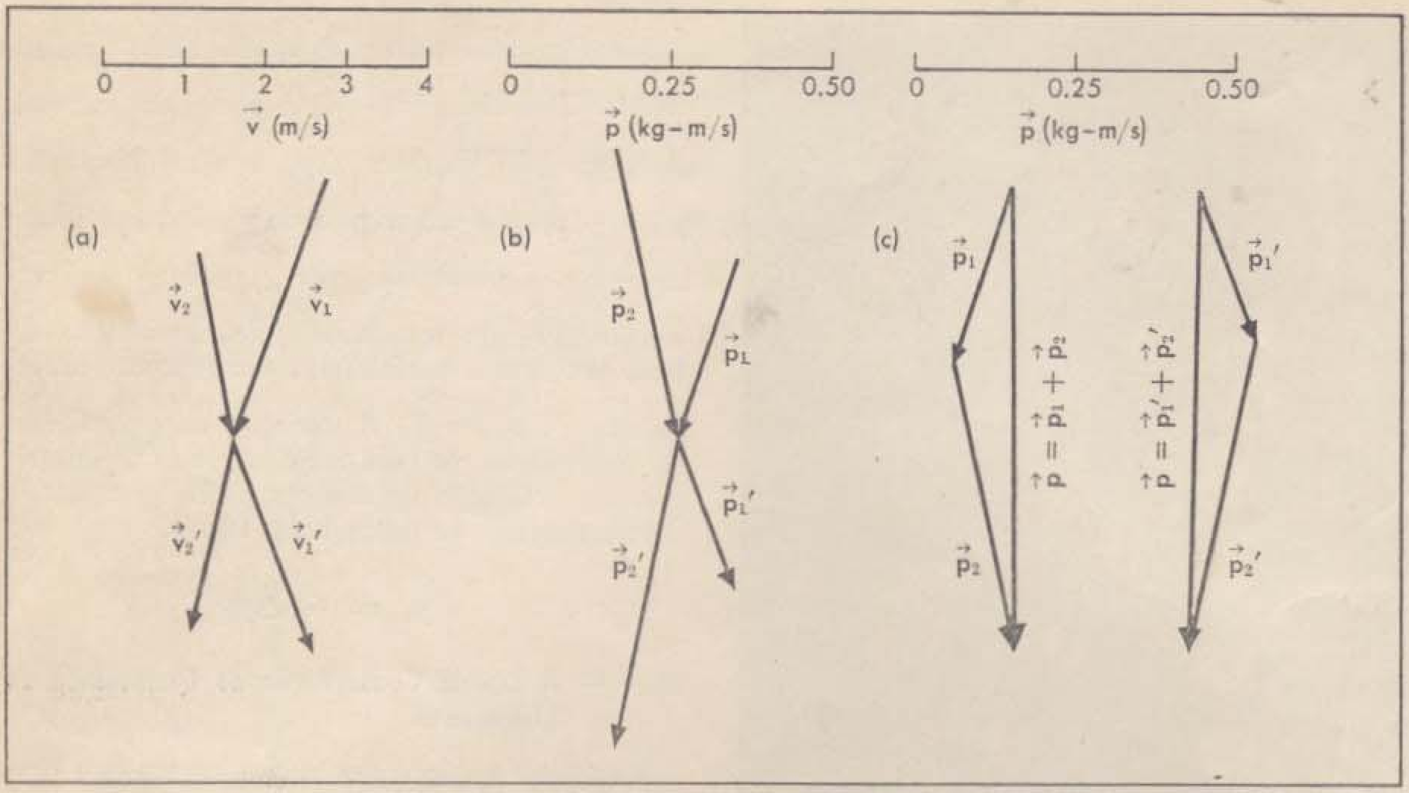
$$\Delta \vec{p}_1 = - \Delta \vec{p}_2$$

23.4 — A Lei da Conservação da Quantidade de Movimento

Na última seção vimos exemplos em que dois corpos interagem. O movimento de cada corpo varia, e a variação da quantidade de movimento de um é igual e oposta à do outro. À medida que prosseguirmos, encontraremos muitos outros exemplos semelhantes. Nenhum caso isolado pode fornecer uma prova geral de que as quantidades de movimento de dois corpos que interagem sofrem sempre variações iguais em valor absoluto e de sentidos opostos. Mas a experiência quotidiana com a interação de dois corpos, em todos os casos observados, sugere fortemente a regra geral segundo a qual, na natureza, as variações das quantidades de movimento sejam iguais e opostas.

Esta regra da natureza pode ser estabelecida de forma diferente. Introduzimos a quantidade de movimento total dos dois corpos $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Como as variações de $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ são exatamente iguais e opostas, a quantidade de movimento total nunca varia. Isto é, $\Delta \vec{P} = 0$, ou seja, $\vec{P}$ é constante. Chamamos *lei da conservação da quantidade de movimento* à afirmativa de que a quantidade de movimento total é constante.

Consideremos a conservação da quantidade de movimento quando colidem duas bolas de massas diferentes, ambas inicialmente em movimento. Tal colisão é ilustrada na Fig. 23-11.

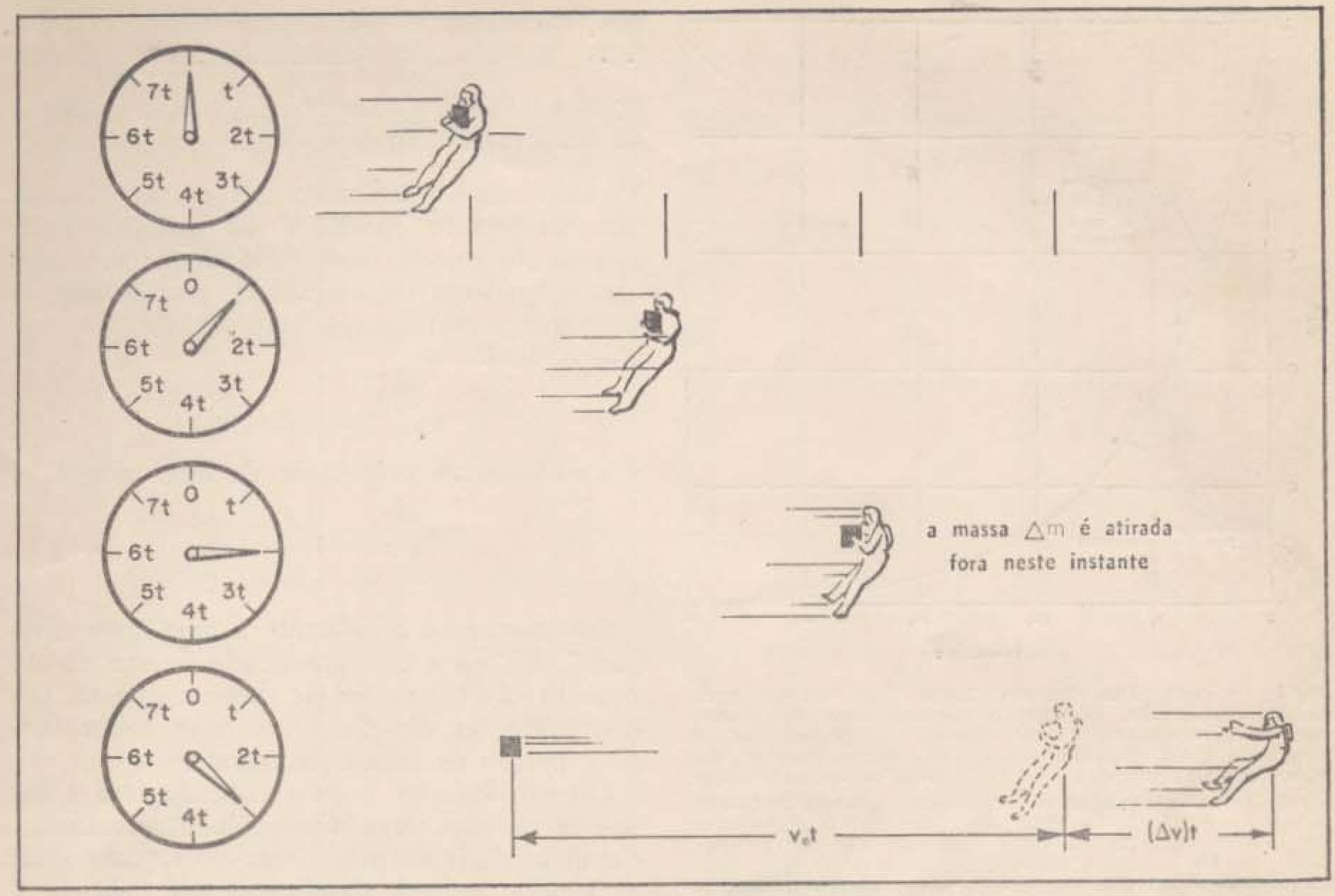


23-12 — (a) Os vetôres velocidade das bolas mostradas na Fig. 23-11. O índice 1 se refere à bola menor, e o 2 à maior. As "linhas" indicam velocidades e quantidades de movimento após a colisão. (b) Os vetôres quantidades de movimento antes e após a colisão. (c) À esquerda, somamos as quantidades de movimento antes da colisão. À direita está a sua soma após a colisão. Como você pode ver, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$. De fato, quando fizemos o desenho original, elas eram iguais com precisão de 1 parte em 200.

Determinamos as velocidades das bolas medindo as distâncias que elas percorrem entre exposições sucessivas. Os vetores velocidade estão indicados na Fig. 23-11 (a). Multiplicando-os pelas massas: 85,4 g, para a primeira, e 201,1 g, para a segunda, obtemos os vetores quantidade de movimento de cada bola, antes e depois da colisão [Fig. 23-12 (b)]. Na Fig. 23-12 (c) indica-se (à esquerda), a soma dos vetores quantidade de movimento de ambas as bolas antes da colisão e a quantidade de movimento total; à direita somaram-se os vetores quantidade de movimento das duas bolas após o choque. Vemos que os dois valôres medidos da quantidade de movimento total são quase precisamente os mesmos. O resultado desta experiência está, pois, de acôrdo com a lei da conservação da quantidade de movimento.

Tentemos mais um tipo de colisão: aquêle em que as duas massas aderem uma à outra e continuam unidas após o choque. A Fig. 23-13 mostra a colisão entre uma bola de golfe e uma bola de massa de vidraceiro, esta inicialmente em repouso. A massa da primeira é 45,7 g e a da segunda, 69,7 g. As massas combinadas das duas bolas juntas, após a colisão, somam, portanto, 115,4 g, isto é, 2,53 vêzes a

23-13 — Instantâneo da colisão de uma bola de golfe com uma de massa de vidraceiro. A bola de golfe veio da esquerda e atingiu a outra. As duas moveram-se juntas para a direita. Meça você mesmo a razão das velocidades inicial e final, e compare com o cálculo feito no texto.

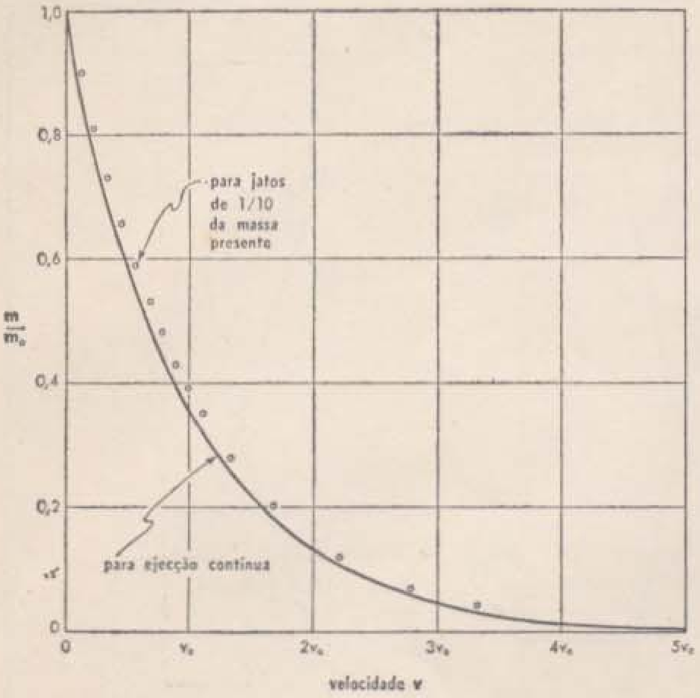


23-14 — Posições sucessivas, a intervalos de tempo iguais, t, de um homem que se move no espaço interplanetário. Nos dois primeiros quadros êle está se movendo com velocidade uniforme. No terceiro êle lança fora uma pequena massa Δm, com velocidade v_e em relação a seu movimento inicial. No intervalo seguinte seu "fantasma" se move com a velocidade inicial, enquanto a do homem é superior àquela em $\Delta v = \frac{\Delta m}{m} v_e$. Êle está, portanto, $(\Delta v)t$ à frente do "fantasma". A pequena massa está $v_e t$ aquém do "fantasma".

massa da bola incidente. Medindo a razão das velocidades antes e depois do choque, na série de instantâneos fotográficos, você verifica que a velocidade inicial é cêrca de 2,53 vêzes maior que a final. Portanto, a quantidade de movimento final é justamente igual à inicial.

De agora em diante, admitiremos a conservação da quantidade de movimento de dois corpos que interagem, considerando-a uma lei geral obtida a partir da experiência. Na verdade, foram experiências do tipo das que acabamos de descrever que levaram à lei de conservação. Pelo fato das colisões terem uma importância óbvia no desenvolvimento da mecânica, em 1668 a Sociedade Real de Londres (que tinha então apenas oito anos de existência) iniciou uma pesquisa do problema. Três homens competentes chegaram a conclusões quase idênticas: John Wallis, matemático inglês; Sir Christopher Wren, cientista e arquiteto inglês, que projetou a catedral de São Paulo; e Christian Huygens, físico holandês. Wallis foi o primeiro, cabendo-lhe por isso as honras de descobridor do princípio da conservação da quantidade de movimento.

Em uma memória publicada em 1669 e posteriormente em seu livro "Mechanica" (1670), Wallis desenvolveu idéias muito claras sôbre impulso, quantidade de movimento e a relação entre êles. Acreditava que um impulso que empurrasse um corpo a partir do repouso de maneira a fazê-lo chocar-se com outro, transmitiria a mesma quantidade de movimento ao corpo isolado ou aos dois corpos combinados após a colisão. Descobriu assim a conservação da quantidade de movimento para um tipo especial de colisão. Afirmou que a mesma lei se aplicava a outros tipos de colisão. Todos os seus



23-15 — (a) Um foguete lança fora massa para ganhar velocidade. A fração remanescente da massa inicial é representada em função da velocidade v atingida. Esta velocidade v é dada como múltiplo da velocidade de exaustão v_e. Os pontos isolados indicam a relação entre a massa e a velocidade quando lançamos jatos de $\frac{1}{10}$ da massa então presente. A curva contínua, um pouco abaixo, mostra essa relação quando a massa é expelida continuamente — essa curva é a exponencial.

argumentos envolvem, na realidade, suposições sôbre as fôrças ou impulsos durante as colisões. O físico francês Mariotte chegou às mesmas conclusões depois de uma série de experiências com pêndulos que podiam chocar-se. Huygens fez experiências semelhantes, e outras em que uma bola, movendo-se num trilho retilíneo, batia contra uma série de outras bolas iguais, em contato umas com as outras. Nos "Principia", Newton descreveu essas experiências e as que êle próprio realizou. A lei da conservação da quantidade de movimento foi estabelecida como um dos fundamentos da Física moderna.

23 — 5. Foguetes.

Pense num homem, vestido com um traje espacial, movendo-se no espaço interplanetário. Sua massa é m e êle segura na mão um pequeno objeto de massa $\triangle m$, que, evidentemente, se move no espaço à mesma velocidade que êle (Fig. 23-14). Num dado instante, o homem atira a massa $\triangle m$ com velocidade $\vec{v}_e$ em relação a seu movimento inicial; a pequena massa sofre uma variação de quantidade de movimento igual a $(\triangle m)\ \vec{v}_e$. De acôrdo com o princípio da conservação da quantidade de movimento, a velocidade $\vec{v}$ do homem sofre uma variação $\triangle v$, no sentido oposto, e sua quantidade de movimento sofrerá uma variação $m\triangle v$, exatamente igual em valor absoluto, mas de sentido contrário à variação $(\triangle m)\ v_e$ do pequeno objeto. Portanto

$$m\triangle\vec{v} = (\triangle m)\vec{v}_e$$

e a variação na velocidade do homem será

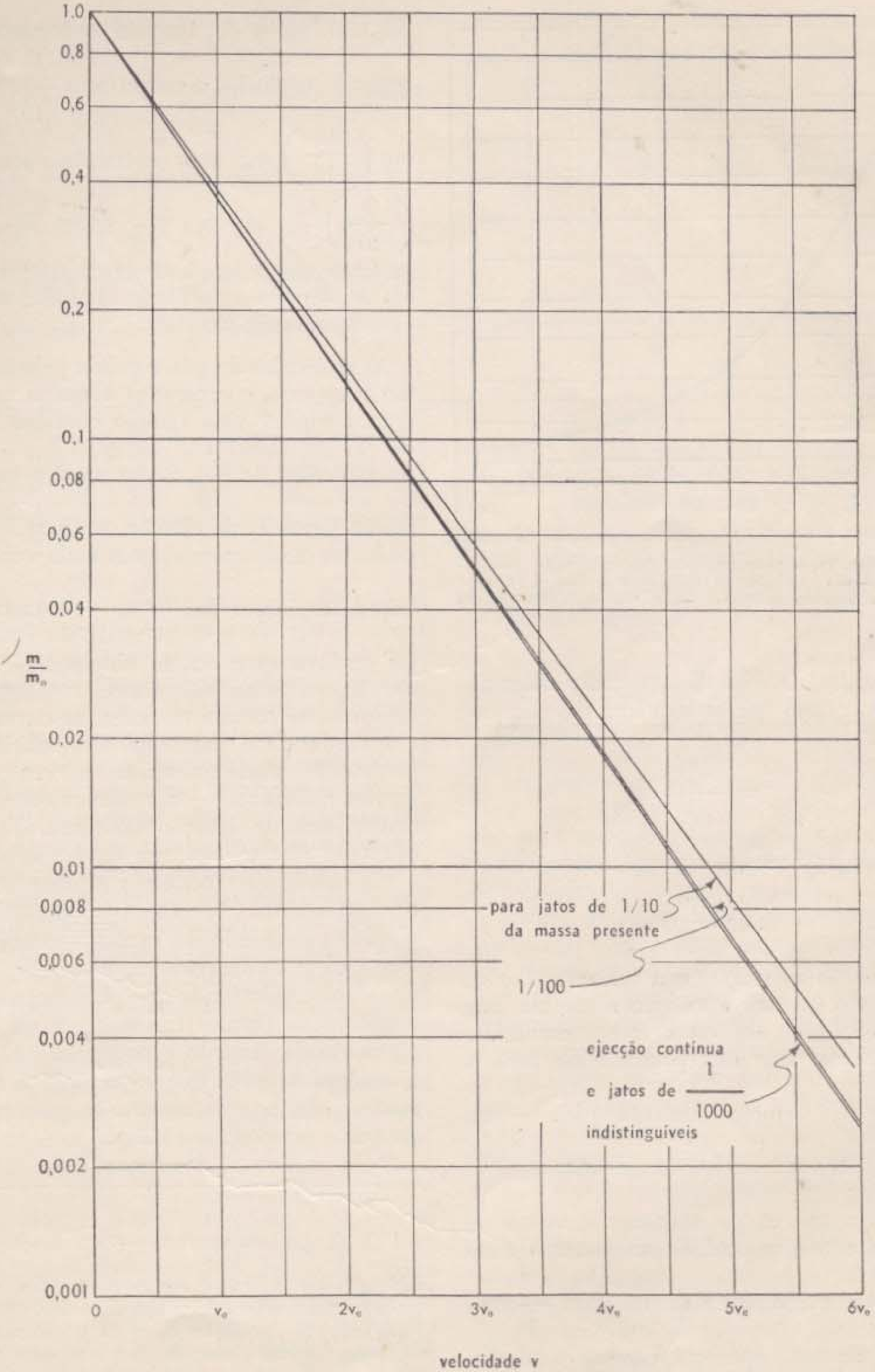
$$\triangle\vec{v} = \frac{\triangle m}{m}\ \vec{v}_e$$

Êste homem é semelhante a uma nave espacial: êle varia sua quantidade de movimento jogando fora massa. Se êle deseja aumentar sua velocidade na direção leste, deve atirar fora certa porção de massa para oeste.

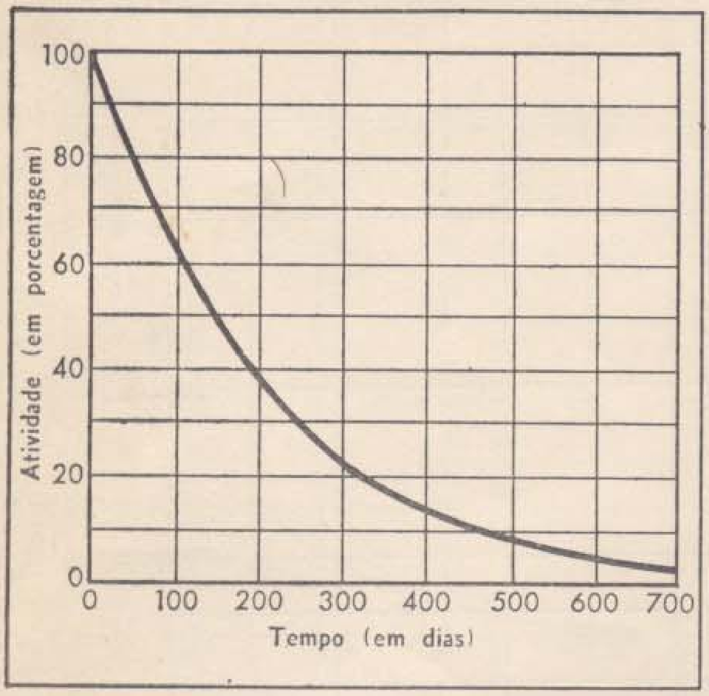
Em um foguete, a massa atirada fora é um jato de gás com elevada velocidade de exaustão, e a quantidade de movimento do foguete varia no sentido oposto. Precisamos ter cuidado e lembrar que m é a massa da nave *após* a ejecção da pequena massa $\triangle m$. Ela inclui o combustível, os passageiros, a fuselagem e tudo mais deixado a bordo.

Verifiquemos o que acontece a um foguete que expele massa à velocidade de exaustão constante v_e, em relação ao foguete. Como decresce a massa dêste à proporção que êle ganha velocidade? Para têrmos uma idéia da relação entre a redução de massa do foguete e o aumento de sua velocidade, imaginaremos que o combustível é expelido descontinuamente, em pequenas explosões. Consideremos, por exemplo, que uma dessas pequenas porções representa 1/10 da massa total m_t do foguete, no instante em que ela é expelida. Então, a cada explosão, 1/10 m_t é expelido e 9/10 de m_t continuam avançando mais velozmente. Vemos, portanto, que $\triangle m = \frac{1}{10}\ m_t$ e $m = \frac{9}{10}\ m_t$. Dividindo a primeira equação pela segunda, encontramos

$$\frac{\triangle m}{m} = \frac{1}{9}$$



23-15 — (b) Um gráfico semi-logarítmico da mesma relação. Distâncias iguais ao longo da escala vertical representam o produto da massa sempre pelo mesmo número. Por exemplo, quando $\frac{m}{m_o}$ varia de 1,0 para 0,1, ou de 0,1 para 0,01 (multiplicação por 0,1) as distâncias na escala vertical são iguais.



23-16 — A curva exponencial da desintegração radioativa do polônio (Seção 7-13). Mostra-nos a fração restante dos átomos originais após vários intervalos de tempo.

em cada explosão. Além disso, como verificamos no caso do homem que atirava fora um pequeno objeto,

$$\triangle v \doteq \frac{\triangle m}{m} v_e$$

Combinando as duas últimas equações, obtemos

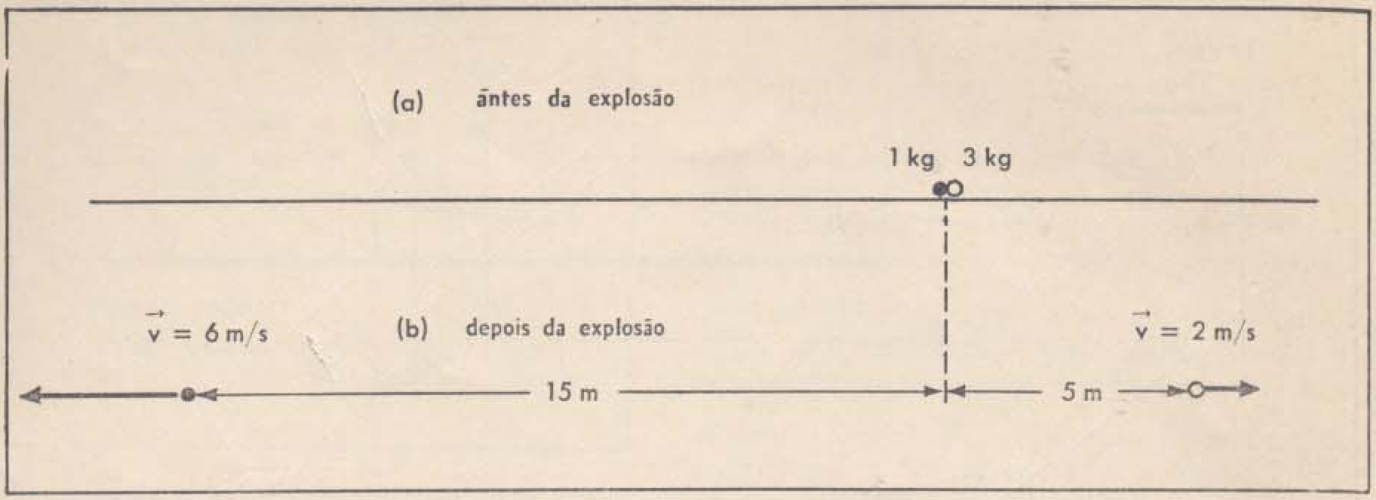
$$\triangle v = \frac{1}{9} v_e,$$

Esta equação mostra que a variação $\triangle v$ da velocidade do foguete é sempre a mesma para tôdas as explosões, se estas forem escolhidas adequadamente. Portanto, partindo de zero, a velocidade do foguete aumenta para $\frac{1}{9} v_e$, $\frac{2}{9} v_e$, $\frac{3}{9} v_e$, etc., em explosões sucessivas.

Vejamos, agora, o que acontece à massa do foguete quando a velocidade aumenta. A cada explosão, sua massa varia de m_t para $\frac{9}{10} m$. Conseqüentemente, após a primeira explosão, ela será $\frac{9}{10} m_o$, em que m_o é a massa total original, antes de lançado o foguete. Após a segunda explosão, a massa será $\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} m_o$, ou $\left(\frac{9}{10}\right)^2 m_o$; após a terceira, será igual a $\left(\frac{9}{10}\right)^3 m_o$, etc. Na Fig. 23-15, representamos gràficamente a fração restante da massa inicial em função da velocidade atingida, medindo-se esta como múltiplo de v_e

As moléculas do gás expelido pelo foguete são tão pequenas, comparadas à massa m, que podemos admitir uma ejecção contínua de massa. As explosões de $\frac{1}{10}$ da massa dão uma aproximação grosseira da ejecção contínua. Entretanto, podemos fazer aproximações cada vez melhores, usando explosões de $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ da massa, etc. Os gráficos que, então, obtemos (Fig. 23-15) são ligeiramente diferentes, mas, quando as explosões se tornam menores, as curvas tendem a se confundir e, para explosões suficientemente pequenas — ainda que muito maiores que as moléculas individuais — aproximamo-nos da curva matemática de ejecção contínua. Esta curva, chamada *exponencial*, nos dará a relação entre a velocidade que podemos esperar atingir e a massa restante. (*) Como só podemos atingir elevada velocidade de exaustão quando expelimos moléculas individuais, esta relação nos dá a mais alta velocidade que podemos atingir com determinada fração remanescente da massa. A curva do decaimento exponencial (Fig. 23-16) é análoga à curva que representa a fração remanescente de uma amostra radioativa à medida que o tempo passa (Cap. 7).

(*) Os gráficos mostram $\frac{m}{m_o}$ em função de $\frac{v}{v_e}$, a relação entre a massa remanescente e a velocidade. Nada mostram acêrca do tempo decorrido. A velocidade final depende apenas de v_e e da fração remanescente da massa original. Imaginando que o motor é desligado por algum tempo, você pode ver que o tempo gasto para queimar o combustível não afeta a velocidade final. Durante êsse tempo o foguete permanece com velocidade constante.



23-17 — Duas massas, uma de 3 kg e a outra de 1 kg, estão numa mesa horizontal sem atrito. Em (a) elas estão ligadas entre si por um cordão e comprimem uma mola. Seu centro de massa coincide com elas. Em (b) o cordão foi queimado e as massas se afastaram — a maior percorreu 5 m e a menor 15 m. Onde está agora o centro da massa?

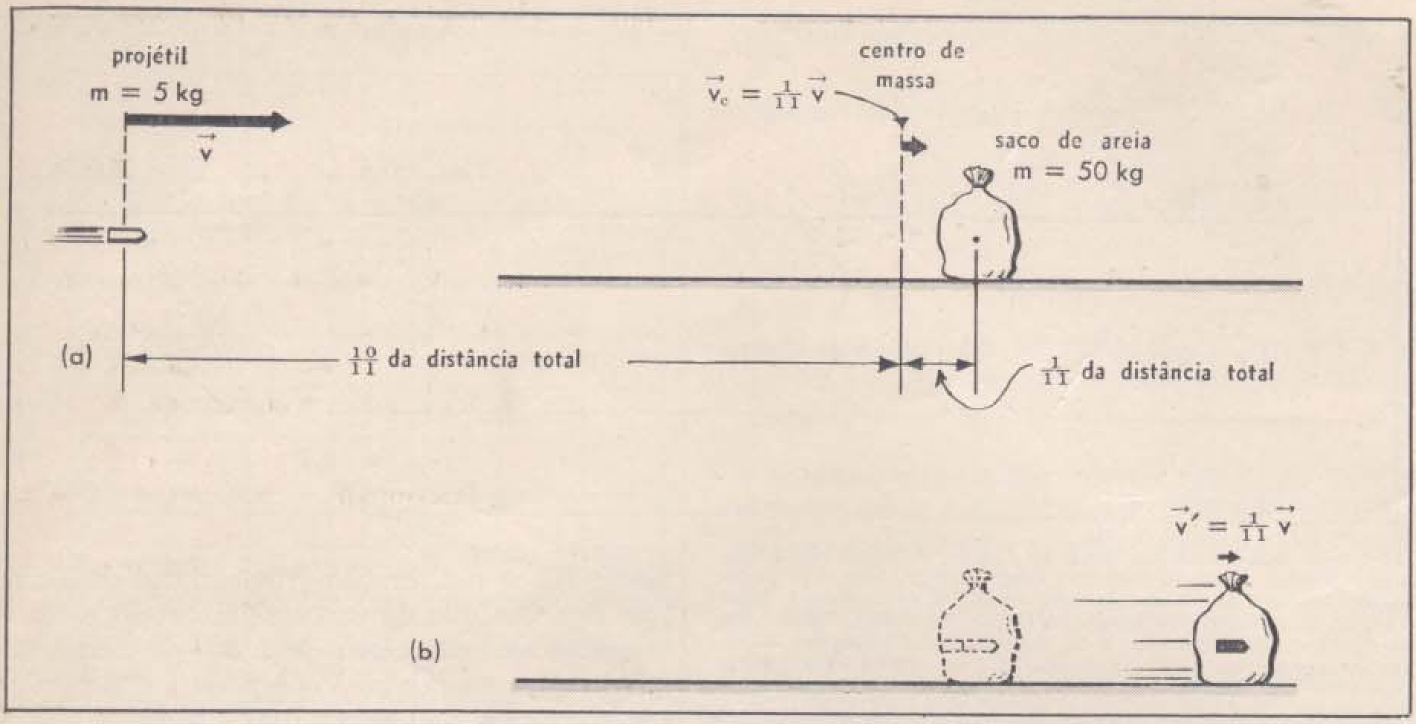
Podemos, agora, avaliar que parte da massa de um foguete deve ser expelida para colocar em órbita um satélite da Terra. Já sabemos que é necessária a velocidade de aproximadamente 8 km/s para ter-se movimento circular em tôrno da Terra. Para conseguir isto com um mínimo de perda de massa do foguete, precisamos fazer a velocidade de exaustão tão grande quanto possível. Qual o maior valor que podemos dar a v_e? Isto depende do combustível; para combustíveis químicos o melhor que podemos obter é aproximadamente 3 km/s. Tais combustíveis não são suficientemente poderosos para obtermos velocidades de exaustão mais elevadas. Além disso, provàvelmente ainda não conseguimos obter na prática, a velocidade máxima de exaustão. Usaremos, portanto, 2 km/s. Isto corresponde a temperaturas superiores a 3000°C para um gás, e sòmente um projeto engenhoso da fuselagem evita que grande parte do gás bombardeie a carcassa e a vaporize.

Para um foguete que deve circular em tôrno da Terra, se $v_e = 2$ km/s, teremos $\frac{v}{v_e} = \frac{8}{2} = 4$. Referindo-nos à Fig. 23-15 (b), vemos que, para essa razão das velocidades, a razão das massas, m/m_o, é 0,02 ou 1/50. Noventa e oito por cento da massa original tem de ser ejetada, para que os dois por cento restantes atinjam a velocidade de 8 km/s. Além disso, devemos colocar o foguete em sua órbita, forçando-o contra a resistência do ar e a atração gravitacional da Terra. Isto significa que devemos eliminar ainda maior massa, e sòmente cêrca de 1/200 da massa original entra em órbita. Você pode compreender, então, porque são necessárias toneladas de foguete para colocar-se em órbita um satélite de alguns quilogramas.

23 — 6. O Centro de Massa.

Imagine um rojão explodindo enquanto se move no ar. Após a explosão, se você visse todos os fragmentos de um mesmo lado da trajetória, você teria certeza de que alguma coisa estava errada. Êsse tipo de experiência nos ensina que os fragmentos em que se parte o rojão movem-se distribuidos de alguma maneira em tôrno da trajetória original. Existe um ponto especial, conhecido como *centro de massa* dos fragmentos, que se move sempre do mesmo modo, quer haja ou não uma explosão. Usando a lei da conservação da quantidade de movimento, podemos encontrar uma maneira de descrever êsse ponto, mas o raciocínio pareceria muito complicado se lidássemos com os vários fragmentos em que se dividiu o rojão. Por êste motivo discutiremos, nesta seção, o caso mais simples do centro de massa de dois fragmentos apenas.

Voltemos ao astronauta da última seção (Fig. 23-14). As duas massas que interagem serão o astronauta e o pequeno objeto que êle carrega. Suponha que, como o fantasma naquela figura, você está se movendo ao lado do astronauta, à mesma velocidade que êle, antes dêle atirar fora a massa Δm. Ora, ao fazer isto, êle se afastará de você com velocidade $\Delta\vec{v}$, e a



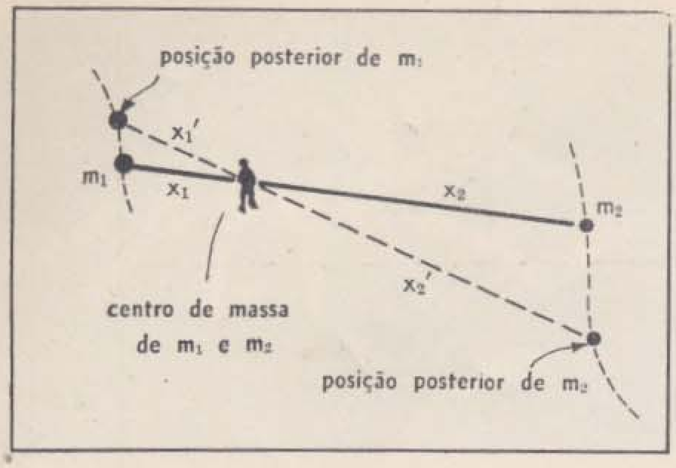
23-18 — (a) Um saco de areia de 50 kg está em repouso num piso sem atrito; um projétil de 5 kg aproxima-se dêle. O centro de massa está a $\frac{1}{11}$ da distância entre os dois corpos, mais perto do maior; o projétil move-se em direção ao saco com velocidade $\vec{v}$, mas o centro de massa se desloca com velocidade $\vec{v}_c = \frac{1}{11}\vec{v}$. (b) O projétl e o saco de areia continuam juntos, com a velocidade $\vec{v}' = \frac{1}{11}$ v.

massa $\triangle m$ se moverá em sentido oposto com a velocidade $\vec{v}_o$; você mantém seu movimento inicial. Além disso, as velocidades da massa e do homem, afastando-se de você, são inversamente proporcionais a suas massas.

Você está numa posição importante; mesmo que ficasse invisível, poderíamos dizer onde você se encontra, determinando o ponto que divide corretamente a distância entre a pequena massa $\triangle m$ e o homem de massa m. Êste ponto é completamente determinado pelas duas massas e por suas posições; êle se move como se nêle estivesse localizada a massa total $m + \triangle m$. É o centro de massa. Em resumo: o centro de massa de duas massas é o ponto que divide a distância entre elas na razão inversa das massas.

Vejamos um exemplo simples (Fig. 23-17). Coloca-se uma mola entre dois objetos, um de 3 kg e outro de 1 kg. Suponha que amarramos um ao outro os dois objetos de modo que a mola fique bem comprimida. A seguir queimamos o barbante: as massas se afastam, como numa explosão. Se a massa maior se mover a 2 m/s, a partir do instante em que a mola deixou de empurrá-la, a pequena deslisará a 6 m/s, pois a quantidade de movimento é conservada. Quaisquer que sejam as velocidades, a massa pequena se move três vêzes mais ràpidamente do que a grande, e num mesmo intervalo de tempo percorre uma distyncia três vêzes maior. Antes de queimarmos o cordão, o centro de massa se encontrava junto com as duas massa. Suponha que, após certo tempo, a massa pequena tenha percorrido 15 metros; então, a massa grande terá percorrido 5 m. Onde se encontra agora o centro de massa? As massas estão separadas pela distância de 20 m e o centro de massa divide esta distância na razão de 3 para 1. Êle se encontra a três quartos da distância entre as duas massas, contados a partir da massa menor, e a um quarto da mesma distância, contado a partir da massa maior, isto é, a 15 m da massa menor (Fig. 23-17); é o mesmo ponto que no início do movimento. Em outras palavras, o centro de massa permanece no mesmo lugar.

Suponha, agora, que, ao queimarmos o barbante, as duas massas combinadas estivessem em movimento. Êste movimento continua, tanto para as massas como para seu centro de massa. No instante da "explosão", devido à ação da mola, os movimentos das massas se modificam,



23-19 — O movimento de duas massas, visto quando nos movemos com o seu centro de massa. Elas estarão sempre em lados opostos do centro de massa, a distâncias inversamente proporcionais às suas massas.

mas êssas modificações não afetam o centro de massa. Êste continua simplesmente a se mover como se não tivesse ocorrido nenhuma "explosão".

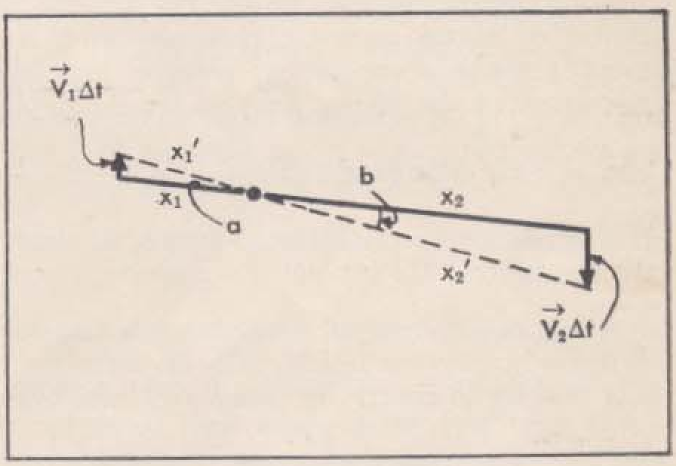
Vejamos, agora, o centro de massa de dois corpos que interagem de modo diferente. Suponha que atiramos horizontalmente um projétil de massa $m = 5$ kg num saco de areia de massa $M = 50$ kg. O saco de areia está originalmente em repouso, num piso horizontal sem atrito. Enquanto o projétil se aproxima dêle, onde está o centro de massa e como se move? Para determiná-lo, precisamos dividir a distância do projétil ao saco na razão de 10 para 1 (Fig. 23-18); conseqüentemente, o centro de massa estará a 1/11 da distância entre os dois corpos, contada a partir do saco. À medida que o projétil se aproxima dêste com a velocidade $\vec{v}$, o centro de massa sòmente se aproxima com a velocidade $\vec{v}_c = \frac{1}{11}\vec{v}$. Ao enterrar-se o projétil no saco de areia, êste e o projétil se movem com velocidade $\vec{v}'$. De acôrdo com a lei da conservação da quantidade de movimento, a massa total tem, agora, a mesma quantidade de movimento total $\vec{P}$ que, antes, possuia o projétil:

$$\vec{P} = (m + M)\,\vec{v}' = m\vec{v}$$

ou $$(5 + 50)\,\vec{v}' = 5\,\vec{v}.$$

Então, a velocidade v' do saco de areia mais o projétil será $\vec{v}' = \frac{5}{55}\vec{v} = \frac{1}{11}\vec{v}$

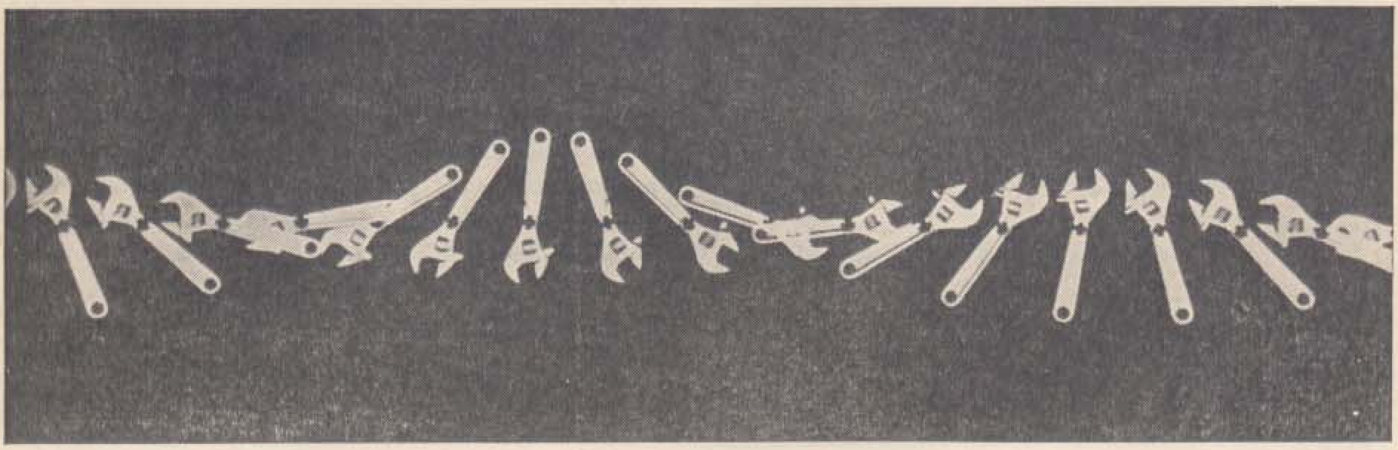
Esta é justamente a velocidade do centro de massa antes do choque. O centro de massa "enterrou-se" no saco de areia e continua a deslocar-se com a mesma velocidade que antes. Esta velocidade ($\vec{v}_c$ ou $\vec{v}'$) multiplicada pela massa total fornecerá sempre a quantidade de movimento total. Alguns técnicos em balística medem a velocidade $\vec{v}'$ do saco de areia e do projétil para determinar a velocidade inicial $\vec{v}$ do projétil.



23-20 — As massas da Fig. 23-19 movem-se durante um outro intervalo de tempo Δt; $\vec{V}_1\,\Delta t$ e $\vec{V}_2\,\Delta t$ são as distâncias percorridas. Os dois triângulos são semelhantes, pois ângulo a = ângulo b e $\frac{x'_1}{x'_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

Pode-se mostrar que o centro de massa de dois corpos que interagem sempre se comporta dêsse modo. Move-se como se tôda a massa estivesse concentrada nêle. Para nos convencermos de que é assim, suponha de nôvo que nos movemos com o centro de massa, acompanhando-o sempre, e observando o movimento das duas massas que interagem, m_1 e m_2, em relação ao centro de massa. As duas massas estão sempre de lados opostos em relação ao centro de massa. Suas distâncias a êsse ponto estão sempre na razão inversa de suas massas: se a distância de m_1 for x_1, a de m_2 será

$$x_2 = \frac{m_1 x_1}{m_2}.$$



23-21 — Fotografia de exposição múltipla ($\frac{1}{30}$ de segundo entre exposições) de uma chave inglêsa em movimento. A cruz preta indica seu centro de massa.

Se, num dado instante, as massas estão na posição indicada na Fig. 23-19, em relação ao centro de massa, pouco depois, devido a seus movimentos, elas estarão nas posições indicadas nos extremos das linhas pontilhadas. As distâncias x'_2 e x'_1 estão ainda na razão de $\frac{x_2}{x_1} = \frac{m_1}{m_2}$, pois medimos as distâncias a partir do centro de massa.

A Fig. 23-20 mostra o movimento das duas massas durante certo intervalo de tempo Δt. Em relação ao centro de massa elas se movem com velocidades $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$; $\vec{V}_1 \Delta t$ e $\vec{V}_2 \Delta t$ são as distâncias percorridas. Como os dois triângulos da figura são semelhantes, as distâncias $V_1 \Delta t$ e $V_2 \Delta t$ estão relacionadas pela igualdade

$$\frac{V_1 \Delta t}{V_2 \Delta t} = \frac{m_2}{m_1} \text{ ou } m_1 V_1 \Delta t = m_2 V_2 \Delta t$$

exatamente como

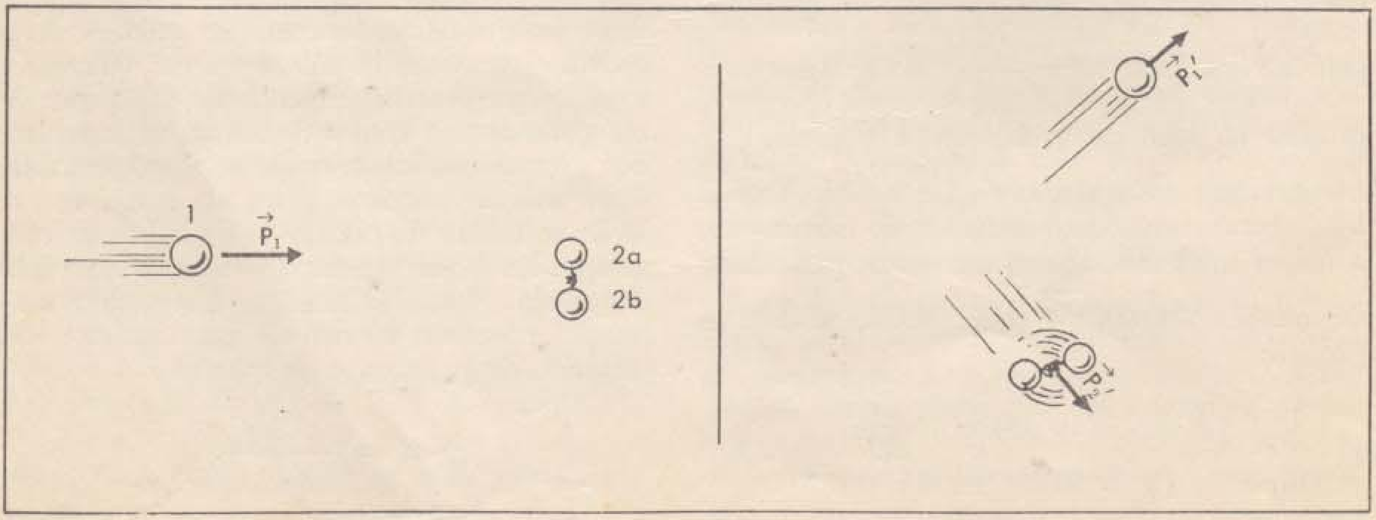
$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Além disso, vemos que $\vec{V}_2$ tem sentido oposto a $\vec{V}_1$. Conseqüentemente:

$$m_1 \vec{V}_1 = - m_2 \vec{V}_2$$

onde o sinal negativo indica que os sentidos são opostos. Em outras palavras, de nosso ponto de vista, quando nos deslocamos com o centro de massa, as quantidades de movimento de m_1 e m_2 são sempre iguais e opostas: a quantidade

23-22 — A bola única (corpo n.º 1) colide com o corpo n.º 2, constituído de duas partes a e b, ligadas por uma mola bem leve.



de movimento total $m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$ que observamos é sempre igual a zero.

Retornemos, agora, à Terra. O que um observador vê daqui? A velocidade $\vec{v}_1$ de m_1 que êle vê é composta da velocidade $\vec{v}_c$ do centro de massa, mais a velocidade $\vec{V}_1$ de m_1, em relação ao centro de massa, isto é:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_c + \vec{V}_1$$

Anàlogamente para v_2

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{V}_2$$

Conseqüentemente, a quantidade de movimento total de m_1 e m_2, em relação à Terra, será

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 =$$

$$= m_1\ (\vec{v}_c + \vec{V}_1) + m_2\ (\vec{v}_c + \vec{V}_2) \text{ ou}$$

$$\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{v}_c + m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2.$$

Entretanto, quando nos movíamos junto com o centro de massa, aprendemos que $m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$ é sempre zero. Temos, então, finalmente:

$$\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{v}_c$$

A quantidade de movimento total tem o mesmo valor que teria se tôda a massa se movesse concentrada no centro de massa.

As partes de um corpo podem se mover umas em relação às outras, em tôrno do centro de massa, afastando-se ou aproximando-se dêsse ponto. Em qualquer caso, o centro de massa se moverá como se tôda a massa estivesse concentrada nêle (Fig. 23-21).

Quando as duas massas interagem sòmente entre si, sabemos que $\vec{P}$, a quantidade de movimento total, é constante. Concluimos, portanto, que, nesse caso, a velocidade do centro de massa não varia. Êle age como um corpo único, sem fôrça resultante aplicada; o centro de massa se move de acôrdo com o princípio de inércia de Galileu. Como não há fôrças externas, mas sòmente a interação de m_1 e m_2, é interessante verificar que as duas massas que interagem atuam como um único corpo.

23 — 7. A Conservação da Quantidade de Movimento em Geral.

Vimos, neste capítulo, muitos exemplos de conservação da quantidade de movimento de dois corpos. A conservação da quantidade de movimento se aplica também ao caso de muitos corpos. Seguiremos, nesta seção, uma linha de raciocínio que nos mostra a relação entre a conservação da quantidade de movimento em geral e sua conservação para dois corpos. Na seção seguinte, esboçaremos uma nova linha de raciocínio mostrando a mesma conexão para o caso simples de fôrças "newtonianas". Nossa crença na conservação da quantidade de movimento para muitos corpos não se baseia apenas em raciocínio. Ela é sustentada também por um grande acúmulo de evidências experimentais.

Na Fig. 23-22, vemos o diagrama de dois corpos. Um dêles é uma única bola e o outro é constituido por duas bolas ligadas por uma mola bem leve. Suponha que o segundo corpo está em repouso e que o primeiro choca-se com êle, movendo-se com a quantidade de movimento $\vec{p}_1$. Após o choque, a bola n.º 1 afasta-se com quantidade de movimento $\vec{p'}_1$, e o corpo composto move-se com a quantidade de movimento $\vec{p'}_2$.

Sabemos, das experiências que vimos discutindo, que a quantidade de movimento dos corpos que interagem é conservada. Neste caso, antes da colisão, a quantidade de movimento total $\vec{P}$ é apenas $\vec{p}_1$, a quantidade de movimento do primeiro corpo. Após o choque a quantidade de movimento total, $\vec{P}$ é $\vec{p'}_1 + \vec{p'}_2$. Conseqüentemente,

$$\vec{p}_1 = \vec{p'}_1 + \vec{p'}_2.$$

Até aqui consideramos os dois corpos 1 e 2. Olhemos, agora, mais de perto o corpo 2. Êle é composto das bolas a e b. Sabemos, da última seção, que a quantidade de movimento, $\vec{p'}_2$ de seu centro de massa é a soma das quantidades de movimento das duas bolas de que êle é composto:

$$\vec{p'}_2 = \vec{p'}_{2a} + \vec{p}_{2b}.$$

Levando essa expressão de $\vec{p'}_2$ à equação precedente, obtemos

$$\vec{p}_1 = \vec{p'}_1 + \vec{p'}_{2a} + \vec{p'}_{2b}$$

Êste raciocínio mostra que a quantidade de movimento total é conservada para três corpos (1, a e b) tal como para dois — pelo menos quando dois dos três corpos estão ligados entre si. Mas o fato de as bolas a e b estarem ligadas por uma mola na realidade não importa; a mola não entrou no raciocínio. A quantidade de movimento $\vec{p}'_2$ do centro de massa do corpo 2 é constante e igual a $\vec{p}'_{2a} + \vec{p}'_{2b}$, independentemente de haver ou não mola unindo as duas bolas.

A experiência que acabamos de analisar não é diferente de algumas das outras que já consideramos. A Fig. 23-9 é uma fotografia de um corpo em movimento que se choca com outro que está em repouso. Se você olhar mais de perto essa fotografia, poderá ver que, após o choque, a bola que foi atingida gira, além de se deslocar como um todo. A quantidade de movimento que medimos para a bola atingida na Fig. 23-9 era, na realidade, a quantidade de movimento de seu centro de massa. Assim como podemos pensar na colisão que discutimos no parágrafo anterior como um choque de 3 corpos e não apenas de 2, poderiamos ter chamado a colisão descrita na Secção 23-3 de choque de 3 corpos, dividindo mentalmente a bola atingida em duas metades, por exemplo, a metade com a marca preta e a outra metade. Devido às fôrças que unem as duas metades, elas constituem dois corpos que interagem. Afinal de contas, o que chamamos de "um corpo" é escolha nossa. Podemos chamar de cadeira à coleção de braços e pernas, ou subdividir essa coleção em oito corpos chamados braços, pernas, assento e costas.

Considerando as bolas 1, a e b como um sistema de 3 corpos, mostramos que, quando 3 corpos interagem, a quantidade de movimento total permanece a mesma. A conservação da quantidade de movimento se aplica tanto a 3 corpos como a 2. Podemos ver, agora, que a conservação da quantidade de movimento não depende do número de corpos. Se temos um sistema qualquer de partes que interagem apenas entre si, um sistema isolado qualquer, podemos dividi-lo no número de corpos que quisermos. A mesma espécie de raciocínio que acabamos de fazer nos mostrará que a quantidade de movimento total não varia e não depende do que decidimos chamar "um corpo". A conservação da quantidade de movimento, portanto, aplica-se a qualquer sistema isolado. Esta parece ser uma lei perfeitamente geral. Qualquer experiência, com interações de qualquer tipo e com qualquer número de corpos, corrobora esta conclusão poderosa.

23 — 8. Fôrças de Interação.

Podemos relacionar de outro modo ainda a conservação da quantidade de movimento de dois corpos que interagem e a lei geral de conservação da quantidade de movimento. Esta linha de raciocínio envolve fôrças. Mostramos que as fôrças na interação de dois corpos são iguais e opostas. A seguir, consideramos um número qualquer de corpos interagindo e admitimos que as fôrças entre qualquer par de corpos são ainda iguais e opostas. Com esta suposição, verificamos que a quantidade de movimento total de todos os corpos é conservada.

Em qualquer interação entre dois objetos que estudamos, a quantidade de movimento se conserva; o que uma das massas perde, a outra ganha: $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$. Ademais, se indicarmos a fôrça que m_1 exerce sôbre m_2 por $\vec{F}_{1\text{-}2}$ e a que m_2 exerce sôbre m_1 por $\vec{F}_{2\text{-}1}$, então,

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_{2\text{-}1}\Delta t$$
$$\text{e } \Delta\vec{p}_2 = \vec{F}_{1\text{-}2}\Delta t$$

O Δt deve ser o mesmo para ambas as massas que colidem. Se eu o empurro, você automàticamente me empurra em sentido oposto, e eu não posso empurrá-lo por mais tempo do que você a mim. Assim,

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

torna-se

$$\vec{F}_{2\text{-}1}\Delta t = -\vec{F}_{1\text{-}2}\Delta t$$

O que leva, agora, a

$$\vec{F}_{2\text{-}1} = -\vec{F}_{1\text{-}2}$$

A idéia de que as fôrças de interação são iguais e opostas foi enunciada por Newton (após suas experiências sôbre a conservação da quantidade de movimento): "A cada ação opõe-se sempre uma reação igual, ou as reações mútuas de dois corpos um sôbre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos contrários." Êsse enunciado é chamado freqüentemente "3.ª lei do movimento", embora você possa ver que é uma lei a respeito das fôrças de interação, e que os movimentos são inferidos dela aplicando-se a lei do movimento de Newton a cada corpo.

Mesmo antes de estudarmos a quantidade de movimento, tínhamos estudado em detalhes uma fôrça de interação. No capítulo anterior, vimos que a atração gravitacional entre dois corpos produz fôrças iguais em cada um dos corpos, estando as fôrças dirigidas ao longo da linha que une os dois corpos e tendo sentidos opostos. A atração do Sol sôbre a Terra é igual e oposta à da Terra sôbre o Sol. A atração da Lua pela Terra é igual e oposta à da Terra pela Lua, e assim por diante. Mais tarde, nêste volume, estudaremos muitas vêzes o que acontece quando as fôrças são dessa espécie particularmente simples. Nós as chamaremos fôrças newtonianas.

Aceitemos, agora, a terceira lei de Newton para relacionar as fôrças entre dois corpos mesmo quando muitos corpos interagem. Podemos, então, usá-la para obter uma outra demonstração da conservação "universal" da quantidade de movimento. Temos numerosas massas que se movem de qualquer modo num sistema isolado, exercendo várias fôrças umas sôbre as outras. Como tôdas ocorrem em pares, com $\vec{F}_{2\text{-}1} = -\vec{F}_{1\text{-}2}$, seus efeitos sôbre as quantidades de movimento dos corpos também são iguais e opostos. Portanto, enquanto um corpo ganha certa quantidade de movimento, um outro perde uma quantidade igual e oposta, e o sistema isolado, como um todo, não sofre qualquer variação de quantidade de movimento.

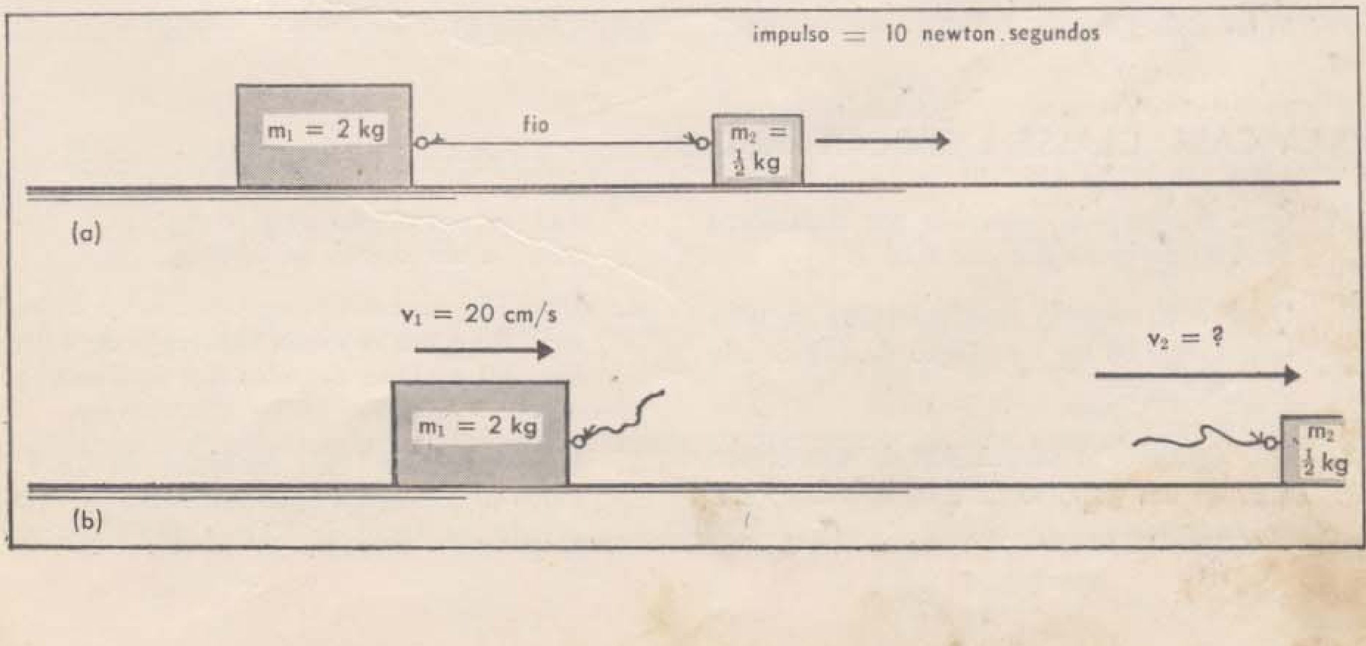
Se a terceira lei de Newton é verdadeira, dela decorre a conservação da quantidade de movimento. Mas é possível que a quantidade de movimento se conserve para muitos corpos mesmo se algumas das fôrças não forem newtonianas. Com efeito, como veremos na Parte IV, há fôrças que não são newtonianas.

Eis aqui um exemplo em que as fôrças evidentemente não são newtonianas. De vez em quando acende-se no espaço uma luz tremendamente brilhante — uma supernova. A intensidade da luz decresce exponencialmente, diminuindo por um fator $\frac{1}{2}$ a cada 55 noites (com a mesma meia-vida do nôvo elemento radioativo Californium). Em comparação com os milhões de anos-luz que a luz leva para vir de uma super-nova até nós, podemos dizer que a supernova apaga-se muito ràpidamente. Ela se queima muito antes de a luz chegar aqui.

Quando chega aqui, a luz proveniente de uma supernova nos empurra um pouco. Mas ninguém vai pensar que aplicamos à super-nova morta um impulso contrário no mesmo momento. Se pensamos nas fôrças de interação entre nós e a supernova no mesmo instante, não há razão para esperar que elas sejam iguais e opostas.

No entanto, a conservação da quantidade de movimento está inteiramente certa. O que devemos fazer é incluir a luz como um dos corpos

23-23 — Para o problema 8.



em nossa descrição do Universo. Quando a luz foi emitida, a estrêla deu-lhe um impulso e recebeu um impulso contrário. Uma parte dessa luz veio até nós transportando quantidade de movimento; e, quando chegou aqui, milhões de anos mais tarde, a luz nos impulsionou e nós a ela, de modo que, quando a luz foi absorvida aqui, sua quantidade de movimento foi transferida para nós.

Esta descrição pode não parecer tão desconcertante se retornarmos às pesosas que deslisam sôbre gêlo. Desta vez imaginamos que elas jogam bola. O homem joga a bola para o menino. Ao jogá-la, êle transmite à bola quantidade de movimento num sentido e recebe quantidade de movimento no sentido oposto. Logo após, quando o menino apanha a bola, a quantidade de movimento é transferida da bola para êle (naturalmente a massa da bola está incluida na sua depois que êle a apanha). As variações nas quantidades de movimento do homem e do menino com a bola são iguais e opostas. E a interação entre o homem e o menino ocorreu com um intervalo de tempo. Êsse intervalo é consideràvelmente mais curto do que o que decorre entre a emissão da luz por uma supernova e sua absorção na superfície da Terra; não obstante, é um intervalo de tempo mensurável e apreciável. Se esquecermos a bola, a interação entre o homem e o menino não parece newtoniana; e parece ter-se perdido certa quantidade de movimento durante algum tempo, enquanto a bola está no ar. Mas tudo faz sentido quando incluimos a bola no sistema; e, exatamente do mesmo modo, tudo faz sentido no caso da Terra e da supernova quando incluimos a luz.

Interpretar a luz como uma bola lançada pelo homem ao menino ajuda a tornar menos misterioso o intervalo de tempo na interação; e, faz com que tenhamos certeza de que a quantidade de movimento é ainda conservada na interação total. O lançamento da bola é um "modêlo" para a transmissão de luz — um modêlo em que podemos usar interações newtonianas. Na realidade, a luz não é uma bola — as bolas não aparecem quando lançadas, nem desaparecem quando detidas — mas com a luz acontece isso. Portanto, não devemos tomar o modêlo muito literalmente. Quando estudarmos interações com luz, campos magnéticos, etc., na Parte IV, continuaremos a imaginar modelos que preservem aparentemente o caráter newtoniano de nossa descrição; mas os modelos poderão parecer muito complicados e artificiais. Habitualmente, não nos incomodamos muito com êles, e nos mantemos fiéis à conservação geral da quantidade de movimento.

Examinando a emissão e absorção da luz (como faremos, até certo ponto, na Parte IV), verificaremos que a idéia de que a quantidade de movimento é transportada pela luz, forma um quadro coerente. Podemos e devemos estender a lei de conservação da quantidade de movimento além daquelas interações em que a quantidade de movimento é transportada ùnicamente por objetos materiais. Devemos incluir a quantidade de movimento transportada pela radiação. A desigualdade das fôrças entre a Terra e a supernova ocorre enquanto a quantidade de movimento é transportada. Há muitos outros exemplos semelhantes. A mesma espécie de fenômeno ocorre quando a radiação é emitida por um átomo e absorvida por outro. Quando incluimos a quantidade de movimento da radiação, a conservação da quantidade de movimento abrange todo o nosso Universo.

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO

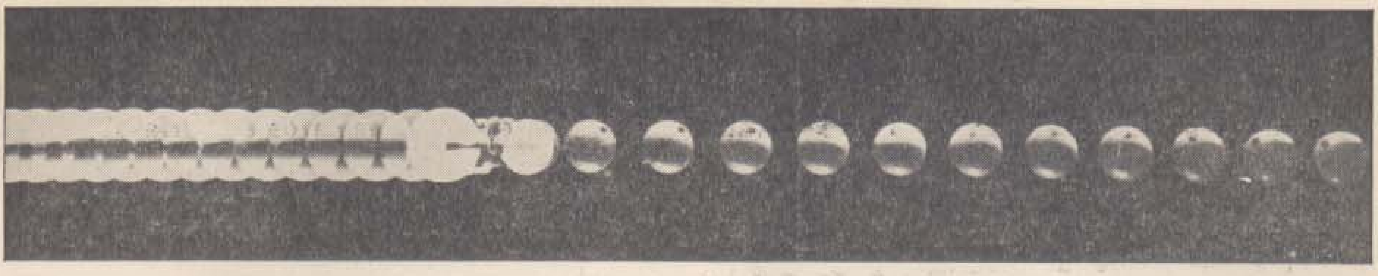
1. Qual é o impulso exercido por uma fôrça de 3,00 newtons durante 6,00 s?

2. Qual é o impulso que transmite a uma massa de 8,00 kg a variação de velocidade de 4,00 m/s?

3. Que acontece à velocidade de um objeto quando um impulso de 2,00 newtons$\times$s é aplicado.
   (a) a um objeto de 6,00 kg;
   (b) a um objeto de 3,00 kg.

4. Uma fôrça constante, aplicada a um objeto de 2,0 kg em repouso, desloca-o de 4,0 m em 2,0 s. Que impulso foi aplicado ao corpo?

5. Um esquiador, cuja massa é de 75 kg, move-se sôbre um chão horizontal à velocidade constante de 10 m/s. Devido a um



23-24 — Para o problema 9.

êrro de cálculo, êle acaba parando num banco de neve e gasta, para isso, 1,5 s.

(a) Que impulso a neve aplicou ao esquiador?

(b) Qual foi a fôrça média exercida pelo banco de neve para produzir esta variação de velocidade?

6. Um objeto, com massa de 10 kg, move-se com velocidade constante de 10 m/s. Uma fôrça constante atua, então, sôbre o objeto durante 4,0 s, dando-lhe uma velocidade de 2,0 m/s no sentido oposto.

(a) Calcule o impulso aplicado ao objeto.

(b) Qual a intensidade e o sentido da fôrça?

(c) Qual a quantidade de movimento do objeto antes e após a ação da fôrça?

7. Uma bola de 0,50 kg é lançada verticalmente para cima a 3,0 m/s.

(a) Qual a quantidade de movimento inicial da bola?

(b) Qual a quantidade de movimento no alto da trajetória?

(c) Que impulso deteve a bola? Por quanto tempo êle atuou?

(d) Se a bola tivesse massa de 1,0 kg, que alterações haveria nas respostas aos itens (a), (b) e (c)?

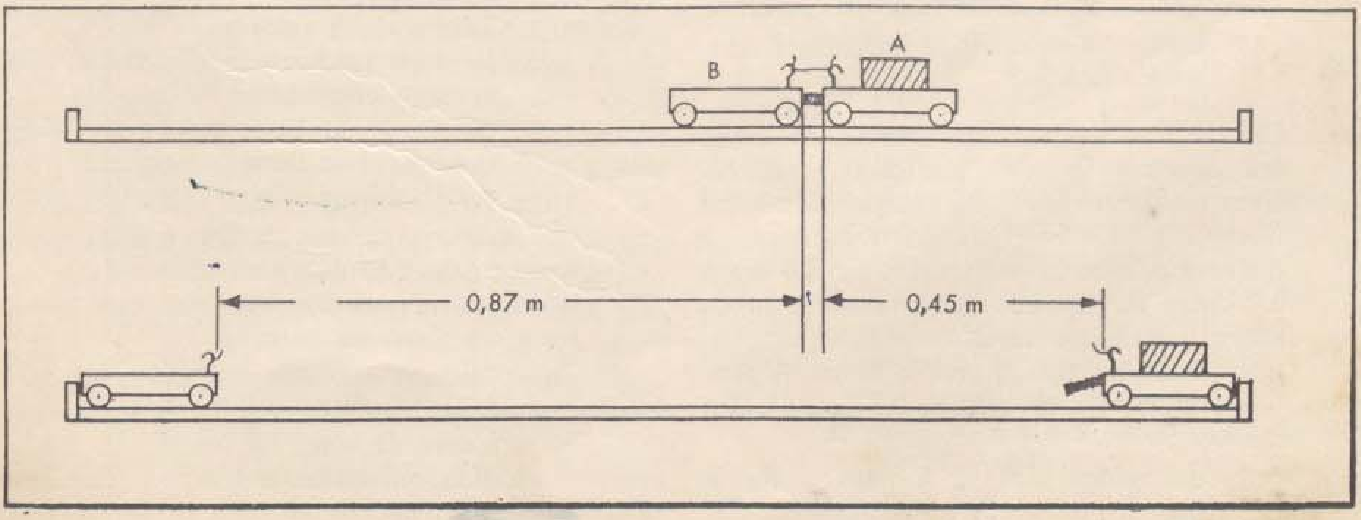
8. Um corpo é constituído de duas massas m_1 e m_2, de 2,00 kg e 0,500 kg, respectivamente, ligadas por um barbante leve [Fig. 23-23 (a)]. Êle se move sôbre uma mesa sem atrito, partindo do repouso. Colocamo-lo em movimento aplicando-lhe um impulso de 10 newtons×s, mas, infelizmente, o barbante que liga m_1 e m_2 rompe-se durante o impulso [Fig. 23-23 (b)]. Em conseqüência, m_2 afasta-se com grande velocidade, enquanto m_1 move-se, finalmente, com a velocidade de apenas 0,20 m/s.

(a) Qual o impulso que m_1 recebeu?

(b) Qual o impulso que m_2 recebeu?

(c) Que velocidade tinha m_2 no fim do impulso?

23-25 — Para o problema 13.



9. A Fig. 23-24 mostra uma fotografia de múltipla exposição de uma "explosão" de duas bolas de bilhar. A massa da maior é 201 g e a da menor, 85 g. O intervalo entre os instantâneos foi de $\frac{1}{30}$ s. Fazendo medidas sôbre a fotografia você poderá verificar de maneira simples a conservação da quantidade de movimento. Se você constata que as quantidades de movimento das duas bolas não são iguais em grandeza, como poderia você explicar isso?

10. Um homem está parado no meio de um lago gelado, sem nenhum atrito. Como conseguirá êle alcançar a margem?

11. Um carrinho de 20 kg move-se com a velocidade de 2,0 m/s. Um garôto cuja massa é 60 kg salta do carrinho. Quando atinge o solo, êle.
   (a) está se movendo com a mesma velocidade do carrinho;
   (b) não se move relativamente ao solo;
   (c) move-se com o dôbro da velocidade inicial do carrinho.

   Em cada caso, qual a variação na velocidade do carrinho?

12. O mesmo garôto está sôbre o mesmo carrinho do Problema 11 e move-se com a mesma velocidade inicial. Salta fora de nôvo, aplicando ao carrinho uma fôrça constante durante 0,20 s e dando ao carrinho um impulso para a frente de 20 newtons$\times$s.
   (a) Que fôrça êle aplicou?
   (b) Qual a velocidade final do carrinho?
   (c) Com que velocidade horizontal atinge êle o solo?

13. Dois carrinhos pesados sem atrito estão em repouso, ligados por um barbante. Uma mola bem leve está comprimida entre êles (Fig. 23-25). Quando o barbante é queimado, a mola se expande de 2,0 cm a 3,0 cm e os carrinhos se separam. Ambos batem no mesmo instante contra parachoques fixos na mesa, mas o carro A moveu-se 0,45 m e o carro B, 0,87 m. Qual a razão.
   (a) da velocidade de A para a de B após a interação?
   (b) de suas massas?
   (c) dos impulsos aplicados aos carrinhos?
   (d) das acelerações dos carrinhos enquanto a mola os empurrava?

14. Um vagonete de massa igual a 104 kg move-se sôbre um trilho a 2 m/s. Um segundo vagonete, de massa duas vêzes maior, aproxima-se dêle em sentido oposto. Se ambos colidem e param, com que velocidade se movia o segundo?

15. Um próton (massa $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) com velocidade de 1×10^{7} m/s, colide com um núcleo em repouso; o próton recua com a velocidade de 6×10^{6} m/s. O núcleo de hélio move-se para a frente com a velocidade de 4×10^{6} m/s após a colisão.
   (a) Pode você calcular a massa do núcleo de hélio? Se puder, qual é ela?
   (b) Pode você calcular a fôrça que agiu durante a colisão? Se puder, qual é ela?
   (c) Se você respondeu "não" às questões (a) ou (b), esteja preparado para discutir em classe porque deu essa resposta.

16. Na Fig. 23-26, a bola maior entrou na figura pela parte superior e a menor pela parte inferior. Como você vê, no meio ocorreu uma colisão.
   (a) Desenhe, na mesma escala, os vetores que representam as variações de velocidade da bola maior e da menor. Tome cuidado para que cada um esteja na direção e no sentido corretos.
   (b) Essas variações de velocidade têm sentidos opostos?
   (c) Têm mesmo valor?
   (d) Se seus valores são diferentes, qual a razão entre êles?
   (e) A massa da bola grande é 201 g. Qual a massa da bola pequena?

17. Uma estrêla dupla consiste de duas grandes massas que se atraem gravitacionalmente. Observando o movimento de ambas as massas, podemos ver que elas giram uma em tôrno da outra.
   (a) Na sua opinião, o que acontece à quantidade de movimento de cada massa de uma estrêla dupla, à medida que passa o tempo? Explique sua resposta.

(b) Quando observada cuidadosamente, a estrêla brilhante Sirius parece tremer, ao invés de mostrar um movimento uniforme do centro de massa. Dessa e de outras observações os astrônomos concluiram que Sirius tem uma companheira escura. Ela é, realmente, uma estrêla dupla. Como êsse fato explica o estranho movimento observado?

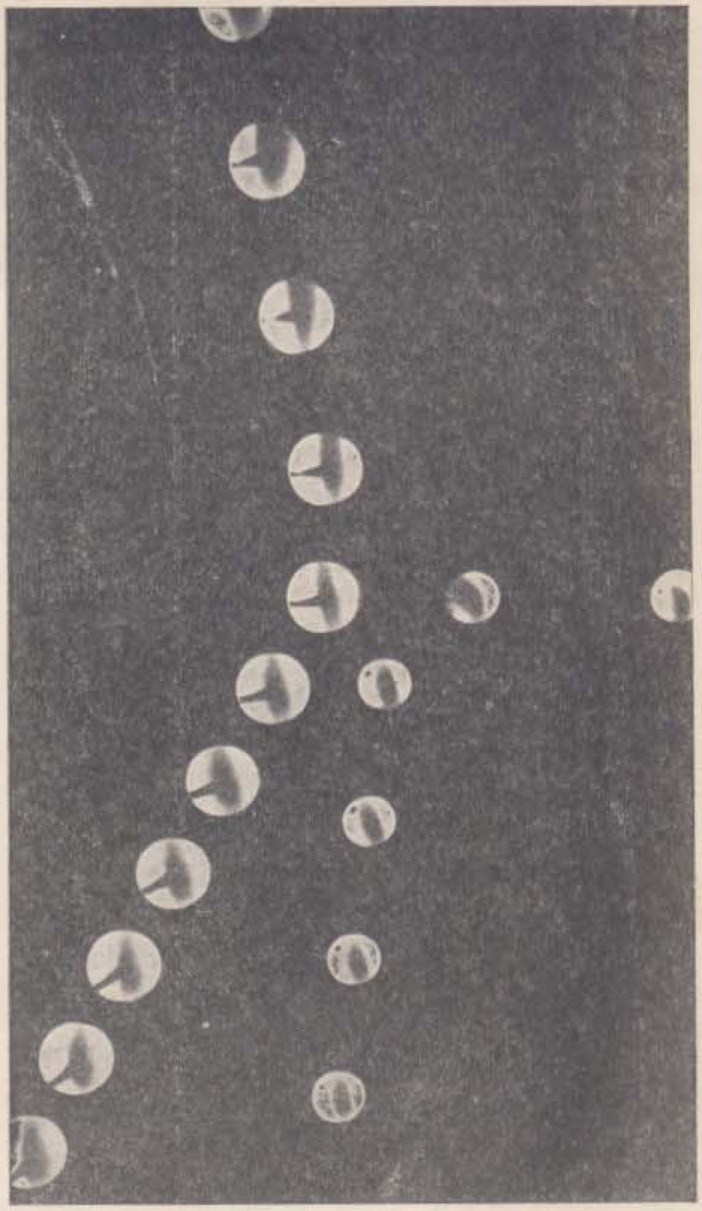
18. Um vagão carregado, de massa $3{,}0 \times 10^4$kg, choca-se com um carro frigorífico parado, de massa $2{,}0 \times 10^4$kg. Antes do impacto, o vagão movia-se a 1,0 m/s. Se, após o choque, êles se movem juntos, qual é a nova velocidade?

19. Quando um próton (massa $1{,}67 \times 10^{-27}$kg) colide com um nêutron (massa igual) os dois podem se unir formando um dêuteron (cuja massa é $3{,}37 \times 10^{-27}$ kg). Na realidade, o nêutron tem massa um pouquinho maior que a do próton e a massa do dêuteron é levemente menor que a soma das duas. Entretanto, essas diferenças são inferiores a 1 parte em 400. Com que velocidade o dêuteron se moverá, se êle é formado por um próton que se movia à velocidade de $7{,}0 \times 10^6$ m/s, para a direita, e um nêutron que se movia a $3{,}0 \times 10^6$ m/s para a esquerda?

Nota: Realmente, nesta colisão é emitido um raio X. A quantidade de movimento transportada pelo raio X é cêrca de 20% da quantidade de movimento final do dêuteron. Uma resposta que despreze êste dado conterá, portanto, algum êrro.

20. Uma mangueira de bombeiro, com bocal regulável, lança jatos de água para dentro de um caminhão que pode deslocar-se sôbre uma superfície horizontal com atrito muito pequeno. A água fica armazenada no tanque do caminhão.

(a) Suponha que a massa do caminhão seja de $4{,}5 \times 10^3$kg e que êle está em repouso quando o primeiro jato de água o alcança. A água incide nêle a 20 m/s, em direção horizontal, e o primeiro jato é de meia tonelada. Qual é a quantidade de movimento do caminhão depois de receber o primeiro jato? Com que velocidade êle se move?



23-26 — Para o problema 16.

(b) Lançamos, agora, um segundo jato no caminhão. A água se move à mesma velocidade (20 m/s) em relação ao solo. Que massa deve ter o segundo jato para que a velocidade do caminhão aumenta de novo da mesma quantidade?

(c) Se você aumenta a velocidade com que a água é lançada, de modo que todos os jatos se movem com a mesma velocidade em relação ao caminhão, como se modificaria sua resposta à parte (b)?

21. Um foguete está no espaço livre, lançando um jato de gases e ganhando velocidade

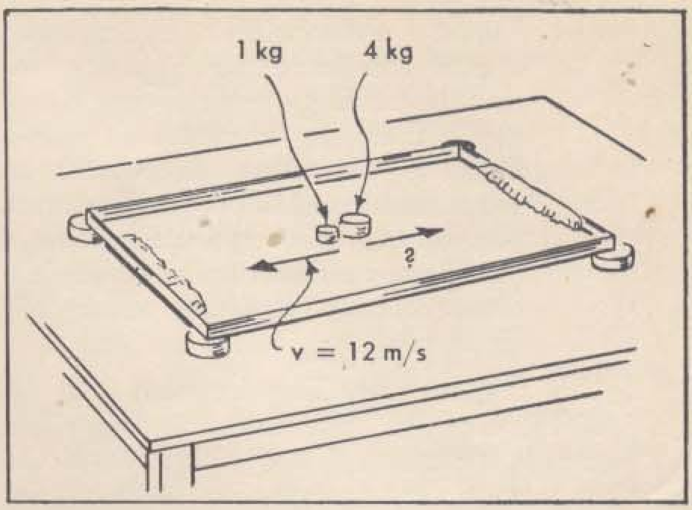
em sentido oposto. O que acontece ao centro de massa de tôda a matéria, a que é ejectada e a que é deixada no foguete?

22. Numa tentativa infrutífera para colocar em órbita um satélite, o foguete transportador, movendo-se verticalmente para cima a 3000 m/s, explode e se fragmenta em dois pedaços. Um dêsses continua para cima, num ângulo de 45.° com a vertical e com velocidade de 3500 m/s, imediatamente após a explosão.
    (a) Qual é velocidade do outro pedaço, sendo sua massa igual a 0,60 da massa do primeiro?
    (b) Qual a velocidade do centro de massa do foguete logo após a explosão?
    (c) Qual a variação de velocidade do centro de massa durante 1 segundo logo após a explosão?

23. Um tijolo de 2,0 kg, é jogado, sem movimento horizontal, num carrinho de 2,0 kg que se move numa mesa horizontal, sem atrito, a 0,40 m/s.
    (a) Qual a variação de velocidade do carrinho?
    (b) Qual a velocidade do centro de massa do sistema composto pelo carrinho e pelo tijolo antes dêste ser jogado?

24. Uma metralhadora atira dez projéteis por segundo a uma velocidade de 600 m/s. A massa de cada projétil é 100 g.
    (a) Que impulso a metralhadora transmite aos projéteis em 10 s?
    (b) Que impulso os projéteis aplicam à metralhadora em 10 s?
    (d) Esboce gráficos aproximados de
        (i) Fôrça *média* sôbre a metralhadora em função do tempo;
        (ii) Fôrça *real* sôbre a metralhadora em função do tempo.
    (e) Como estão relacionados os gráficos (i) e (ii)?

25. Uma explosão divide uma rocha em três partes. Dois pedaços são lançados em direções perpendiculares entre si; um dêles tem massa de 1,0 kg e é lançado a 12 m/s, o outro, de 2,0 kg, é lançado a 8,0 m/s. O terceiro pedaço voa a 40 m/s.
    (a) Faça um desenho mostrando a direção em que êle é lançado.
    (b) Qual a sua massa?



23-27 — Para o problema 26.

26. O sistema indicado na Fig. 23-27 consiste em uma armação de 5,0 kg com duas massas no meio, uma de 1,0 kg e a outra de 4,0 kg. Em cada extremo da armação há aparadores feitos de massa de vidraceiro. As duas massas e a armação são montadas sôbre discos de gêlo sêco (as massas dos discos estão incluidas nos valôres dados acima). O centro de massa de todo o sistema está no centro da armação. Uma explosão separa as duas massas, a de 1,0 kg saindo com a velocidade de 12 m/s. Finalmente as duas massas são detidas pela massa de vidraceiro.
    (a) Qual a velocidade da massa de 4,0 kg logo após a explosão?
    (b) Onde está o centro de massa de todo o sistema após 1 s? Após 2 s?
    (c) Qual a velocidade da armação e das massas ligadas a ela após 100 s?
    (d) Descreva o movimento qualitativamente, a partir do instante da explosão até 100 s.
    (e) A que distância se move a armação?

LEITURA COMPLEMENTAR

EHRICKE, K. A., and GAMOW, GEORGE. "A Rocket to the Moon". *Scientific American*, Junho 1957. Uma descrição elementar da velocidade, da órbita e do combustível necessário para que qualquer objeto volte à Terra depois de uma viagem à Lua.

HOLTON, GERALD, *Introduction to Concepts and Theories in Physical Science*. Addison — Wesley, 1952. O Capítulo 16 trata da conservação da quantidade de movimento.

TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA

CAPÍTULO 24

Embora a energia possa ser difícil de definir precisamente, ela é para nós um conceito familiar. O alimento é o combustível que nos fornece a energia necessária para viver e trabalhar. Necessitamos outros combustíveis também: madeira, carvão e gasolina liberam grandes quantidades de energia térmica, para aquecer casas, cosinhar ou mover os nossos carros. Prometeu, ou quem quer que tenha acendido o primeiro fogo, ensinou ao homem como usar a energia da luz solar que as árvores armazenam ao crescer. Durante milhares de anos, o homem usou a energia liberada pelos combustíveis para aquecimento e coisas semelhantes e, em pequena escala, para artes e ofícios. Até muito recentemente, o trabalho pesado era feito pelos músculos. Entretanto, desde a revolução industrial, o homem tem usado cada vez mais os combustíveis para substituir o esfôrço muscular. A queima de combustíveis fornece, atualmente, a maior parte da energia que aciona fábricas e maquinária agrícola, trens, automóveis, navios e aviões. Tôda essa energia dos combustíveis contribui significativamente para nosso confôrto material. Uma boa medida do bem estar material de um país é a quantidade de combustível gasta, durante um ano, por cada cidadão.

Na linguagem diária, muitas vêzes, falamos de energia no seguinte sentido: levantamos pela manhã, dispostos a realizar uma tarefa ou a aceitar um desafio. Talvez tenhamos energia para ceifar um campo, limpar a casa, ou jogar futebol, basquete ou tênis. Mas, depois de trabalhar algum tempo, sentimo-nos cansados e dizemos haver perdido tôda energia. Alimentação nutritiva e uma noite de repouso restabelecerão nossa capacidade de realizar tarefas. Êste significado comum da palavra "energia" está ìntimamente relacionado com o conceito científico de energia.

Naturalmente poderiamos ceifar o campo com uma ceifadeira mecânica, em lugar de usarmos nossos músculos. Motores elétricos, máquinas a vapor e motores a gasolina podem realizar tarefas úteis, e todos requerem combustível. E, para o corpo humano, considerado como máquina, o alimento é o combustível. Estes fatos sugerem uma conexão íntima entre a energia e os combustíveis que permitem às máquinas e aos músculos realizar tarefas úteis.

Algumas tarefas não necessitam combustível: sustentar um telhado, deslizar sôbre um lago gelado sem atrito, usar logarítmos. Depois de certo esfôrço inicial, cada uma dessas tarefas pode ser executada por alguma coisa que não consome combustível: uma coluna de concreto, quantidade de movimento não consumida, uma tabela impressa de logaritmos. Em nosso estudo da energia, não estaremos interessados nesses tipos de tarefa. Lidaremos apenas com "tarefas que consomem combustível", tais como elevar um carro teleférico, movimentar uma ceifadeira, aquecer uma casa, acelerar um trem. Por enquanto, diremos que a energia é o que há de essencial na execução de certas tarefas — não a criação de energia, mas sua passagem de uma forma a outra.

24 — 1. Transmissão de Energia.

As tarefas são realizadas pela passagem da energia de uma forma para outra, ou de um lugar para outro — por exemplo, de energia armazenada no combustível para energia de um trem acelerado; de calor num ebulidor a calor numa sala. Os combustíveis, portanto, contêm energia sob forma armazenada, disponível para o uso. Certa quantidade de combustível contém certa quantidade de energia. Você verá, mais tarde, que a energia nunca é criada ou destruída, mas apenas transformada (passa de uma forma a outra ou de um lugar a outro). É como o dinheiro, que apenas muda de mãos quando alguém compra alguma coisa.

Consideremos o que poderíamos fazer com a energia armazenada na gasolina. Poderíamos queimar a gasolina num motor de automóvel e usar a energia para o carro subir uma ladeira. Ou poderíamos queimar a gasolina sob um ebulidor onde a energia ficaria armazenada sob forma de calor no vapor. Êste pode se dilatar e mover um pistão que pode elevar uma carga, realizando assim nova transformação de energia. A carga pode, então, ser amarrada a um carro, por uma corda què passe num roldana e, se a carga cair, ela pode puxar o carro e fazê-lo subir o aclive. A energia foi de nôvo transformada e, pelo menos parte da energia do combustível, terminou elevando o carro, por um processo indireto. No estágio final, a energia armazenada no sistema carga-elevada é transferida ao sistema carro-elevado. Uma explicação minuciosa, descrevendo as transformações de energia por tarefas ou por combustível (ou por trabalho, que discutiremos a seguir), mostra que a energia não é criada nem perdida; a energia se conserva.

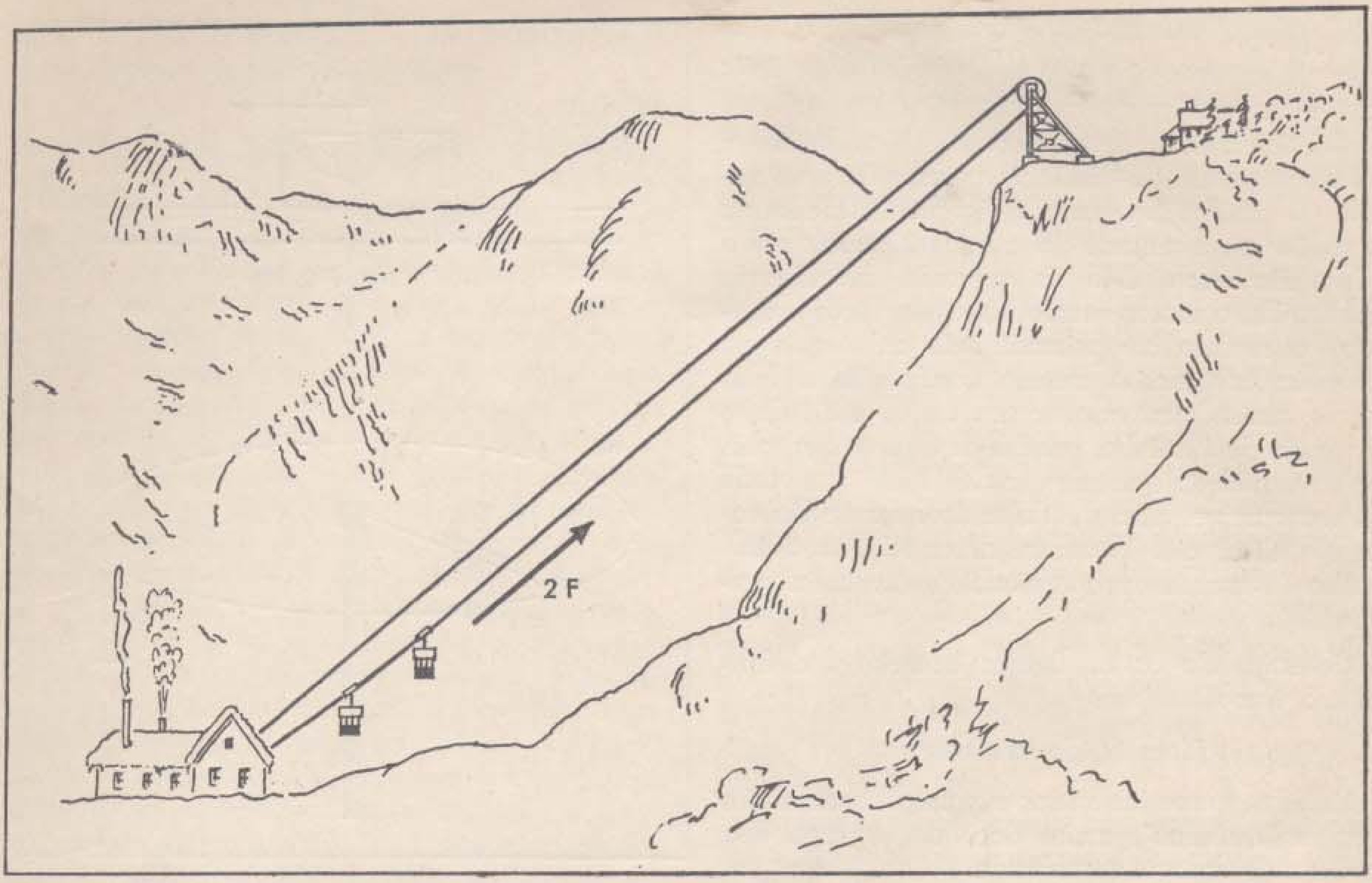
24 — 2. Trabalho: Uma Medida da Energia Transferida.

Quando a energia é transferida em alguma tarefa que use combustível, podemos medir a transferência, isto é, o custo da tarefa, de duas maneira: (a) pelo número de tarefas unitárias (por ex., o número de campos a serem ceifados, ou o número de casas a serem aquecidas), ou (b) pela quantidade de combustível gasto (por ex., o número de litros de gasolina).

Nas tarefas que acabamos de descrever, exercem-se fôrças e movem-se coisas. Dizemos que se realizou trabalho nessas transferências de energia e, agora, desenvolveremos a idéia de trabalho como uma medida precisa e fidedigna da energia transferida. Por enquanto, usaremos trabalho com o significado de medida da tarefa feita ou do combustível gasto. Note que essas duas medidas de transferência de energia concordam entre si. Pense numa tarefa qualquer: você verá que o número de tarefas unitárias e o combustível usado são proporcionais. Para realizar duas tarefas iguais necessitamos duas vêzes mais combustível do que para uma única. Por exemplo, com dois litros de gasolina na ceifadeira, podemos segar o dôbro da área que conseguimos com apenas um litro.

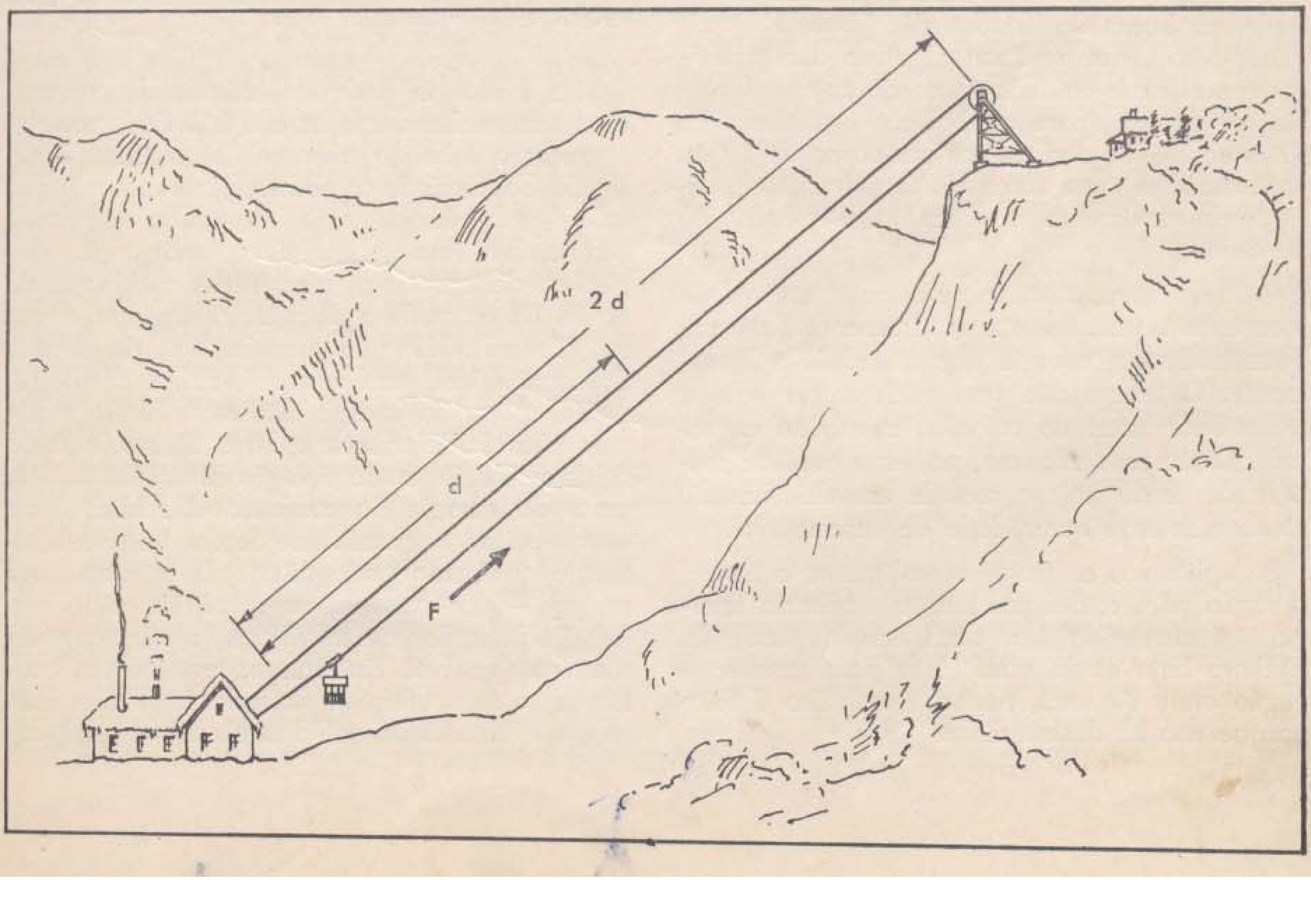
Queremos, agora, encontrar uma combinação de fôrça e movimentos que sirva como medida da energia transferida. Procuramos, portanto, uma combinação que seja proporcional ao combustível usado e ao número de tarefas unitárias realizadas. A esta combinação denominaremos "trabalho".

Suponha que um motor a gasolina puxe vagões por cabo, até o cimo de uma montanha. De que maneira o combustível consumido nessa tarefa depende da *fôrça* exercida pelo cabo? Certa quantidade de combustível é necessária para elevar um vagão puxando-o com determinada fôrça ao longo de determinada distância. A mesma quantidade de combustível será necessária para arrastar um segundo vagão idêntico ao primeiro. O combustível usado para arrastar dois vagões é o dôbro do que se usa para arrastar um só, porque a tarefa é dupla. Ademais, poderíamos puxar os dois vagões montanha acima ao mesmo tempo, usando cabos separados, ligados a motores idênticos. Dêste modo, poderíamos elevá-los simultâneamente, exercendo o dôbro da fôrça e queimando o dôbro do combustível necessário para arrastar um dêles. Poderíamos ligar os dois cabos, lado a lado, e isso não produziria qualquer diferença no combustível queimado ou na tarefa executada. Poderíamos mesmo substituir os dois cabos por um único que suportasse os dois vagões e usar um único motor para realizar a tarefa, mas êsse motor queimaria combustível mais rápidamente. O combustível necessário para arrastar os dois vagões seria ainda o dôbro do que é usado para puxar um só vagão. Duplicamos o combustível quando duplicamos a fôrça exercida. Dizemos,



24-1 — Acima. Elevar dois vagões requer duas vêzes mais combustível do que para elevar um; a fôrça também é duas vêzes maior. Vemos assim, que o trabalho tem de ser proporcional à fôrça.

24-2 — Abaixo. Para elevar o vagão até o alto da montanha, é necessário duas vêzes mais combustível do que para elevá-la até à metade do caminho. Portanto o trabalho é proporcional à distância percorrida.



pois, que o trabalho, que usaremos como uma medida da transferência de energia, é proporcional à fôrça exercida (Fig. 24-1).

Consideremos, agora, como o combustível usado depende da distância percorrida pelo vagão ao subir a montanha (Fig. 24-2). Desloque o vagão até à metade do caminho, depois até o tôpo. Para arrastá-lo na segunda metade da montanha, o motor exerce a mesma fôrça e desloca o mesmo comprimento de cabo que na primeira metade. A mesma tarefa é feita duas vêzes; assim, para mover um vagão em tôda a extensão do caminho, precisa-se duas vêzes mais combustível do que para movê-la até à metade O combustível usado é dobrado quando dobramos a distância. Portanto, dizemos que o trabalho é também proporcional à distância percorrida.

Combinando os resultados anteriores definimos o trabalho como

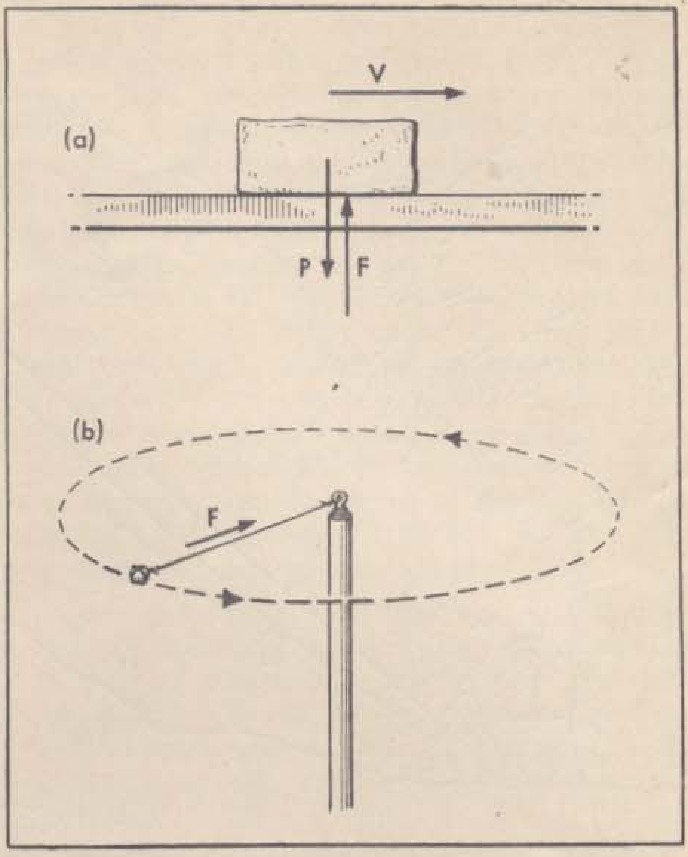
fôrça $\times$ *deslocamento*

Estudando muitos outros exemplos, concluimos que o "trabalho", assim definido, é uma boa medida da energia transferida.

A unidade de trabalho deve ser a *unidade de fôrça* multiplicada pela *unidade de comprimento*: *um newton* vêzes *um metro*, ou um *newton* $\times$ *metro*. A esta unidade chamamos *um joule*, em honra do físico inglês James P. Joule (1818-1889), que realizou algumas das primeiras experiências cuidadosas, medindo transferências de energia, para estabelecer a conservação da energia. Se deslocamos um corpo de 10 m, aplicando-lhe uma fôrça de 2 newtons na direção do movimento, realizamos um trabalho de 20 joules.

Quando arrastamos ràpidamente um vagão montanha acima, usamos pràticamente a mesma quantidade de energia que ao elevá-lo lentamente. O tempo não tem nada a ver com a quantidade total do trabalho envolvido na tarefa. Como caso extremo, podemos realizar metade da tarefa hoje e metade amanhã, usando ainda a mesma quantidade de combustível.

Se aplicamos os freios e desligamos o motor, o vagão pára e, daí por diante, nenhuma energia é transferida do combustível para êle. Embora haja ainda uma fôrça para manter o vagão onde êle está, nenhum trabalho é feito porque não há deslocamento.



24-3 — (a) Quando um objeto desliza sôbre uma mesa, a fôrça vertical que o sustenta não efetua trabalho. (b) Uma pedra, presa à extremidade de um fio, gira em tôrno de um eixo vertical. O fio está preso ao eixo por meio de um suporte que gira pràticamente sem atrito. Nenhum trabalho é efetuado para transferir energia à pedra porque não há componente de fôçra na direção do movimento da pedra.

Mas a energia pode ser retirada do combustível sem realizar uma tarefa útil. Podemos desengatar o cabo do motor e deixar êste último ligado, consumindo combustível, mesmo que não esteja puxando o vagão montanha acima. O combustível fornece energia ao movimento dos pistões, deslocando-os com fôrças opostas às de atrito. Dêsse modo a energia irá aquecer o motor. Haverá ainda uma transferência da energia do combustível para outras formas e outros lugares, apesar da energia não estar sendo usada para a tarefa de arrastar o carro. Mesmo quando o motor está puxando o vagão montanha acima, parte da energia do combustível realiza essas outras coisas. A quantidade de combustível realmente queimado pode diferir de viagem para viagem — por exemplo, se os pistões não estão bem lubrificados numa viagem, será necessário mais combustível. Entretanto, levando em consideração êsses efeitos e fazendo as devidas correções, constatamos que o combustível usado na tarefa de elevar o vagão — ou em qualquer outra tarefa — é sempre o mesmo.

24 — 3. Ainda Sôbre a Definição de Trabalho.

Chegamos à definição de trabalho como produto da fôrça pelo deslocamento a partir do exemplo do cabo que puxa um vagão na própria direção do movimento. Quando a fôrça está na direção do movimento, há uma transferência de energia, produzindo-se trabalho. Por outro lado, não há transferência de energia quando a fôrça que exercemos sôbre o corpo é perpendicular à direção do movimento. Por exemplo, em nosso estudo do movimento, usamos corpos que escorregavam sôbre superfícies horizontais lisas, em suportes quase sem atrito. A superfície exerce sôbre o corpo uma fôrça vertical de valor igual ao seu pêso e de sentido oposto [Fig. 24-3 (a)]. Depois de receber um empurrão inicial, o corpo se moverá sôbre a superfície horizontal pràticamente com velocidade constante. Nenhum combustível é usado para manter êsse movimento; concluímos, portanto, que a fôrça exercida pela superfície não realiza trabalho algum.

Tomemos um outro exemplo em que o movimento seja perpendicular à fôrça. Consideremos uma pedra que gira amarrada ao extremo de uma corda ligada a um eixo vertical [Fig. 24-3 (b)]. A pedra gira com velocidade constante. Sua energia, portanto, permanece inalterada. No outro extremo da corda, o eixo permanece imóvel. Êle não consome combustível e, portanto, não transfere energia à corda. Logo, a corda não recebe nem fornece energia; sua tensão, portanto, não produz trabalho.

O que acontece se usarmos uma fôrça que forme outro ângulo com a direção do movimento? A fôrça tem, então, uma componente na direção do movimento e esta componente acelera a pedra. Depois disto, como está se movendo mais ràpidamente, a pedra pode realizar mais trabalho puxando alguma coisa até parar. Ela tem, portanto, mais energia. A componente da fôrça na direção do movimento realizou trabalho sôbre a pedra, transferindo para ela energia de movimento.

Em resumo, para qualquer fôrça, a componente normal ao movimento não realiza trabalho. *O trabalho realizado sôbre um objeto é igual ao produto da componente da fôrça na direção do movimento pelo deslocamento do corpo.*

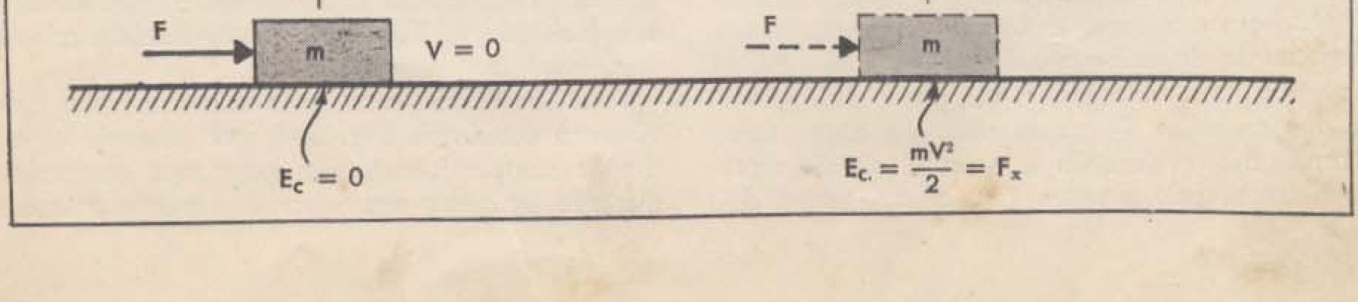
24 — 4. Energia Cinética.

Nossa definição de trabalho como produto da fôrça pelo deslocamento foi elaborada para concordar com a idéia de que quantidades iguais de combustível fornecem quantidades iguais de energia. Permite-nos também essa definição de trabalho dizer quê energia possui um corpo em movimento. O valor de nossa definição de trabalho depende das respostas a questões como esta.

Suponha que aplicamos uma fôrça a um corpo colocado sôbre uma mesa sem atrito. O corpo é acelerado, ganhando velocidade. Enquanto atua a fôrça, realizamos trabalho, transferindo energia ao corpo. Calculamos o trabalho realizado sôbre êle enquanto êle se desloca de certa distância sob a ação da fôrça. Êste trabalho é a energia transferida e constitui uma medida da energia de movimento do corpo. Tal energia é chamada energia cinética. Desejamos exprimi-la *em têrmos de movimento*, usando a velocidade do móvel, v. Verificaremos ser preciso usar também sua massa m, porém nada mais.

O corpo parte do repouso, empurrado pela fôrça F ao longo de uma distância x (Fig. 24-4).

24-4 — A fôrça F atua sôbre a massa m que percorre a distância x, partindo do repouso. A energia transferida para m é Fx, igual a $\frac{mv^2}{2}$, que chamamos a energia cinética do corpo.



A energia transferida é Fx é, como o objeto partiu do repouso, esta energia que êle recebeu é sua energia de movimento ou energia cinética. Como podemos exprimir Fx em têrmos de m e v? Temos

$$F = m\,a$$

portanto

$$Fx = max$$

como F é constante, a é constante, e já sabemos (da seção 5-7, equação 3) que

$$v^2 = 2ax$$

ou

$$ax = v^2/2$$

portanto,

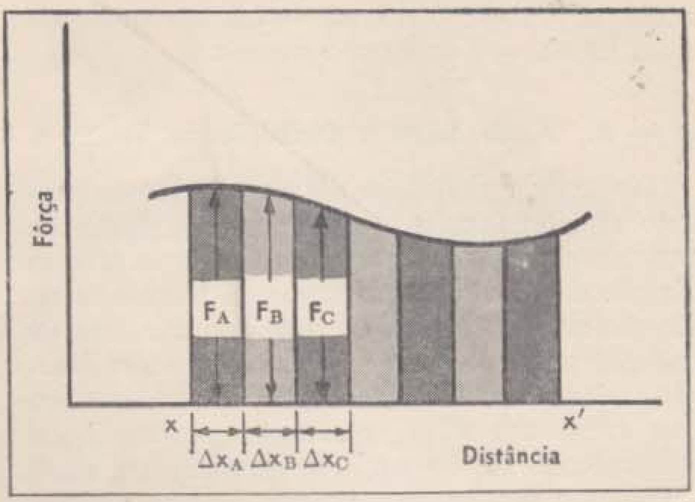
$$Fx = max = mv^2/2$$

O trabalho $T = Fx$, feito ao acelerar á massa m a partir do repouso, é igual à quantidade $mv^2/2$, ou, em outras palavras, $mv^2/2$ é igual à energia transferida ao corpo ao colocá-lo em movimento. Nós a chamamos E_c, a *energia cinética*, do corpo; isto é

$$E_c = \frac{1}{2}\,mv^2$$

Note que a energia cinética $mv^2/2$ fica definida puramente em têrmos da massa e de seu movimento. Nessa definição não há sinal nem da fôrça usada para dar ao corpo esta energia nem da distância percorrida. Não depende do modo pelo qual a energia foi transferida à massa. Se conhecermos a massa, podemos avaliar a energia cinética observando a rapidez com que se move o corpo. Em outras palavras, nossa definção de E_c foi dada em têrmos do estado de movimento da massa, sem referência à sua história. Sempre que a massa estiver em determinado estado de movimento, $mv^2/2$ tem o mesmo valor. O corpo tem a mesma energia cinética.

Podemos ver fàcilmente que o trabalho gasto para que um corpo adquira certa energia cinética, $mv^2/2$, a partir do repouso, é sempre o mesmo. Tentando usar uma fôrça dupla e a metade da distância, consegue-se o mesmo $mv^2/2$ com o mesmo trabalho. Suponha que a fôrça mude de valor quando o corpo já está se movendo com velocidade v_1, tendo sido realizado o trabalho $T_1 = mv_1^2/2$. O corpo tem, agora, uma aceleração constante a' diferente de a; lembrando a seção 5-7, sabemos que, depois de percorrida a distância adicional $\triangle x$, sua velocidade v é dada por



24-5 — O trabalho total efetuado por uma fôrça variável pode ser calculado somando as áreas dos vários pequenos retângulos de base x e altura F. Esse trabalho total dá a variação total de $\frac{mv^2}{2}$. Se o objeto se move de x até x' o trabalho é representado pela área sombreada.

$$v^2 = v^2_1 + 2a'\,\triangle x$$

Multiplicando por $\frac{m}{2}$, vemos que, finalmente, $\frac{mv^2}{2}$ será

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2_1}{2} + ma'\,\triangle x$$

Como ma' é a nova fôrça F',

$$ma'\triangle x = F'\triangle x$$

Êste é o trabalho adicional $\triangle T$ e a equação acima mostra que êle faz com que a energia cinética aumente de $\frac{mv^2_1}{2}$ para $mv^2/2$: O trabalho total é, pois, a soma do trabalho T_1 (responsável pela variação de energia de zero a $mv^2_1/2$) e do trabalho adicional $\triangle T$ (responsável pela variação de energia de $mv^2_1/2$ até $mv^2/2$). O trabalho total, desde o repouso até a velocidade v, $T_1 + \triangle T$, tem ainda ainda o valor $mv^2/2$.

Se a fôrça varia contìnuamente durante o movimento (como na Fig. 24-5, por exemplo), podemos sempre considerar pequenos intervalos durante os quais seu valor é quase constante.

Em cada intervalo, como acabamos de ver, o trabalho dará a *variação* de $mv^2/2$. Assim, o trabalho total dará sempre a variação total de $mv^2/2$. Com efeito, mesmo quando a fôrça está orientada numa direção que não é a do movimento, obtemos o mesmo resultado. A única diferença é que apenas a componente da fôrça na direção do movimento contribui para o trabalho, e apenas ela faz variar a velocidade. Conseqüentemente, nossa definição de energia cinética como $mv^2/2$ é tal que a mesma quantidade de trabalho produz sempre a mesma variação de energia cinética.

Se a massa m se move com velocidade v, sua energia cinética é $mv^2/2$. Esta quantidade de energia teve que lhe ser transferida para acelerá-la desde o repouso até a velocidade v. Se, agora, uma fôrça atua sôbre essa massa para detê-la, a energia cinética da massa decresce. Há uma transferência de energia da massa para o sistema que exerce a fôrça retardadora. O trabalho $F_x \, \triangle x$, quando a fôrça F_x retarda o movimento, mede a energia perdida pela massa móvel quando esta é retardada. Usando o mesmo raciocínio de antes, vemos que, se o corpo tem a energia cinética $mv^2/2$, êle pode fazer exatamente esta quantidade de trabalho antes de parar, não importando como seja retardado.

Em resumo, quando uma fôrça, atuando sôbre certa massa na direção do movimento, produz trabalho, a energia cinética da massa aumenta. O trabalho mede a quantidade de energia que foi transferida do exterior para a massa e ficou na massa sob forma de energia cinética. Quando uma fôrça se opõe ao movimento, a transferência de energia se faz no sentido oposto e o trabalho mede a transformação de energia cinética da massa em energia de alguma outra coisa. Podemos exprimir a energia cinética da massa m, que se move com velocidade v, diretamente em têrmos de seu movimento, como $mv^2/2$.

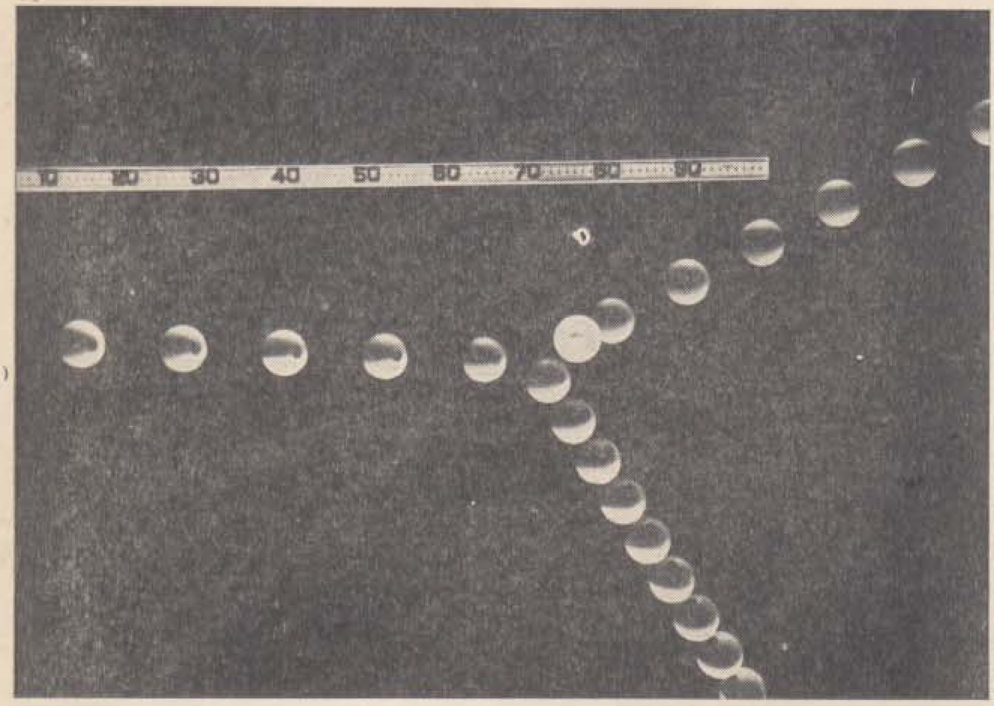
24 — 5. A Transferência de Energia Cinética de Uma Massa a Outra.

Até agora, examinamos o que acontece quando um objeto ganha ou perde energia cinética. Êste ganho ou perda é medido pelo trabalho realizado ao transferir a energia para o objeto ou ao retirá-la dêle. Acreditamos que a energia transferida para o objeto venha de algum lugar e que a energia retirada dêle vá para alguma parte. Por exemplo, quando uma bola colide com outra que está em repouso, a primeira cede energia cinética à segunda. A Fig. 24-6 mostra uma sucessão de instantâneos de uma colisão entre bolas de bilhar. Medindo as distâncias percorridas entre os instantâneos, podemos determinar a energia cinética da bola marcada com um ponto negro, quando ela vem vindo da esquerda, e sua energia cinética após a colisão, quando se move mais lentamente para baixo à direita; determinamos também a energia cinética da outra bola, após a colisão, quando ela se move para a direita e para cima. Verificamos que a energia cinética perdida pela bola marcada é quase igual à energia cinética ganha pela outra bola.

Tentemos compreender, em detalhe, como ocorre a transferência de energia numa colisão entre bolas de bilhar. As bolas se aproximam, sem exercer fôrças uma sôbre a outra, até ficarem muito próximas; dizemos que, a seguir, entram "em contacto". Ocorre, então, a repulsão: cada bola empurra a outra. As fôrças de repulsão variam de intensidade, crescendo e decrescendo, à medida que as bolas se deformam mùtuamente; por fim as bolas afastam-se uma da outra. Como as fôrças são variáveis, a colisão entre bolas de bilhar é difícil de ser analisada minuciosamente. Entenderemos melhor a transferência de energia se começarmos com um exemplo mais fácil, em que o comportamento das fôrças seja mais simples. Depois de estudarmos os detalhes neste caso simples, retornaremos às bolas de bilhar.

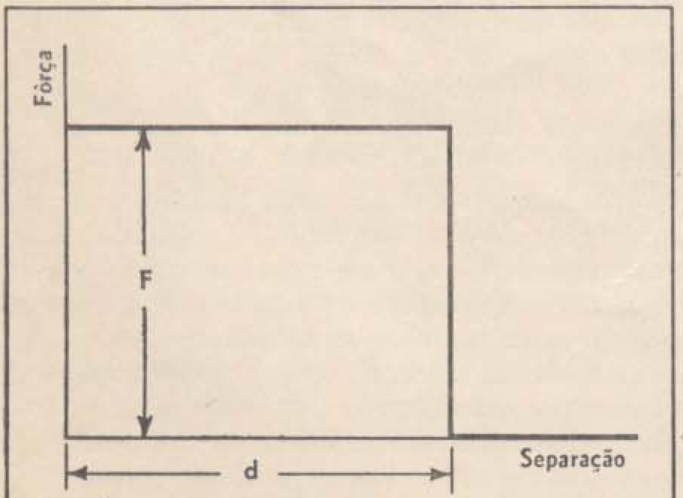
Para fazer um estudo preliminar simples das colisões e da energia, estudaremos um caso artificial em que os dois corpos não exercem fôrças um sôbre o outro até chegarem a uma distância d; a partir dêsse instante exercem um sôbre o outro uma repulsão constante F (Fig. 24-7).

Suponha que a colisão ocorra ao longo de uma reta (Fig. 24-8). Movendo-se seguindo essa reta com velocidade v_1, a massa m_1 aproxima-se da massa m_2, que está em repouso. Nada acontece até que m_1 chegue à distância d de m_2. Daí em diante, entretanto, m_2 é empurrada para a frente por uma fôrça F e m_1 é empurrada para trás com a mesma fôrça. Conseqüentemente, m_2 é acelerada e m_1 é retardada. Como m_1 está se movendo e m_2 está parada ao iniciar-se a repulsão, as massas continuam a se aproximar durante algum tempo. Mas logo atingem uma situação em que já se aproximaram tanto quanto



24-6 — Fotografia de múltipla exposição de uma colisão entre duas bolas de bilhar, ambas de massa igual a 173 g. O intervalo entre os instantâneos foi de $\frac{1}{30}$ s. A bola marcada com um ponto negro veio da esquerda e chocou-se contra a outra, que estava em repouso. Esta aparece mais branca na posição em que estava em repouso porque aí ela foi fotografada muitas vêzes.

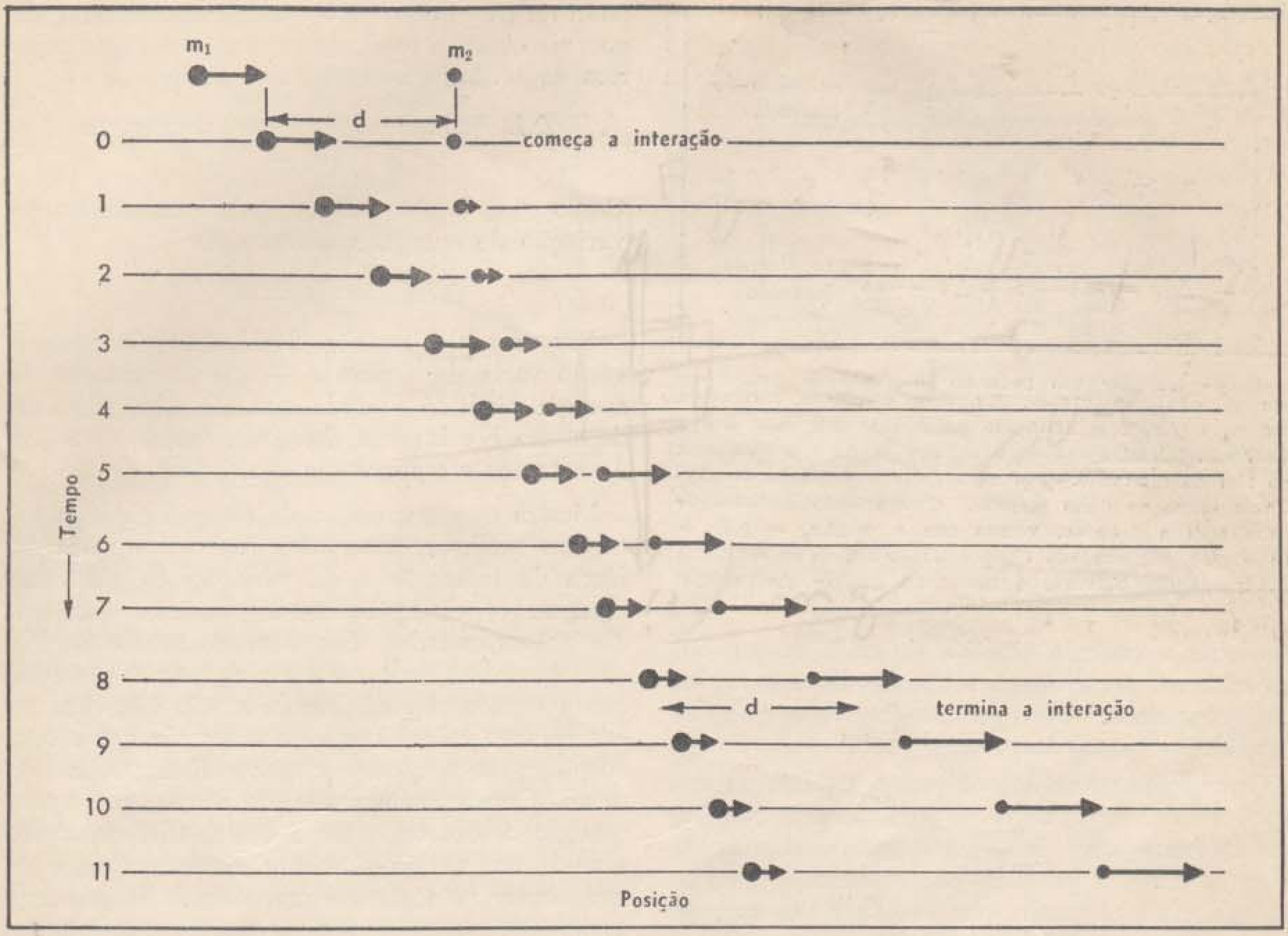
possível e se movem com a mesma velocidade. (Se m_1 ainda se movesse mais ràpidamente, estaria ainda se aproximando de m_2; e se m_2 estivesse se movendo mais depressa as massas estariam se afastando). Ainda empurrada por F, m_2 continua a acelerar-se e m_1 a retardar-se. As massas, portanto, se separam, até que, finalmente, a distância entre elas é de nôvo d. Então, como elas estão se distanciando ainda mais, a fôrça cai a zero e elas continuam seu movimento ulterior sem variações de velocidade. A colisão terminou, com m_1 e m_2 movendo-se,



24-7 — Gráfico de uma fôrça que age entre dois corpos. A fôrça é zero quando a distância s entre os corpos é maior do que d, e tem o valor constante F quando aquela distância é menor do que d.

agora, com energias definidas que não variam mais.

Para esta colisão, em que a fôrça é descontínua, podemos calcular as particularidades do movimento de cada massa. Usando a lei de Newton, fizemos isto para massas tais que $m_1 = 3\ m_2$ e construimos a Fig. 24-8 dessa maneira. Não necessitamos realizar os pormenores do cálculo do movimento para verificar se a energia cinética perdida por m_1 é igual à energia cinética recebida por m_2. Como a fôrça tem o valor constante F durante a interação, a energia transformada em energia cinética de m_2 será F multiplicado pela distância percorrida por m_2 durante a colisão. Ademais, a energia cinética perdida por m_1 é F multiplicado pela distância percorrida por m_1 durante a colisão (m_1 perde energia cinética porque a fôrça se opõe a seu movimento). Podemos mostrar que a energia cinética perdida por m_1 é exatamente igual à que é ganha por m_2, se mostrarmos que as duas massas percorrem distâncias iguais durante a colisão. Para isso, olhe a Fig. 24-9. Indicamos aí as posições das massas quando a interação começa e quando termina. Note que d mais a distância percorrida por m_2 durante a interação (linha superior) é igual a d mais a distância percorrida por m_1 (linha inferior). Conseqüentemente, as distâncias percorridas por m_1 e m_2 são as mesmas durante a interação. A fôrça multiplicada pela distância percorrida durante



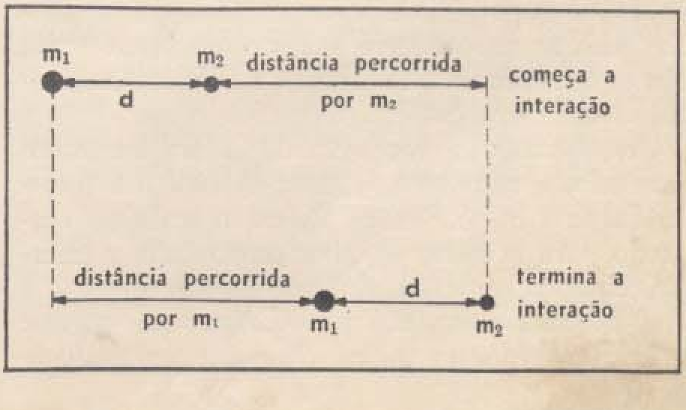
24-8 — Posições e velocidades de duas massas m_1 e m_2 que integrarem ao longo de uma reta, com a fôrça indicada na Fig. 24-7. As massas estão representadas a intervalos iguais de tempo. m_1 vem da esquerda. Quando a distância entre as massas se torna menor do que d, a velocidade de m_1 começa a decrescer e a de m_2, que era zero, começa a aumentar. Depois de 8 intervalos de tempo e $\frac{1}{3}$, nesse caso particular, a distância entre as massas é, de nôvo, maior do que d; a fôrça volta a ser zero e as duas massas afastam-se com velocidades constantes. O ganho de energia cinética de m_2, depois de completada a interação, é igual à perda de energia cinética de m_1.

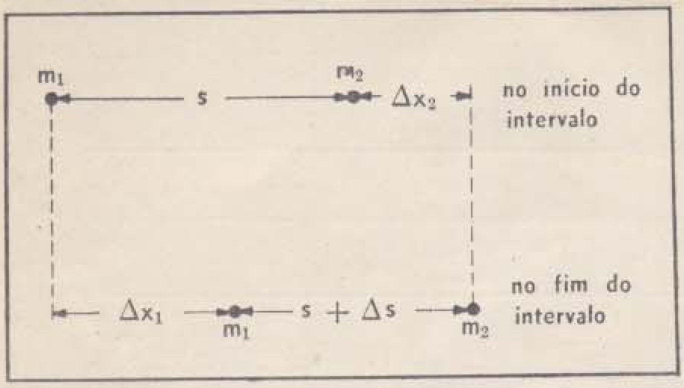
a interação é, portanto, igual e oposta para ambas as massas e, como antecipamos, a energia cinética perdida por m_1 é exatamente igual à energia cinética ganha por m_2.

24 — 6. Ainda a Colisão Simples.

Há, ainda, uma maneira ligeiramente diferente de considerar êsse exemplo e que tornará mais fácil compreender o que acontece numa colisão real, quando o comportamento das fôrças é mais complicado. A fim de estudar as colisões reais, procuremos determinar que tipo de fôrças devem agir para que tôda a energia cinética perdida por um corpo seja ganha pelo outro. Para determinar a natureza dessas fôrças, examinaremos a soma das duas energias cinéticas diretamente, ao invés de estudar separa-

24-9 — As posições de m_1 e m_2 no começo (linha de cima) e no fim (linha de baixo) da interação. Comparando as dunas linhas, vemos que d mais a distância percorrida por m_2 é igual a d mais a distância percorrida por m_1. Portanto, m_1 e m_2 percorrem a mesma distância durante a interação.





24-10 — Durante um pequeno intervalo de tempo em que m_1 e m_2 interagem, Δx_1 é a distância percorrida por m_1 e Δx_2 é a distância percorrida por m_2. s é a distância inicial entre m_1 e m_2 e $s + \Delta s$ é a distância no fim do intervalo. Portanto Δs é a variação da distância entre as duas massas. Comparando a linha de cima com a debaixo, vemos que $s + \Delta x_2 = \Delta x_1 + (s + \Delta s)$. Subtraindo $(\Delta x_1 + s)$ de ambos os membros da igualdade, obtemos o resultado $\Delta x_2 - \Delta x_1 = \Delta s$.

damente a energia cinética de cada corpo. Se, ao terminar a colisão, a soma das duas energias tem o mesmo valor que no início, o que foi perdido por um corpo foi ganho pelo outro.

Quando acompanhamos passo a passo as variações de energia cinética durante uma colisão, constatamos que, nas *fases* intermediárias, a energia cinética perdida por m_1 não é igual à energia cinética ganha por m_2. Para determinar como a energia cinética total varia durante uma colisão, concentraremos nossa atenção num pequeno intervalo de tempo durante o choque das massas m_1 e m_2 (Fig. 24-10). No início dêsse intervalo de tempo a distância entre as massas é designada por s. No fim do intervalo de tempo, a distância será $s + \Delta s$. A variação Δs da distância é dada pela diferença entre a a distância Δx_2 percorrida por m_2 e a distância Δx_1, percorrida por m_1, na mesma direção:

$$\Delta s = \Delta x_2 - \Delta x_1.$$

Se m_2 percorre a distância Δx_2, afastando-se de m_1, a separação é aumentada dessa distância; mas, se m_1 percorre Δx_1 no mesmo sentido, isto é, aproximando-se de m_2, a separação diminui dessa distância.

Ora, quando a fôrça F de interação, neste intervalo, é repulsiva, a energia cinética transferida para m_2 é $F\ \Delta x_2$. Êste é o trabalho realizado para acelerar m_2. Por outro lado, a energia cinética retirada do movimento de m_1 é $F\ \Delta x_1$. Esta energia é perdida por m_1 porque a fôrça sôbre esta massa é oposta ao deslocamento Δx_1. Conseqüentemente, a variação da energia cinética total, no intervalo em que ocorrem êstes deslocamentos, é dada por

$$\Delta E_c \text{ (total)} = F\ \Delta x_2 - F\ \Delta x_1 = \\ = F\ (\Delta x_2 - \Delta x_1)$$

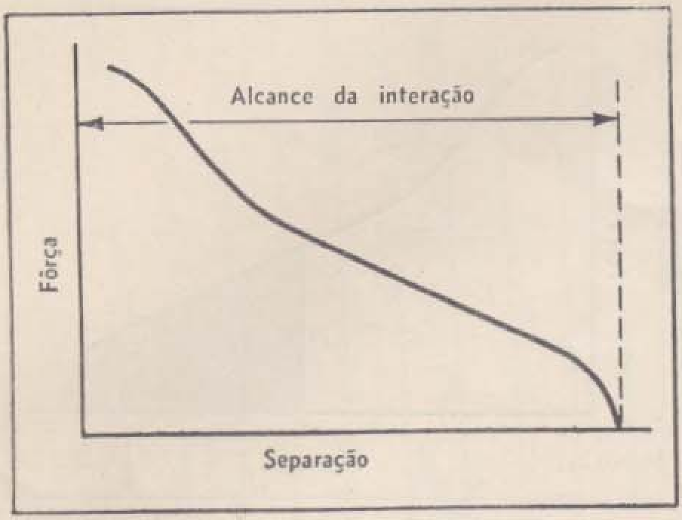
Como $\Delta x_2 - \Delta x_1 = \Delta s$, podemos escrever a variação de energia cinética como

$$\Delta E_c \text{ (total)} = F\ \Delta s$$

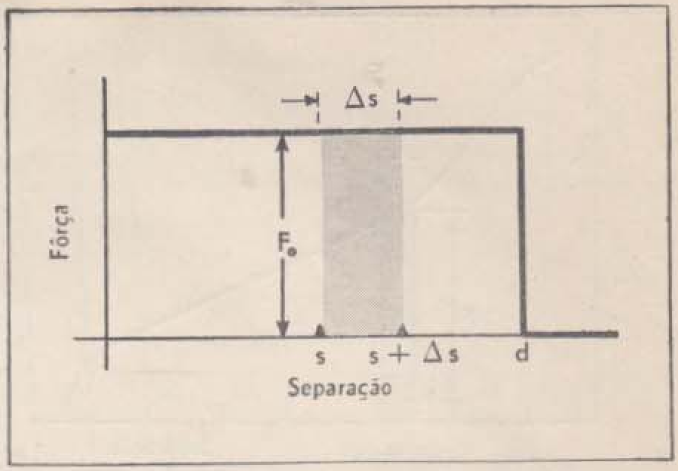
Por exemplo, na Fig. 24-11, quando a separação varia de s para $s + \Delta s$, a variação da energia cinética é dada pela área sombreada, de altura F e largura Δs. ΔE_c (total) $= F\ \Delta s$ é exatamente o resultado desejado.

Mostra que a variação da energia cinética total em qualquer intervalo, depende apenas da fôrça de interação e da variação da distância entre os corpos. Apenas estas grandezas entraram em nossos cálculos. Em nenhum momento precisamos saber onde estavam as massas em relação a outros objetos. Também não interessa saber quanto vale a fôrça de interação quando os corpos estão a qualquer outra distância um do outro. Conseqüentemente, as fôrças que agem quando os objetos estão a outras distâncias não têm de ter, necessàriamente, o mesmo valor da que ocorre no intervalo considerado. É por esta razão que podemos aplicar nossos resultados a colisões em que a fôrça de interação depende, de um modo qualquer, apenas da distância. Na próxima seção veremos como usar a equação ΔE_c (total) $= F\ \Delta s$ para tais fôrças. Terminaremos esta seção usando aquela equação para mostrar que a energia cinética se conserva na colisão simples estudada na seção anterior.

Para uma colisão em que a fôrça é do tipo indicado na Fig. 24-11 (isto é, tem valor F para tôdas as distâncias inferiores a d, e valor nulo para distâncias maiores), a energia cinética total decresce no início da colisão. Quando m_1 chega à distância d de m_2, aproximando-se desta, m_2 ainda está em repouso. Olhando de nôvo a Fig. 24-8, vemos que, no intervalo de tempo seguinte, m_1 se desloca consideràvelmente mais que m_2. Como as fôrças sôbre m_1 e m_2 são iguais e opostas, a energia cinética retirada de m_1 é maior do que a energia cinética recebida por m_2. Ao todo há uma perda de energia cinética. Êste resultado vem de ΔE_c (total) $= F\ \Delta s$, porque a distância entre m_1 e m_2 decresceu e, portanto, $F\ \Delta s$ é negativo.



24-11 — Quando a distância entre os corpos varia de s para $s + \Delta s$, a variação da energia cinética total é dada pela área sombreada.



24-12 — (a) Gráfico de uma fôrça que é função da distância entre os dois corpos. A fôrça é zero fora do alcance da interação.

Enquanto m_1 se aproxima de m_2, continua a desaparecer energia cinética. Entretanto, no fim do processo, ela é recuperada. Enquanto m_1 continua a ser retardada, m_2 ganha velocidade de modo que, finalmente, a separação aumenta de nôvo. Quando esta volta a ter o valor d, o valor de Δs, medido a partir do início da colisão tornou-se zero. Conseqüentemente, $\Delta E_c = F\,\Delta s = 0$. A energia cinética, que havia sido perdida enquanto os corpos se aproximavam, foi, finalmente recuperada. Depois disso, as massas se separam mais ainda, mas não há mais fôrças agindo sôbre elas. Conseqüentemente, E_c permanece constante. A colisão terminou e a energia cinética tem, no fim, o mesmo valor que possuía no início.

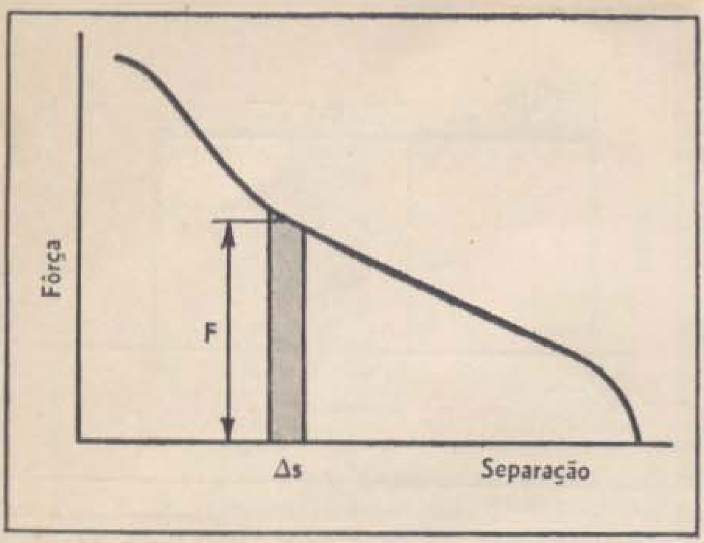
24 — 7. Conservação da Energia Cinética em Interações Elásticas.

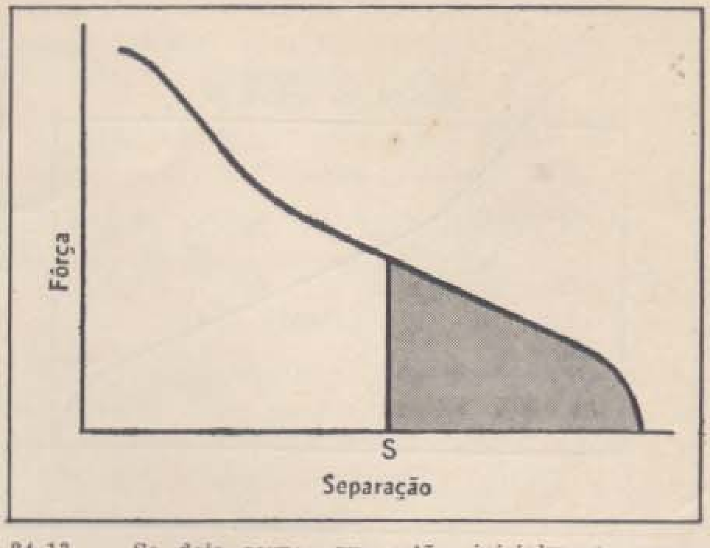
Nas colisões estudadas até aqui, a transferência de energia cinética de um objeto para outro terminou sem perda. Êste resultado não depende do alcance da interação, isto é, da distância dentro da qual a fôrça F atua, nem da intensidade da fôrça entre as massas. Em qualquer interação, com qualquer alcance de interação, d, e qualquer fôrça constante, F, encontramos a mesma energia cinética total no início e no fim de qualquer colisão. O resultado é mais geral do que poderíamos ter antecipado. Até que ponto será êle geral?

Mostraremos, agora, que a energia cinética total, no fim de uma colisão, é a mesma que no início, desde que a fôrça de interação dependa apenas da separação entre as duas massas(*). As fôrças F, iguais e opostas, sôbre as duas massas podem ser uma função qualquer da separação entre elas, desde que F se anule a partir do momento em que a separação atinja um valor determinado de forma que podemos definir uma interação completa. Tal interação começa quando as massas estão separadas por uma distância que se torna menor do que d e termina quando essa distância se torna, de nôvo, maior do que d [Fig. 24-12 (a)].

Podemos, agora, aplicar o resultado ΔE_c (total) $= F\,\Delta s$ a qualquer fôrça de interação que dependa apenas da distância; por exemplo, a fôrça ilustrada na Fig. 24-12 (a). Considere, por um momento, o que acontece à energia cinética total quando a separação entre os dois corpos decresce da quantidade Δs, indicada na Fig. 24-12 (b): a fôrça é quase constante e $F\,\Delta\,s$, representado pela área sombreada, dá o decréscimo de energia cinética total. Por outro lado, se os corpos estão se separando quando a distância entre êles tem êsse valor Δs, o mesmo produto $F\,\Delta s$ dá, agora, o acréscimo de energia cinética total. Vemos, portanto, (Fig. 24-13) que, se duas massas que interagem se aproximam, começando muito afastadas uma da outra e chegando a uma separação s entre si, elas perdem tôda a energia cinética representada pela área que fica abaixo do gráfico de F em função de s.

(*) Isto significa apenas que a fôrça de interação, para cada separação entre os corpos, retoma, quando os corpos estão se separando, os mesmos valores e o mesmo sentido, que tomou quando os corpos estavam se aproximando.





24-13 — Se dois corpos que estão, inicialmente, muito separados um do outro, aproximam-se até que a distância entre êles se torne *s*, êles perdem uma quantidade total de energia cinética igual à área sombreada sob a curva. Quando êles se afastam novamente, êles recuperam a mesma quantidade de energia cinética, com a única condição de que a fôrça dependa apenas da distância e seja a mesma quando os corpos se aproximam e se afastam um do outro.

Depois, ao se afastarem de nôvo, elas recuperam tôda a energia cinética representada pela mesma área.No fim da interação, elas possuem, em conjunto, a mesma energia cinética que no início, com a única condição de que a fôrça tome os mesmos valores quando elas se afastam e quando se aproximam. O teorema da conservação da energia cinética para uma colisão completa, está pois, ampliado, e se aplica a qualquer interação em que a fôrça depende apenas da distância. Uma interação dêsse tipo é chamada interação elástica ou *colisão elástica.*

As interações que vemos comumente, tais como as colisões entre bolas de bilhar, ou entre uma bola de tênis e a raquete, nunca são perfeitamente elásticas, mas várias delas o são muito aproximadamente. Como vimos na seção 24-5, quando uma bola de bilhar atinge outra que está parada, pràticamente não se perde energia cinética. Quando estudarmos a física dos átomos e das partículas elementares, tais como o eléctron, encontraremos colisões que são ainda mais aproximadamente elásticas. Quando um eléctron atinge outro, normalmente não há perda detectável de energia cinética. Entretanto, quando a colisão se dá entre eléctrons muito rápidos, uma quantidade notável de energia pode ser irradiada.

24 — 8. Energia Cinética e Quantidade de Movimento.

Quando dois corpos interagem elàsticamente, o resultado global da interação é que suas energias cinéticas E_{c_1} e E_{c_2} sofrem variações iguais e opostas, isto é:

$$\triangle E_{c1} = - \triangle E_{c2}$$

Isto deve ser verdade porque não há variação na energia cinética total $E_{c1} + E_{c2}$. Ademais, como aprendemos no Capítulo 23, as variações das quantidades de movimento dos dois corpos são iguais e opostas:

$$- \triangle \vec{p}_1 = \triangle \vec{p}_2$$

Esta relação vetorial é sempre verdadeira para dois corpos que constituam um sistema isolado; em particular, portanto, ela é verdadeira para colisões elásticas.

A analogia entre a equação que relaciona as variações das quantidades de movimento e a que relaciona as variações das energias cinéticas vai mais além. A variação da quantidade de movimento é dada pelo impulso $F \triangle t$, que é a medida da transferência de quantidade de movimento de um corpo para outro; a transferência de energia é dada pelo trabalho $F \triangle x$.

Tendo visto que, nestas duas transferências, nada se perde, nem em quantidade de movimento, nem em energia cinética, podemos tirar muitas conclusões a respeito do movimento final das duas massas que interagem. As duas equações contêm grande parte da informação necessária para determinar as velocidades finais

SÔBRE A DEDUÇÃO DAS FÓRMULAS PARA v'_1 E v'_2

Podemos determinar as velocidades finais v'_1 e v'_2, que resultam da colisão discutida na seção 24-5, usando a igualdade e oposição das variações de energia cinética e de quantidade de movimento. Aqui será útil a forma

$$-\left(\frac{m_1\, v'^2_1}{2} - \frac{m_1\, v_1^2}{2}\right) = \frac{m_2\, v'^2_2}{2}$$

para variações de E_c. Note que podemos escrever esta equação como

$$-\,(m_1v'_1 - m_1v_1)\left(\frac{v'_1 + v_1}{2}\right) =$$

$$= (m_2v'_2 - 0)\left(\frac{v'_2 + 0}{2}\right)$$

Vemos que cada um dos membros desta equação da energia é o produto da variação da quantidade de movimento de uma das massas pela média das suas velocidades inicial e final. Como sabemos que as variações da quantidade de movimento são iguais e opostas, podemos cancelar $-\Delta p_1 = -(m_1v'_1 - m_1v_1)$, à esquerda com $\Delta p_2 = (m_2v'_2 - 0)$, à direita, obtendo, portanto, a informação adicional de que

$$v'_1 + v_1 = v'_2$$

Levando êste valor de v'_2 à equação da conservação da quantidade de movimento,

$$-\,(m_1v'_1 - m_1v_1) = m_2v'_2$$

encontramos

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1.$$

As equações da energia e da quantidade de movimento levam, pois, a uma predição específica sôbre a velocidade final de m_1, quando se conhece sua velocidade inicial. Ademais, levando êste valor de v'_1 à equação $v'_2 = v'_1 + v_1$, obtemos

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\, v_1,$$

que nos dá a velocidade final da segunda massa.

Na realidade, para obter êsses resultados, tivemos de introduzir uma boa dose de informações. Para começar, supuzemos que a colisão fôsse frontal, de modo que as massas se movessem apenas na direção do eixo dos x. Se tivéssemos permitido que uma das massas se aproximasse da outra excêntricamente, isto é que a colisão não fosse frontal (Fig. 24-6) o problema seria mais difícil de manipular, e teríamos de introduzir a informação relativa à excentricidade para obter a resposta. Além disso, especificamos que m_2 estava inicialmente em repouso. Essas equações não se aplicam no caso de m_2 estar se movendo quando começa a interação. Apesar disso, as equações mais gerais são fáceis de deduzir, usando o mesmo método.

Note-se, ademais, que fizemos uma suposição tácita ao determinar v'_1 e v'_2. Admitimos que *havia* uma variação da quantidade de movimento durante a interação. É possível, mesmo em nossa colisão frontal, obter uma outra resposta: se $v'_1 = v_1$ e $v'_2 = 0$, a quantidade de movimento permaneceria inalterada e não haveria transferência de energia de um corpo a outro em virtude da interação. Não vamos nos preocupar demais com êsse possível resultado, pois, nesse caso, m_1 deveria atravessar m_2.

---

v'_1 e v'_2. Em particular, se o movimento ocorre ao longo de uma reta, verificamos que

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\, v_1$$

No caso da colisão não ser frontal, precisamos saber até que ponto ela foi oblíqua para poder encontrar as direções em que as massas se movem após a colisão. Para os pormenores do cálculo de v'_1 e v'_2 para colisões frontais, veja o quadro.

Ao fazer a Fig. 24-8, usamos F constante dentro do alcance d da interação, e escolhemos $m_1 = 3m_2$. Então, pela lei de Newton, encontramos que $v'_1 = \frac{1}{2} v_1$ e $v'_2 = \frac{3}{2} v_1$, como você pode verificar examinando a figura. Se você calcular v'_1 e v'_2 usando as equações do último parágrafo, baseadas na conservação da quantidade de movimento e da energia cinética, você obterá os mesmos resultados.

Deve haver sempre concordância entre os resultados obtidos a partir da lei de Newton e os obtidos a partir das leis de conservação, mas nem sempre é fácil aplicar diretamente a lei de Newton. Se F for uma função complicada da distância, a determinação do movimento a partir da lei de Newton será um processo numérico lento e laborioso. Aliás, em geral, não sabemos detalhadamente como F depende da distância, mesmo quando a experiência indica que a energia cinética total se conserva. Em tal situação, não podemos descrever completamente o movimento durante a colisão, mas as leis de conservação solucionam grande parte do problema.

Por exemplo, colisões entre bolas de bilhar são dêste tipo. Desconhecemos os pormenores das fôrças de interação, mas a observação mostra que a energia cinética das bolas é quase a mesma antes e depois do impacto. Portanto, as fôrças devem ser funções apenas da distância entre os centros das bolas, anulando-se quando êsses centros estão a distância maior do que o diâmetro das bolas. Em particular, podemos usar as duas últimas equações com $m_1 = m_2$ para descrever uma colisão frontal entre uma bola de bilhar em movimento e outra em repouso. A partir das equações obtemos, então, $v_1 = 0$ e $v'_2 = v_1$, isto é, se uma bola de bilhar choca-se frontalmente com outra, a que estava em movimento pára e a outra entra em movimento com a velocidade que possuia a primeira. Ora, isto é justamente o que observamos, como mostra a Fig. 23-8.

Freqüentemente essa espécie de análise é importante na Física moderna de alta energia. Aqui as massas que se chocam podem ser prótons, nêutrons, mésons ou os híperons recentemente descobertos (parículas "elementares" com massa superior à do neutron). Para algumas interações dessas partículas, não conhecemos os pormenores das fôrças. Mas algumas vêzes podemos distinguir as colisões elásticas, observando as energias cinéticas antes e depois da interação.

Algumas vêzes, massas visíveis (partículas cujos traços podemos ver) colidem com partículas que são invisíveis para nós. Nesses casos, podemos ainda tentar aplicar a conservação da energia cinética e da quantidade de movimento, admitindo que tôdas as partículas invisíveis tenham a mesma massa.

Foi justamente assim que James Chadwick descobriu o nêutron em 1932. Em suas experiências, prótons em repouso eram atingidos por partículas invisíveis desconhecidas, que provinham de uma região onde o berílio era bombardeado pelas partículas alfa do polônio. Depois das colisões, os traços dos prótons podiam ser "vistos" e sua energia cinética medida. Depois de examinar um grande número de colisões, Chadwick concluiu que determinada particula invisível de massa quase igual à do próton, explicaria tôdas as observações. Ademais, quando as partículas invisíveis atingiam átomos, a energia transferida era justamente a que se esperava. A partícula "invisível" assim descoberta por Chadwick é chamada nêutron. É um dos corpúsculos de que são constituidos os átomos; entretanto, mal se suspeitava de sua existência antes do trabalho de Chadwick. Uma das experiências dêsse cientista está descrita minuciosamente no quadro ao lado.

24 — 9. Trabalho e Energia Cinética Quando Atuam Várias Fôrças.

Em grande parte dêste capítulo, estudamos os ganhos e perdas de energia cinética quando apenas *uma* fôrça externa age sôbre o corpo. Mesmo quando lidamos com a interação de dois corpos, sôbre cada um agia uma única fôrça. Se considerarmos, agora, mais de dois corpos, sôbre cada um agirá a fôrça devida à interação com cada um dos outros. Como determinaremos, nesse caso, as variações de energia cinética dos diversos corpos?

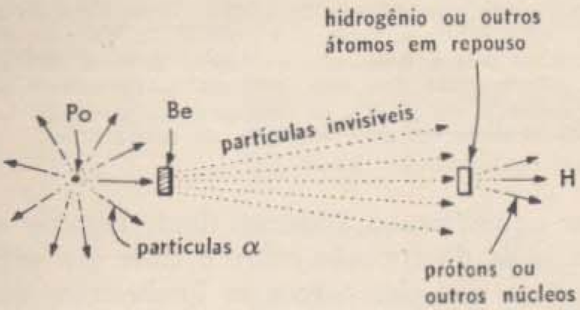
Consideremos um dêles. Que relação existirá entre, de um lado, o trabalho, que é o responsável pelo acréscimo ou decréscimo de energia cinética do corpo, e, de outro lado, tôdas as fôrças que agem sôbre o corpo e a distância percorrida pelo corpo?

Podemos chegar à resposta à nossa pergunta por dois caminhos. Primeiro, se adicionarmos tôdas as fôrças que agem sôbre o corpo, obtemos a fôrça resultante sôbre êle. Esta resultante, agindo sòzinha, produz no corpo como um todo

DESCOBERTA DO NÊUTRON

Temos aqui um esquema do aparelho usado por Chadwick em uma de suas experiências que levaram à descoberta do nêutron. O berílio, quando atingido por partículas alfa provenientes do polônio, emitia partículas desconhecidas invisíveis.

Essas partículas invisíveis chocavam-se, então, com átomos de hidrogênio ou nitrogênio em repouso. Como resultado das colisões, prótons ou núcleos de nitrogênio eram expulsos e Chadwick media suas velocidades.



24-14 — Esquema do dispositivo de Chadwick.

Suponha que selecionamos colisões frontais, observando a região H (veja Fig. 24-14), e admitamos que elas sejam elásticas. Então, chamando m a massa da partícula invisível e v sua velocidade; m_p a massa dos prótons e v'_p a velocidade dêstes, temos

$$v'_p = \frac{2m}{m + m_p} v.$$

Do mesmo modo, chamando m_n e v_n a massa e a velocidade do núcleo do nitrogênio, temos

$$v'_n = \frac{2m}{m + m_n} v$$

Nesta equação podemos substituir m_n por 14 m_p, pois, como sabemos, a massa do nitrogênio é 14 unidades de massa atômica e a do hidrogênio cêrca de 1 u.m.a. (veja Capítulo 8). Depois de substituir m_n por 14 m_p, dividimos a primeira equação pela segunda, o que elimina a velocidade desconhecida, v, da partícula invisível, resultando

$$\frac{v'_p}{v'_n} = \frac{m + 14m_p}{m + m_p}$$

Em suas experiências, Chadwick mediu v'_p e v'_n, encontrando, para o quociente $\frac{v'_p}{v'_n}$, aproximadamente 7,5. Portanto,

$$\frac{m + 14m_p}{m + m_p} = 7{,}5$$

ou

$$m = 1{,}00\ m_p.$$

Chadwick repetiu a experiência com outras substâncias no lugar do hidrogênio e do nitrogênio, e verificou, de nôvo, que uma partícula com massa quase igual à do próton era coerente com suas medidas. Realizou numerosas outras experiências; tôdas eram coerentes; numa delas determinou a massa com precisão de 1%. Havia provado que o nêutron existia.

— ou seja no centro de massa — a mesma aceleração que tôdas as fôrças agindo conjuntamente. Tôdas as nossas afirmações relativas ao trabalho e à energia cinética são verdadeiras se a fôrça que usarmos for a *resultante*. A energia cinética obtida dêsse modo é a energia do movimento do corpo como um todo, excluindo a energia dos movimentos internos como vibração ou rotação das partes do corpo em tôrno do centro de massa.

O outro caminho consiste em calcular o trabalho realizado por cada uma das fôrças e adicionar todos êsses trabalhos. A soma será justamente igual ao trabalho realizado pela resultante. Para ver como ocorre êsse resultado, suponha que o movimento do corpo se faça ao longo do eixo dos x. Então, o trabalho realizado por cada uma das fôrças F_a, F_b, ... etc. que age sôbre o corpo será

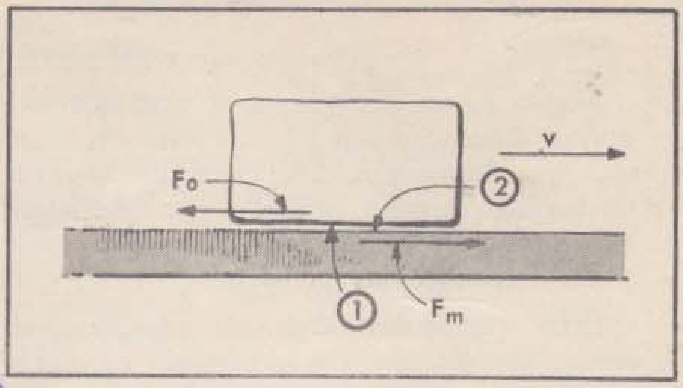
$$T_a = F_{ax}\, x \qquad T_b = F_{bx}\, x \ \ldots$$

Em cada caso, temos o produto da componente da fôrça, na direção do movimento, pelo deslocamento do corpo. O trabalho total será, portanto, a soma

$$T = T_a + T_b + \ldots$$
$$= (F_{ax} + F_{bx} + \ldots)\, x = F_x\, x,$$

onde F_x é a componente da resultante na direção do movimento.

Em linguagem física, cada fôrça representa um empurrão ou um puxão de algum agente externo sôbre o corpo móvel. Se a fôrça tem o mesmo sentido que o movimento, o trabalho realizado por esta fôrça representa a energia transferida do agente externo para o corpo móvel. Se a fôrça tem sentido oposto ao do movimento, a transferência será do corpo móvel para o agente externo. O resultado final de todo o processo dependerá de ter a resultante o mesmo sentido ou sentido oposto ao movimento. No primeiro caso, mais energia é transferida ao corpo móvel do que retirada dêle. No segundo caso, a energia que o móvel fornece é maior do que a recebida por êle. Dêste modo, podemos generalizar todos os resultados dêste capítulo, aplicando-os a qualquer número de corpos ou a tantas fôrças externas quantas estejam presentes numa situação complexa.



24-15 — Um objeto desliza sôbre o tampo de uma mesa com velocidade v. Uma fôrça horizontal de atrito F_o atua na região 1 da face inferior do objeto, e retira-lhe energia cinética. A perda de E_c é medida pelo trabalho efetuado enquanto se move, com velocidade decrescente, em virtude dessa fôrça de atrito. Uma fôrça de atrito F_m atua sôbre a mesa na região 2; ela não efetua trabalho pois a mesa não se move. A mesa não ganha E_c. Para onde foi essa energia? Aparentemente ela se acumula na região de contacto em tôrno de 1 e 2, onde observamos uma elevação de temperatura.

24 — 10. Perda de Energia Cinética numa Interação com Atrito.

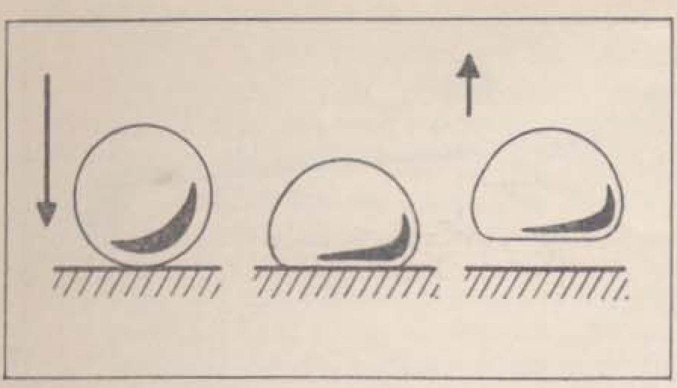
Se uma fôrça de atrito atua sôbre um corpo — fôrça que não depende apenas da distância entre os dois corpos — a energia pode passar para outra forma. Pode transformar-se em calor, em vez de permanecer sob a forma de energia de movimento do corpo como um todo.

Considere o movimento de um objeto que deslisa sôbre o tampo de uma mesa. A fôrça de atrito exercida sôbre o objeto pelo tampo da mesa retarda o movimento. O trabalho realizado, produto da fôrça pela distância percorrida pelo corpo, retira energia do objeto porque a fôrça de atrito se opõe ao movimento, e, por conseguinte, a energia cinética decresce de uma quantidade igual à energia transferida.

Para onde é transferida essa energia? Há uma fôrça igual e oposta exercida pelo objeto sôbre a mesa, mas a mesa dificilmente se move sob o efeito dessa fôrça. Conseqüentemente, a fôrça sôbre a mesa quase não efetua trabalho e a energia cinética da mesa não aumenta apreciàvelmente. A energia cinética do objeto diminui, mas não é transformada em energia cinética da mesa (Fig. 24-15).

Entretanto, é um fato de observação comum que as superfícies do objeto e da mesa, que estiveram em contacto, se aquecem. A energia retirada do objeto móvel está associada a êsse aquecimento. Podemos desde logo ter alguma idéia da conexão entre o calor e a energia cinética que desaparece se lembrarmos que a temperatura de um gás é proporcional à mv^2 média de suas moléculas (Seção 9-6). Isto significa que, aquecendo um corpo, isto é elevando sua temperatura, estamos aumentando a energia cinética de suas moléculas. A energia que não aparece como energia cinética da mesa como um todo pode, assim, ser encontrada como aumento da energia cinética das moléculas das regiões aquecidas da mesa e do objeto.

Consideremos um outro exemplo de interação com atrito. Quando deixamos cair uma bola de massa de vidraceiro, a interação entre ela e o assoalho começa tão logo ambos entram em contacto. Fôrças começam, então, a atuar sôbre a bola, retardando-a. Ademais, a forma da bola é alterada; e, quando a bola recua, a interação cessa quando a bola está mais perto do assoalho do que quando começou a interação (Fig. 24-16). A fôrça entre a bola e o assoalho, nesta posição, é, agora, zero, enquanto que, quando a bola se aproximava do assoalho, nessa posição a fôrça não era nula. Em consequência disso, a energia cinética é menor após a colisão do que antes, e a bola de massa de vidraceiro recua com movimento muito lento. A bola parece perder energia cinética permanentemente, mas verifica-se que está mais quente após a colisão do que antes. Esta interação é muito semelhante à que ocorre entre o objeto deslizante e a mesa.



24-16 — Uma colisão inelástica. A interação começa quando a bola de massa de vidraceiro entra em contacto com o chão. A bola sofre uma deformação permanente e, quando volta, subindo novamente, a interação cessa antes que a bola tenha atingido a posição em que a interação começou. A conseqüência disso é que a velocidade, na subida, é menor do que quando a bola descia.

Neste exemplo, entretanto, o atrito pode ocorrer todo dentro da bola de massa de vidraceiro, enquanto algumas partes dela se movem em relação às outras.

Uma colisão em que, quando os corpos se separam, as fôrças são inferiores às que existem quando os corpos entram em contacto, é chamada colisão *inelástica*. Após as colisões inelásticas, geralmente se constata certo aquecimento. No Capítulo 26 discutiremos o calor como forma de energia. Por enquanto, dirigiremos nossa atenção para situações em que o atrito e o aquecimento possam ser desprezados.

24 — 11. Conclusão.

Quais as principais idéias que encontramos neste Capítulo? Em primeiro lugar, quando uma fôrça atua sôbre um objeto móvel a transferência de energia para o corpo é dada pelo trabalho, isto é, pelo produto da distância percorrida, pela componente da fôrça na direção do movimento. Se a fôrça se opõe ao movimento, está-se retirando energia do corpo. Se a fôrça tem o sentido do movimento, está-se fornecendo energia ao corpo. Quando várias fôrças agem sôbre um corpo, a resultante é que modifica o movimento do corpo; e, correspondentemente, o trabalho total mede a variação de sua energia cinética.

Quando dois corpos interagem e a interação depende apenas da distância entre êles, a energia cinética total, depois de completada a interação, é a mesma que antes da interação. A colisão é elástica.

Podemos fazer a mesma afirmativa quando interagem mais de dois corpos. Se, inicialmente, êles estão tão afastados uns dos outros que as fôrças de interação são todas nulas e, se no fim do processo, a situação é a mesma, a energia cinética no fim é igual à que existia no início. Alguns corpos podem ter perdido energia cinética e outros a ganharam; mas o total continua a ser o que era. Esta afirmativa acêrca da energia cinética total no início e no fim da interação completa será provada, de forma geral, no próximo capítulo. Aqui salientamos que o enunciado é correto apenas se as fôrças de interação dependem ùnicamente da distância entre os corpos. Em outras palavras, as fôrças devem ser as mesmas, quer os corpos estejam se aproximando, quer estejam se afastando.

Nem sempre as fôrças de interação dependem apenas da distância entre os objetos. Lembre-se dos exemplos do objeto deslisando sôbre a mesa e da bola de massa de vidraceiro caindo no assoalho. Êles mostram que, quando as fôrças dependem de outras coisas, a energia cinética do objeto como um todo parece sofrer uma variação permanente. Mas quando essa energia cinética desaparece, em geral observa-se o aparecimento de calor. Mais tarde verificaremos que êsse calor é uma forma de energia.

Mesmo no curso de uma colisão elástica a energia cinética total dos corpos pode parecer perdida temporàriamente. Verificamos que esta energia perdida pode finalmente ser recuperada. Desde que as fôrças de interação dependam apenas das posições relativas dos corpos, a energia cinética "perdida" fica de fato armazenada no sistema. Esta energia armazenada, chamada *energia potencial*, constitui o assunto do próximo capítulo.

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO

1. A usina elétrica de uma cidade consome carvão para produzir vapor, que faz girar uma turbina; esta aciona um gerador elétrico. O departamento de águas da cidade usa esta eletricidade para girar um motor elétrico que bombeia água para um reser-

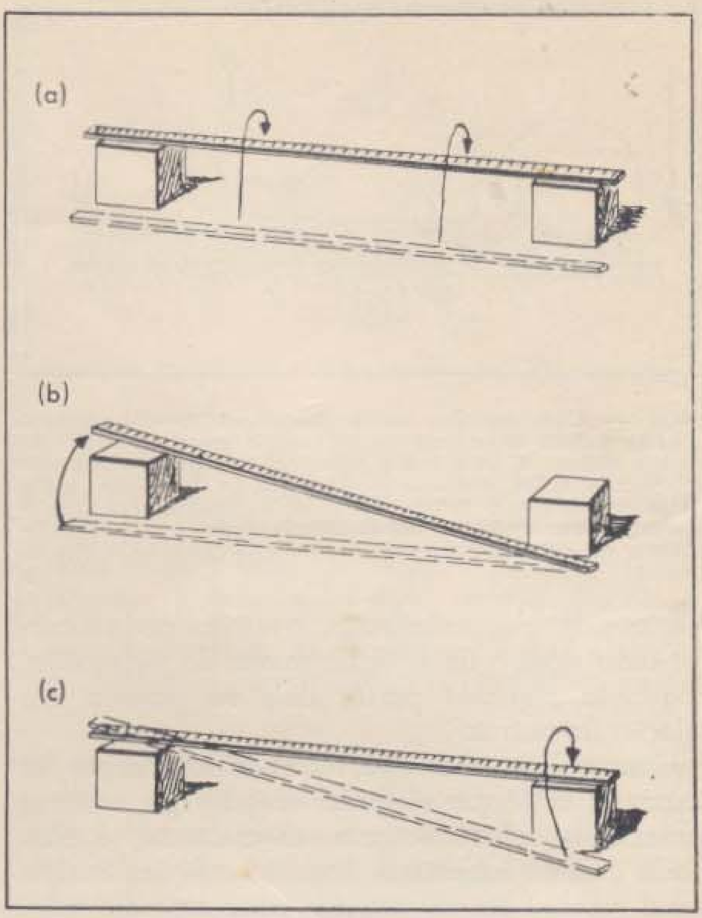
vatório situado no alto de uma colina. Indique, pela ordem, tôdas as transformações de energia que ocorrem.

2. Um cabo puxa um carro montanha acima, com a fôrça de 4×10^3 newtons, à velocidade de 5 m/s. O carro leva 5 minutos para atingir o tôpo.
   (a) Que trabalho é realizado para conduzir o carro até o alto da montanha?
   (b) Que trabalho seria realizado para levar o carro até o mesmo ponto, com velocidade de 2,5 m/s?

3. Um removedor de neve usa 13 litros de gasolina para limpar 18 km de estrada em 20 minutos.
   (a) Quantos litros, aproximadamente, serão necessários para limpar 28 km à mesma velocidade?
   (b) Acha você que bastaria a metade do combustível para limpar os 28 km no dôbro do tempo? Por que? Prepare-se para discutir em classe sua resposta.

4. Que energia é transferida a uma mala de 15 kg, enquanto.
   (a) Você a segura durante 5 minutos, esperando um ônibus?
   (b) Você corre com ela uma distância horizontal de 10 m, em 2 s, como velocidade constante, para alcançar o ônibus?
   (c) Você a suspende 0,80 m para subir no ônibus?
   (d) Você a transporta 20 m, descendo uma rampa inclinada de 30° com a horizontal?

5. Uma régua de 1 metro, de massa 0,20 kg, está numa mesa próxima de dois blocos de 10 cm. de altura. (Fig. 24-17).
   (a) Se você suspende a régua, mantendo-a horizontal, e a coloca sôbre os blocos, que trabalho você realizou?
   (b) Se você suspende um dos extremos e o coloca num dos blocos e depois suspende o outro, pondo-o no segundo bloco, que trabalho você realizou para mover a régua?



24-17 — Para o problema 5.

6. Uma fôrça de 10,0 newtons atua sôbre um patim, de massa igual a 2,00 kg, inicialmente em repouso sôbre uma mesa sem atrito. O patim percorre 3,00 m enquanto a fôrça atua.
   (a) Que trabalho é realizado?
   (b) Que quantidade de energia é transferida ao patim?
   (a) Qual a velocidade final do patim?

7. Compare o trabalho realizado para suspender um objeto de 6,0 kg a 20 metros com a energia cinética adquirida pela mesma massa, quando cai da mesma altura a partir do repouso.

8. Compare as energias cinéticas de dois objetos A e B, idênticos sob todos os aspectos, exceto um. Admita que a única diferença seja:
   (a) A tem o dôbro da velocidade de B;
   (b) A se move para o norte e B para o sul;
   (c) A se move em círculo, B em linha reta;

(d) A é um projétil que cai verticalmente, B é um projétil que sobe verticalmente com a mesma velocidade;

(e) A consiste de duas partes separadas, ligadas por um cordel leve, cada uma tendo a massa de B.

9. Uma fôrça de 30 newtons acelera um objeto de 2,0 kg a partir do repouso, por uma distância de 3,0 metros, numa superfície horizontal sem atrito; a fôrça muda, então, para 15 newtons e age por mais 2,0 metros.

(a) Qual é a energia cinética final do objeto?

(b) Qual a sua velocidade?

10. Uma fôrça de 4,0 newtons, formando um ângulo de 45° com a horizontal, acelera um disco de gêlo sêco de massa igual a 2,0 kg, inicialmente em repouso, por uma distância de 0,50 m sôbre uma mesa horizotal.

(a) Determine o trabalho realizado sôbre o disco.

(b) Qual a velocidade do disco?

11. Sôbre a massa de 3,0 kg, movendo-se a 5,0 m/s, age uma fôrça de 4,0 newtons, oposta ao sentido do movimento. Se o objeto é decelerado até que sua velocidade seja de 2,0 m/s, qual é

(a) a variação de energia cinética?

(b) a distância percorrida enquanto a fôrça atua?

(c) a energia ganha pelo sistema que fornece a fôrça?

12. Um automóvel cuja massa é 1 000 kg, move-se, segundo indica seu velocímetro, a 100 km/h.

(a) Qual sua energia cinética?

(b) Que trabalho foi realizado para conseguir-se essa energia cinética?

(c) Pode você determinar a fôrça que agiu sôbre o carro para produzir tal energia cinética? e durante que percurso atuou essa fôrça? Prepare-se para defender em classe sua resposta.

13. Uma pedra de 2,0 kg gira no extremo de uma corda de 0,50 m, com velocidade de 2,0 revoluções por segundo.

(a) Qual é sua energia cinética?

(b) Quanto vale a fôrça centrípeta que age sôbre ela?

(c) Que trabalho é efetuado por essa fôrça em uma revolução?

14. Um corpo percorre uma curva com a energia cinética constante de 10 joules. Parte da curva é um arco de círculo, de raio 0,50 m.

(a) Qual a fôrça resultante sôbre o corpo, enquanto percorre essa parte da curva?

(b) Qual a direção dessa fôrça?

15. Um homem puxa com uma corda a massa de 20,0 kg, inicialmente em repouso no chão exercendo uma fôrça horizontal de 30,0 newtons, e a massa se desloca de 8,0 m. A massa tem, então, a velocidade de 3,00 m/s.

(a) Qual é sua energia cinética final?

(b) Que energia foi fornecida pelo homem?

(c) Como explica você a diferença entre as duas respostas anteriores?

16. A Fig. 24-8 ilustra a interação de dois corpos, m_1 e m_2, sendo $m_1 = 3m_2$. A fôrça repulsiva F é constante, enquanto a separação é inferior a d, e nula quando a separação é maior que d.
Suponha que F seja 6,0 newtons, d = 20 cm, m_1 = 3,0 kg, m_2 = 1,0 kg e que a velocidade inicial de m_1 seja v_1 = 16 cm/s.

(a) Encontre expressões para $\triangle x_1$ e $\triangle x_2$ (as distâncias percorridas por m_1 e m_2 durante a interação) em função do tempo t. Use a lei de Newton e a relação $\triangle x = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2$ (a velocidade inicial v_1 é v_1 para m_1 e zero para m_2).

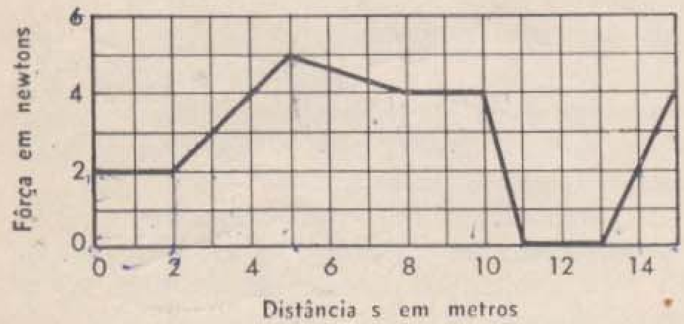
(b) No fim da interação, a distância entre as massas é de nôvo d e $\triangle x_1 = \triangle x_2$. Que tempo dura a interação?

(c) Encontre expressões para v'_1 e v'_2, as velocidades após a interação, em têrmos de v_1. Lembre-se que, sendo constante a aceleração, $v = v_1 + at$.

17. Um objeto de 3,0 kg é acelerado a partir do repouso, de acôrdo com a função de fôrça indicada na Fig. 24-18. Qual é a energia cinética do objeto a
   (a) s = 2m?
   (b) s = 5m?
   (c) s = 13m?
   (d) s = 15m?

18. Um objeto de 10,0 kg percorre 2,00 m contra uma fôrça retardadora que aumenta linearmente de 4,00 newtons para cada 3,00 metros que a massa percorre (veja Fig. 24-19). Se a fôrça é nula no ínicio, que energia cinética é perdida?

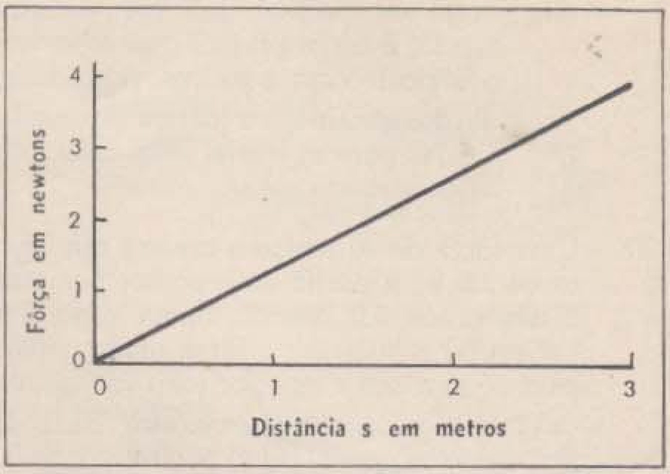
19. Dois corpos de 3,0 kg interagem. Em certo momento o primeiro corpo move-se para a direita a 0,50 m/s, e o outro move-se também para a direita a 0,30 m/s e, portanto, a velocidade com que se aproximam os dois corpos é de 0,20 m/s. Se a fôrça de interação é repulsiva e igual a 0,10 newtons, qual a taxa de decréscimo da energia cinética naquele instante?



24-18 — Para o problema 17.

20. Um corpo de 1,5 kg está em repouso e é atingido frontalmente por outro de massa 0,50 kg que se move à velocidade de 0,20 m/s. A fôrça de interação depende apenas da distância entre os dois corpos.
   (a) Qual é a velocidade final de cada corpo?
   (b) Em que direção cada um se move após a interação?

21. Um eléctron em movimento atinge "frontalmente" um próton em repouso. A fôrça entre êles depende apenas da separação. (A massa do próton é 1840 vêzes maior que a do eléctron). Que fração da energia cinética do eléctron é transferida ao próton?



24-19 — Para o problema 18.

22. Um objeto de massa $m_1 = 2{,}0$ kg movendo-se com a energia cinética de 1,0 joule choca-se frontalmente com um objeto de massa m_2, em repouso. Admitindo que a fôrça de interação depende sòmente da separação, calcule a energia cinética transferida, se
   (a) $m_2 = 0{,}01$ kg.
   (b) $m_2 = 2{,}0$ kg.
   (c) $m_2 = 400$ kg

Quanto vale a razão entre m_1 e m_2, quando a transferência de energia cinética fôr
   (a) máxima?
   (b) muito pequena?

Nota: Para encontrar mais fàcilmente essa relação, talvez convenha determinar a energia cinética transferida quando m_2 sofre acréscimos, e fazer um gráfico.

23. Um corpo de 5,0 kg está em repouso e um outro, de 10 kg, aproxima-se dêle à velocidade de 0,20 m/s. A fôrça de interação é nula quando a distância entre êles é superior a 0,10 m e vale 4,0 newtons quando a separação é inferior a esta distância. (Note que algumas das respostas a êste problema são mais fáceis de obter usando a conservação da quantidade de movimento).
   (a) Qual a energia cinética das massas antes da interação?
   (b) Qual a energia cinética de cada massa depois de completada a interação?

(c) Qual será a energia cinética de cada massa quando a separação fôr mínima? Lembre que as velocidades são iguais quando a separação é mínima.

(d) Qual é a separação mínima? (Sua resposta à pergunta (c) lhe fornece a perda total de energia cinética das duas massas quando a separação é mínima).

24. Uma granada antiaérea tem energia cinética E_c e quantidade de movimento p no momento de explodir. Que pode você dizer sôbre:

(a) a quantidade de movimento dos pedaços?

(b) a energia cinética dos pedaços?

25. (a) Faça na Fig. 24-6, as medidas necessárias e calcule a razão entre a energia cinética da bola marcada com um ponto preto antes do choque e sua energia cinética depois do choque.

(b) Que fração da energia cinética da bola marcada é transmitida à outra?

(c) Qual a razão entre a energia cinética total antes da colisão e a energia cinética total depois da colisão?

26. Uma bola de 3 kg, movendo-se a 6 m/s, atinge outra de mesma massa que se move com a mesma velocidade mas em sentido oposto. Após a colisão, cada bola move-se com a mesma rapidez que antes, mas em sentido oposto. É elástica esta colisão?

27. Em uma das experiências que levaram à determinação da massa do nêutron, Chadwick mediu a velocidade de prótons que tinham sido atingidos frontalmente por nêutrons. A velocidade dos prótons era de $3{,}3 \times 10^7$ m/s.

(a) Qual era a velocidade dos nêutrons antes e após a colisão com os prótons?

(b) Chadwick mediu também a velocidade de átomos de nitrogênio atingidos frontalmente por nêutrons, Qual era ela?

(c) Qual a velocidade dos nêutrons após cada tipo de colisão?

28. Um vagão vazio A, de massa $2{,}5 \times 10^4$kg (25 toneladas) move-se sôbre um trilho horizontal a 2,0 m/s até chocar-se com um vagão estacionário B de massa $5{,}0 \times 10^4$kg. Há pouco atrito e os freios não estão aplicados.

(a) Qual a quantidade de movimento inicial de A?

(b) Qual a velocidade dos dois vagões ao se moverem juntos após a interação?

(c) Qual a energia cinética total antes e e após o impacto? Trata-se de colisão elástica?

29. Esfregue vigorosamente as palmas de suas mãos. Você realiza trabalho? Que acontece à energia?

30. Faço com que um de meus dedos deslize com a velocidade constante de 3 cm/s, sôbre o tampo de vidro de uma mesa, sob a ação de uma fôrça horizontal de 1 newton.

(a) Que trabalho é realizado em 1 s pela fôrça exercida por meu braço sôbre o dedo? Que energia êle transfere ao dedo, por segundo?

(b) Quanto vale e em que direção atua a fôrça de atrito sôbre meu dedo? Que trabalho ela realiza por segundo sôbre o dedo? Em que sentido ela transfere energia — dando ou retirando energia do dedo?

(c) Qual é a fôrça resultante sôbre o dedo? Que trabalho realiza, por segundo, a resultante sôbre o dedo móvel? Que acontece à energia cinética do dedo?

(d) Qual a fôrça exercida horizontalmente sôbre a mesa por meu dedo? De quanto se move a mesa? Que trabalho realiza sôbre a mesa esta fôrça, em cada segundo? Em que direção ela transfere energia — dando ou retirando energia da mesa?

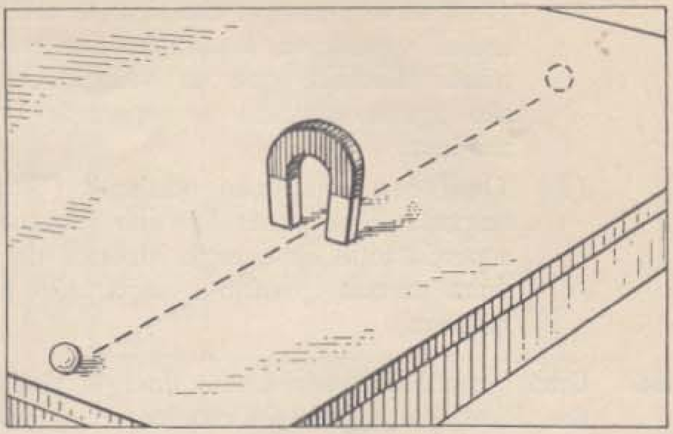
(e) Que acontece na região em que o dedo e a mesa estão em contato?

31. Uma lâmpada de 100 g cai de uma tôrre alta e alcança a velocidade de 20 m/s após cair 100 m. Aproximadamente, quanta energia foi transferida para o ar?

32. Uma fôrça de 3,0 newtons e outra de 4,0 newtons são aplicadas simultâneamente a um objeto de 4,0 kg inicialmente em repouso. As duas fôrças formam entre si um ângulo de 90° e atuam durante 2,0 s.
   (a) Qual a resultante?
   (b) Use êste valor para calcular o trabalho total realizado.
   (c) Qual é o trabalho realizado por cada fôrça separadamente? Compare a soma dêstes trabalhos com a resposta ao ítem (b).

33. Um ímã em ferradura, de massa m, está em pé sôbre uma mesa sem atrito. Uma bola de rolamento de aço de massa m é lançada sôbre a mesa de bem longe, com velocidade v, atravessa o ímã e ultrapassa-o. Admita que a fôrça de atração F varie com a distância e seja a mesma antes e depois do ímã (Fig. 24-20).
   (a) Qual a velocidade final da esfera?
   (b) Qual a velocidade final do ímã?

34. Um foguete de dois estágios move-se com velocidade v numa região onde a gravidade é desprezível. Êle consiste de um estágio final ou cabeça, de massa m, e uma cauda de massa $2m$, que inclui uma carga explosiva para separar a cabeça. A carga é cuidadosamente projetada, de forma que, após a separação, a cauda tenha a menor energia possível. (Admita que os gases resultantes da explosão permaneçam na cauda).



24-20 — Para o problema 33.

   (a) Qual é a menor energia que pode ter a cauda?
   (b) Neste caso, que energia terá a cabeça após a explosão? Dê a resposta em têrmos de m e v.
   (c) Que quantidade de energia cinética tinha a *cabeça* antes da explosão?
   (d) Que quantidade de energia cinética ganhou a cabeça?
   (e) Que quantidade de energia é fornecida pelo combust"vel, na explosão?
   (f) Por que a resposta (e) difere da resposta (d)?

LEITURA COMPLEMENTAR

AYRES, EUGENE, "The Fuel Situation" — *Scientific American*, Outubro, 1956. Um levantamento cuidadoso das minguadas reservas de combustível.

ENERGIA POTENCIAL

CAPÍTULO 25

No último capítulo focalizamos nossa atenção na transferência de energia cinética de um corpo móvel para outro. Constatamos que, nas colisões completas, a energia cinética perdida por um corpo deve igualar a energia cinética ganha pelo outro, *desde que a fôrça de interação dependa apenas da distância entre êles.* Depois, com auxílio da lei da conservação da quantidade de movimento, conseguimos calcular as velocidades finais de dois corpos que colidem frontalmente, em têrmos de suas massas e de suas velocidades antes da interação.

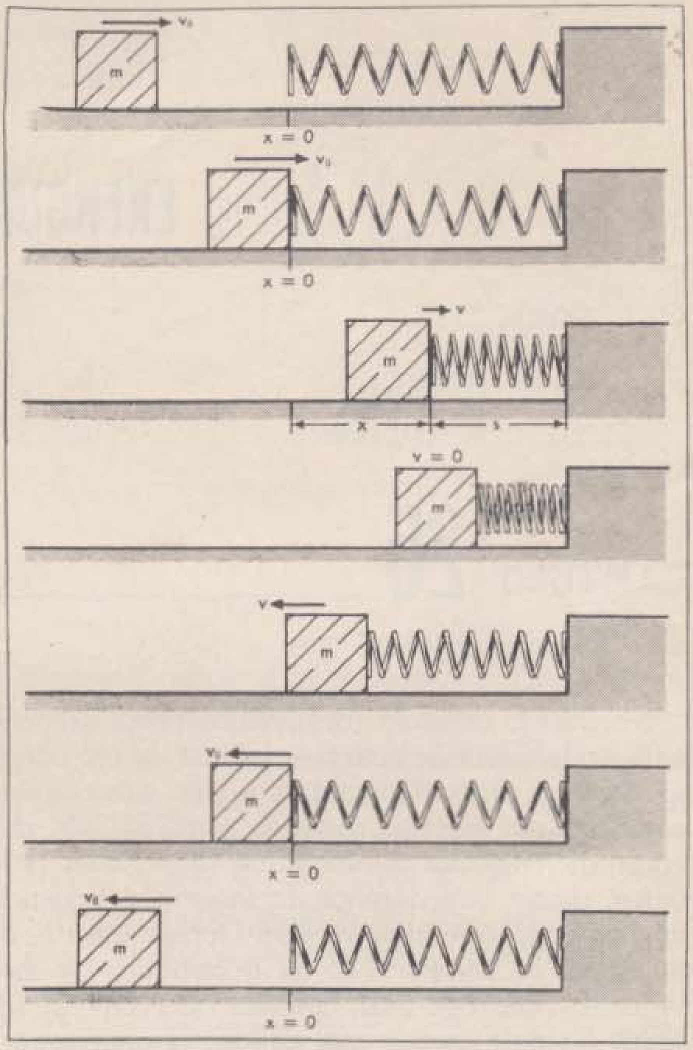
Até aqui, a lei da conservação da quantidade de movimento, $-\Delta\vec{p}_1 = \Delta\vec{p}_2$, e a lei da conservação da energia cinética, $-\Delta E_{c1} = \Delta E_{c2}$, são extraordinàriamente semelhantes; mas há uma diferença importante. As variações da quantidade de movimento são iguais e opostas em qualquer intervalo de tempo; portanto, a quantidade de movimento é conservada instante por instante, durante tôda a interação. Por outro lado, mesmo nas colisões elásticas, a energia cinética total não é a mesma em todas as fases da interação. Sòmente no fim da interação ela retoma seu valor original. Durante a colisão, a energia cinética total primeiro decresce e depois aumenta. Nas fases intermediárias parte da energia cinética desapareceu.

O que acontece a essa energia cinética perdida? Como tôda ela reaparece no fim da interação, ela deve ter ficado armazenada, de algum modo, no sistema que interage. Essa energia armazenada é chamada *energia potencial* do sistema.

25 — 1. O Amortecedor de Mola.

Está aqui um exemplo simples de energia armazenada (Fig. 25-1). Consideremos a massa m deslizando com velocidade constante numa mesa horizontal, sem atrito. A massa colide com um amortecedor de mola, fixado a um corpo grande, tão pesado que dificilmente se move. Quando a massa móvel bate na mola, esta é comprimida e exerce uma fôrça sôbre a massa móvel, freiando-a. A energia cinética do corpo móvel decresce até que sua velocidade se anula. Neste ponto, a energia cinética do corpo móvel desapareceu e a mola foi comprimida ao máximo. Tôda a energia está armazenada como energia potencial. Depois disso, a massa ganha velocidade em sentido oposto. Finalmente ela se afasta da mola com a mesma velocidade e energia cinética que tinha no início. Tôda a energia cinética desaparecida durante a colisão foi recuperada. Nas fases intermediárias da compressão, a energia era parcialmente cinética e parcialmente potencial.

No capítulo anterior, vimos que a energia cinética é completamente regenerada se a fôrça depende sòmente da distância. Aquí, a compressão faz as vêzes de distância. Quando a energia cinética é armazenada e pode ser completamente recuperada, suspeitamos que a fôrça exercida pela mola é a mesma na ida,



25-1 — Colisão entre um objeto de massa m e uma mola prêsa a outro objeto de massa tão grande que não se move apreciàvelmente.

A massa m aproxima-se de um amortecedor de mola com velocidade v_0.

Quando a mola já sofreu uma compressão x, de maneira que seu comprimento agora é s, a velocidade do objeto é v. O objeto perdeu energia cinética, que foi armazenada como energia potencial pela mola comprimida.

Quando a compressão é máxima, o objeto para. Tôda sua energia cinética desapareceu.

Enquanto a mola o empurra, o objeto ganha velocidade e energia cinética.

O objeto voltou ao lugar onde havia entrado em contacto com a mola. Ela está, de nôvo, com sua velocidade original, v_0, e sua energia cinética original. A interação completou-se.

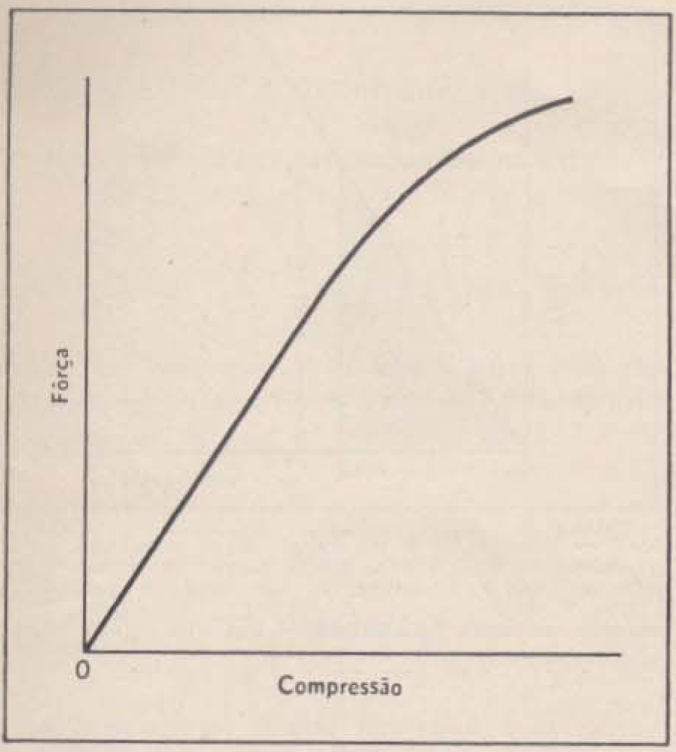
A massa continua a se mover, afastando-se com velocidade v_0 e com a energia cinética inicial.

quando a mola está sendo comprimida, e na volta, quando a mola está se distendendo.

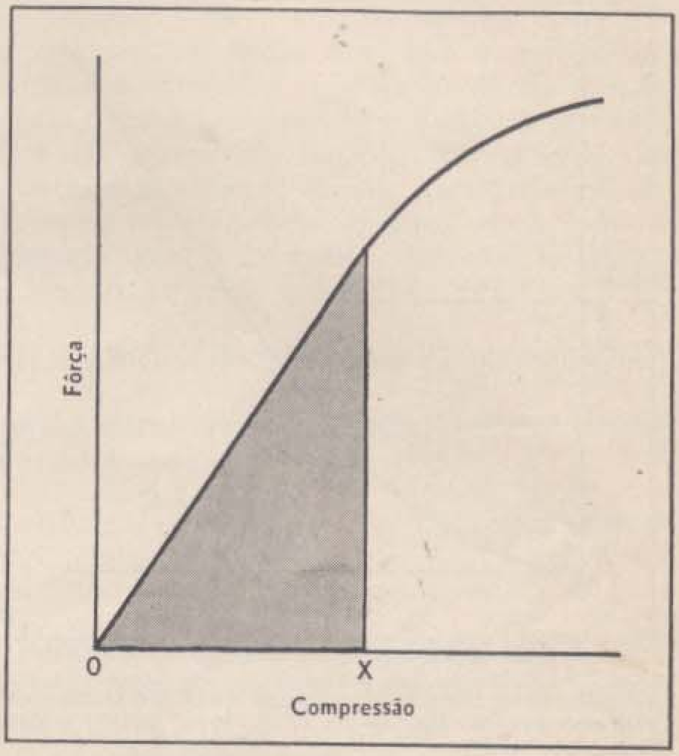
Se medirmos a fôrça em função da compressão, teremos confirmação disso. Como vimos no Capítulo 21, uma curva típica da fôrça restauradora exercida por uma boa mola tem a forma geral da curva da Fig. 25-2. A fôrça exercida não depende da história passada. Para uma dada compreessão a fôrça tem um dado valor, quer tenhamos comprimido a mola até êsse ponto apenas, quer a tenhamos comprimido mais, para depois deixá-la expandir-se. Além disso, a fôrça não depende da velocidade da massa. Como a fôrça tem valor fixo para uma dada compressão, podemos representá-la por uma só curva, como fizemos na Fig. 25-2.

Por outro lado, para uma mola de qualidade inferior — de cobre, por exemplo — a história tem importância. As fôrças na ida e na volta diferem. Quando tal mola é atingida por um objeto móvel, êste, recua mais lentamente do que incidiu. Uma mola de cobre é inelástica como a massa de vidraceiro, e gera calor ao oscilar. Não se obtém uma curva única para a fôrça em função da compressão.

Quando um objeto atinge uma mola, comprimindo-a e perdendo energia cinética, a transformação da energia cinética do objeto em energia potencial armazenada na mola comprimida mede-se pelo trabalho; e êste trabalho é representado pela área sob a curva fôrça-compressão, desde zero (quando a mola não está comprimida) até x (a distância de que se moveu o extremo da mola) (Fig. 25-3). Quando lidamos com uma boa mola, que apresente uma única curva fôrça-compressão, êste trabalho é sempre o mesmo quando se alcança a mesma compressão. A *perda* de energia cinética pelo objeto móvel é portanto sempre a mesma, qualquer que seja a energia cinética inicial do objeto. Se m chega com maior energia cinética, terá maior energia cinética ao passar por x; mas a variação ΔE_c entre 0 e x é a mesma. Esta *perda* de energia



25-2 — Gráfico da fôrça restauradora F exercida por uma mola, em função da compressão x.



25-3 — O trabalho realizado ao comprimir uma mola até uma compressão qualquer é medido pela área sob a curva F versus x, desde zero até o valor x. Isto representa a energia potencial armazenada na mola, quando a compressão é x.

cinética, ou o trabalho realizado ao comprimir a mola, é a energia potencial armazenada na mola.

Não interessa saber se a mola foi comprimida por um objeto em movimento ou se nós a comprimimos manualmente de um comprimento x. Se colocarmos o objeto encostado a ela quando ela já está comprimida, a mola empurrará o objeto e lhe comunicará uma energia cinética igual ao trabalho efetuado por nossa mão. A energia potencial da mola é dada, nêsse caso também, pela área sob a curva fôrça-compressão, sem nenhuma referência ao objeto móvel.

Para uma mola, com dada curva fôrça-compressão, podemos avaliar a energia potencial em função de x, determinando as áreas sob a curva entre zero e os vários valores de x. Se representarmos essas áreas em função de x, obteremos um gráfico da energia potencial U. A Fig. 25-4 é um gráfico dêsse tipo para a mola cujo gráfico fôrça-compressão está representado na Fig. 25-2.

Se a curva fôrça-compressão é bastante simples, podemos obter uma expressão da energia potencial U em função de x. Na Fig. 25-5 vemos que, se a fôrça for proporcional à compressão, então $F = kx$ e, sob a curva, temos um triângulo de base x e altura kx. A energia potencial será portanto

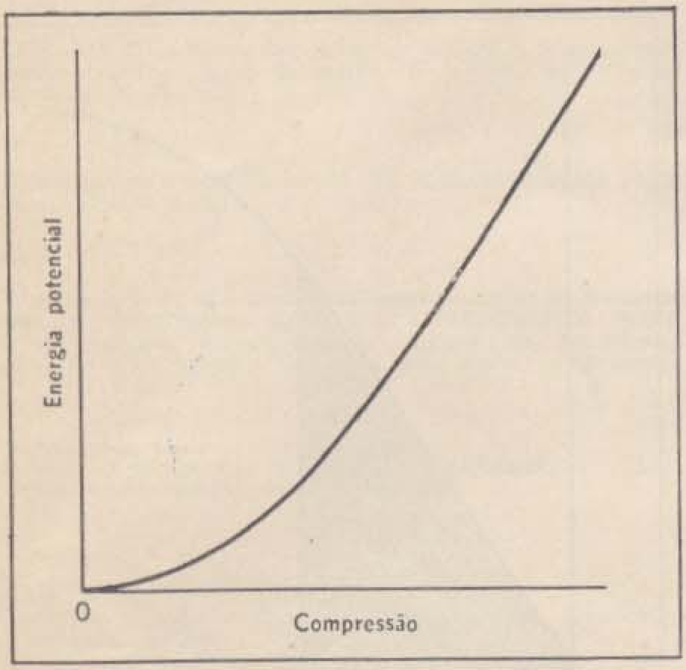
$$U = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}(k\,x)\,x = \frac{1}{2}kx^2$$

Esta fórmula dá a energia potencial de uma mola com fôrça restauradora linear.

O gráfico de U em função de x pode ser verificado experimentalmente (quer tenha sido obtido por uma fórmula, quer pelas áreas sob a curva fôrça-compressão). Comprima a mola de diferentes distâncias x e solte-a, permitindo que, de cada vez, ela acelere uma massa conhecida. Meça, então, a energia cinética adquirida pela massa. Seu valor deve ser o mesmo que o de U para a compressão x.

A energia cinética da massa no momento em que ela abandona a mola é igual à energia potencial quando ela está em repouso, porque tôda a energia potencial é transformada em energia cinética. Nos pontos intermediários o ganho de energia cinética e a perda de energia potencial são iguais e sua soma é constante, isto é:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E$$



25-4 — Gráfico da energia potencial em função da compressão, para a mola cujo gráfico fôrça-compressão está representado na Fig. 25-2.

A constante E é igual à energia potencial quando a compressão é máxima, isto é, quando $v = 0$. É também igual a $\frac{1}{2}mv_o^2$ (a energia cinética) quando $U = 0$, isto é, no instante em que a massa está abandonando a mola. E é chamada energia total da mola e da massa.

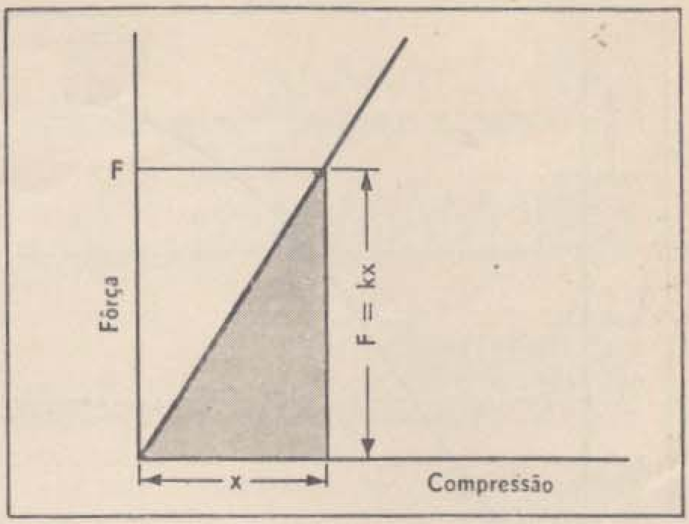
Quando suspendemos certa massa m ao extremo de uma mola e fazemos o sistema oscilar, a expressão

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E$$

nos permite calcular a velocidade v a partir da energia potencial U em qualquer instante do movimento (Fig. 25-6). Por exemplo, se a mola exerce uma fôrça restauradora *linear*, sabemos que a massa oscila com movimento harmônico simples (Seção 21-8). Sabemos, também, que $U = \frac{1}{2}kx^2$ para tal fôrça. Para o movimento harmônico simples vemos, portanto, que

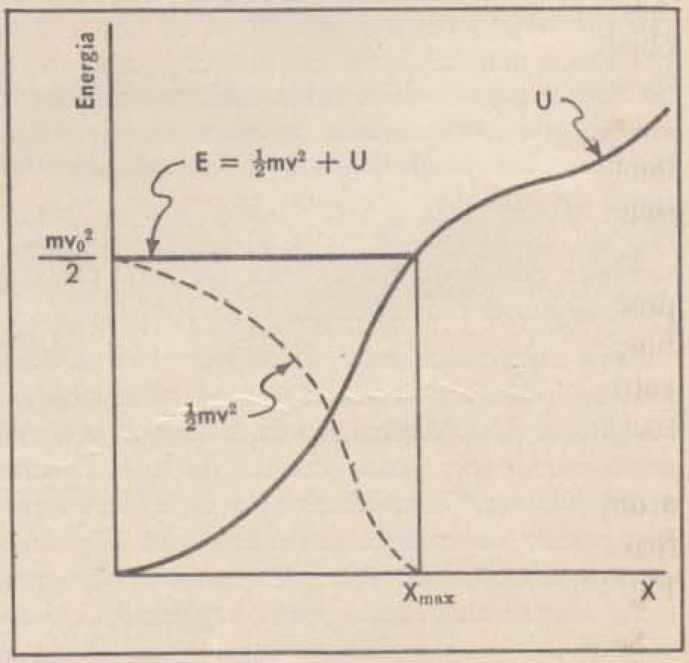
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

Por exemplo, suponha que a constante de fôrça de sua mola vale $k = 2$ newtons/metro.



25-5 — Gráfico de F em função de x para uma mola, quando $F = kx$. A área sob a curva é a de um triângulo de base x e altura kx. A área, e portanto a energia potencial, é dada por $\frac{1}{2}kx^2$.

Suspenda à mola um objeto de massa igual a 8 kg, afaste-o 1 m da posição de repouso e largue-o. Qual será sua velocidade ao passar pela posição de repouso? Com que período êle oscilará? Para responder à primeira pergunta, notemos, inicialmente, que a massa não está em movimento quando a soltamos. Portanto, a ener-



25-6 — Gráfico das energias de uma massa que se move prêsa ao extremo de uma mola. Uma das curvas mostra sua energia cinética, e a outra, sua energia potencial. A soma $U + \frac{mv^2}{2}$ é representada pela reta horizontal, indicando que a soma das energias é constante.

gia cinética $\frac{1}{2}mv^2$ é zero e a energia total constante é igual, nesse instante, à energia potencial $\frac{1}{2}kx^2$. Logo, ao soltarmos a massa,

$$E = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left(2\frac{\text{newton}}{\text{metro}}\right)(1\text{ m})^2 = 1\text{ joule}$$

Por outro lado, quando o objeto passa pela posição de repouso, $x = 0$; a energia total é tôda cinética, isto é:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(8\text{kg})\ v^2 = 1\text{ joule}$$

Portanto $v^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\text{metro}}{\text{s}}\right)^2$ e a velocidade é $\frac{1}{2}$ m/s.

25-7 — Interação entre duas massas, que começa quando a distância entre elas é d. Ao atingirem a separação mínima, quando suas velocidades são iguais, nós as cobrimos com uma gaiola muito leve. Elas continuarão a se mover em conjunto, com a mesma velocidade e energia cinética mínima. Podemos remover a gaiola a qualquer instante; as massas se separarão de nôvo e recuperarão a energia cinética inicial.

Podemos responder à segunda pergunta — qual é o período? — de dois modos simples. Primeiro, aprendemos, na Seção 21-8, que o movimento harmônico simples é a projeção de um movimento circular uniforme. Se o deslocamento máximo no movimento harmônico simples é de 1 metro, o movimento circular correspondente se faz numa circunferência de raio 1 metro e comprimento igual a 2π metros. Ademais, se a velocidade máxima no movimento harmônico simples é $\frac{1}{2}$ m/s, a do movimento circular uniforme correspondente tem êsse mesmo valor. Portanto o período será

$$\frac{2\ \pi\text{ metros}}{\frac{1}{2}\text{ m/s}} = 4\ \pi\text{ segundos}$$

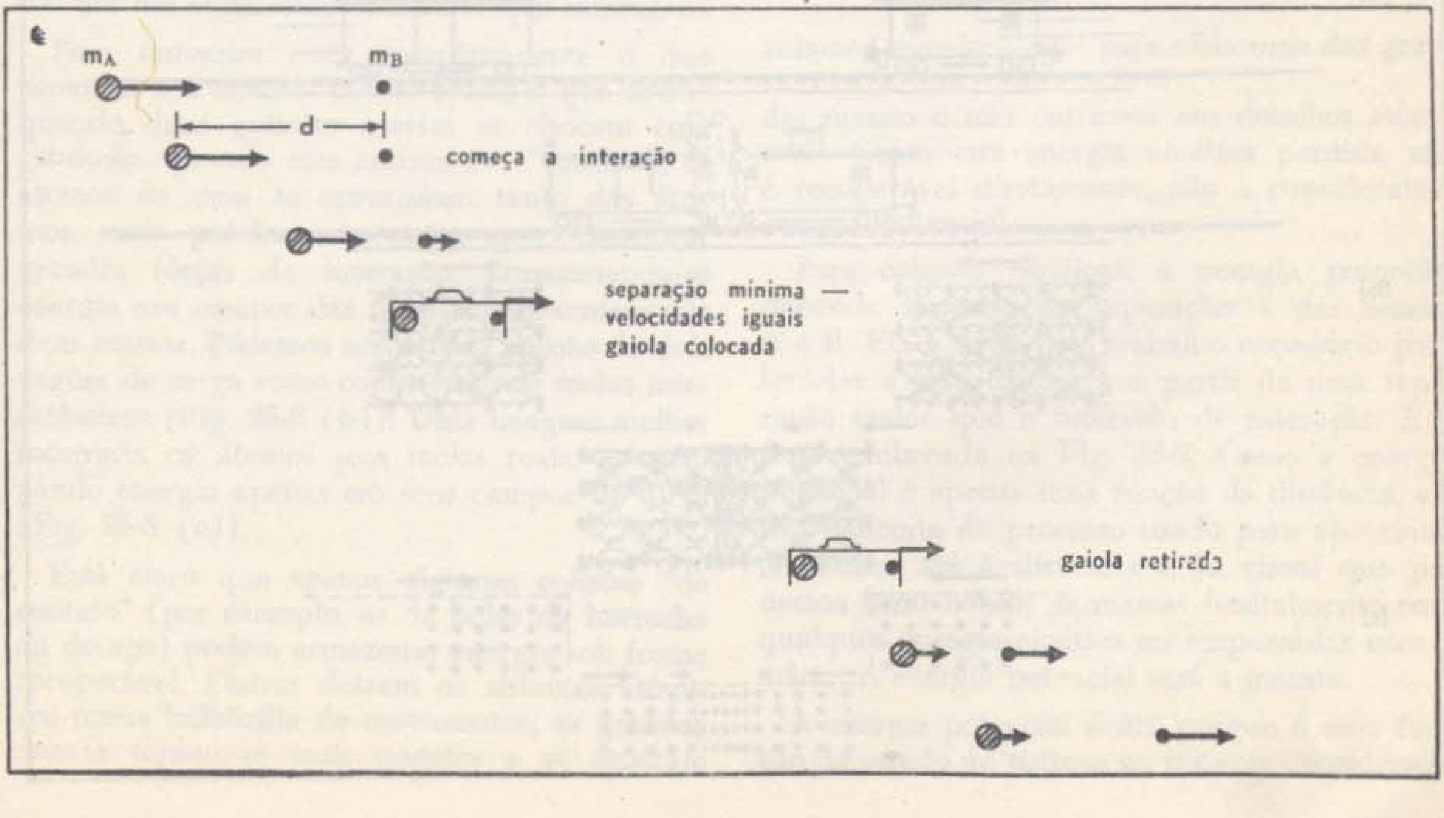
Podemos confrontar êsse resultado com o obtido pelo segundo método. Na Seção 21-8, aprendemos que o período é

$$T = 2\ \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Aqui, teremos

$$T = 2\ \pi\sqrt{\frac{8\text{ kg}}{2\ \frac{\text{newtons}}{\text{metro}}}} = 4\ \pi\text{ segundos.}$$

em concorância com o resultado anterior.



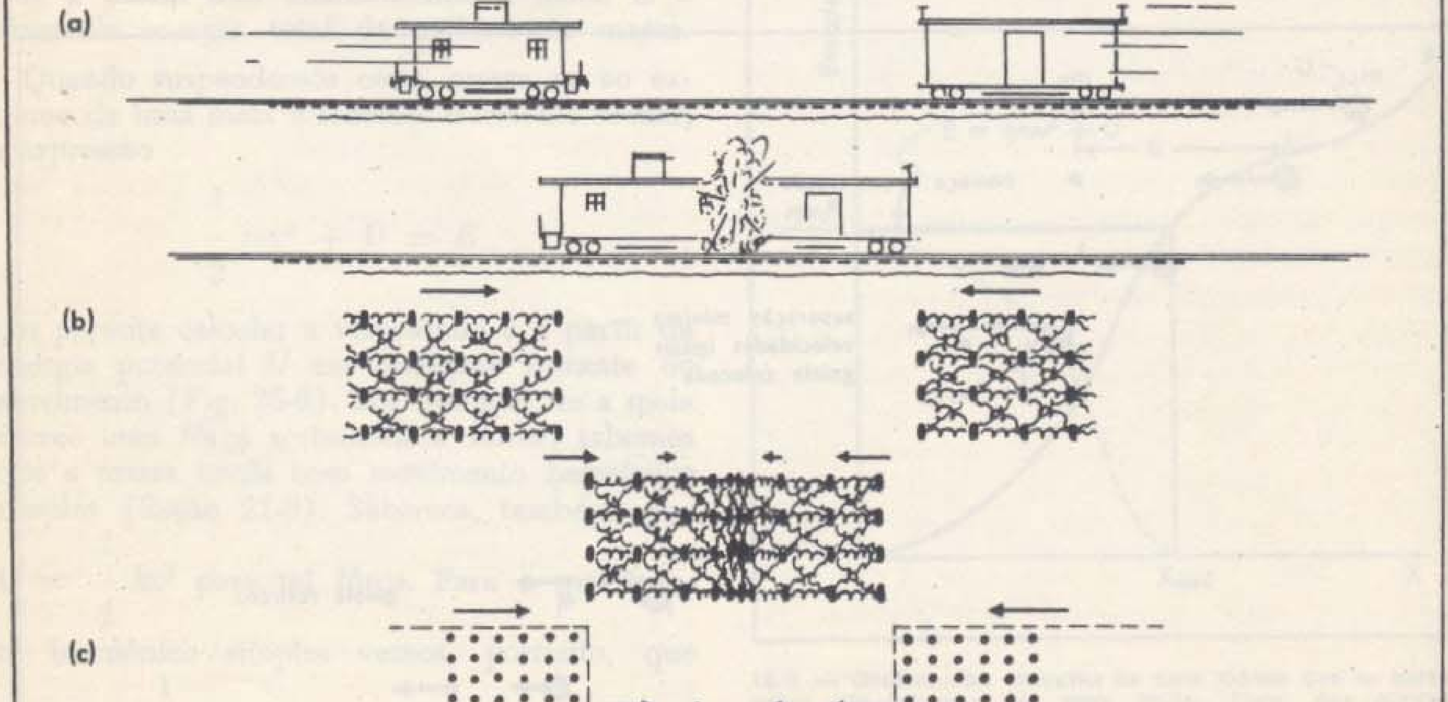
25 — 2. Energia Potencial de Dois Corpos que Interagem.

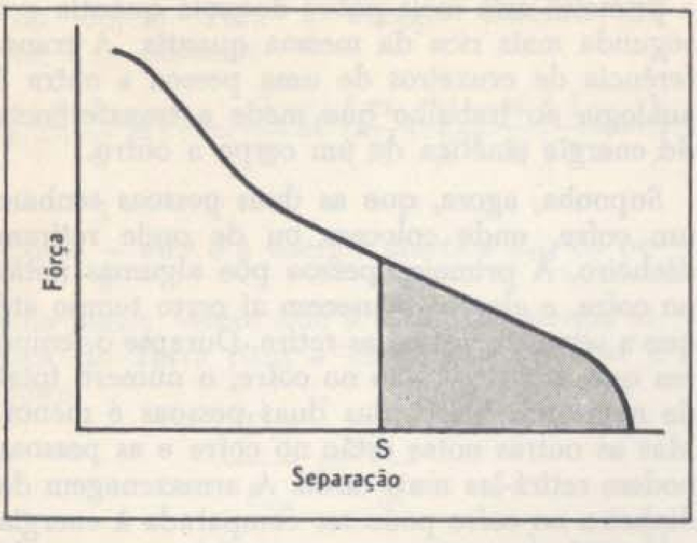
Considere, agora, um objeto que colide frontalmente com outro, como no Capítulo 24. Suponha que A seja atirado contra B, que está em repouso (Fig. 25-7). Quando A alcança o intervalo de interação d, começa a perder velocidade e, portanto, energia cinética, enquanto B começa a mover-se cada vez mais ràpidamente; mas B não ganha tôda a energia cinética perdida por A. Está desaparecendo energia cinética. Quando a distância entre A e B é mínima, ambos se movem com a mesma velocidade e a energia cinética total é mínima. Suponba que, justamente nêsse instante, uma gaiola bem leve (de massa desprezível) seja jogado sôbre A e B para evitar que êles se separem. Então, todo o sistema – A, B e a gaiola – continua com velocidade constante; sua energia cinética não varia mais. O sistema continuará a mover-se com energia cinética mínima até que retiremos a gaiola. Se considerarmos apenas a energia cinética, o sistema parece ter menos energia do que tinha inicialmente. Entretanto, se removermos a gaiola de modo que A e B possam distanciar-se, voltaremos à energia cinética inicial, desde que as fôrças de interação dependam apenas da distância. Estamos considerando apenas interações que fornecem as mesmas fôrças à mesma distância, quer A e B estejam se aproximando, quer estejam se afastando. Tais fôrças tornam a colisão elástica.

Enquanto mantivermos a gaiola temos menos energia cinética do que inicialmente; dizemos que a energia cinética que falta está armazenada como energia potencial. Podemos mantê-la armazenada durante o tempo que quisermos. E, ao permitirmos que os objetos se separem novamente, a energia cinética aumentará exatamente da quantidade que armazenamos quando os encerramos na gaiola.

Sempre que duas massas são mantidas a certa distância, há uma energia potencial definida. Isto não depende da velocidade com que se move o sistema ou de como as massas foram aproximadas. Tôda a energia reaparecerá como energia cinética quando deixarmos que as duas massas se separem. Todo o conjunto é muito semelhante ao amortecedor de mola – onde podíamos armazenar a energia potencial pren-

25-8 — Em (a) dois vagões colidem. Como é armazenada a energia para fazê-los recuar? (b) Podemos imaginar que o choque comprime um grande número de pequenas molas entre os átomos. (c) Uma imagem melhor não mostraria molas interatômicas, armazenando-se a energia nos campos de fôrça entre os átomos.





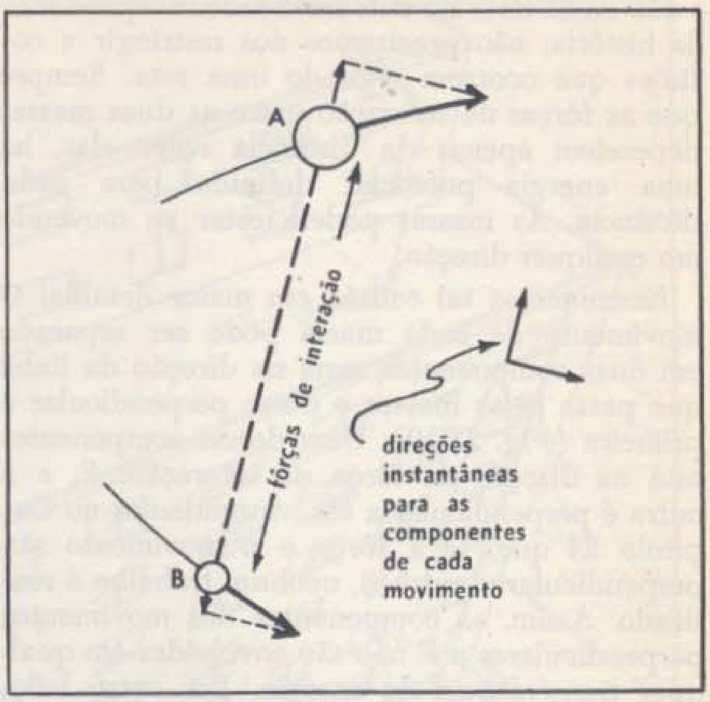
25-9 — Gráfico da fôrça em função da distância para duas massas que interagem. A área sombreada representa o trabalho necessário para levar as duas massas até à distância *s* uma da outra. Essa área dá a energia potencial das duas massas quando elas estão separadas pela distância *s*.

dendo a mola depois de comprimida. Entretanto, agora não temos mola visível. Tudo que temos são fôrças, e dizemos que a energia potencial é armazenada no campo de fôrças da interacão. O campo de fôrças comporta-se como uma mola imaginária.

Na realidade, devemos estar concientes de que, numa mola, a energia potencial é realmente armazenada no campo de fôrças das interações entre seus átomos. A forma visível da mola apenas nos diz onde estão os átomos que interagem.

Para entender mais completamente o que acontece aos átomos, consideremos o que ocorre quando duas grandes massas se chocam com estrondo. Quando elas entram em "contato", os átomos de uma se aproximam tanto dos átomos mais próximo da outra que aparecem grandes fôrças de interação, armazenando-se energia nos campos das fôrças interatômicas das duas massas. Podemos imaginar a colisão de dois vagões de carga como compressão de molas interatômicas [Fig. 25-8 (b)]. Uma imagem melhor mostraria os átomos sem molas reais, armazenando energia apenas em seus campos de fôrça [Fig. 25-8 (c)].

Está claro que apenas algumas colisões "de contato" (por exemplo, as de bolas de borracha ou de aço) podem armazenar energia sob forma recuperável. Outras deixam os sistemas atômicos numa balbúrdia de movimentos; as grandes massas tornam-se mais quentes e se separam



25-10 — Interação de duas massas que se movem em duas direções diferentes quaisquer. O trabalho é medido pelo produto da fôrça *F* pela componente do movimento na direção da fôrça.

com menor energia cinética visível. A colisão é inelástica. Quando observamos grandes massas que colidem inelàsticamente, vemos que as fôrças não são as mesmas quando as massas estão se aproximando e se afastando. Parte da energia cinética visível do movimento das grandes massas desaparece permanentemente. (Nós a calculamos usando $\frac{1}{2}mv^2$ para cada uma das grandes massas e não entramos em detalhes atômicos.) Como esta energia cinética perdida não é recuperável diretamente, não a consideramos energia potencial.

Para colisões elásticas, a energia potencial depende sòmente da separação *s* das massas A e B. Ela é dada pelo trabalho necessário para levá-las a essa distância a partir de uma separação maior que o intervalo de interação. É a área sombreada na Fig. 25-9. Como a energia potencial é apenas uma função da distância, ela não depende do processo usado para aproximar as massas até à distância *s*. Já vimos que podemos fazer colidir as massas frontalmente com qualquer energia cinética ou empurrá-las com a mão. A energia potencial será a mesma.

A energia potencial é útil porque é uma função do estado do sistema no instante considerado e não da história do sistema. Sendo independente da história, não precisamos nos restringir a colisões que ocorrem segundo uma reta. Sempre que as fôrças de interação entre as duas massas dependem apenas da distância entre elas, há uma energia potencial definida para cada distância. As massas podem estar se movendo em qualquer direção.

Examinemos tal colisão em maior detalhe. O movimento de cada massa pode ser separado em duas componentes, uma na direção da linha que passa pelas massas e outra perpendicular à primeira (Fig. 25-10). Uma dessas componentes está na direção da fôrça de interação; F, e a outra é perpendicular a ela. Aprendemos no Capítulo 24 que, se a fôrça e o movimento são perpendiculares entre si, nenhum trabalho é realizado. Assim, as componentes dos movimentos perpendiculares a F não são envolvidas em qualquer transferência de energia. Por outro lado, quando fôrça e movimento estão na mesma direção, produz-se trabalho e transfere-se energia. Por conseguinte, a componente da fôrça na direção do segmento que une as duas massas multiplicada pela variação da distância, mede a transformação de energia potencial em energia cinética, tal como numa colisão frontal.

Podemos aplicar o mesmo tratamento a qualquer sistema isolado de massas, por mais complexo que seja, desde que as fôrças sejam newtonianas — isto é, desde que as fôrças de interação entre cada par de massas sejam iguais e opostas e dependam sòmente da distância. Nessas condições, a energia potencial pode ser definida e a energia mecânica total (cinética mais potencial) de um sistema isolado permanece constante.

Podemos agora ver que a energia potencial pode ser relacionada com a energia armazenada nos combustíveis: na gasolina ou no núcleo dos átomos, por exemplo. Usando combustíveis, nós não liberamos a energia removendo uma gaiola mas, em condições apropriadas, podemos transformar a energia armazenada nos combustíveis em energia cinética dos movimentos de grandes massas — ou na energia cinética dos movimentos desordenados das moléculas. Usando o conceito de energia cinética e potencial, podemos entender muitas das complexas transformações de energia que ocorrem na natureza.

Uma analogia grosseira pode nos ajudar a entender a energia cinética e a potencial. Quando uma pessoa paga a outra certa quantia, a primeira está mais pobre daquela quantia e a segunda mais rica da mesma quantia. A transferência de cruzeiros de uma pessoa a outra é análogia ao trabalho que mede a transferência de energia cinética de um corpo a outro.

Suponha, agora, que as duas pessoas tenham um cofre, onde colocam ou de onde retiram dinheiro. A primeira pessoa põe algumas notas no cofre, e elas permanecem aí certo tempo até que a segunda pessoa as retire. Durante o tempo em que as notas estão no cofre, o número total de notas nos bolsos das duas pessoas é menor. Mas as outras notas estão no cofre e as pessoas podem retirá-las mais tarde. A armazenagem de dinheiro no cofre pode ser comparada à energia potencial, que atúa como uma armazenagem de energia que pode mais tarde ser retirada como energia cinética.

A primeira pessoa poderia colocar notas no cofre mais ràpidamente do que a segunda as retirasse. Então a quantidade de dinheiro no cofre aumentaria. De modo semelhante, um objeto que interage com outro pode perder energia cinética mais depressa do que o segundo a recebe. Então a energia potencial aumenta. Em qualquer caso nada é perdido; as notas estão no cofre e podem ser retiradas; a energia potencial ainda está disponível. Há o mesmo total que antes.

25 — 3. Energia Potencial Gravitacional Próximo da Superfície da Terra.

Examinemos a energia potencial associada com a atração gravitacional entre a Terra e outros objetos. Consideremos o sistema formado pela Terra e por um objeto de massa m que admitiremos muito pequena comparada com a massa M da Terra. Se abandonarmos o corpo m acima da superfície da Terra, êle cairá. Simultâneamente, a Terra subirá (muito pouco) para o corpo. Cada massa ganha energia cinética, enquanto a energia potencial do sistema diminui.

Em qualquer instante as quantidades de movimento do objeto e da Terra são iguais e opostas. Portanto a velocidade v do corpo e V da Terra satisfazem à equação

$$mv = MV \qquad \text{ou} \qquad V = \frac{m}{M} v$$

A partir desta relação, podemos calcular a razão entre as energias cinéticas da Terra e do objeto. Para a energia cinética da Terra, E_{cT} obtemos

$$E_{cT} = \frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M} v\right)^2 = \frac{m}{M}\left(\frac{1}{2} mv^2\right)$$

Como $\frac{1}{2} mv^2$ é a energia cinética E_{cm} da pequena massa, vemos que a razão da energia cinética da Terra para a do objeto que cai é sempre

$$\frac{E_{cT}}{E_{cm}} = \frac{m}{M}$$

Logo, se m é muito pequena comparada com M a energia cinética da Terra pode ser desprezada em comparação com a do objeto. Quando m cai para a Terra, pràticamente tôda a energia potencial do sistema composto pela Terra e pela massa m é transformada em energia cinética do movimento de m.

Admita, agora, que m se move de uma distância pequena em comparação com o raio da Terra. Isto é certamente verdadeiro em qualquer experiência de laboratório. Então a fôrça de atração mg entre a Terra e o objeto tem um valor constante. Tem também uma direção constante (vertical, para baixo).

Sob a influência dessa fôrça, um corpo que parte do repouso ganha velocidade com aceleração g constante, para baixo. Como vimos na Seção 5-7, quando tiver caido de uma distância d sua velocidade será dada por

$$v^2 = 2gd$$

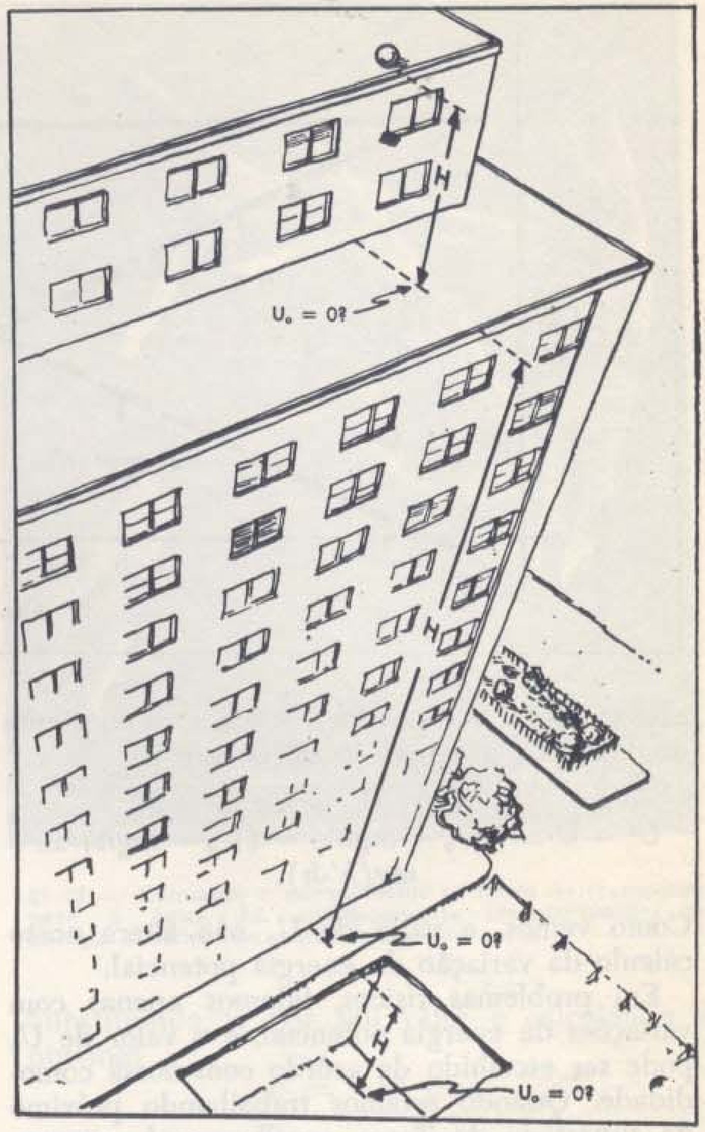
e sua energia cinética E_{co} será

$$E_{co} = \frac{1}{2} mv^2 = mgd$$

O primeiro membro desta equação é a energia cinética; o segundo é o trabalho (fôrça multiplicada por distância) que mede a transformação de energia potencial em energia cinética quando a distância do pequeno objeto ao centro da Terra decresce de d.

Ao cair da altura h acima da superfície da Terra à altura h', um corpo percorre uma distância $d = h - h'$ e a energia potencial varia de

$$U' - U = -mgd = -mg\ (h\text{-}h') = mg\ (h'\text{-}h).$$



25-11 — Podemos escolher a altura que quisermos para a energia potencial zero. A escôlha é arbitrária e não faz diferença porque lidamos apenas com variações da energia potencial.

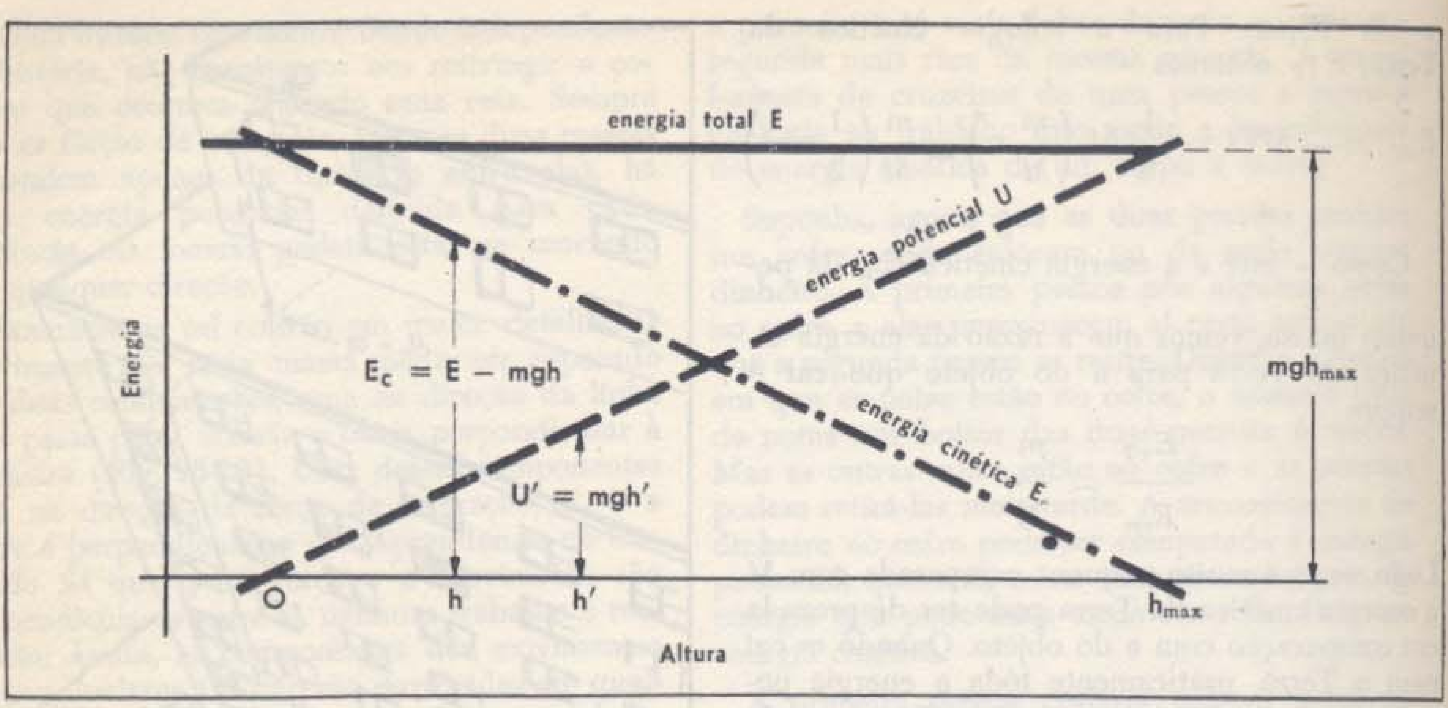
(O sinal negativo em $-mgd$ indica que perde-se energia potencial e ganha-se energia cinética.) À vista dêsse resultado, podemos conjecturar que a energia potencial seja

$$U = mgh.$$

De fato, êste é o resultado certo; e podemos mostrar que é correto voltando atrás: se

$$U = mgh$$
$$\text{então } U' = mgh'$$
$$\text{e } U' - U = mg(h'\text{-}h),$$

que sabemos ser a variação correta da energia potencial. Nenhuma outra expressão de U dará



25-12 → Gráfico da energia de um corpo que se move próximo à superfície da Terra. Se a gravidade é a única fôrça que atua, a energia total E permanece constante, embora possam mudar a energia potencial e a cinética.

essa variação, mas podemos somar uma constante qualquer U_o à expressão de U, isto é

$$U = U_o + mgh$$

$$U' - U = (U_o - mgh') - (U_o - mgh) = mg(h'-h).$$

Como vemos, o valor de U_o não altera nosso cálculo da variação da energia potencial.

Em problemas físicos, lidamos apenas com variações da energia potencial, e o valor de U_o pode ser escolhido de acôrdo com nossa comodidade. Quando estamos trabalhando próximo da superfície da Terra, escolhemos freqüentemente $U_o = 0$ (Fig. 25-11). Isto dá o valor zero à energia potencial na superfície da Terra. Por outro lado, quando trabalhamos com satélites que podem afastar-se muito da Terra, usualmente escolhemos a energia potencial zero a uma distância infinita da Terra. No fundo a escolha não importa.

Na equação $U' - U = mg\ (h'-h) = -\ mgd$, mgd representa a fôrça mg dirigida para baixo que atua sôbre a massa m, multiplicada pela distância d de que ela cai. Essa expressão portanto dá a variação de energia cinética ao cair de h a h', isto é,

$$mgd = E_c' - E_c$$

Conseqüentemente,

$$U' - U = -\ mgd = -\ (E_c' - E_c)$$

Esta equação estabelece que as variações de energia potencial e cinética são exatamente opostas. Na queda a energia potencial decresce e a cinética aumenta do mesmo valor. O trabalho mgd mede a transformação. Na subida, a energia cinética decresce e a potencial aumenta da mesma quantidade. De novo o trabalho mgd mede a transformação.

Como qualquer variação da energia potencial é contrabalançada por uma variação igual e contrária da energia cinética, a soma das duas permanece constante. Podemos ver que é assim reescrevendo a equação anterior da seguinte maneira:

$$U + E_c = U' + E_c'$$

O primeiro membro desta equação dá a energia total E em certo instante e o segundo membro dá a mesma energia total num outro instante qualquer. A equação mostra que esta energia total

$$E = U + E_c$$

é a mesma em dois instantes quaisquer. É uma constante, embora os valores de U e de E possam variar. Esta lei de conservação aplica-se ao sistema quando êle está isolado de influências externas que poderiam realizar trabalho sôbre êle e assim alterar a energia total. Deve-se entender claramente que nenhuma outra fôrça está agindo. A relação entre energia total, energia potencial e energia cinética está indicada na Fig. 25-12.

Por extenso, a equação $U + E_c = E$ equivale à seguinte

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = E.$$

Esta equação é útil muitas vêzes, pois nos informa sôbre a velocidade de m em diferentes lugares sem referência aos detalhes do movimento de um lugar para outro. Por exemplo, um projétil, ao passar por um ponto situado à altura h do solo, tem a mesma velocidade na subida e na descida, porque mgh é o mesmo na subida e na descida, E tem sempre o mesmo valor e, portanto, $\frac{1}{2}mv^2$ deve ter o mesmo valor mesmo que a direção do movimento tenha mudado.

Como aplicação específica da equação

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

suponhamos que um objeto de massa 1 kg se mova numa direção qualquer com a velocidade de 1 m/s à altura de 3 metros acima do solo. Qual será a velocidade quando estiver à altura de 2 metros?

Podemos fàcilmente calcular sua velocidade se conhecermos sua energia cinética. E, como a energia total E não varia, a energia cinética a 2 metros acima do solo será a diferença entre a energia total e a energia potencial a essa altura. A energia total é a soma da energia potencial inicial (a 3 m de altura),

$$U = mgh = 1 \times 9,8 \times 3 \text{ joules} = 29,4 \text{ joules}$$

e da energia cinética inicial,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1^2 \text{ joules} = 0,5 \text{ joule}$$

Isto dá

$$E = U + E_c = 29,4 + 0,5 \text{ joules} = 29,9 \text{ joules}$$

e, portanto, a 2 metros de altura, a energia cinética será

$$E_c' = E - U = 29,9 - 19,6 \text{ joules} = 10,3 \text{ joules}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 10,3 \text{ joules.}$$

25-13 — Enquanto o mergulhador se move do trampolim para a água, há continuamente transformações de energia cinética em potencial, e vice-versa.

Substituindo m por seu valor e calculando v obtemos

$$v = 4,54 \text{ m/s}$$

Em cada um dos movimentos acima a energia total E permanece constante enquanto a única fôrça atuante fôr a da gravidade. Mas podemos alterar a energia total E empurrando a massa, isto é realizando algum trabalho sôbre ela. Se, depois, a abandonarmos, ela se moverá com um novo valor para a energia total E.

Nesta seção, tal como no caso da massa que colide com o amortecedor de mola, foi possível encontrar uma energia potencial que só depende da posição da massa. Esta energia potencial decresce exatamente da mesma quantidade de que aumenta a energia cinética. Tal como no caso do amortecedor de mola, a soma das energias cinética e potencial permanece constante.

Dois exemplos podem servir para ilustrar a grande importância que tem para nós a energia potencial gravitacional. Num bate-estacas, por exemplo, aumentamos a energia potencial de uma grande massa, elevando-a. Deixando-a cair livremente, transformamos sua energia potencial em cinética. Isto permite enterrar estacas no chão.

Construindo barragens, podemos manter a água mais longe do centro da Terra do que ela fica habitualmente. Deixando-a cair do cimo da barragem a um nível inferior, convertemos energia potencial em outras formas – para movimentar moinhos ou produzir energia elétrica que alimenta motores ou lâmpadas elétricas. Cada quilograma de água que cai de 10 metros pode produzir um trabalho de 1 x 9,8 x 10 = 98 joules. Deixando cair 1 quilograma de água da altura de 10 metros, a cada segundo, podemos manter acesa uma lâmpada comum.

Um cavalo de tração comum (*) pode realizar 750 joules de trabalho por segundo. Se três dêles se revezam, podem acender algumas lâmpadas elétricas durante todo o ano, por alguns milhões de cruzeiros. A companhia de iluminação fará o mesmo por cerca de 1/10 dêsse custo, usando a energia potencial da água represada ou do carvão.

25 — 4. Energia Potencial Gravitacional em Geral.

Na seção anterior determinamos a energia potencial gravitacional de uma massa m próxima da Terra. Admitimos que a intensidade do campo gravitacional fôsse constante. Por outro lado, sabemos que, quando duas massas se afastam muito uma da outra, a fôrça gravitacional entre elas varia. Nesse caso mais geral, qual é a expressão correta para a energia potencial? Por exemplo, qual é a energia potencial de um satélite?

Aprendemos no Capítulo 22 que a fôrça de atração entre a terra M e um satélite m é GMm/r^2, sendo r a distância do centro da Terra ao satélite. A curva fôrça-distância na Fig. 25-14 é um gráfico dessa função.

A área sob essa curva, entre duas distâncias diferentes, mede o trabalho realizado quando a distância entre os dois corpos varia. Por exemplo, a área em verde representa o trabalho necessário para aumentar a distância de r a r'. Usando métodos matemáticos um pouco mais complicados do que desejamos discutir aqui, podemos calcular a área sob a curva fôrça-distância, desde qualquer distância r até o infinito. Esta é a área sombreada que se estende infinitamente para a direita a partir de r e vale

$$\frac{GMm}{r}$$

Êste é, pois, o trabalho para aumentar a distância entre os corpos de r ao infinito. Êste trabalho mede a energia transformada em energia potencial de separação quando se afasta um corpo do outro. O trabalho é portanto igual à diferença $U_\infty - U_r$ entre a energia potencial a uma distância infinita e a energia potencial à distância r, isto é,

$$U_\infty - U_r = \frac{GMm}{r}$$

Resolvendo esta equação para U_r, vemos que a energia potencial à distância r é

$$U_r = U_\infty - \frac{GMm}{r}$$

e, fazendo igual a zero a energia potencial a uma distância infinita, obtemos

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

Obtida esta expressão para a energia potencial, podemos provar que ela é correta; tal prova está feita no quadro ao lado.

Agora que temos a energia potencial, podemos obter a energia total E adicionando-lhe a energia cinética E_c; o resultado será

$$E = E_c + U_r = E_c - \frac{GMm}{r}$$

Tal como verificamos para massas movidas por molas e para objetos que se deslocam próximo da superfície da Terra, a energia total neste caso também é conservada. Para qualquer movimento sob a influência apenas da atração gravitacional, o que se ganha como energia potencial quando os corpos se separam é compensado por uma redução da energia cinética. Assim, quando um satélite percorre uma órbita em tôrno da Terra, êle se move mais devagar quando está mais longe e mais ràpidamente quando mais próximo da Terra. Para a Terra em sua órbita em tôrno do Sol, as mesmas relações são verdadeiras.

(*) A potência dos cavalos de tração foi determinado por James Watt a fim de compará-la com a de suas máquinas a vapor. Mais precisamente, seu padrão é 746 joules/s e é chamado cavalo-vapor em honra do cavalo. O joule/s é chamado watt em honra de James Watt.

PROVA DE QUE $U_r = \frac{GMm}{r}$ É A EXPRESSÃO CORRETA PARA A ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

O trabalho, que faz variar a energia cinética do satélite, quando êle passa de um ponto P a outro P', depende apenas das duas distâncias r e r', e é a diferença entre a energia potencial na posição P e a energia potencial na posição P':

$$E_c = -\Delta U = -(U_{r'} - U_r)$$

Êle é representado pela área sob a curva fôrça versus distância, entre r e r'; como a fôrça é atrativa, a energia cinética decresce quando a distância aumenta. Ora, se

$$U_r = -\frac{GMm}{r},$$

encontramos para o trabalho

$$-(U_{r'} - U_r) = GMm\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right).$$

Ademais, se estamos certos, êsse trabalho é igual ao produto da fôrça gravitacional pela variação de distância: $F(r' - r)$; isto é,

$$F(r' - r) = GMm\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right).$$

Como

$$\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) = \frac{r - r'}{rr'} = -\frac{r' - r}{rr'}$$

obtemos

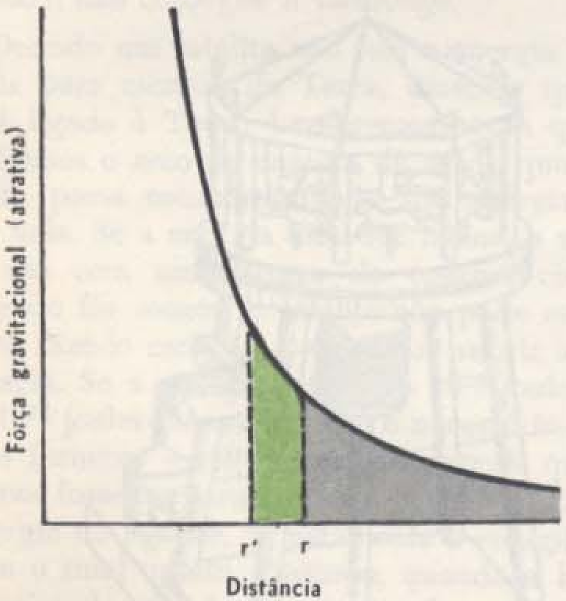
$$F(r' - r) = -\frac{GMm}{rr'}(r' - r)$$

e cancelando $(r' - r)$ de ambos os lados da equação obtemos

$$F = -\frac{GMm}{rr'}$$

Aquí F é a fôrça média entre r e r'. Para obter seu valor na posição r, devemos escolher r' muito próximo de r. Obtemos então $F = -\frac{GMm}{r^2}$ que é a fôrça gravitacional correta. (O sinal negativo diz apenas que a fôrça é atrativa, de modo que a energia cinética decresce se r' é maior do que r). Como obtivemos a fôrça certa, mostramos que partimos da expressão correta para a energia potencial. Uma expressão diferente para U_r levaria a uma fôrça diferente e saberíamos então que a expressão presumida para U_r estava errada.

$U_r = -\frac{GMm}{r}$ é pois a energia potencial gravitacional correta.



25-14 — Gráfico da fôrça de atração gravitacional em função da distância ao centro da Terra. Quando a distância aumenta a fôrça decresce ràpidamente

25 — 5. Energia de Escape, Velocidade de Escape e energia de Ligação dos Satélites

Com que energia devemos lançar um satélite para que êle escape da Terra? Na seção anterior, verificamos que o trabalho necessário para aumentar a distância entre dois corpos de r até infinito é

$$\frac{GMm}{r}$$

Conseqüentemente, se um satélite deve escapar, devemos lançá-lo pelo menos com essa quantidade de energia cinética. Se o satélite, ao partir, tiver justamente essa energia cinética, estará em repouso quando a distância for infinita. Esta energia cinética mínima é chamada energia cinética de escape. Para um satélite de massa m que deixa a superfície da Terra, ela será

$$\text{Energia cinética de escape} = \frac{mv_e^2}{2} = \frac{GMm}{r_T}$$

onde v_e é a velocidade logo após o lançamento, r_T, o raio da Terra e M, a massa da Terra.

A energia cinética de escape $= \dfrac{mv_e^2}{2} = \dfrac{GMm}{r_T}$ aumenta na proporção direta da massa m do satélite. Introduzindo os valores numéricos de G, M e r_T obtemos para essa energia $6{,}24 \times 10^7$ joules por quilograma de satélite. Por exemplo, isto dá $6{,}24 \times 10^{10}$ joules para um satélite de 1 tonelada.

Embora a energia cinética de escape dependa da massa, a velocidade de escape v_e é independente da massa. Como a energia cinética de escape é $\dfrac{mv_e^2}{2}$, seu valor por quilograma será $\dfrac{v_e^2}{2}$ e, conseqüentemente, podemos calcular a velocidade de escape a partir da equação:

$$\frac{v_e^2}{2} = \frac{GM}{r_T} = 6{,}24 \times 10^7 \text{ joules/kg.}$$

As unidades podem parecer estranhas aqui, mas você poderá verificar fàcilmente que 1 joule/kg $= 1\ (\text{m/s})^2$ Multiplicando por 2 e extraindo a raiz quadrada obtemos

$$v_e = 1{,}12 \times 10^4 \text{ m/s} = 11{,}2 \text{ km/s.}$$

Essa é a velocidade de escape que deve ser dada a qualquer objeto para que êle abandone a superfície da Terra e não mais retorne.

É interessante comparar a quantidade de energia que deve ser fornecida a um satélite para fazê-lo girar em tôrno da Terra, numa órbita circular, com a energia que devemos dar-lhe para que escape. Quando o satélite circula logo acima da superfície da Terra, a fôrça centripeta necessária, mv^2/r_T, é fornecida pela atração gravitacional GMm/r_T. Portanto

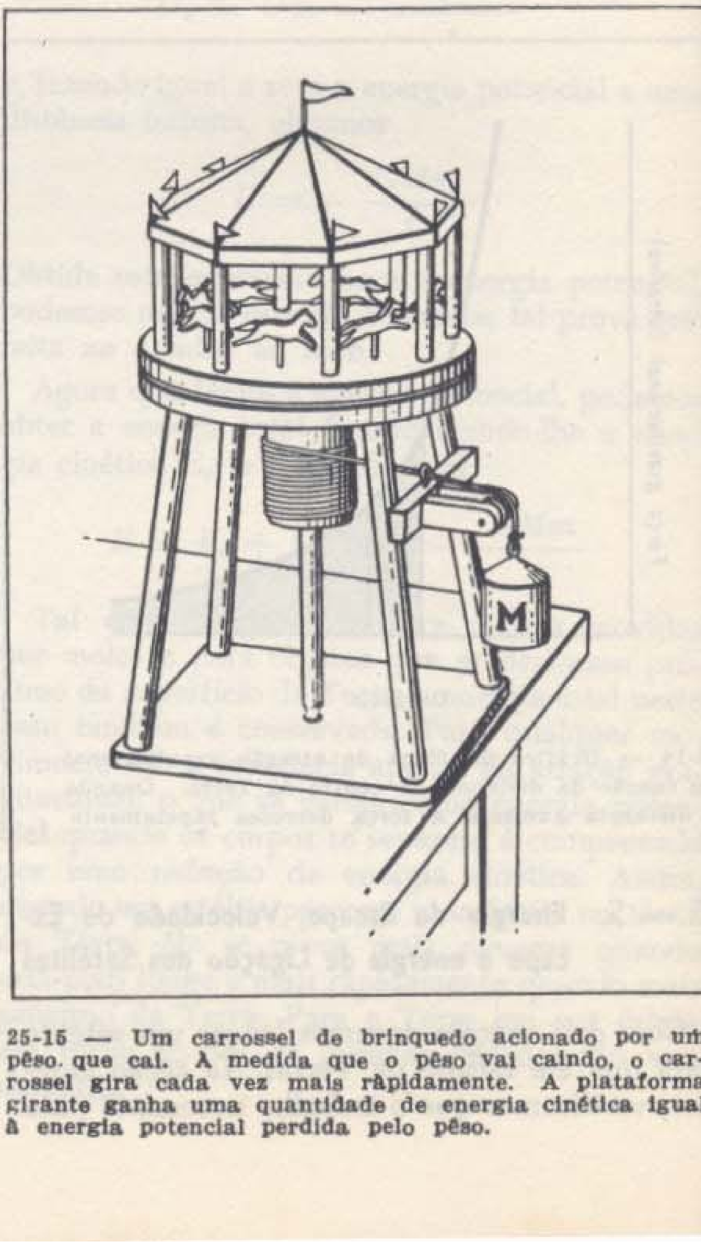
$$\frac{mv^2}{r_T} = \frac{GMm}{r_T^2} \text{ ou } mv^2 = \frac{GMm}{r_T}$$

Êste resultado mostra que a energia cinética $\dfrac{1}{2}mv^2$ para colocar o satélite em órbita em tôrno da Terra é a metade da energia de escape $\dfrac{GMm}{r_T}$.

Em outras palavras, para lançar um satélite fora da Terra definitivamente é necessário o dôbro da energia gasta para colocá-lo em órbita pouco acima da atmosfera Terrestre.

A equação da energia total do satélite para qualquer distância r é

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$



25-15 — Um carrossel de brinquedo acionado por um pêso que cai. A medida que o pêso vai caindo, o carrossel gira cada vez mais ràpidamente. A plataforma girante ganha uma quantidade de energia cinética igual à energia potencial perdida pelo pêso.

e esta energia total é constante durante o movimento. Substituindo v e r pela velocidade de escape e pelo raio da Terra, verificamos que a energia total deve ser nula quando o satélite pode apenas escapar. Energia total zero corresponde pois à velocidade zero e energia potencial zero a uma distância infinita.

Se o satélite deve permanecer em movimento a uma distância infinita, a energia cinética de lançamento deve ser maior e conseqüentemente, a energia total deve ser maior do que zero (isto é, positiva). Por outro lado, para energias totais menores do que zero (negativas) a velocidade do satélite se anulará à distância r, onde sua energia potencial iguala a energia total:

$$-\frac{GMm}{r} = E$$

A essa distância E_c torna-se zero: não há energia cinética e o satélite está em repouso. Sob a influência da atração gravitacional êle voltará à Terra. Êle não pode afastar-se mais e na maioria das órbitas (onde êle nunca chega ao repouso), não consegue ir tão longe.

Quando um satélite não tem a energia necessária para escapar da Terra, dizemos que êle está ligado à Terra. Lembremos agora que escolhemos o zero de energia de modo que o satélite possa escapar quando sua energia total fôr nula. Se a energia total fôr maior, o satélite escapa com um excesso de energia cinética; quando fôr menor, o satélite não pode escapar. Para fazê-lo escapar, precisamos suprir a deficiência. Se a energia total é -10^{10} joules, isto é, 10^{10} joules menos do que é necessário, devemos fornecer $+10^{10}$ joules. A energia que devemos fornecer para vencer a ligação é chamada energia de ligação. É justamente a energia total com o sinal oposto. Portanto, quando a ligação provém da atração gravitacional, a energia de ligação é:

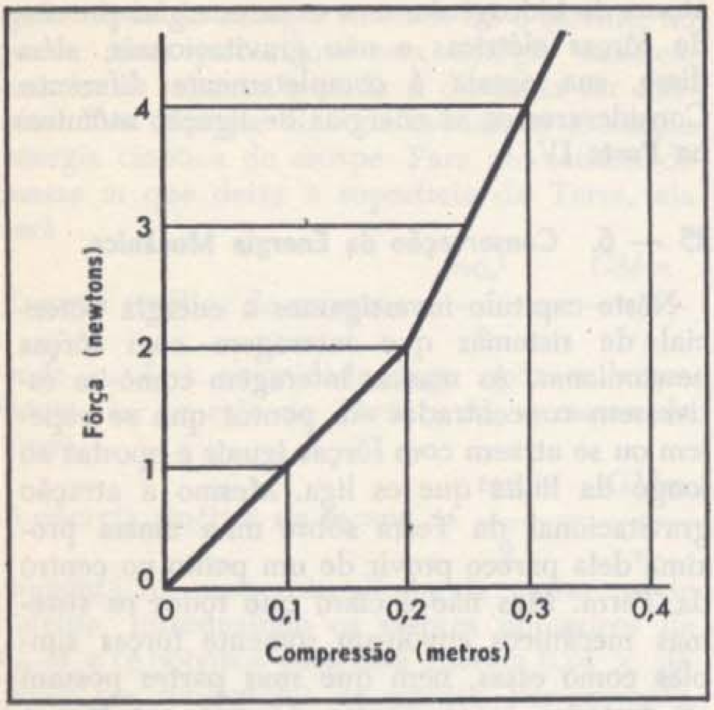
$$\text{Energia de Ligação} = -E = \frac{GMm}{r} - \frac{mv^2}{2}$$

A energia de ligação de um satélite de 1 tonelada, em órbita em tôrno da Terra é $3{,}14 \times 10^{10}$ joules. A energia de ligação de uma pessoa com a Terra é de 4 a 5×10^{9} joules. Há energias de ligação importantes também em Física Atômica; por exemplo, a do eléctron com o próton, no átomo de hidrogênio, mas essas energias provêm de fôrças elétricas e não gravitacionais; além disso, sua escala é completamente diferente. Consideraremos as energias de ligação atômicas na Parte IV.

25 — 6. Conservação da Energia Mecânica.

Nêste capítulo investigamos a energia potencial de sistemas que interagem com fôrças newtonianas. As massas interagem como se estivessem concentradas em pontos que se repelem ou se atraem com fôrças iguais e opostas ao longo da linha que os liga. Mesmo a atração gravitacional da Terra sôbre uma massa próxima dela parece provir de um ponto no centro da Terra. Mas não é claro que todos os sistemas mecânicos envolvam sòmente fôrças simples como essas, nem que suas partes possam ser tratadas como pontos. O que acontece à energia mecânica nos sistemas nos quais não podemos assegurar que tôdas as interações sejam newtonianas?

Para responder a essa pergunta, suponha que temos um carrossel de brinquedo (veja Fig. 25-15) acionado por um sistema de pêso e roldana. A corda é enrolada várias vêzes em tôrno do eixo, passa por uma roldana e sua extremidade está presa à massa M. Se soltarmos a massa o carrossel começará a girar, aumentando de velocidade à proporção que M cai. Ninguém tentaria analisar êsse sistema determinando uma série de interações entre os átomos. Mas considerando o carrossel como uma coleção de pequenas massas e determinando suas velocidades podemos determinar a energia cinética de cada parte. Então, por adição, obtemos a energia cinética total do carrossel. Podemos também medir a distância de que caiu a massa M. Quando fazemos tal experiência com um carrossel montado sôbre rolamentos quase sem atrito, verificamos que a energia cinética ganha por êle é igual ao dècréscimo de energia potencial gravitacional da massa M. Finalmente a corda acaba de se desenrolar mas o carrossel continua a girar. A corda então se enrola no eixo, mas no sentido oposto. O pêso se eleva e o carrossel gira cada vez mais devagar. Quando o carrossel pára de girar, a massa M quase voltou à posição inicial; não volta exatamente à posição de partida apenas porque parte da energia foi transformada



25-16 — Para o problema 3.

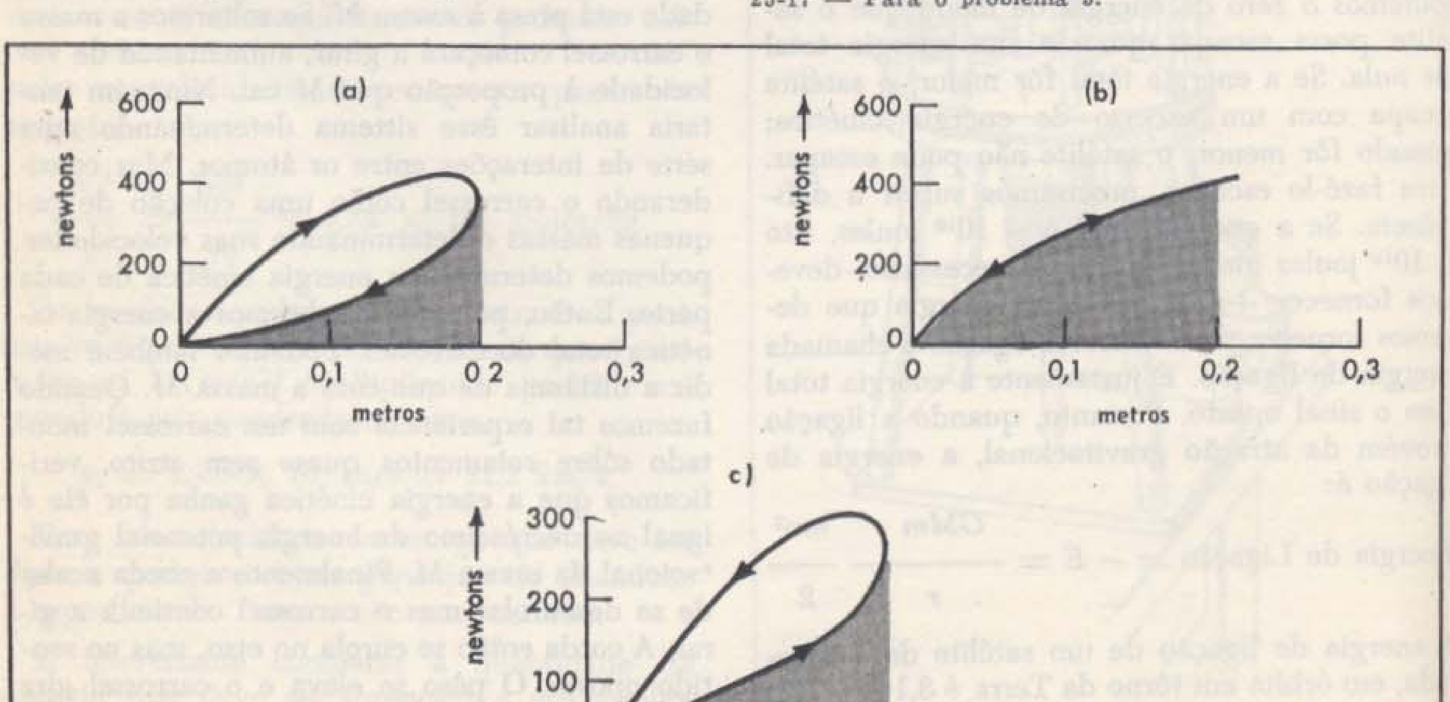
em outras formas, devido às interações de atrito.

Podemos considerar sistemas mecânicos cada vez mais complexos; e, sem analisar em detalhe as fôrças de interação podemos, muitas vêzes, avaliar a energia cinética e a potencial. A energia pode mudar de um tipo a outro, mas (levando em conta a quantidade de energia transformada em calor pelas interações de atrito) a soma permanece constante. Essa experiência comum sugere que a conservação da energia em sistemas mecânicos pode não depender da forma detalhada das interações. Acredita-se que ela se aplica geralmente a todos os sistemas mecânicos.

Algumas vêzes ficamos em dúvida. Encontramos um carrossel de brinquedo que continua a girar, realizando trabalho ou transformando energia em calor quase indefinidamente. Então, se procurarmos com cuidado, verificaremos que alguma energia de fora está sendo introduzida no sistema. Há sempre um pequeno motor que queima combustível ou que usa energia elétrica. A energia pode ser fornecida ao brinquedo pelo Sol sob forma de radiação. Mas, tanto quanto sabemos, a energia não é criada nem destruida.

Vimos, neste capítulo, que a energia, sob forma mecânica, é conservada. No capítulo seguinte veremos o que acontece quando a energia passa para outras formas em quantidade apreciável. Compreenderemos, então, o que nos faz acreditar que a energia é sempre conservada.

25-17 — Para o problema 5.



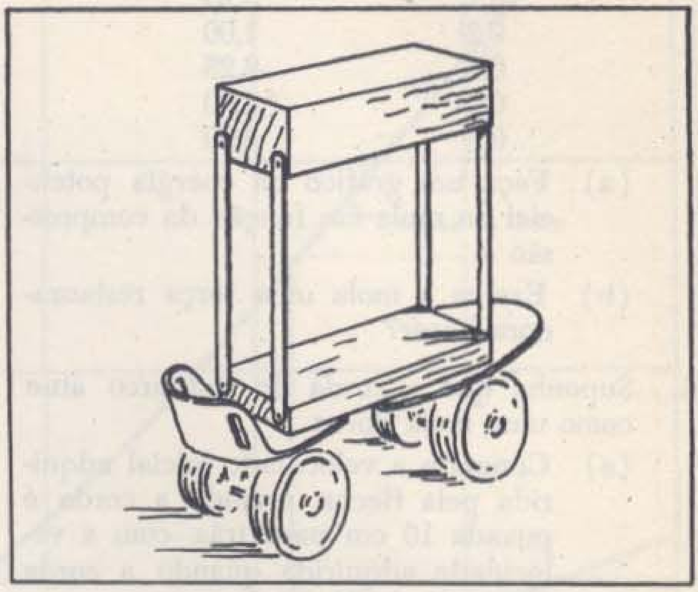
PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO

1. Um objeto de massa 4,0 kg escorrega com velocidade de 3,0 m/s sôbre uma tábua horizontal sem atrito e choca-se com um amortecedor de mola de tipo muito especial, que exerce a fôrça constante de 120 newtons sôbre o objeto enquanto a mola é comprimida e a mesma fôrça enquanto a mola se distente até retornar à posição inicial.
   (a) É elástica esta colisão? Por que?
   (b) Qual é a energia cinética no início da interação?
   (c) De quanto foi comprimida a mola?
   (d) Qual a razão da energia cinética para a energia potencial quando a mola está comprimida de 10 cm?

2. Um objeto de massa 3,0 kg move-se com velocidade de 2,0 m/s e colide com um amortecedor de mola que exerce a fôrça $F = 100\ x$, sendo F a fôrça em newtons e x a compressão em metros.
   (a) Faça um gráfico de F em função de x, desde $x = 0$ até $x = 0{,}40$ m.
   (b) Qual a energia potencial armazenada na mola quando $x = 0{,}10$ m? Qual a energia cinética da massa nêsse ponto?
   (c) O que acontecerá se a mola fôr comprimida 0,10 m com a mão e, a seguir, colocarmos em contato com ela a massa de 3,0 kg e retirarmos a mão?

3. A curva fôrça-compressão de certa mola está traçada na Fig. 25-16.
   (a) Que trabalho é necessário para comprimir a mola de 0,3 m?
   (b) Qual a energia potencial da mola quando comprimida dessa distância?
   (c) Coloque um objeto de massa 2kg em repouso encostado na mola, quando ela estiver comprimida de 0,3 m, e solte-a. Qual a energia cinética da massa ao passar pelo ponto onde a compressão da mola é de 0,2 m?

4. Suponha que lhe sejam dadas duas molas de tamanhos diferentes. Como você as colocaria para que a curva fôrça-compressão fôsse semelhante à da Fig. 25-16?



25-18 — Para o problema 9.

5. Um objeto de 10 kg move-se com velocidade de 10 m/s e atinge uma mola, comprimindo-a de 0,20 m. Quando, a seguir, a mola empurra o objeto, êste sai com a velocidade de 0,80 m/s.
   (a) Qual a perda de energia cinética da massa?
   (b) Que acontece a essa energia perdida?
   (c) Na sua opinião, qual das curvas fôrça-compressão da Fig. 25-17 representa melhor o comportamento desta mola?

6. Uma mola elástica linear é comprimida de 0,2 m por uma fôrça de 20 newtons.
   (a) Qual é a constante de fôrça k (ou razão fôrça-compressão) da mola?
   (b) Qual é a equação da energia potencial armazenada pela mola como função de sua compressão?

7. A tabela seguinte dá a energia cinética E_c de um objeto de massa 2,0 kg quando êle é empurrado por uma mola comprimida a diversas distâncias x.

x (metros)	E_c (joules)
0,1	0,25
0,2	1,00
0,3	2,25
0,4	4,00
0,5	6,00

(a) Faça um gráfico da energia potencial da mola em função da compressão x.

(b) Exerce a mola uma fôrça restauradora linear?

8. Suponha que a corda de um arco atue como uma mola linear.

(a) Compare a velocidade inicial adquirida pela flecha, quando a corda é puxada 10 cm para trás, com a velocidade adquirida quando a corda é puxada de 20 cm.

(b) Quantas vêzes mais alto o arqueiro pode lançar a flecha no segundo caso?

9. A Fig. 25-18 mostra um patim de rodas sôbre o qual colocou-se um objeto de massa M montado sôbre uma base por meio de quatro lâminas de serra. A massa M é igual à da base mais a do patim. Se você segura o patim e puxa a massa M para a esquerda, abandonando então o sistema, a massa se move para a direita e o patim para esquerda. Prepare-se para descrever o movimento ulterior, indicando as formas da energia nas várias fases.

10. O que acontecerá se a massa de 3,0 kg do Problema 2 prender-se à mola, e assim permanecer?

11. Um objeto de massa 0,50 kg que escorrega livremente sôbre uma mesa, é ligado a uma mola linear cuja constante de fôrça é $k = 50$ newtons/m. A massa é puxada e abandonada, vibrando com uma amplitude de 0,10 m.

(a) Qual é a velocidade máxima?

(b) Qual a velocidade a 0,06 m da posição de equilíbrio?

12. Um amortecedor de mola, cuja fôrça restauradora é $F = 200x$, sendo F em newtons e x em metros, é comprimido de 0,100 m. Um objeto de 0,500 kg é colocado próximo ao extremo da mola, e o sistema abandonado.

(a) Qual a quantidade de movimento da massa no momento em que ela deixa de estar em contacto com a mola?

(b) Repetimos a experiência com massas de 0,125 kg, 2,00 kg e 8,00 kg. Qual a quantidade de movimento de cada uma ao afastar-se da mola?

(c) Qual a energia de cada massa ao abandonar a mola?

13. A Fig. 25-19 é o gráfico dos deslocamentos como função do tempo, para duas massas que interagem: $m_1 = 3$ kg e $m_2 = 1$ kg.

(a) Qual a energia cinética inicial de m_1?

(b) Qual a energia cinética final de m_1?

(c) Qual a energia cinética final de m_2?

(d) Qual a energia cinética total mínima?

(e) Qual a energia potencial máxima?

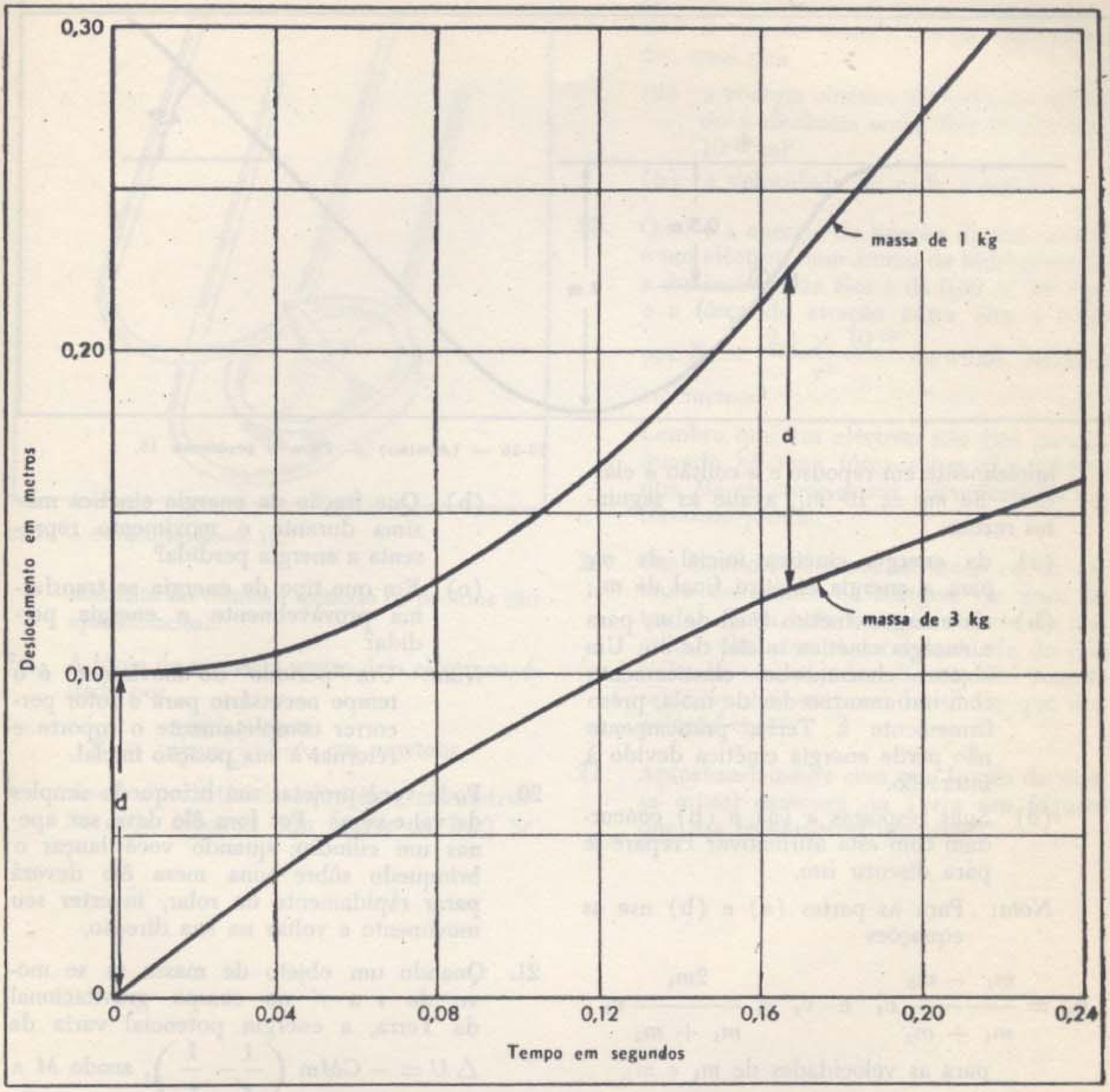
14. Duas massas $m_1 = 1,0$ kg e $m_2 = 2,0$ kg são empurradas uma para perto da outra contra uma fôrça de interação elástica, até que sua energia potencial seja 27 joules maior do que quando as massas se encontram fora do intervalo de interação. Se elas forem abandonadas, qual será a energia cinética final de cada uma?

15. (a) Uma bola de massa 0,25 kg é atirada da esquerda para a direita sôbre a superfície sem atrito indicada na Fig. 25-20, com velocidade de 2,0 m/s. A que altura ela subirá no aclive à direita antes de deter-se momentâneamente? Que espécie de movimento ela realiza?

(b) Se a bola fôr abandonada do repouso no ponto P, que espécie de movimento ela realizará? A que altura subirá no aclive? Qual a energia de ligação (a energia extra necessária para que a bola escape do poço no centro da figura)?

(c) Qual a energia de ligação na parte (a)?

16. Uma mola linear cuja razão fôrça-distensão é $k = 40$ newtons/m pende verticalmente sustentando uma massa de 0,80 kg



25-19 — (Acima) — Para o problema 13.

em repouso. A massa é então puxada para baixo de uma distância igual a 0,15 m.

(a) A que altura ela subirá?

(b) Qual será sua velocidade máxima?

(c) Que alterações sofreriam as respostas (a) e (b) se a experiência fôsse realizada na Lua?

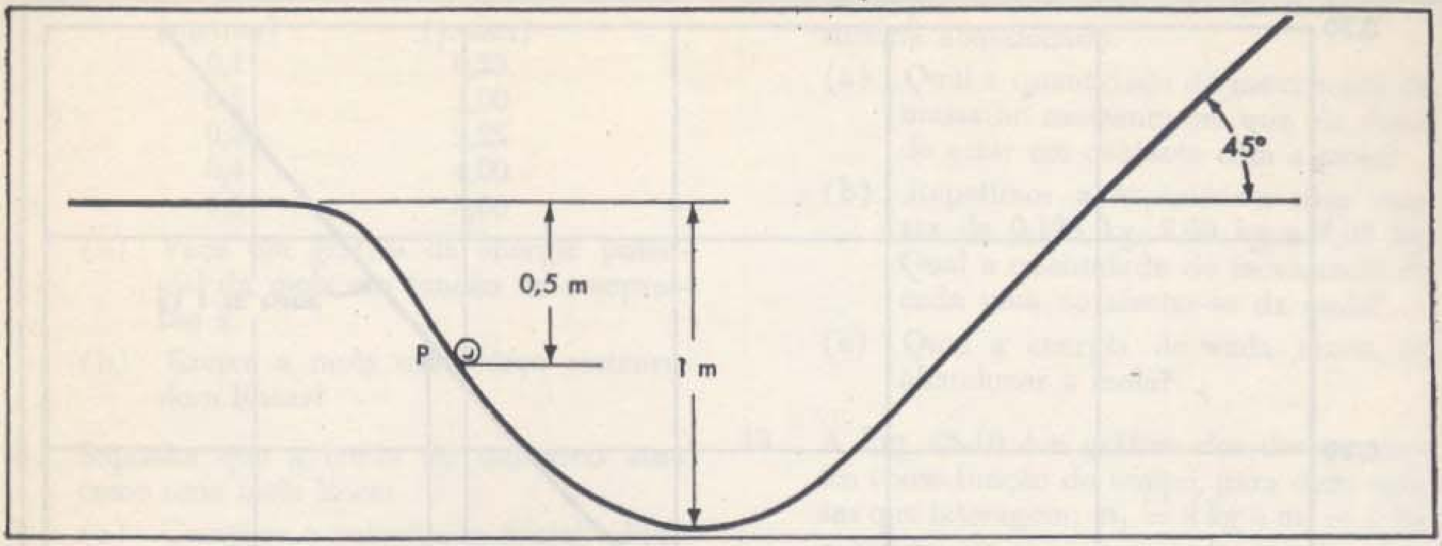
17. Uma pedra de 0,200 kg é jogada para cima de um ponto situado 20 metros acima da superfície da Terra, a um ângulo de 60° com a horizontal, e à velocidade de 20,0 m/s.

(a) Qual é sua energia total?

(b) Qual será sua energia total quando estiver a 15,0 m acima da superfície da Terra?

(c) Qual será sua velocidade a essa altura?

18. A massa m_1, movendo-se com velocidade v_1 atinge a massa m_2 frontalmente; m_2 está



25-20 — (Abaixo) — Para o problema 15.

inicialmente em repouso e a colisão é elástica. Se $m_2 = 10^{24}m_1$, avalie as seguintes razões:

(a) da energia cinética inicial de m_1 para a energia cinética final de m_1;

(b) da energia cinética final de m_2 para a energia cinética inicial de m_1. Um objeto chocando-se elàsticamente com um amortecedor de mola, prêso firmemente à Terra, pràticamente não perde energia cinética devido à interação.

(c) Suas respostas a (a) e (b) concordam com esta afirmativa? Prepare-se para discutir isto.

Nota: Para as partes (a) e (b) use as equações

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{e} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

para as velocidades de m_1 e m_2.

19. A Fig. 25-21 ilustra um brinquedo muito comum, constituido por uma roda com eixo prêsa magnèticamente a um suporte. Quando o suporte é mantido em posição vertical com a parte aberta para cima, o rotor desce por um lado contorna a curva no fundo e sobe pelo outro lado.

(a) Se você tiver tal brinquedo, determine que quantidade de energia mecânica (energia potencial gravitacional mais energia cinética) é perdida em um período do movimento.

(b) Que fração da energia cinética máxima durante o movimento representa a energia perdida?

(c) Em que tipo de energia se transforma provàvelmente a energia perdida?

Nota: Um "período" do movimento é o tempo necessário para o rotor percorrer completamente o suporte e retornar à sua posição inicial.

20. Pode você projetar um brinquedo simples de vai-e-vem? Por fora êle deve ser apenas um cilindro; quando você lançar o brinquedo sôbre uma mesa êle deverá parar ràpidamente de rolar, inverter seu movimento e voltar na sua direção.

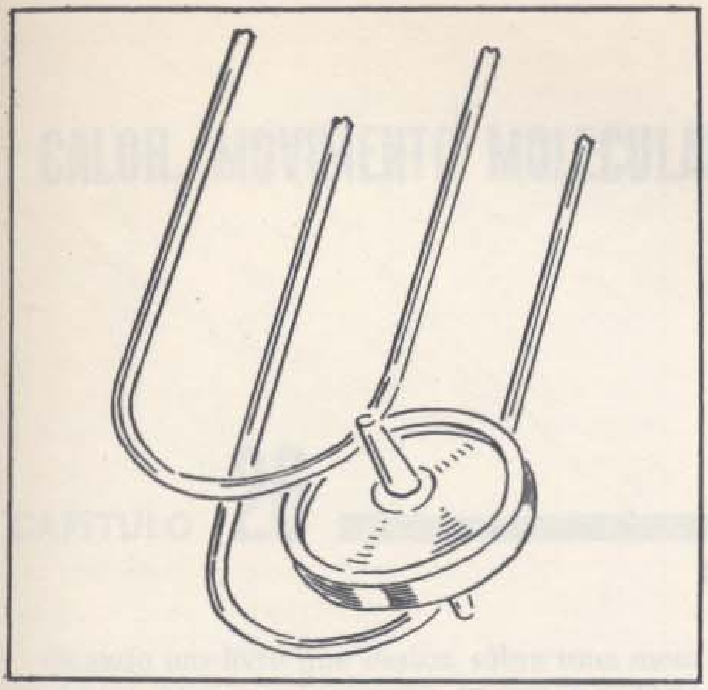
21. Quando um objeto de massa m se move de r a r' no campo gravitacional da Terra, a energia potencial varia de $\Delta U = -GMm\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$, sendo M a massa da Terra. Mostre que, se o objeto se afasta da Terra de uma distância $\Delta r = r' - r$, muito pequena comparada com sua distância ao centro da Terra, a expressão acima se reduz a $\Delta U = mg\ \Delta r$.

22. Determine, com dois algarismos significativos, a energia de ligação

(a) de um homem de 70 kg com a Terra;

(b) da Lua com a Terra.

23. O campo de fôrças entre um par de prótons é repulsivo. A energia potencial



25-21 — Para o problema 19.

aumenta ou diminui quando os prótons são aproximados?

24. A fôrça de repulsão, entre dois eléctrons, é dada por

$$F = \frac{2,30 \times 10^{-28}}{x^2} \text{ em newtons,}$$

sendo x a distância entre êles, em metros Se cada eléctron tem massa de $9,00 \times 10^{-31}$ kg e se êles são mantidos a $1,00 \times 10^{-10}$ m um do outro e, então, abandonados, qual será

(a) a energia cinética de cada um quando a distância entre êles for $2,00 \times 10^{-10}$ m?

(b) a velocidade de cada eléctron?

25. Qual é a energia de ligação de um próton e um eléctron num átomo de hidrogênio se a distância entre êles é de $0,50 \times 10^{-10}$ m e a fôrça de atração entre êles é dada por $F = \frac{2,3 \times 10^{-28}}{r^2}$ newtons, sendo r em metros?

Lembre que um eléctron não fica parado quando há uma fôrça sôbre êle; admita que êle se move numa circunferência em tôrno do próton.

26. Um bueiro levemente inclinado sai de um muro de arrimo na margem de uma estrada. Uma bola lançada através da manilha volta com maior velocidade do que tinha ao ser lançada. Se isto lhe acontecesse, você se surpreenderia? De que suspeitaria você?

27. Aproximadamente com que fração da massa inicial escapará da Terra um foguete que use combustível químico?

CALOR, MOVIMENTO MOLECULAR E CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

CAPÍTULO 26

Quando um livro que desliza sôbre uma mesa se detém, tem-se a impressão de que a energia desapareceu, mas o corpo e a mesa estão ligeiramente mais quentes. Não podemos sustentar a idéia de que a energia é conservada a menos que possamos incluir o calor como forma de energia. Neste capítulo ampliaremos nossos conhecimentos sôbre energia para incluir o calor. A experiência quotidiana e nosso estudo sôbre os gases no Capítulo 9 já nos ensinaram alguma coisa sôbre calor e temperatura. Como mencionamos naquele capítulo, a evidência experimental indica que a temperatura mede o mv^2 médio das moléculas do gás. Como diríamos agora, a temperatura parece ser proporcional à energia cinética média do movimento molecular. Agora reexaminaremos o modêlo de um gás desenvolvido no Capítulo 9 e usaremos nossos conhecimentos sôbre dinâmica para obter melhor visão das relações entre temperatura, calor e energia. Mais adiante, neste Capítulo, veremos como estabelecer medidas da energia térmica para tôda espécie de corpos, tanto para líquidos e sólidos quanto para gases.

26 — 1. Pressão de um Gás.

Quando desenvolvemos o modêlo molecular de um gás, verificamos que a idéia de moléculas móveis que bombardeiam as paredes do recipiente relaciona a pressão do gás com o número, a velocidade e a massa das moléculas. Queremos, agora, determinar a forma detalhada desta relação.

Comecemos considerando uma única molécula que se aproxima de uma parede, movendo-se perpendicularmente a ela com velocidade v. Sendo m a massa da molécula, sua quantidade de movimento é mv. Quando ela se choca com a parede e pára, transfere para a parede aquela quantidade de movimento; a parede recebe um impulso de valor mv.

Considere agora um pequeno intervalo de *tempo* t, durante o qual m moléculas atigem a parede. O impulso total perpendicular à parede é pois mvn. Se o número de moléculas incidentes fôr bastante grande, a parede reagirá como se uma fôrça permanente agisse sôbre ela. Esta fôrça multiplicada pelo tempo t é apenas um outro modo de exprimir o impulso total. Conseqüentemente

$$Ft = mvn$$

e vemos que a fôrça média é $F = \dfrac{mvn}{t}$

Queremos relacionar a fôrça desta corrente de moléculas que bombardeiam a parede com a fôrça exercida sôbre determinada área da parede pelo bombardeamento molecular do gás. Para êsse fim precisamos saber quantas moléculas deve haver na pequena região próxima da parede para produzir o bombardeamento molecular considerado (Fig. 26-1). Podemos encontrar êsse número calculando o volume próximo da parede de onde provêm as n moléculas.

Suponha que as moléculas atingem a parede numa área A. Então tôdas elas devem ter vindo de um pequeno vol ıme de base A e altura vt.

Qualquer molécula que, no início do intervalo de tempo t, esteja mais longe não pode alcançar a parede, pois vt é a distância percorrida pelas moléculas durante o intervalo de tempo t. Tôdas as moléculas que partiram de distâncias inferiores a vt devem ter alcançado a parede porque percorrem distâncias inferiores a vt em tempo menor que t. Podemos pois concluir que, no início do intervalo de tempo t, as moléculas ocupavam um volume vtA. O número de moléculas por unidade de volume que realizam o bombardeamento será pois

$$\frac{\text{número}}{\text{volume}} = \frac{n}{vtA}$$

Num gás a temperatura uniforme, o número de moléculas contidas num volume de tamanho razoável é o mesmo em qualquer região da massa gasosa. Se o gás está num recipiente, o número de moléculas por unidade de volume é dado pelo número total de moléculas (N) dividido pelo volume do recipiente (V). Portanto, em nosso modêlo do gás

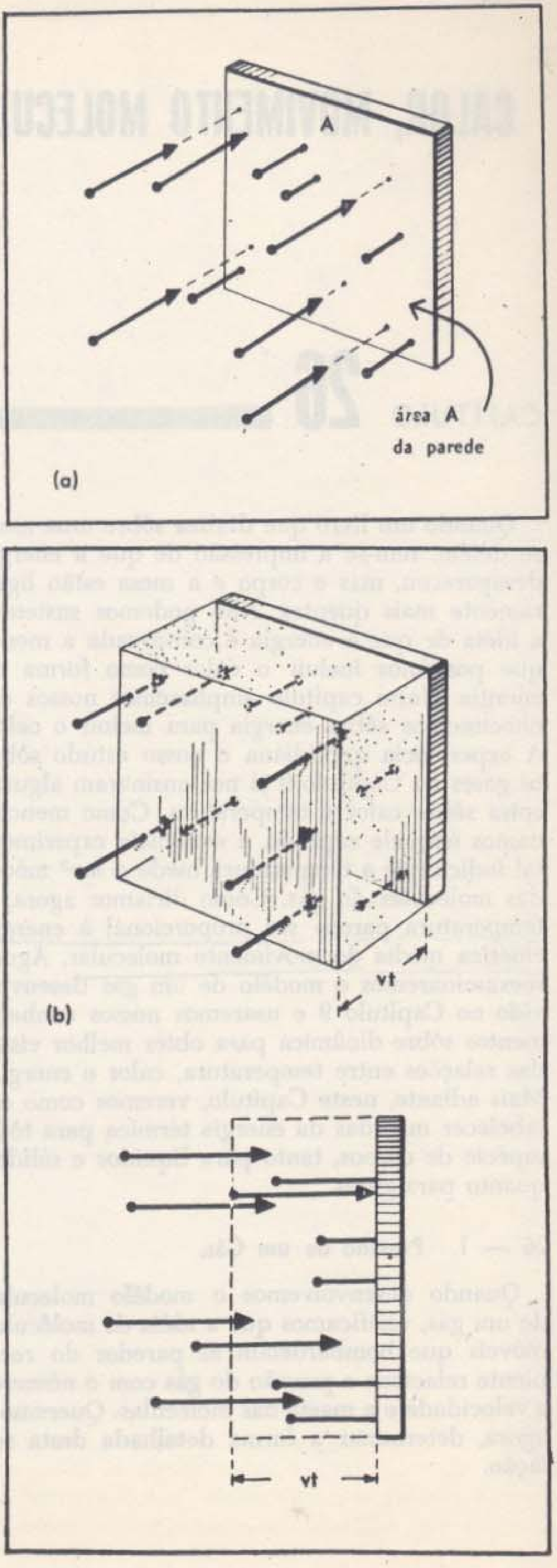
$$\frac{n}{vtA} = \frac{N}{V} \quad \text{e} \quad n = vtA\frac{N}{V}$$

Esta equação relaciona o número n de moléculas que bombardeiam a área A da parede durante o tempo t com o número de moléculas do gás por unidade de volume. Fornece a relação que desejávamos. Quando introduzimos esta expressão de n na equação $F = mvn/t$ para a fôrça que atua na área A da parede, otemos

$$F = \frac{mv}{t}\left(vtA\,\frac{N}{V}\right) = mv^2A\,\frac{N}{V}$$

A fôrça média por unidade de área é chamada pressão P. Portanto, de acôrdo com nosso modêlo simplificado para o gás a pressão é dada por

$$P = \frac{F}{A} = mv^2\,\frac{N}{V}$$



26-1 — (a) As moléculas movem-se para a parede com velocidade v. As moléculas que alcançam a parede sôbre a área A, durante o intervalo de tempo t provêm de que volume? (b) Os pontos mostram as posições iniciais das moléculas. As cabeças das flechas mostram as posições alcançadas no instante t ou que seriam alcançadas nesse instante caso as moléculas não tivessem atingido a parede. Note que tôdas as moléculas que saem de pontos a distâncias inferiores a vt atingem a parede antes daquele instante. Tôdas as que partem de pontos mais distantes não o conseguem. Portanto, as moléculas que alcançam a parede provêm de um volume de base A e altura vt.

Êste é o tipo de resultado que desejávamos. Esta equação exprime a pressão do gás em têrmos do número de moléculas por unidade de volume e da energia cinética por molécula.

A fim de simplificar nossos cálculos, admitimos que as moléculas param ao atingir a parede. Esta suposição não é realista. Uma molécula pode aderir à parede por algum tempo, mas o número das que se afastam da parede deve ser igual ao número das que se aproximam dela. Se não, em pouco tempo o recipiente não estaria mais ocupado pelo gás. De fato, não apenas deve ser o mesmo o número de moléculas que se aproximam e se afastam da parede, como suas quantidades de movimento devem ser iguais e opostas antes e depois do choque. Por exemplo, se elas voltassem para o gás com menor velocidade, a energia do gás decresceria. Isto só acontece quando o gás está cedendo energia para o ambiente, e não quando seu comportamento permanece o mesmo.

Podemos agora melhorar nosso modêlo de um gás considerando tanto as moléculas que incidem sôbre a parede como as que se afastam dela. Para cada molécula que cede uma quantidade de movimento mv à parede, sai uma outra que deixa a parede com quantidade de movimento igual e oposta. Conseqüentemente, o impulso sôbre a parede é o dôbro do que supusemos e o valor da pressão é o dôbro do que obtivemos. Ao mesmo tempo, no entanto, o número de moléculas por unidade de volume no gás deve ser o dôbro do que foi antes calculado. Num pequeno volume próximo à parede, além das moléculas já consideradas (as que se dirigem para a parede), há um número igual de moléculas afastando-se da parede. No total, o número de moléculas por unidade de volume é, portanto, o dôbro.

Retornemos, agora, à nossa equação da pressão. Como dobramos tanto a pressão quanto o número de moléculas por unidade de volume, a equação não se altera. Portanto $P = mv^2 \dfrac{N}{V}$ dá a pressão exercida por um gás constituido por moléculas que vão e vêm entre as duas paredes do recipiente. Ela exprime a pressão de acôrdo com um modêlo bastante satisfatório para o gás.

Logo adiante tornaremos o modêlo ainda melhor, mas já encontramos aqui todos os aspectos discutidos no Capítulo 9. Em resumo, a pressão é proporcional ao número de moléculas por unidade de volume, N/V, e à energia cinética $\frac{1}{2}mv^2$ de cada molécula. Êste resultado concorda com a lei de Boyle e com a idéia de que a temperatura Kelvin é proporcional à energia cinética. A uma dada temperatura, portanto, mv^2 tem o mesmo valor para qualquer tipo de molécula. Conseqüentemente, o modêlo prediz que a pressão é proporcional ao número de moléculas e inversamente proporcional ao volume que elas ocupam, independentemente da natureza do gás. É justamente o que constatamos para gases reais, desde que as moléculas se mantenham suficientemente afastadas umas das outras.

Ao estabelecer a relação $P = mv^2 \dfrac{N}{V}$, introduzimos todos os fatôres essenciais num modêlo da pressão exercida por um gás. Entretanto, há dois retoques finais que devemos fazer no modêlo: admitiremos que as moléculas se movem em tôdas as direções, ao invés de limitar seu movimento a direções perpendiculares às paredes, e admitiremos que elas possam ter diferentes velocidades e não obrigatòriamente a mesma.

Num gás, as moléculas têm movimentos desordenados e incidem nas paredes segundo todos os ângulos, não apenas perpendicularmente. O efeito global (como mostramos no quadro da pg. 142) equivale a substitui mv^2 por $\frac{1}{3}mv^2$. Por assim dizer, $\frac{1}{3}$ dos movimentos moleculares é perpendicular à parede, os outros $\frac{2}{3}$ são paralelos à parede, segundo duas direções perpendiculares entre si.

Conseqüentemente a pressão do gás é

$$P = \frac{1}{3}\,(\overline{mv^2})\,\frac{N}{V}$$

Como $\dfrac{mv^2}{2}$ é a energia cinética E_c,

$$\frac{1}{3}\,mv^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{2}{3}\,E_c$$

CONSIDERANDO O MOVIMENTO DESORDENADO DAS MOLÉCULAS

Na Seção 26-1 mostramos que um feixe de moléculas, atingindo frontalmente uma parede exerce sôbre ela uma pressão

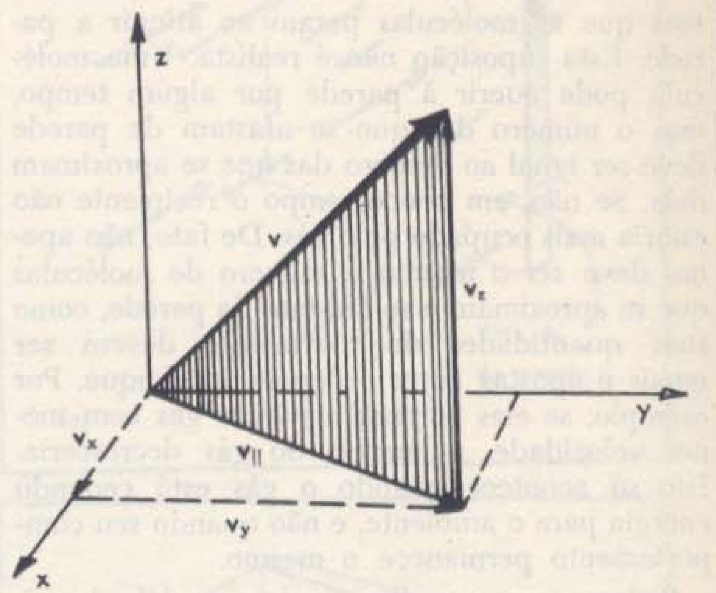
$$P = mv^2 \frac{N}{V}$$

Quando a parede é bombardeada por moléculas provenientes de tôdas as direções, a pressão é

$$P = \frac{1}{3}\ mv^2 \frac{N}{V}$$

O fator extra $\frac{1}{3}$, no caso do bombardeamento em tôdas as direções, pode ser explicado da seguinte maneira: Em primeiro lugar, as componentes da quantidade de movimento pararelas à parede não dão origem a qualquer fôrça sôbre ela. Isto é verdade porque, ao longo de qualquer linha paralela à parede, movem-se em direções opostas números iguais de moléculas. E, portanto, números iguais de moléculas atingem a parede com componentes paralelas a uma direção e com componentes paralelas à direção oposta. Agora, que já resolvemos o problema das componentes paralelas, consideremos as componentes perpendiculares à parede. Em lugar da quantidade de movimento mv, devemos, agora, usar a componente $mv_\perp$ e, em lugar da velocidade v das moléculas, devemos usar $v_\perp$. Portanto, ao invés de mv^2, devemos ter $mv_\perp{}^2$. Em outras palavras, o quadrado de uma componente da velocidade substitui o quadrado da velocidade.

Num gás, as velocidades das moléculas devem apontar com igual frequência em tôdas as direções. Devemos, portanto, encontrar a relação entre a média do quadrado da componente $v_\perp$, e o quadrado do vetor v, quando êste aponta com igual frequência para tôdas as direções. Isto pode ser feito exprimindo v^2 em têrmos dos quadrados de suas componentes segundo três eixos ortogonais entre si, x, y, z, escolhendo-se z perpendicular à parede. Como mostra a Fig.



26-2 — Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo retângulo sombreado, temos: $v^2 = v_{||}^2 + v_z^2$. E $v_{||}^2 = v_x^2 + v_y^2$, usando o mesmo teorema no triângulo retângulo de lados v_x, v_y e $v_{||}$. Portanto, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

26-2, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Ora, quando v aponta com igual frequência para tôdas as direções, os valores médios de v_x^2, v_y^2 e v_z^2 devem ser todos iguais, isto é,

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2},$$

Assim

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_z^2}$$

E como $v_\perp = v_z$,

$$v^2 = 3v_\perp{}^2 \quad \text{ou} \quad v_\perp{}^2 = \frac{1}{3} v^2$$

Êste fator $\frac{1}{3}$ entre $v_\perp{}^2$ e v^2 explica a diferença entre a pressão exercida por uma corrente de partículas que atingem frontalmente a parede e a pressão exercida por moléculas que atingem a parede em tôdas as direções. Como as moléculas de um gás se movem em tôdas as direções, a pressão do gás é

$$P = \frac{1}{3} mv^2 \frac{N}{V}$$

Podemos portanto escrever para a pressão:

$$P = \frac{2}{3} E_c \frac{N}{V}$$

Esta equação diz que a pressão é $\frac{2}{3}$ da energia cinética de uma molécula vêzes o número de moléculas por unidade de volume. Esta forma da equação dá ênfase ao papel da energia cinética molecular na determinação da pressão.

Finalmente, num gás, as velocidades moleculares não são tôdas as mesmas e as moléculas podem ter diferentes massas. Nesse particular, entretanto, a última equação nos indica o que fazer. Ela nos diz que, considerando a média sôbre um tempo bastante longo, a contribuição de cada molécula para a pressão é proporcional a sua energia cinética. A mesma equação, portanto, nos dará a pressão se interpretarmos E_c como a média das energias cinéticas de tôdas as moléculas. Ora multiplicar a média pelo número de moléculas é o mesmo que somar as contribuições de tôdas elas.

Devemos chamar a atenção para o fato de que a energia cinética mencionada em todos êsses cálculos é a energia cinética dos movimentos dos centros de massa das moléculas. Não é a energia cinética dos movimentos das partes das moléculas que vibram ou giram em tôrno do centro de massa. Podemos ver que apenas a energia cinética do movimento do centro de massa entra na questão lembrando que mv^2 provém da quantidade de movimento mv de cada molécula, multiplicada pela velocidade v da molécula que vai incidir na parede. É a velocidade das moléculas em direção à parede que determina quantas chegam à parede por segundo e que impulso cada uma transmite à parede. Êste é o movimento do centro de massa, e a pressão do gás depende, portanto, da energia cinética média dêste movimento.

26 — 2. Temperatura e Energia Cinética Molecular; Energia Térmica.

Aprendemos no Capítulo 9 que todos os gases com densidades suficientemente baixas comportam-se de modo semelhante. As predições do modêlo molecular dos gases estão de acôrdo com êsse fato. A lei de Boyle,

$$P = \theta \frac{N}{V}$$

relaciona a pressão P com o número de moléculas por unidade de volume, N/V, de qualquer gás a determinada temperatura. Experimentalmente, o fator de proporcionalidade θ depende apenas da temperatura, não da natureza do gás.

O modêlo molecular, como verificamos na última seção, prediz que

$$P = \left(\frac{2}{3} E_c\right)\frac{N}{V},$$

onde $E_c = \frac{mv^2}{2}$ é a energia cinética média do movimento do centro de massa de uma molécula do gás. Isto é exatamente a lei de Boyle, mas vai além. Diz-nos que o fator de proporcionalidade, θ, é $\frac{2}{3}$ da energia cinética média de uma molécula do gás:

$$\theta = \frac{2}{3} E_c$$

Como θ tem o mesmo valor para todos os gases à mesma temperatura, ficamos sabendo que a energia cinética não depende da massa da molécula.

Quando variamos a temperatura desde o ponto de fusão do gêlo até o ponto de ebulição da água, ou até outro valor qualquer, todos os gases a baixas densidades comportam-se de modo semelhante. A pressão constante, êles se dilatam na mesma proporção (ou, a volume constante, a pressão aumenta na mesma proporção para todos êles). Em outras palavras, PV/N comporta-se da mesma maneira para todos os gases quando a temperatura aumenta. Êsse fato levou-nos, na Seção 9-4, a usar os gases para definir a escala básica de temperaturas. Usamos

$$\frac{PV}{N} = \theta = kT$$

para definir a escala de temperaturas absolutas. Ajustamos o fator de proporcionalidade k de modo que a temperatura do gêlo fundente fôsse 273° Kelvin. (Entre a temperatura do gêlo fundante e a temperatura da água em ebulição, há 100 gráus cmo em todos os termômetros científicos comuns.)

Agora podemos tirar nossa conclusão mais importante. Sabemos que o fator de proporcionalidade k da lei de Boyle mede a temperatura; e sabemos que θ é $\frac{2}{3}$ da energia cinética média de uma molécula. Conseqüentemente (como antecipamos no Capítulo 9 e na Seção 26-1), a temperatura é uma medida da energia cinética térmica — uma medida da energia dos movimentos desordenados das moléculas.

Podemos perguntar agora que quantidade de energia há, em média, no movimento do centro de massa de uma molécula para uma temperatura determinada. Partindo da equação

$$\frac{PV}{N} = \theta = kT,$$

podemos calcular k. (Por exemplo, você pode usar a pressão atmosférica, $1{,}01 \times 10^5$ newtons/m²; um mol de qualquer gás, isto é, $6{,}025 \times 10^{23}$ moléculas; e 22,4 litros $= 2{,}24 \times \times 10^{-2}$m³, que é o volume ocupado por um mol a 273°K e à pressão atmosférica. O resultado é

$$k = \frac{1{,}01 \times 10^5 \left(\frac{\text{newtons}}{\text{m}^2}\right) \times (2{,}24 \times 10^{-2}\text{m}^3)}{(6{,}025 \times 10^{23} \text{ moléculas}) \times (273°\text{K}} =$$

$$= 1{,}37 \times 10^{-23} \frac{\text{joule}}{\text{molécula (°K)}}$$

Isto nos dá a relação numérica entre a temperatura e a energia cinética molecular média. Como

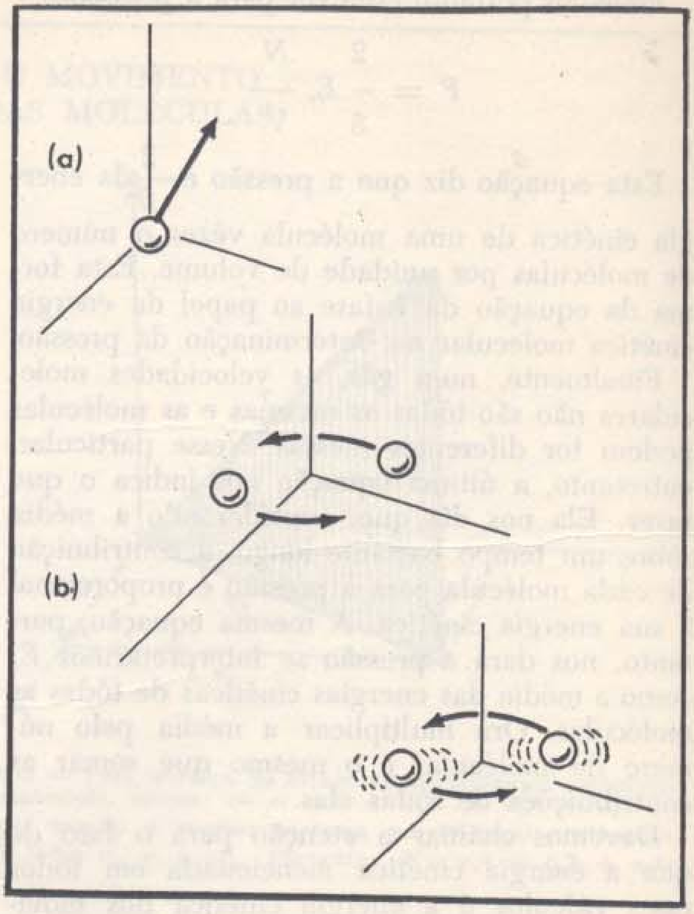
$$\frac{2}{3} E_c = \theta = kT$$

verificamos que a energia cinética média de uma molécula é $\frac{3}{2} kT$. Introduzindo o valor de k, obtemos

$$E_c = \frac{3}{2} (1{,}37 \times 10^{-23}) \quad T = 2{,}05 \times 10^{-23} T,$$

onde E_c é medido em joules por moléculas e T é medido em °K. À temperatura ambiente, por exemplo, uma molécula tem cêrca de 6×10^{-21} joules de energia cinética, em média, no movimento do seu centro de massa.

A temperatura é uma medida da energia cinética média de uma molécula, da energia cinética do movimento do seu centro de massa. Em qualquer gás as moléculas têm essa energia



26-3 — Tôda a energia fornecida a um gás de moléculas monoatômicas vai para o movimento do centro de massa das moléculas, como está indicado em (a). Moléculas complexas, como as de (b), podem também vibrar e girar. Portanto, parte da energia absorvida vai para a rotação e a vibração; isto é, sòmente uma parte da energia absorvida aumenta a temperatura.

e, além dessa, possìvelmente outras formas de energia. Assim, um mol de qualquer gás teria

$$6{,}02 \times 10^{23} \times 2{,}05 \times 10^{-23} = 12{,}4$$

joules de energia (dêste tipo) para cada gráu Kelvin de temperatura.

Podemos fornecer energia a um gás de vários modos — batendo-o com um batedor de ovos, esfregando o recipiente, permitindo que o calor nêle penetre; estas são apenas algumas possibilidades. (Não mencionamos, por exemplo, jogar uma garrafa cheia de gás através da sala porque isto dá energia à massa do gás como um todo, mas estamos interessados em introduzir energia no interior do gás sem movimentá-lo como um todo). Quando fornecemos energia a alguns gases, tôda ela aparece como energia dos movimentos dos centros de massa das moléculas. Se fornecemos 12,4 joules de energia a 1 mol de hélio ou de qualquer outro gás nobre, a temperatura aumenta de 1°K. Podemos fornecer a energia de muitos modos; todos dão o mesmo resultado. A energia que fornecemos é inteiramente utilizada para aumentar o movimento dos centros de massa das moléculas.

As moléculas dos gases nobres são especialmente simples: são átomos simples (A, He, Ne, etc.). Moléculas mais complicadas — como O_2, N_2 CH_4 — formadas de dois átomos ou mais, não se comportam do mesmo modo. Para elevar sua temperatura de 1°K, podem ser necessários mais de 12,4 joules por mol. Precisa-se de mais energia para elevar sua temperatura porque os átomos, numa molécula complicada, vibram e giram em tôrno do centro de massa (Fig. 26-3). E, quando fornecemos energia, sòmente parte dela vai aumentar a energia de movimento dos centros de massa; o restante vai aumentar a energia de rotação e vibração. Como a temperatura mede apenas a parte da energia correspondente ao movimento do centro de massa, deve-se fornecer mais energia ao gás para produzir uma dada elevação de temperatura.

A energia dos movimentos dos centros de massa das moléculas e a energia de rotação e vibração dos átomos numa molécula são chamadas, freqüentemente, energia térmica. Na verdade, nem tôda energia térmica é necessàriamente energia cinética; a energia potencial dos átomos, quando suas posições relativas dentro das moléculas mudam pode também ser incluida como energia térmica. Em resumo, energia térmica é qualquer energia fornecida a uma amostra de gás quando elevamos sua temperatura e que é liberada quando a temperatura cai.

Quando fornecemos energia térmica a um gás, parte dela pode transformar-se em energia potencial dentro das moléculas. Quando as moléculas estão mais próximas, como num líquido ou num sólido, elas exercem continuamente fôrças apreciáveis umas sôbre as outras. Nesse caso, além da energia cinética há uma energia potencial média das interações entre as moléculas; quando fornecemos energia de fora, parte dela vai alterar a energia potencial média das moléculas que interagem. A energia térmica inclui, portanto, a energia potencial da interação molecular.

A distinção entre temperatura e energia térmica (ou calor) deve estar clara, agora. A temperatura mede apenas a energia média do movimento do centro de massa; ela dá a energia do centro de massa por molécula. Enquanto que a energia térmica inclui, também, a energia de todos os outros movimentos internos e mesmo a energia potencial, que muda quando as moléculas se afastam ou se aproximam devido às variações de temperatura. Portanto, a energia térmica pode ser diferente em duas amostras, mesmo que a temperatura seja a mesma. Por exemplo, enquanto a água ferve, sua temperatura permanece constante, mas devemos fornecer uma grande quantidade de energia para separar as moléculas. Quando o vapor de água se condensa, as moléculas se juntam sem perda apreciável de energia cinética, mas uma grande quantidade de "calor latente" é liberada e deve ser retirada, enquanto a separação média das moléculas e a energia potencial intermolecular média decresce. O calor latente é geralmente classificado como energia térmica; êle não corresponde à energia do movimento do centro de massa das moléculas porque a temperatura permanece a mesma.

26 — 3. Energia Mecânica do Movimento do Objeto como um Todo e Energia Interna.

Quando corpos isolados do resto do mundo interagem, sua quantidade de movimento total não varia. A quantidade de movimento, como vimos no Capítulo 23, é conservada. A energia mecânica, entretanto, só é conservada se não houver fôrças dissipadoras, como o atrito. Quando há fôrças de atrito, que dependem de mais alguma coisa além da distância entre massas visíveis, a energia mecânica visível decresce, como no exemplo do livro deslizando sôbre a mesa. Será a lei da conservação da energia realmente limitada, ao contrário da lei da conservação da quantidade de movimento, ou a energia apenas mudou de forma ou de local, de modo que sua presença não é mais óbvia?

Considere, por um momento, uma caixa fechada dentro da qual movem-se, para diante e para trás, duas bolas da mesma massa m. Suponha que uma delas se dirige para o norte com velocidade v, e a outra para o sul, à mesma velocidade, e que se cruzam no ponto médio. O sistema não tem quantidade de movimento total e, de fora, não notamos qualquer movimento. Não aparece energia cinética alguma, a menos que olhemos dentro da caixa.

Imagine, agora, que o sistema formado pela caixa e pelas bolas se move para o norte e passe por nós com velocidade V, enquanto as bolas se movem para diante e para trás, dentro da caixa, com velocidade v em relação à caixa. A energia cinética aparente $\frac{1}{2} MV^2$ é apenas uma parte da energia cinética total. A energia cinética total E_c é constituida pela energia cinética da caixa M_c, que se move à velocidade V, mais a energia cinética das bolas. Se a caixa fôsse transparente, você veria uma bola m movendo-se com a velocidade $V + v$ e a outra com a velocidade $V - v$. A energia cinética total é, portanto,

$$E_c = \frac{1}{2} M_c V^2 + \frac{1}{2} m (V + v)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m (V - v)^2 = \frac{1}{2} MV^2 + 2\left(\frac{1}{2} mv^2\right)$$

onde a massa total é $M = M_c + 2m$. Como mostra o último têrmo à direita, além da energia cinética $\frac{1}{2} MV^2$ do movimento do sistema como um todo, a energia total pode conter uma quantidade qualquer de energia correspondente ao movimento interno. Esta energia não pode normalmente ser vista de fora.

Por outro lado, é fácil ver que a quantidade de movimento aparente do sistema como um todo é a quantidade de movimento total: Adicionando as quantidades de movimento de cada massa obtemos

$$M_c V + m(V + v) + m(V - v) =$$
$$= (M_c + 2m) V = MV$$

que é exatamente a quantidade de movimento da massa total no seu movimento visível.

Êste exemplo simples ilustra uma situação muito comum. A energia muitas vêzes está sob formas que não aparecem como energia cinética do movimento das massas visíveis, enquanto que a quantidade de movimento fica menos freqüentemente escondida. Consideremos, por exemplo, a experiência da Seção 23-6, em que um projétil é disparado contra um fardo de areia. Quando a bala penetra no fardo, êste se move com a quantidade de movimento total. Se o projétil de massa m se movia com velocidade v, o fardo, de massa M, move-se agora com velocidade V tal que $(M + m)\ V = mv$, e

$$V = \frac{mv}{M + m}.$$

Antes que o projétil atingisse o saco de areia, a energia cinética era $E_c = \frac{1}{2} mv^2$, e, após o choque, a energia cinética do movimento total visível é apenas

$$E_c' = \frac{1}{2} (M + m)\ V^2.$$

Esta é muito menor que a energia cinética original, como verificamos substituindo $V = \frac{mv}{M + m}$ na expressão de E_c. O resultado é $E_c' = \left(\frac{m}{M + m}\right) E_c$.

A energia cinética final E_c' é menor do que a inicial, E_c, pelo fator $\frac{m}{M + m}$. A fração $\frac{M}{m + M}$ da energia inicial aparentemente desapareceu. Por exemplo, se um projétil de 5 kg é disparado contra um fardo de areia de 50 kg (e permanece nêle), 50/55 ou 91% de sua energia cinética inicial torna-se invisível.

Que aconteceu a essa energia? Pensamos que, quando o projétil penetra no fardo, as moléculas da areia e dêle próprio passam a se mover mais ràpidamente, com variações correlatas da energia potencial. O projétil, portanto, transformou grande parte de sua energia cinética em energia dos movimentos desordenados das moléculas e átomos dêle mesmo e dos grãos de areia que estavam em seu percurso. Como êsses movimentos internos dos átomos dentro do fardo são pequenos movimentos em tôdas as direções, nós não os vemos; e perdemos a pista desta parte da energia enquanto nos preocupamos apenas com a pequena quantidade de energia que fica no movimento do fardo como um todo.

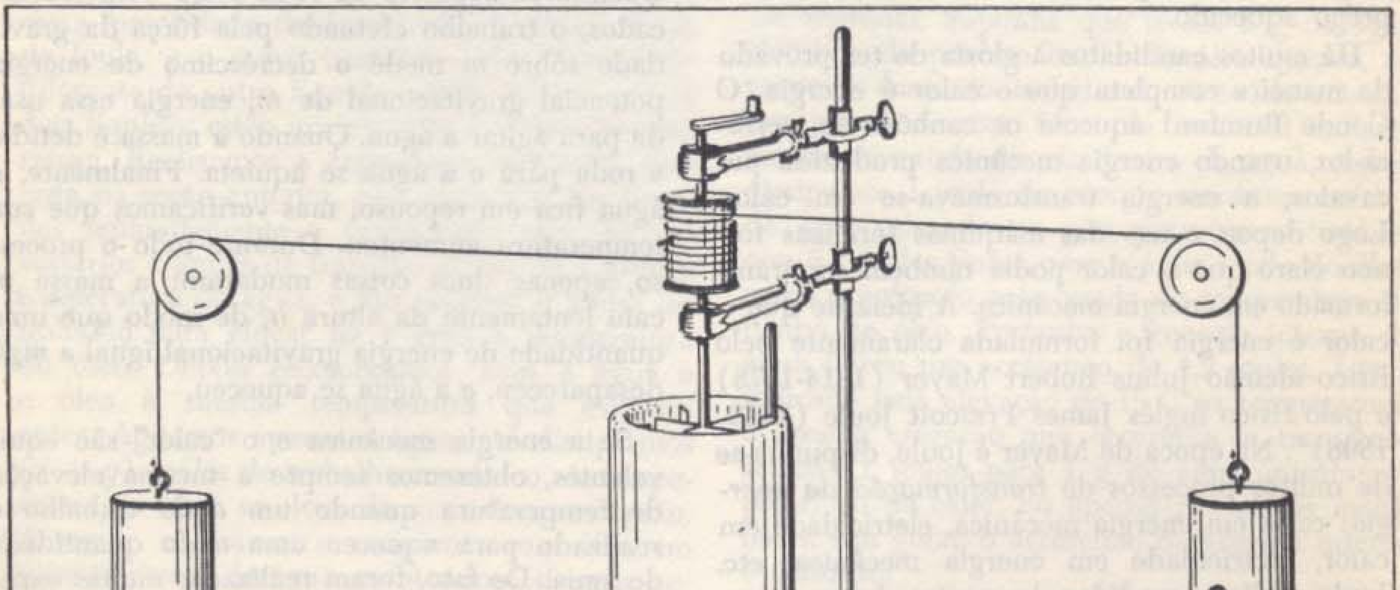
Gostaríamos de acreditar que realmente nenhuma energia se perdeu; mas como só vemos uma parte muito pequena da energia total, como poderemos saber se tôda a energia ainda existe? Precisamos encontrar um modo de medir a quantidade de energia que foi absorvida nos movimentos internos ou em variações das distâncias interatômicas. Em princípio, talvez pudéssemos considerar a posição e o movimento de cada partícula microscópica da matéria mas, na vida prática, precisamos, de alguma maneira, avaliar a energia armazenada em grandes porções de matéria sem recorrer ao exame microscópico.

Estamos, aqui, no limiar de uma grande extensão do conceito de conservação da energia. Precisamos de uma medida das variações de energia interna que dependa de medidas comuns, como temperatura e volume. Isto nos permitirá estender o conceito de energia a um domínio inteiramente novo. De posse de tal medida, poderemos avaliar variações de energia sem procurar a posição e o movimento real de cada partícula microscípica do objeto que estudamos.

Já temos indicações para avaliação da energia armazenada nos movimentos internos e nas posições das partículas que constituem o objeto. Quando o projétil pára no fardo de areia, ambos se aquecem. Quando um carro é repentinamente freiado, sua energia cinética aparente desaparece; mas os freios se aquecem. Quando um meteoro é freiado na atmosfera, êle se torna tão quente que geralmente se vaporiza por completo. Freqüentemente quando desaparece energia de movimentos visíveis ou energia potencial de separação de corpos visíveis, notamos um aumento de temperatura.

A temperatura de um gás é uma medida do mv^2 médio de suas moléculas. Pelo menos no caso de gases simples, o número de moléculas afetadas multiplicado pela variação de temperatura mede a energia fornecida ou retirada do movimento térmico desordenado das moléculas. Para outras substâncias (para as quais não te-

26-4 — Aparêlho para uma experiência de Joule, para observar a conversão de energia mecânica em calor. Quando as massas caem, a roda de pás gira revolvendo a água. Depois que as massas percorreram a distância h, desapareceu a energia potencial gravitacional mgh e a água se aqueceu (m é a massa total que caiu). Note que as massas caem sem atingir grande velocidade e sua energia cinética é pequena.



mos um modêlo tão simples) a energia fornecida pode também alterar a energia potencial interna, aumentando a separação entre os átomos, por exemplo. Não obstante, desde que não alteremos o volume total de qualquer substância, podemos esperar que o aumento de energia interna seja refletido num aumento de temperatura. O calor, podemos conjecturar, é uma forma de energia; e um corpo mais quente contém mais energia interna do que um corpo mais frio.

Consideremos, agora, a história da idéia de que o calor é energia. Há muito fôra reconhecido que os fenômenos térmicos podiam ser explicados em têrmos mecânicos. Bacon, Galileu, Boyle, Hooke, Newton e outros compreenderam que a temperatura de um corpo podia ser relacionada com o "grau de movimento" das partículas que o constituem. Boyle dava como ilustração o movimento de um prego cravado numa tábua. Quando a cabeça do prego impede que êste penetre mais na madeira, marteladas repetidas servem para aquecê-lo: o movimento do martelo não pode mais ser transferido ao prego como um todo, dizia Boyle, mas é transferido aos "corpúsculos" do prego, fazendo-os mover-se mais ràpidamente, resultando daí um prego aquecido.

Há muitos candidatos à glória de ter provado de maneira completa que o calor é energia. O Conde Rumford aquecia os canhões ao perfurá-los, usando energia mecânica produzida por cavalos; a energia transformava-se em calor. Logo depois o uso das máquinas térmicas tornou claro que o calor podia também ser transformado em energia mecânica. A idéia de que o calor é energia foi formulada claramente pelo físico alemão Julius Robert Mayer (1814-1878) e pelo físico inglês James Prescott Joule (1818-1898)(*). Na época de Mayer e Joule, dispunha-se de muitos processos de *transformação da energia*: calor em energia mecânica, eletricidade em calor, eletricidade em energia mecânica, etc. Joule realizou medidas de *muitas* dessas transformações. Em cada experiência, exprimia seus resultados em têrmos de *calor*, medido pelo aquecimento produzido em certa quantidade de água, e *energia mecânica*, medida elevando um pêso contra a fôrça da gravidade. Usou a constância do fator de conversão entre aquelas duas medidas para mostrar que o calor é uma forma de energia. Essa é a nossa próxima tarefa.

26 — 4. Equivalência entre Energia Mecânica e Térmica.

Acabamos de afirmar que, se a energia mecânica se perde, muitas vêzes ela reaparece como energia térmica — a energia do movimento desordenado das moléculas. Mas essa afirmativa precisa ter uma base mais sólida do que a simples observação qualitativa de que aparece calor quando desaparece energia mecânica.

O físico inglês Joule mostrou que aparece sempre a mesma quantidade de calor, ou seja, a mesma quantidade de energia térmica, desde que uma dada quantidade de energia mecânica se perca. Suponha que se colocou água num recipiente isolado, por exemplo, uma grande garrafa térmica. Uma roda com pás está mergulhada na água e pode girar acionada por uma massa m caindo como mostra a Fig. 26-4. Quando os suportes da roda estão bem lubrificados, o trabalho efetuado pela fôrça da gravidade sôbre m mede o decréscimo de energia potencial gravitacional de m, energia essa usada para agitar a água. Quando a massa é detida, a roda pára e a água se aquieta. Finalmente, a água fica em repouso; mas verificamos que sua temperatura aumentou. Durante todo o processo, apenas duas coisas mudaram: a massa m caiu lentamente da altura h, de modo que uma quantidade de energia gravitacional igual a mgh desapareceu, e a água se aqueceu.

Se a energia mecânica e o "calor" são equivalentes, obteremos sempre a mesma elevação de temperatura quando um *dado* trabalho é realizado para aquecer uma *dada* quantidade de água. De fato, foram realizadas muitas experiências diferentes e tôdas elas mostram que o aumento de temperatura depende apenas da energia transferida, e não da fôrça ou da distância ou do formato das pás. Por exemplo, se duplicamos a massa do corpo que cai e reduzimos a altura à metade, o trabalho das fôrças gravitacionais é o mesmo que antes. E verificamos que o aumento de temperatura da água é exatamente o mesmo, apesar do processo ter sido realizado com muito maior rapidez.

(*) Mayer era médico; seu interêsse pelo calor animal levou-o ao estudo do calor em geral. Joule, proprietário de uma próspera cervejaria, foi aluno de Dalton; suas contribuições para a ciência foram várias e importantes, especialmente nos campos da eletricidade e do calor.

26 — 5. Fluxo de Calor.

A dissipação de energia mecânica através de fôrças de atrito não é o único método para aumentar a temperatura de um objeto. Você pode aquecer suas mãos quer esfregando-as uma na outra, quer mergulhando-as na água quente. Neste último caso, há uma transferência de energia do movimento mais vigoroso das moléculas da água quente aos movimentos mais vagarosos das moléculas de sua pele fria. Quando ocorre essa transferência de energia térmica de um corpo mais quente a outro mais frio, dizemos que o calor *flui* do primeiro corpo para o segundo.

Podemos imaginar a transformação de certa quantidade de energia mecânica em energia térmica interna de um corpo por dois processos. A energia pode ser convertida de mecânica em térmica no próprio corpo, ou pode ser convertida em energia térmica em outro lugar e alcançar o corpo por fluxo de calor. A experiência mostra que o processo de transformação não tem importância. A mesma quantidade de energia térmica alcança o corpo em qualquer caso.

Suponha que temos dois recipientes, um com certa quantidade de água como na experiência de Joule, e o outro contendo uma quantidade diferente de outro líquido, como óleo, e que os dois líquidos estão inicialmente à mesma temperatura. Realizamos a experiência de Joule, descrita na seção anterior, com cada um dos líquidos separadamente e verificamos que são necessários x joules de trabalho elevar de 1 gráu a temperatura da água, e são precisos y joules de trabalho para elevar de 1 gráu a temperatura do óleo. Depois recomeçamos, com a água e o óleo à mesma temperatura que estavam antes. Agitamos apenas a água, até dissiparmos $(x + y)$ joules de trabalho mecânico. A temperatura da água se eleva de mais do que 1 gráu. A seguir, colocamos o recipiente com óleo em contato com o de água, mantendo o sistema isolado. A temperatura do óleo se eleva e a da água abaixa. Finalmente, estabelece-se o equilíbrio: a temperatura de ambos os líquidos torna-se a mesma e conserva-se constante. Medimos a temperatura da água e do óleo e verificamos que ambos estão 1 gráu acima da temperatura inicial.

Concluimos o seguinte: dos $(x + y)$ joules de trabalho realizados sôbre a água, y joules foram transferidos ao óleo por *fluxo de calor*. Chegamos a essa conclusão porque sabemos que são necessários exatamente y joules de trabalho para elevar de 1 gráu a temperatura do óleo. Mostramos, assim, que o trabalho necessário para produzir certa elevação de temperatura em certo líquido é o mesmo, quer a energia seja transferida ao líquido por fluxo de calor, quer a energia mecânica seja dissipada diretamente no líquido.

26 — 6. Relação Quantitativa entre Dissipação de Energia e Elevação de Temperatura.

Sejamos bem precisos a respeito da energia que deve ser dissipada para elevar de 1.° C a temperatura de 1 g de água. Se dissipamos energia mecânica, verificamos que devemos transformar 4,2 joules. Podemos, também, transferir a energia por fluxo de calor a partir do óleo quente. Podemos calibrar o óleo quente mediante uma experiência de Joule. Então constatamos que o óleo deve perder 4,2 joules por escoamento de calor para aquecer a água. De qualquer modo, os 4,2 joules elevarão a temperatura da água de exatamente 1 gráu.

Podemos combinar os dois modos de aquecer um material. Suponha que temos 1 g de água, circunda da por um banho de óleo quente, estando o conjunto isolado do resto do mundo; um pequeno eixo feito de material isolante aciona uma roda de pás dentro da água. Agora, dissipamos 1 joule de energia mecânica em 1 g de água, girando as pás; permitimos também que 3,2 joules fluam para a água vindo do óleo, como é indicado pela quada de temperatura do banho de óleo. Portanto, a energia interna da água sofreu um acréscimo de 4,2 joules. Isto é indicado pela elevação de 1° C na temperatura; a mesma elevação que ocorreria se transferíssemos 4,2 joules para 1 g de água ùnicamente por fluxo de calor, ou apenas por meios mecânicos. Em geral, o acréscimo de energia interna é dado por

$$\triangle T + \triangle Q,$$

onde $\triangle T$ é a quantidade de energia transferida por dissipação de energia mecânica e $\triangle Q$ é a quantidade de energia transferida por fluxo de calor. A transferência total de energia tem o mesmo efeito, não importando que fração dela seja $\triangle T$ e que fração seja $\triangle Q$.

Podemos dissipar energia na água de inúmeras maneiras, mesmo deixando cair pedras dentro dela. O resultado é sempre o mesmo.

Desde que 4,2 joules sejam dissipados em 1 g de água, sua temperatura se eleva de 1°C. Para elevar de 1.° C a temperatura de 2 g será necessário exatamente o dôbro de energia. De modo semelhante, dissipando 12,4 joules em 1 mol de hélio (4 gramas), sua temperatura se eleva de 1.°C. O aumento de temperatura é diferente para diferentes substâncias, como mostram os exemplos citados, mas em qualquer substância obtemos sempre o mesmo resultado, para o mesmo intervalo de temperatura.

Medidas precisas mostram que 4,185 joules são necessários para elevar a temperatura de 1 g de água, de 14,5°C a 15,5°C. Esta quantidade de energia é chamada caloria (*). A caloria é apenas uma outra unidade de energia. Poderíamos medir a energia cinética de um objeto em calorias, tanto quanto em joules; por exemplo, um objeto de 3 kg, movendo-se a 2 m/seg tem $\frac{1}{2} \cdot (3)\ (2^2) = 6$ joules ou $\frac{6}{4{,}185} \approx 1{,}45$ calorias da energia cinética; entretanto, o joule está diretamente relacionado com nossas unidades de fôrça e comprimento, sendo, pois, em geral, mais conveniente. Usaremos sempre o joule; uma unidade basta.

26 — 7. Conservação da Energia.

Quando energia mecânica é transformada em calor, o mesmo número de joules de energia mecânica fornece sempre o mesmo aquecimento. Se o calor é transferido a uma quantidade padrão de água, por exemplo, obtemos sempre a mesma elevação de temperatura. Mas as experiências de Joule e as de escoamento de calor não respondem a tôdas as perguntas que podemos fazer acêrca do calor e da energia mecânica. Podemos transformar o calor em energia mecânica na mesma proporção conseguida na transformação de energia mecânica em calor? Podemos conseguir 4,2 joules de energia mecânica a partir do calor proveniente de 1 g de água, quando sua temperatura cai de 1°C? Nossas primeiras experiências sugerem que obteríamos 4,2 joules, mas precisamos de uma evidência direta. Muitas coisas — inclusive trincos de portas — atuam de um modo quando caminham num sentido e de outro modo no sentido oposto.

O modo mais simples de verificar a transformação *de* energia térmica *em* energia mecânica seria introduzir uma quantidade conhecida de calor $\triangle Q$ numa máquina térmica e medir o trabalho $\triangle T$ por ela produzido. Devemos ter certeza, entretanto, de que, no fim, a máquina fica com a mesma energia que tinha no início; senão precisaríamos saber quanta energia a máquina reteve, ou quanta ela forneceu de uma reserva inicial.

O modo usual de verificar que a máquina não forneceu energia é, no fim do processo, fazê-la voltar ao seu estado inicial. Verificaremos, entretanto, que a máquina não absorve simplesmente o calor $\triangle Q$ e produz trabalho. Ela absorve o calor $\triangle Q$, produz algum trabalho e *rejeita* parte do calor. (É para libertar-se dêsse calor rejeitado que os carros e tôdas as outras máquinas térmicas possuem radiadores). Se queremos saber se a energia térmica pode transformar-se em energia mecânica, joule por joule, devemos considerar apenas a diferença entre o calor que entra e o calor que sai e comparar essa diferença com o trabalho. Devemos medir todo o calor absorvido e todo o calor rejeitado observando variações de temperatura do ambiente. O trabalho é medido por fôrças multiplicadas por distâncias. Tais experiências foram realizadas. O francês Hirn chegou mesmo a computar todo o calor e todo o trabalho que entravam e saiam do motor térmico de um tear. O resultado é que o calor se transforma em igual quantidade de energia mecânica. Quando transformamos 4,2 joules de calor em energia mecânica.

Embora a equivalência entre calor e energia mecânica seja completa — qualquer que seja o sentido da transformação — há uma diferença essencial entre as transformações nos dois sentidos. Podemos fàcilmente transformar *tôda* a energia mecânica em calor; mas, normalmente, só conseguimos transformar em energia mecânica uma fração do calor disponível. Fornecemos o

(*) Unidades como a caloria foram usadas para medir o calor mesmo antes de se reconhecer que o calor é uma forma de energia. São usadas por ser muito fácil avaliar uma quantidade de calor fornecendo-a a uma massa conhecida de água e medindo a elevação de temperatura. Note que existe uma unidade maior, a "quilocaloria", ou grande caloria, que é 1 000 vêzes maior que a pequena caloria. A grande caloria é usada comumente, hoje em dia, para medir a energia fornecida por alimentos.

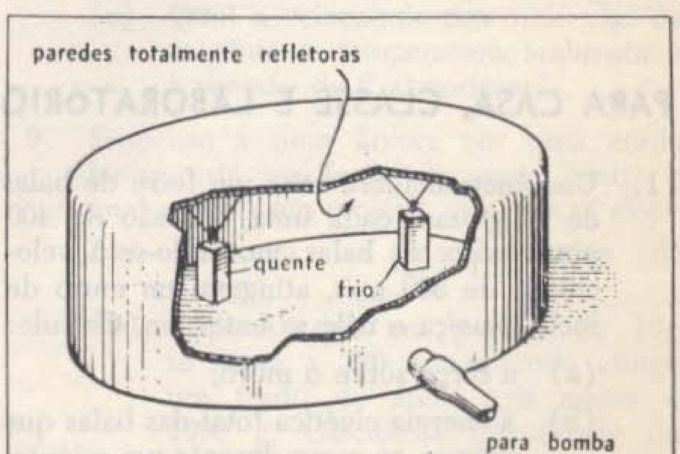
calor à máquina a temperatura elevada; uma parte dêsse calor é devolvida pela máquina a uma temperatura inferior, e o restante se transforma completamente em energia mecânica. O fato de que, tôda energia que muda de forma é integralmente transformada, é uma versão da primeira lei da termodinâmica. A questão de quê fração da energia pode ser convertida é assunto da segunda lei da termodinâmica.

Acreditamos, atualmente, que calor e energia mecânica são apenas duas formas diferentes de energia, e que nenhuma energia se perde ao passar de uma forma para outra. Tal como a quantidade de movimento, a energia é conservada. Mas, para chegar a essa conclusão, tivemos de medir quantidades de calor e seguir a pista da energia que se localiza como energia interna, além de medir a energia cinética macroscópica e a energia potencial dos objetos que são elevados contra a fôrça da gravidade. Nenhuma experiência isolada nos leva por si só à convicção de que a energia é conservada. Mas admitimos a conservação pensando em tôdas as espécies de processos físicos e químicos. Muitos dêsses processos ocorrem diàriamente: produtos químicos reagem, calor é libertado, máquinas se movimentam. E o total de energia permanece inalterado. Se qualquer quantidade substancial de energia desaparecesse, há muito teríamos notado a perda. Se houvesse fontes misteriosas de energia, o aumento de energia ter-se-ia tornado evidente. É sôbre essa verificação geral da conservação, assim como sôbre numerosas verificações de detalhe em todos os tipos de transformação, que repousa, de fato, nossa crença na conservação da energia.

Acrescentando o fluxo de calor ao trabalho mecânico, estendemos a conservação da energia além dos simples sistemas mecânicos. A extensão foi feita incluindo um novo mecanismo de transferência. O fluxo de calor foi o primeiro mecanismo novo a ser acrescentado ao trabalho, mas, desde então, descobrimos que devem ser incluidos outros mecanismos. Por exemplo, a energia proveniente do Sol, não chega aqui nem por meio de trabalho mecânico, nem por meio de fluxo de calor como ocorre entre um corpo quente e um corpo frio em contato. É a radiação — luz visível e invisível — que transporta a energia. Se quisermos que a conservação da energia abranja todo o Universo, devemos levar em conta a energia da radiação do mesmo modo como incluimos a quantidade de movimento da radiação para explicar o comportamento de corpos que emitem ou absorvem luz.

Experiência e teoria combinam-se para assegurar que, incluindo a radiação, a energia é, de fato, conservada. Mas, enquanto a transferência de energia térmica por fluxo de calor pode ser considerada como uma versão microscópica da transferência de energia por meio de trabalho, a transmissão por radiação é completamente diferente. Não podemos dizer que entendemos êsse mecanismo enquanto não estudarmos a radiação. Não tentaremos, agora, entrar em detalhes. Entretanto, mesmo sem estudar detalhadamente o mecanismo, podemos estender a conservação da energia de modo a incluir a radiação, realizando experiências semelhantes àquelas que nos permitiram estender a conservação da energia para incluir o fluxo de calor. Podemos usar uma quantidade conhecida de energia para manter uma lâmpada acêsa por certo tempo e fazer com que a radiação emitida seja absorvida por uma superfície negra. A superfície se aquece e podemos medir a energia empregada em aquecer a superfície negra e a que é deixada como calor na fonte de luz. Verificamos que a soma é igual à energia fornecida à fonte de luz. Parte da energia passou da fonte de luz para a superfície absorvente. E passou sem perda ou ganho.

Não é necessário que a radiação seja visível. Por exemplo, podemos colocar um corpo quente e um frio dentro de um recipiente cujas paredes internas sejam muito boas refletoras de radiação (Fig. 26-5). No interior fazemos um vácuo su-



26-5 — Dois objetos, um quente e um frio, são colocados dentro de um recipiente de paredes refletoras. Há um bom vácuo dentro do recipiente, de forma que a energia não é transportada pelas moléculas de ar. Apesar disso, o objeto quente se resfria e o frio se aquece, pois a energia é transportada pela radiação.

ficientemente bom para que não ocorra fluxo de calor pelos processos habituais. Não obstante, o corpo quente perde e o corpo frio ganha energia, que flui de um ao outro como radiação. Verificamos que a energia total é conservada.

Tal como a transferência de quantidade de movimento, a transferência de energia por radiação leva algum tempo. A luz do Sol entrega sua energia e quantidade de movimento à Terra 8,3 minutos depois de deixar o Sol. Tanto quanto sabemos, nada se move mais ràpidamente. A transferência de energia por outros processos é mais lenta, mas, em geral, as distâncias são tão pequenas que, às vêzes, não conseguimos medir o tempo gasto.

Para muitos sistemas mecânicos comuns – tais como bolas de bilhar que se chocam, a Terra girando em tôrno do Sol, ou mesmo uma máquina a vapor em movimento – o papel desempenhado pela radiação na transferência de energia é tão pequeno que podemos geralmente ignorá-lo. Mas a radiação deve ser considerada não apenas quando estudamos a transferência de energia das estrêlas, mas também quando consideramos os átomos emitindo e absorvendo luz.

Todos os acontecimentos físicos, desde a evolução de uma estrêla até à vida de um vaga-lume, são essencialmente transformações de energia. Mesmo em escala cósmica, podemos seguir a pista das transformações da energia. Os físicos descobriram a energia nuclear que é a fonte da energia radiante das estrêlas. Nosso conhecimento do mundo físico é coerente com uma conservação universal da energia. Na medida do que sabemos, a quantidade de energia em determinada região só varia se ocorre uma troca de energia entre essa região e o meio que a circunda. Portanto, se a região é todo o Universo, podemos esperar que não haja variação na energia total – porque, por definição, não há nada fora do Universo. Esta hipótese de que a energia total do Universo é constante, é a base da maioria das teorias cosmológicas. Mas esta é uma generalização ousada a partir de nossa limitada experiência. Vivemos num pequeno canto do Universo, e verificamos a validade de nossas leis físicas durante um intervalo de tempo muito curto. É concebível que essas leis, incluindo a da conservação da energia, não sejam rigorosamente corretas. Dentro de nosso limitado tempo de visão, a energia é conservada com grande precisão; mas uma destruição ou criação de energia em escala extremamente pequena pode ter escapado ao nosso exame. Se, por exemplo, a energia total do Universo tivesse dobrado no curso de vários bilhões de anos, provàvelmente não teríamos notado essa modificação. Com efeito, algumas teorias cosmológicas admitem uma criação contínua de energia.

Esta é uma das questões científicas mais vivas da atualidade. Os cosmologistas estão trabalhando sèriamente para verificar se a energia é estritamente conservada em todo o Universo. E justamente agora, pela primeira vez, existe, a possibilidade de se realizarem experiências para decidir entre as teorias rivais.

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO

1. Uma metralhadora atira um feixe de balas de 10 gramas cada uma, à razão de 400 por minuto. As balas, movendo-se à velocidade de 300 m/s, atingem um muro de rocha maciça e nêle se enterram. Calcule:
   (a) a fôrça sôbre o muro;
   (b) a energia cinética total das balas que chegam ao muro durante um minuto;
   (c) a energia cinética total das balas situadas ao longo de 1 m do feixe, quando se aproximam do muro. Compare duas vêzes esta resposta com a que você deu à pergunta (a).

2. Suponha que, na parede de um recipiente que contém gás, há uma pequena região capaz de prender as moléculas que aí chegam.
   (a) A pressão aí é maior ou menor do que no restante da parede?
   (b) Se a região pegajosa é tirada fora, deixando um orifício, qual a pressão no orifício?
   Prepare-se para discutir em classe sua resposta.

3. Em certo gás, 2/5 da energia das moléculas são ligados ao movimento dos átomos

em tôrno um do outro e 3/5 ao movimento dos centros de massa.

(a) Em média, qual é a energia cinética do movimento do centro de massa de uma dessas moléculas quando a temperatura é de 300°K?

(b) Se a temperatura aumenta de 1°C. que quantidade de energia deve ser fornecida a 1 mol ($0{,}6025 \times 10^{24}$ moléculas) do gás?

4. Um gás, num cilindro, empurra para fora o pistão, aumentando seu volume de $\triangle V$. O pistão tem área A e o gás exerce sôbre êle a pressão P. A fôrça exercida pelo gás move o pistão de uma distância $\triangle x$, transferindo a energia $F\triangle x$ a uma máquina externa. Mostre que o trabalho $F\triangle x$ é igual a $P\triangle V$.

5. Um mol de um gás ideal monoatômico (na prática, hélio ou argônio) é colocado num cilindro à temperatura de 273°K. O gás está à pressão atmosférica normal, isto é, $1{,}02 \times 10^5$ newtons/m^2. A esta pressão e temperatura o gás ocupa $2{,}24 \times 10^{-2}$m^3. Empurra-se, então, um êmbolo, de maneira a reduzir o volume em $2{,}45 \times 10^{-4}$m^3.

(a) Que trabalho mecânico deve ser realizado para empurrar o êmbolo? (Despreze a variação de pressão).

(b) Qual é a temperatura final do gás, estando o recipiente completamente isolado? (Lembre que 12,4 joules de energia elevam a temperatura do gás de 1.°C).

6. No problema 5, de que fração do valor inicial altera-se a pressão?

7. Suponha que tomamos 18 g de água (1 mol) no ponto de ebulição e a transformamos em vapor dentro de um cilindro fechado por um pistão sem atrito e tão leve que o gás fica sempre à pressão atmosférica.

(a) Que volume ocupará o vapor de água, admitindo que êle se comporta como um gás perfeito? (O vapor de de água não é um gás perfeito, mas o êrro devido a essa suposição será inferior a 10%.)

(b) Qual o trabalho realizado ao empurrar o pistão para fora, contra a pressão atmosférica, enquanto tôda a água se vaporiza?

(c) Sabendo que cada grama de água necessita 540 calorias para afastar suas moléculas umas das outras quando se transforma em vapor, que quantidade de calor é necessária para transformar a água em vapor e empurrar o pistão para fora?

(d) Que fração da quantidade total de calor converte-se em trabalho ao empurrar o pistão para fora?

8. (a) Calcule aproximadamente a velocidade das moléculas de oxigênio à temperatura ambiente, a partir dos seguintes dados: 32 gramas de oxigênio à temperatura ambiente (20°C), e à pressão de 1 atmosfera ($1{,}02 \times 10^5$ newtons/m^2) ocupam $2{,}4 \times 10^{-2}$m^3.

(b) O mesmo volume de hidrogênio, à mesma temperatura e pressão, pesa apenas 2 g. Avalie a velocidade média das moléculas de hidrogênio à temperatura ambiente.

(c) A partir de sua resposta ao ítem (a), avalie a velocidade média das moléculas de nitrogênio à temperatura ambiente, *com uma margem de êrro de 10%.*

(d) Qual a velocidade média das moléculas de ar à temperatura ambiente (com a mesma margem de êrro)?

(e) Qual a velocidade das moléculas de oxigênio à temperatura ambiente e à pressão de 2 atmosferas?

9. Suspenso a uma árvore por uma corda longa, está um fardo de areia, contra o qual se atira um projétil, que nêle se aloja

(a) Descreva as transformações de energia.

(b) Suponha que um projétil de 10g se move a 300 m/s quando atinge um fardo de areia cuja massa é 1990 g. Calcule a quantidade de energia cinética:

(i) que o projétil tinha inicialmente;

(ii) que o projétil e o fardo têm após a colisão

(iii) que desaparece;

(c) Que fração da energia cinética inicial do projétil transforma-se em calor?

10. Uma metralhadora dispara balas de chumbo contra um muro; ao chocar-se contra o muro, elas param sùbitamente e caem no chão. Descreva as transformações de energia, desde o estágio em que tôda a energia está na pólvora, até aquele em que as balas estão no solo, ao pé do muro, depois de várias horas.

11. Em uma de suas experiências mais famosas, Joule agitava água com uma roda de pás, por meio de dois objetos que caiam. Cada objeto tinha massa de 14 kg e caia verticalmente de cêrca de 2 m de altura. Havia cêrca de 7 kg de água a ser aquecida. Após cada descida dos objetos êle os elevava e os deixava cair de novo. Que aumento de temperatura seria de esperar, após vinte quedas

Nota: Êste problema representa o inverso da lógica da grande experiência de Joule. *Você* sabe que 4,2 joules sempre aumentarão de 1°C a temperatura de 1 grama de água; Joule estava tentando descobrir isso.

12. * Um projeto:

(a) Faça ou obtenha uma pequena mola de fio de aço. Estique-a e solte-a muitas vêzes. Encoste-a a seu rôsto para sentir se ela se tornou mais quente.

(b) Faça uma mola semelhante de fio de cobre macio e repita a experiência.

Nota: Se você esticar demais a mola, comprima-a de novo juntando bem as expiras.

13. * Um projeto: Levante depressa um martelo e dê várias marteladas violentas num pequeno bloco de chumbo apoiado em um bloco firme de ferro ou pedra. Sinta a temperatura do chumbo antes e depois. Faça estimativas grosseiras da energia cinética perdida pelo martelo e da energia térmica ganha pelo chumbo. (Admita que 1 kg de chumbo necessita cêrca de 130 joules para aumentar de 1°C sua temperatura.)

14. * Um projeto:

(a) Com uma batedeira elétrica agite uma quantidade conhecida de água durante 5 minutos. (Se você colocar a água numa caneca de alumínio, deverá considerar também o aquecimento da caneca. 1000 gramas de alumínio absorvem o mesmo calor que 200 g de água. Um modo engenhoso de evitar um recipiente que absorva calor é colocar a água num saco de plástico delgado, como os usados nos congeladores — mas isso pode complicar as coisas se o batedor de ovos tocar o saco).

(b) Repita a experiência, ligando a batedeira durante 10 minutos; e depois usando metade ou o dôbro da quantidade de água. Em cada caso, avalie o calor liberado pela batedeira de ovos por minuto.

15. * Um projeto: Avalie a energia liberada durante 5 minutos por uma pequena lâmpada elétrica de potência conhecida.

(a) Faça isso experimentalmente, acendendo a lâmpada mergulhada em tinta (por que tinta?) (Você pode usar uma lâmpada de automóvel, ligada a uma bateria de 6 volts. Não use uma lâmpada de alta voltagem, devido ao perigo de choque!)

(b) Calcule a mesma energia usando seus conhecimentos: note que 1 quilowatt hora, que está custando cêrca de sessenta cruzeiros, equivale a $3{,}6 \times 10^6$ joules.

16. Um nadador de alta velocidade dispende 120 000 joules numa competição de meio minuto. Três quartos dessa energia são liberados como calor perdido; o restante, é dissipado por suas mãos e pernas, em trabalho mecânico.

(a) Em 30 segundos êle nada 50 metros. Avalie a fôrça média que se opõe a seu movimento.

(b) Descreva as transformações da energia durante a natação.

(c) Onde e sob que forma encontra-se a energia liberada, quando tiver terminado a competição?

17. (a) Com que velocidade deve ser lançado um bloco de gêlo de 2 kg, a 0°C, contra um muro de pedra, de modo que tôda a massa se funda com o choque? (1 kg de gêlo necessita $3{,}36 \times 10^5$ joules para fundir-se).

(b) Se a massa do bloco de gêlo for outra, como se modifica a resposta ao ítem anterior?

(c) O que torna irreal êste problema?

18. Um mol de hélio a 24°C é colocado em contato com água a 26°C, ficando isolado do resto do mundo. A temperatura final de ambos é de 25°C. Que quantidade de água havia?

19. Um alpinista pode subir verticalmente cêrca de 500 metros por hora.

(a) Que quantidade de energia potencial gravitacional ganha o alpinista numa subida de 5 horas?

(b) O corpo humano é uma máquina químico-mecânica pouco eficiente. Na melhor das hipóteses seus músculos liberam, como energia mecânica útil, apenas 25% da energia química usada. Os restantes 75% ou mais, são dissipados como calor perdido. Admitindo esta eficiência, que quantidade de energia química usa o alpinista em 5 horas?

(c) Admita que, independentemente da subida na montanha, êle necessita $2{,}2 \times 10^6$ calorias em 24 horas. Que quantidade de energia precisa êle obter de sua alimentação diária, se deve fazer a subida tôda manhã?

(d) Se o alpinista desce a montanha tôdas as tardes, êle perde a energia potencial ganha na subida. Por que isso não o ajuda a reduzir sua alimentação?

20. Suponha que você tem duas grandes caixas de massa desprezível. A caixa A contém 1 mol de hélio aquecido a 60°C, e a caixa B contém 1 mol de argônio (também um gás nobre), a 10°C.

(a) As duas caixas são colocadas lado a lado, em contato, ficando tôdas as suas outras faces isoladas. Após algum tempo, ambos os gases estão à mesma temperatura. Qual é esta temperatura e por quê?

(b) Em lugar de serem colocadas lado a lado, as duas caixas são unidas, de forma a obter-se uma só caixa grande, sem variação de volume, de modo que os gases se misturam. Qual será a temperatura final da mistura?

(c) Suponha, agora, que a caixa B contém 1 mol de nitrogênio a 10°C, em vez de argônio. O hélio quente e o nitrogènio frio misturam-se, como no item (b). A temperatura final será a mesma que em (b), maior ou menor? (d) Justifique claramente sua resposta ao ítem (c).

21. Deve-se testar um novo avião de tipo pequeno. Para manter segrêdo, o teste é feito num hangar fechado, cujos muros são completamente isolados do mundo externo. Colocam-se 10 kg de gasolina no avião, que vôa pelo hangar durante meia hora, aterrando com seu tanque vazio.

(a) Sob que forma a energia que o avião usa para voar foi-lhe fornecida inicialmente?

(b) Discuta as transformações de energia durante o vôo.

(c) Onde se encontra a energia, e sob que forma, meia hora após o vôo?

22. Um foguete está equipado com recipientes tèrmicamente isolados, cheios de gás muito quente, em vez de combustível. O gás quente, saindo através de um tubo de escapamento, lança o foguete para a frente.

(a) De onde vem a quantidade de movimento adquirida pelo foguete?

(b) De onde provém a energia cinética do foguete?

(c) Se o gás é lançado para dentro de uma caixa colocada no solo, e a temperatura do gás coletado na caixa é medida depois de lançado o foguete, você espera que a temperatura seja superior, inferior ou igual à temperatura inicial da reserva de gás no foguete?

23. Imagine que você tem uma lâmpada numa caixa perfeitamente refletora, que não contém mais nada; dentro dela, há um vácuo perfeito.

(a) Acendendo a luz você produz.
 (i) energia cinética da caixa como um tôdo?
 (ii) energia potencial da caixa?
 (iii) energia térmica do movimento atômico?
 (iv) energia térmica sob a forma de energia potencial intermolecular?
 (v) energia interna em alguma forma?
 (vi) nenhuma energia extra para a caixa?

(b) Acendendo a luz você produz.
 (i) quantidade de movimento da caixa como um todo?
 (ii) quantidade de movimento do movimento térmico dos átomos?
 (iii) nenhuma quantidade de movimento de caixa?

(c) Prepare-se para discutir em aula suas respostas.

24. (a) Um clindro contém gás hélio e é fechado por um pistão que se move com atrito desprezível. Um homem empurra o pistão ràpidamente, comprimindo o hélio que se aquece. Por que se eleva a temperatura do hélio? Discuta o mecanismo de aquecimento em têrmos de comportamento molecular.

(b) Um cilindro com pistão móvel contém hélio comprimido. O pistão é abandonado e o hélio empurra-o resfriando-se. Explique, em têrmos de comportamento molecular, como o hélio se resfria.

(c) Uma grande caixa onde se fez um bom váculo contém uma pequena garrafa de hélio comprimido. Por meio de um gancho retira-se a rôlha da garrafa de hélio. Depois que êste sai da garrafa não se observa qualquer variação de temperatura. Explique, em têrmos de comportamento molecular, por que não há variação de temperatura quando o hélio se expande dentro da caixa grande.

(d) Embora o hélio não apresente qualquer variação de temperatura, alguns outros gases se resfriam sensìvelmente ao se dilatarem no vácuo partindo de alta compressão. Que conclusão pode você tirar a respeito dêsses outros gases comprimidos?

25. Um foguete de massa 2×10^3 kg foi lançado, numa tentativa de "escapar" da Terra: Entretanto, quando se encontra a vários milhares de quilômetros da Terra, sua velocidade é de apenas 30 m/s, portanto é evidente que êle retornará à atmosfera. O centro de contrôle no solo envia, então, um sinal de rádio que inflama uma pequena carga explosiva (de vários quilogramas) no foguete. Êste explode e divide-se em duas partes — uma, com massa $0{,}5 \times 10^3$ kg, continua a mover-se para frente com velocidade de 330 m/s.

(a) Calcule a velocidade do outro fragmento.

(b) Calcule a energia cinética do foguete original, e de cada parte após a explosão.

(c) Por que, após a explosão, há mais energia cinética do que havia antes?

26. Um projeto: Experiência com a radiação de um aquecedor elétrico incandescente. Coloque uma fôlha de amianto (servirá, temporàriamente, uma fôlha de papelão úmido) entre o aquecedor e você. Faça um pequeno orifício, de uns 3 cm de diâmetro, de modo que a radiação o alcance. Mantenha sua mão próxima do orifício e sinta o efeito da radiação em sua pele. Tente então as seguintes modificações:

(a) Coloque uma fôlha de papelão entre o orifício e sua mão, e remova-a ràpidamente.

(b) Coloque uma lâmina de vidro de janela entre o orifício e sua mão, e remova-a ràpidamente.

(c) Cubra sua mão com uma lâmina de alumínio (faz-se isto fàcilmente, umedecendo as costas de mão com saliva e colocando delicadamente uma lâmina de alumínio bem fina sôbre a pele. Aproxime do orifício sua pele recoberta com a camada de alumínio.

(d) Mantenha em sua mão a fôlha de alumínio, mas pinte com tinta nanquim uma pequena área da fôlha. Aproxime-a de novo do orifício.

27. •Um projeto: Use a pele das costas da mão, ou melhor, a pele do rôsto, para detetar a radiação de uma superfície quente. Como fonte, use ou uma caneca metálica bem polida cheia de água fervente ou, melhor ainda, uma fôlha polida de cobre, que tenha sido recém aquecida numa chama de gás. Em cada caso, pinte de preto um lado da fonte (uma mistura de fuligem e álcool serve muito bem). Faça então sua estimativa para cada superfície, a polida e a preta.

LEITURA COMPLEMENTAR

DYSON, F. J. — "What Is Heat?" *Scientific American*, Setembro 1954. Uma descrição de nossas idéias modernas e uma breve história do seu desenvolvimento.

GAMOW, GEORGE — "The Evolutionary Universe". Também em *The Universe*, citado acima.

HART, IVOR B. — *James Watt and the History of Steam Power*. Henry Schuman Co., 1949.

HOLTON, GERALD — *Introduction to Concepts and Theories in Physical Science*. Addison Wesley, 1952. Calor, movimento molecular, e conservação da energia são tratados nos Capítulos 17, 18 e 20.

HOYLE, FRED — "The Steady — State Universe". *The Universe*, em Scientific American Book, Simon and Schuster, 1957.

GUIA DE LABORATÓRIO

PARTE III

III — 1. Uma Variante da Experiência de Galileu.

Galileu afirmou que um objeto, movendo-se horizontalmente, continuaria animado dêste movimento, indefinidamente, com velocidade constante (Texto, Seção 20-2). Apoiava esta afirmativa nas observações que fêz de que um objeto é acelerado quando desce e é retardado quando sobe um plano inclinado, atingindo aproximadamente a mesma altura na qual se encontrava quando do início do movimento. Experiência análoga pode ser feita com um pêndulo, observando-se a descida do corpo de um lado da oscilação e sua ascensão do outro lado.

Pendure um pêndulo, de aproximadamente 3 m de comprimento, no teto ou num suporte adequado. Fixe, por meio de uma pinça, um ponto do fio situado 40 ou 50 cm acima do corpo suspenso, de forma que a oscilação se dê em tôrno dêste ponto e não do ponto de suspensão no teto. (Fig. 1). Leve o pêndulo para um lado, de modo que êle fique a uma determinada distância *d* acima do nível mais baixo de sua trajetória. Faça-o oscilar. Compare as distâncias percorridas de um e de outro lado da posição mais baixa. Compare o nível mais alto atingido após soltá-lo com a altura a partir da qual foi largado.

Em seguida, ao invés de deixar o pêndulo efetuar a oscilação completa normalmente, intercale um obstáculo e afaste o pêndulo da posição de equilíbrio de modo que êle efetue a primeira metade da oscilação, a partir do obstáculo e a segunda a partir da pinça (Fig. 2). Que prevê você sôbre (a) a distância horizontal que o pêndulo percorrerá quando largado, (b) o nível que alcançará? Experimente-o.

Repita êsse procedimento variando a posição da pinça. Determine a altura atingida na extremidade da oscilação e meça, aproximadamente, a distância a partir da posição central. Faça diversas medidas, para cada comprimento do pêndulo. Certifique-se de que êste parte sempre da mesma posição.

A partir de seus dados, pode você fazer uma idéia acêrca da altura e da distância horizontal que o pêndulo alcançaria, abandonado do mesmo ponto, se tivesse 10, 50, ou milhares de metros de comprimento?

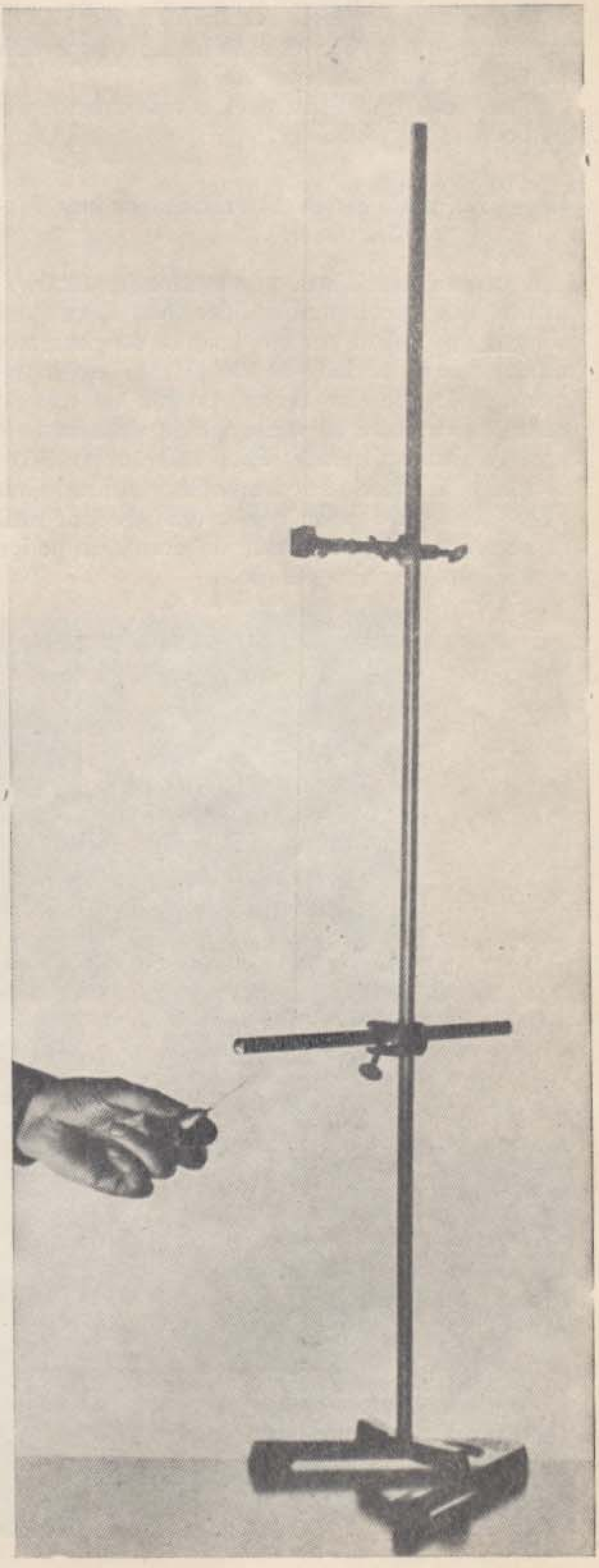


Fig. 2

O que sugerem êsses resultados a respeito de uma bola que se movesse sôbre uma superfície horizontal perfeitamente lisa?

Você acha que é possível o movimento perpétuo?

III — 2. Variações de Velocidade por uma Fôrça Constante.

A experiência diária nos mostra, qualitativamente, que precisamos aplicar uma fôrça para colocar um objeto em movimento, ou para modificar sua velocidade se êle já está em movimento; não estamos certos, porém, da relação quantitativa entre as variações de velocidade e a fôrça que aplicamos. Esta relação pode ser investigada usando-se o aparelho indicado na Fig. 3. Assegure-se de que o amortecedor está firmemente prêso à mesa, de forma a poder aparar um carrinho pesado.

O carrinho, carregado com tijolos e rodando sôbre rodas de patins, pode ser puxado por meio de uma fôrça manual constante. Para nos certificarmos da constância desta fôrça, nós a aplicamos através de anéis de borracha e mantemos constante a distensão dêsses anéis enquanto o carrinho é arrastado. À medida que se movimenta, o carrinho puxa uma fita de papel que passa por baixo do martelinho de uma campainha elétrica calibrada como marcador de tempo, e fixada na extremidade da mesa. A partir das marcas deixadas pelo martelinho na fita, podemos determinar a velocidade em diferentes pontos de uma corrida, e obter gràficamente uma curva representativa da velocidade do carrinho em função do tempo.

A experiência deve ser realizada sôbre uma mesa lisa e nivelada. Se necessário, use calços sob seus pés, e verifique o nivelamento por meio de um nível de bolha. É melhor envolver os ti-

Fig. 3

jolos em papel de embrulho para evitar que pedaços dos mesmos caiam sôbre a mesa.

Antes de proceder às corridas para verificar como varia a velocidade sob a ação de uma fôrça constante, certifique-se de que o carrinho se move com velocidade aproximadamente uniforme, quando você não puxa. Carregue o carrinho com dois tijolos e, dando-lhe diferentes impulsos iniciais, obtenha diversas fitas usando o marcador de tempo. Observe cuidadosamente as fitas. É a velocidade mais uniforme quando o carrinho se desloca vagarosamente ou ràpidamente?

Agora, você pode estudar o efeito de uma fôrça constante sôbre o movimento do carrinho. Prenda no carrinho uma das extremidades de uma alça de borracha, como indica a Fig. 4. Prenda a outra ponta da alça sôbre a extremidade de uma régua de um metro. Enquanto seu companheiro segura o carrinho, puxe a régua, paralelamente ao carrinho, distendendo a alça de borracha até um certo comprimento, digamos 80 cm. Seu parceiro põe o marcador de tempo a funcionar e, após alguns segundos, dado um sinal, solta o carrinho. Nesse instante, você começa a se movimentar puxando o carrinho e matendo a alça de borracha esticada na referência de 80 cm. Você verá que é conveniente praticar as corridas algumas vêzes.

Prenda, então, uma fita ao carrinho carregado com dois tijolos e obtenha uma tira com as marcas. A partir desta fita, faça um gráfico da velocidade em função do tempo (veja Experiência I-5). Não é necessário, para calcular a velocidade, valer-se de tôdas as marcas da fita. Considere, ao invés, grupos de dez marcas para representar uma unidade de intervalo de tempo, medindo a velocidade em metros por dez "ti-

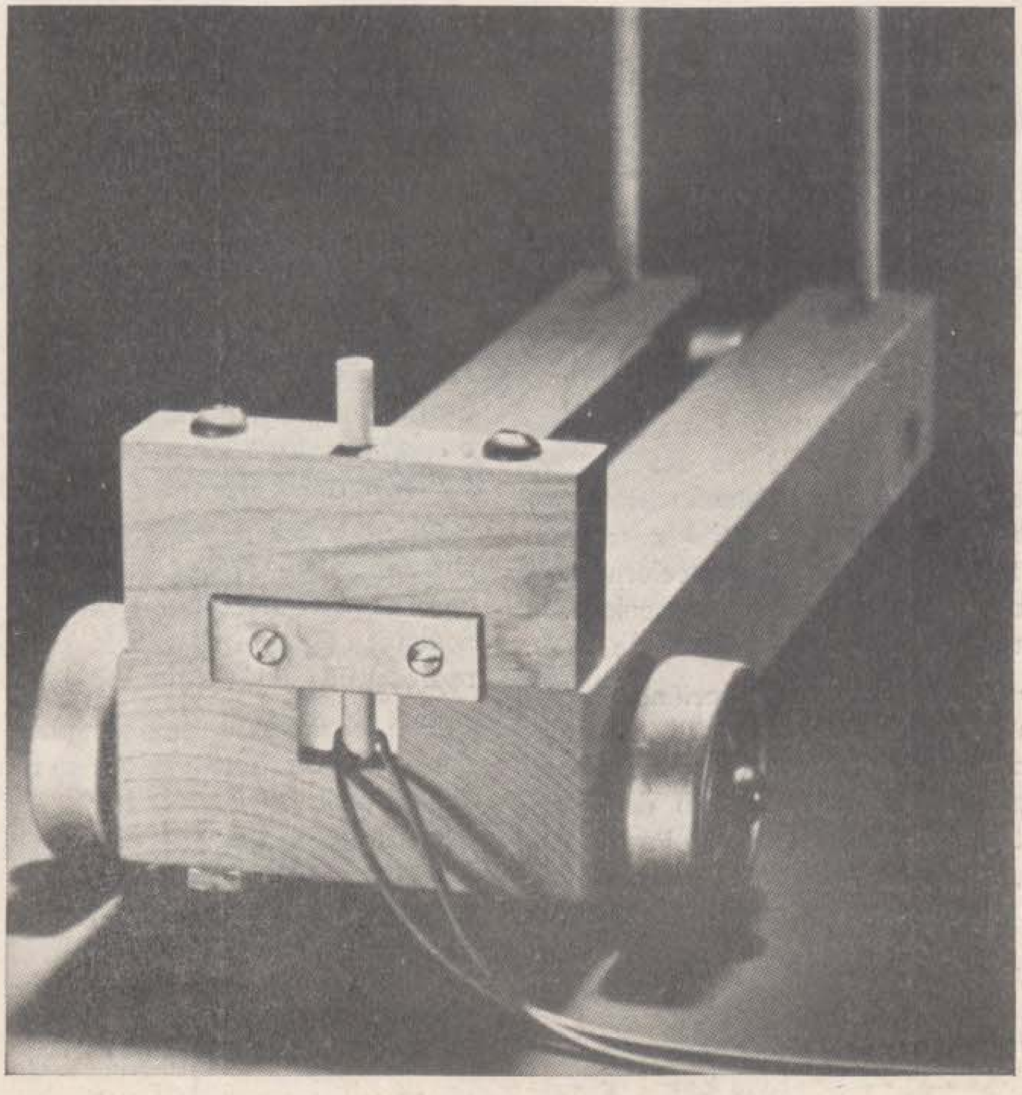


Fig. 4

ques". Analise sòmente a porção da fita que corresponde à parte da corrida na qual você está apreciàvelmente seguro de que aplicou uma fôrça constante.

Usando quatro tijolos no carrinho e a mesma alça de borracha, obtenha outra fita com marcas. Represente os resultados desta fita no papel em que fêz o gráfico anterior. Que conclui você relativamente à aceleração produzida por uma fôrça constante?

A fôrça exercida por você é a única fôrça que age sôbre o carrinho?

Quando você acelerou uma massa maior, a aceleração foi maior ou menor?

III — 3. Como Depende a Aceleração da Fôrça e da Massa.

A variação na velocidade de um objeto é proporcional ao intervalo de tempo durante o qual uma fôrça constante exerce sôbre êle sua ação. Em outras palavras, uma fôrça uniforme produz uma aceleração constante. Isto foi constatado na experiência anterior. Investigaremos, agora, quantitativamente, como fôrças diferentes aceleram uma certa massa, e como uma dada fôrça acelera massas diversas.

Aceleração produzida por fôrças diferentes.

Empregando uma, duas, três e quatro alças de borracha (Fig. 1, Experiência III-2) para produzir a fôrça aceleradora, obtenha fitas com marcas do movimento do carrinho carregado com quatro tijolos. Determine a aceleração a partir das fitas, e faça um gráfico da aceleração em função da fôrça, isto é, do número de alças.

Como sabemos, a partir da experiência anterior, que, para uma fôrça constante, a aceleração é uniforme, não é necessário calcular a aceleração para um grande número de intervalos diferentes, na mesma corrida. Para compreender isso, considere um corpo que parte do repouso com aceleração constante a. Durante o tempo t, êle percorre uma distância d fornecida por $d = \frac{1}{2} at^2$. Conseqüentemente, $a = \frac{2d}{t^2}$. Se as várias carreiras levam o mesmo tempo, a aceleração em cada caso é, portanto, proporcional à distância percorrida. Meça, em cada uma de suas fitas, a distância percorrida a partir do repouso, no mesmo intervalo de tempo. Para o intervalo de tempo determinado, considere um número de tiques que fornecerão uma distância suficientemente grande para possibilitar resultados precisos. (Não utilize uma distância demasiadamente grande, de forma a incluir a zona correspondente à última parte do movimento, quando é difícil manter a fôrça constante).

Que conclui você de seu gráfico? Que pode você dizer, nesta parte da experiência, sôbre a relação entre a fôrça e a aceleração?

Se não houvesse atrito no aparelho, passaria a curva pela origem? Onde, em relação à origem, passaria a curva na sua opinião?

O efeito da massa sôbre a aceleração produzida por uma fôrça constante

Usando uma alça de borracha, determine a aceleração do carrinho carregado com dois, três e quatro tijolos. Faça um gráfico representando a relação entre a fôrça e a aceleração, em função do número de tijolos.

Que conclui de seu gráfico? Tem você pontos suficientes no gráfico, de forma que êle seja convincente? Se dispuser de tempo, experimente acelerar com um e, depois, com cinco tijolos, e represente êstes resultados em seu gráfico.

Considerando o gráfico, pode você obter a massa do carrinho vazio em função da massa dos tijolos?

Usando o aparelho, como determinaria você, a massa de um bloco de chumbo de uma pedra pesada? Experimente-o.

III — 4. Massa inercial e Gravitacional.

A Fig. 5 mostra a balança de inércia, que é um dispositivo simples destinado a medir a massa inercial de diferentes objetos. A frequência de sua vibração horizontal depende da massa inercial dos objetos colocados na balança.

Coloque, na plataforma, quantidades diferentes de matéria, e verifique, qualitativamente, os períodos de vibração destas massas. Para maiores massas, é o período maior ou menor? Afastando a plataforma lateralmente, cêrca de 2 cm, e abandonando-a, compare as acelerações das diversas massas. O que você observa parece estar em concordância com a lei do movimento de Newton?

A partir de um gráfico representativo do período em função da massa, estabeleça a relação quantitativa entre a quantidade de matéria na balança e o período de vibração. Você pode fazê-lo do seguinte modo:

Determine, inicialmente, o período da balança descarregada, medindo o tempo de tantas vibrações quantas você puder contar convenientemente. É difícil contar as vibrações olhando diretamente para elas, pois o período da balança é muito curto. Mantenha um pequeno pedaço de papel perto de uma das lâminas de serra, e conte as batidas ouvidas quando a lâmina atinge o papel. Você, talvez, ache mais fácil contar grupos de três ou quatro vibrações.

Escolha seis objetos, pràticamente iguais, seis presilhas, por exemplo, que representarão massas unitárias. Meça, então, o período da balança carregada com cada uma das seis presilhas (Fig. 6). Quantas vibrações deve você cronometrar, e durante quantos segundos precisa fazê-lo, para estar seguro de que seu êrro não é maior que aproximadamente 2%? Em que porcentagem têm as presilhas massas inerciais iguais?

Determine, então, os períodos, com uma, duas, três ..... unidades de massa na balança e, a partir dêstes dados, represente gràficamente o período em função da massa (número de presilhas) na balança.

Meça o período de um objeto de massa desconhecida, de natureza e forma diferentes — uma pedra, por exemplo. Valendo-se das presilhas como unidade de massa, determine a massa inercial da pedra. Determine, então, por pesagem comum, a massa gravitacional, em gramas, de cada uma das presilhas. Em que

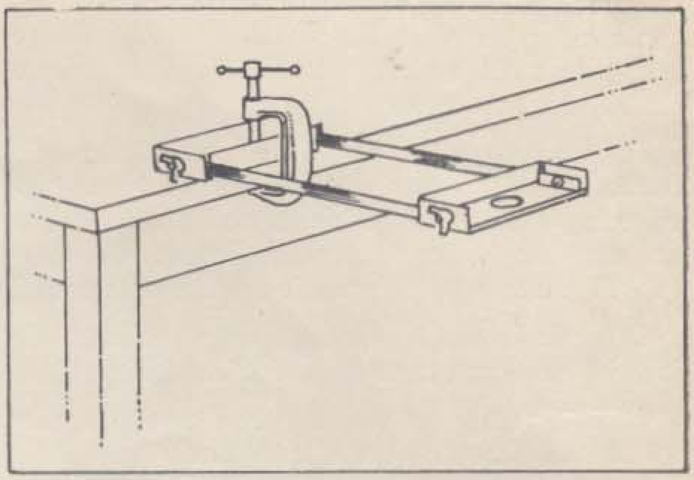


Fig. 5

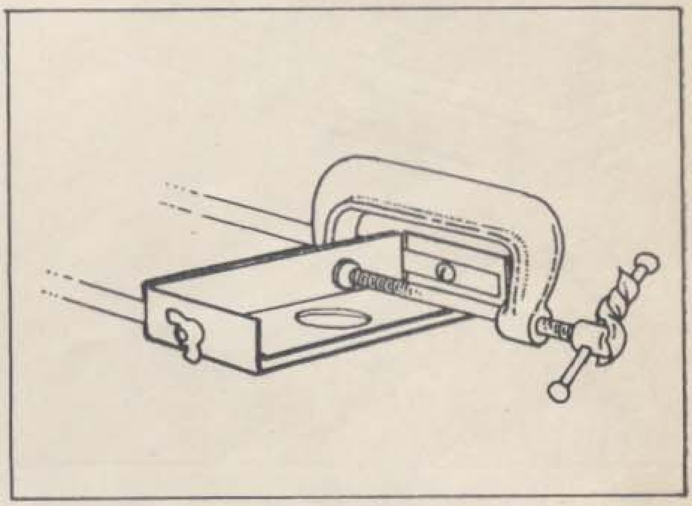


Fig. 6

porcentagem têm elas a mesma massa gravitacional? A partir de suas medidas anteriores, tente predizer o valor da massa gravitacional da pedra. Teste-o, pesando a pedra. Está o valor que você previu dentro do êrro experimental avaliado para sua balança de inércia?

Que concluiria você, relativamente à massa gravitacional e inercial, se obtivesse, com outros objetos, resultados semelhantes? São elas iguais? Proporcionais? Independentes? Devem as unidades de massa inercial ser as mesmas que exprimem massa gravitacional? Como se modificariam os resultados desta experiência se ela fôsse realizada na Lua?

Para verificar, experimentalmente, se a gravidade participa ou não do funcionamento da balança de inércia, carregue-a com um cilindro de ferro. Isto pode ser feito, passando um fio de arame pelo orifício central do cilindro, e colocando-o na abertura da plataforma. O cilindro se apoia, pois, na plataforma. Meça o período da balança carregada.

Suspenda, então, um pouco o cilindro, de forma que sua massa não mais se apoie na plataforma, e mantenha-o nesta posição por meio de um fio comprido prêso a um suporte (Fig. 7). Compare os períodos nestes dois casos?

O período seria diferente se a balança de inércia fôsse montada como indica a Fig. 8?

Como poderia ser usado êste dispositivo para medir a aceleração de um automóvel?

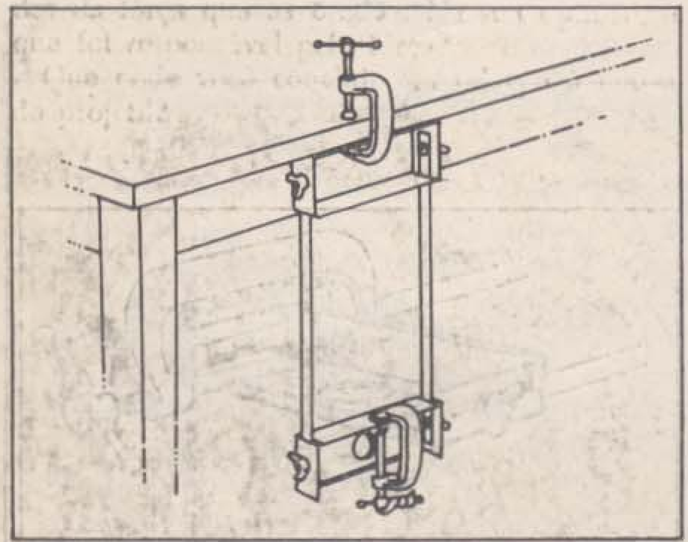


Fig. 8

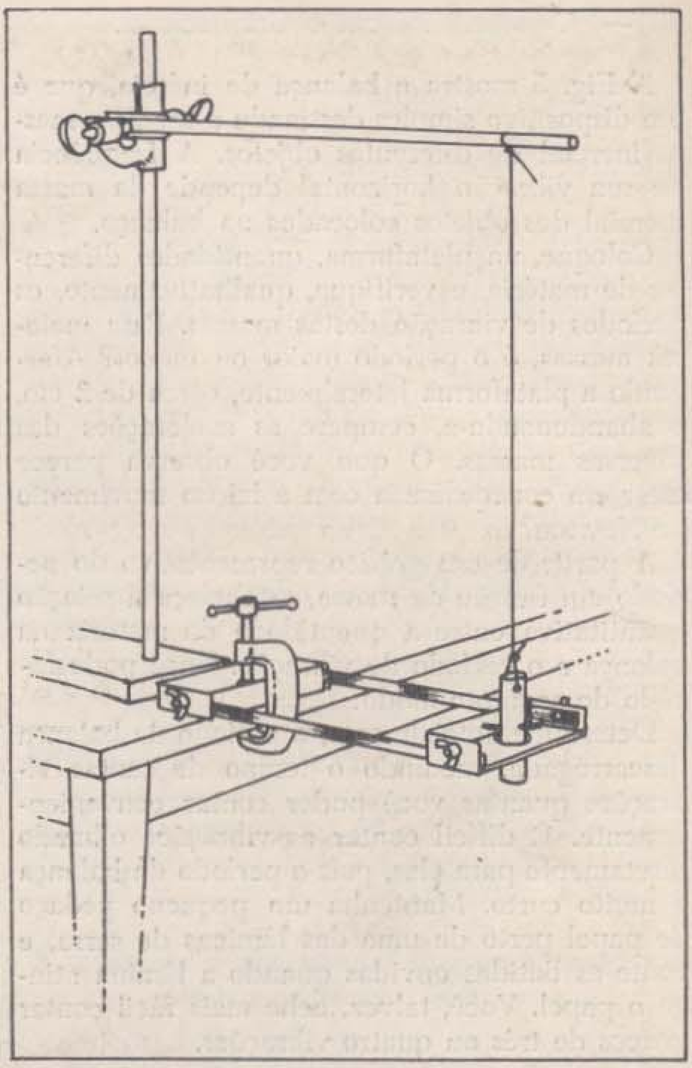


Fig. 7

III — 5. Fôrças Exercidas sôbre uma Bola no Espaço.

A Fig. 9 é uma fotografia de múltipla exposição do movimento de um projétil. Fotografou-se o movimento de uma pequena bola, lançada ao ar, num ângulo de 27° com a horizotal. O intervalo de tempo entre as exposições sucessivas foi de 1/30 s, deslocando-se a bola, na figura, da esquerda para direita. A trajetória da bola se assemelha àquela descrita na seção 21-3 do livro de texto.

Examine a fotografia. É constante a velocidade horizontal da bola? Que pode você concluir em relação à fôrça resultante que atua sôbre a bola, se a velocidade horizontal não é constante?

Se analisarmos a fotografia detalhadamente, e verificarmos as variações de velocidade produzidas pela fôrça resultante, conheceremos melhor as fôrças que atuam sôbre a bola, do que através de um exame superficial da fotografia.

Analise da seguinte maneira as variações de velocidade que ocorrem durante sucessivos intervalos de tempo de 0,1 s (três intervalos na fotografia): Prenda, com um clipe, no alto da fotografia, uma folha de papel milimetrado transparente e assinale o centro de cada imagem. Trace retas ligando cada terceiro ponto. Estas linhas representam o deslocamento da bola durante cada 0,1 s, e constituem, portanto, uma medida das velocidades médias durante êstes intervalos iguais de tempo. Para determinar as variações de velocidade em cada um dêstes intervalos, podemos adicionar o valor *negativo* de um vetor velocidade ao vetor ve-

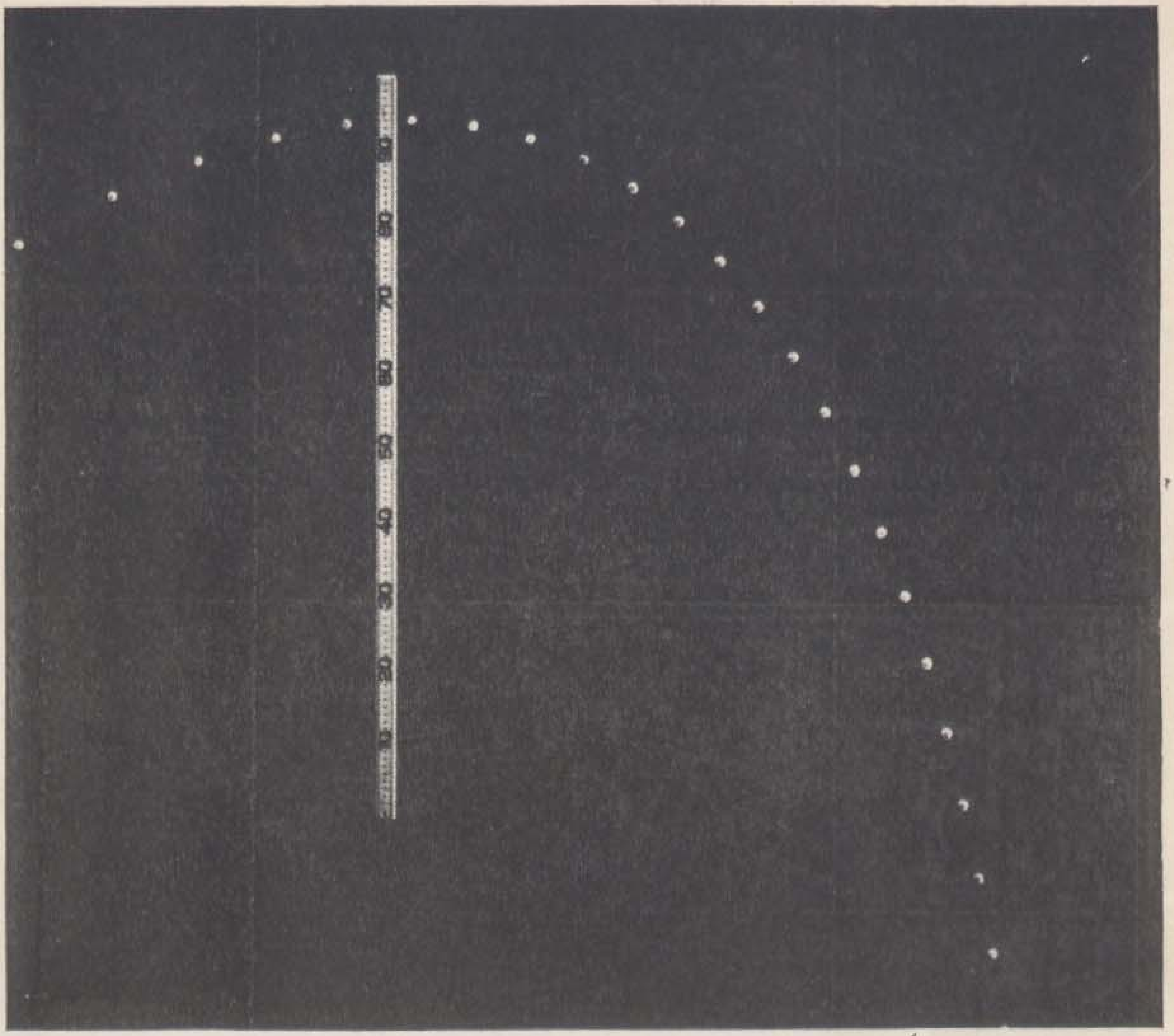


Fig. 9

locidade seguinte. Na Fig. 10 (a), por exemplo, $-\vec{v}_1$ é adicionado a $\vec{v}_2$, para dar a variação de velocidade $\vec{\triangle v}$.

É a mesma, em todos os intervalos, a direção da variação de velocidade? São iguais os módulos das variações de velocidade? Que conclui você relativamente à direção da fôrça resultante que atua sôbre a bola?

Que modificação na velocidade da bola foi causada, em cada 0,1 s, pela fôrça da gravidade? Em que direção ela age? Expresse esta variação de velocidade $\vec{\triangle v}_g$ em metros por décimo de um segundo e subtraia-a, no seu diagrama, de cada uma das variações totais de velocidade $\vec{\triangle v}$ [Fig. 10 (b)]. A variação de velocidade devida à gravidade deve, também, ser reduzida à escala da fotografia, antes de você substraí-la no diagrama. Você pode verificar, por meio de uma régua, que a fotografia corresponde a um décima do tamanho real.

Têm tôdas as variações resultantes de velocidade $\vec{\triangle v}_r$ o mesmo módulo? Qual é sua di-

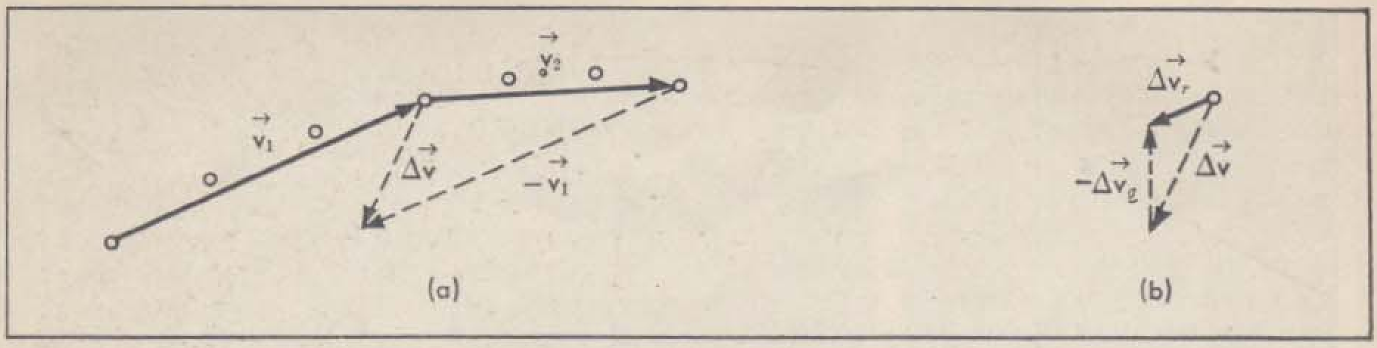


Fig. 10

reção? Explique, qualitativamente, as propriedades da fôrça que as produz. Na sua opinião, o que foi responsável pela fôrça?

Que pode você concluir em relação à massa do projétil?

Represente no seu diagrama o trajeto que a bola teria seguido, na Fig. 9, se a gravidade fôsse a única fôrça agindo sôbre ela.

Como explica você os trajetos seguidos pelo projétil nas Figs: 11 e 12?

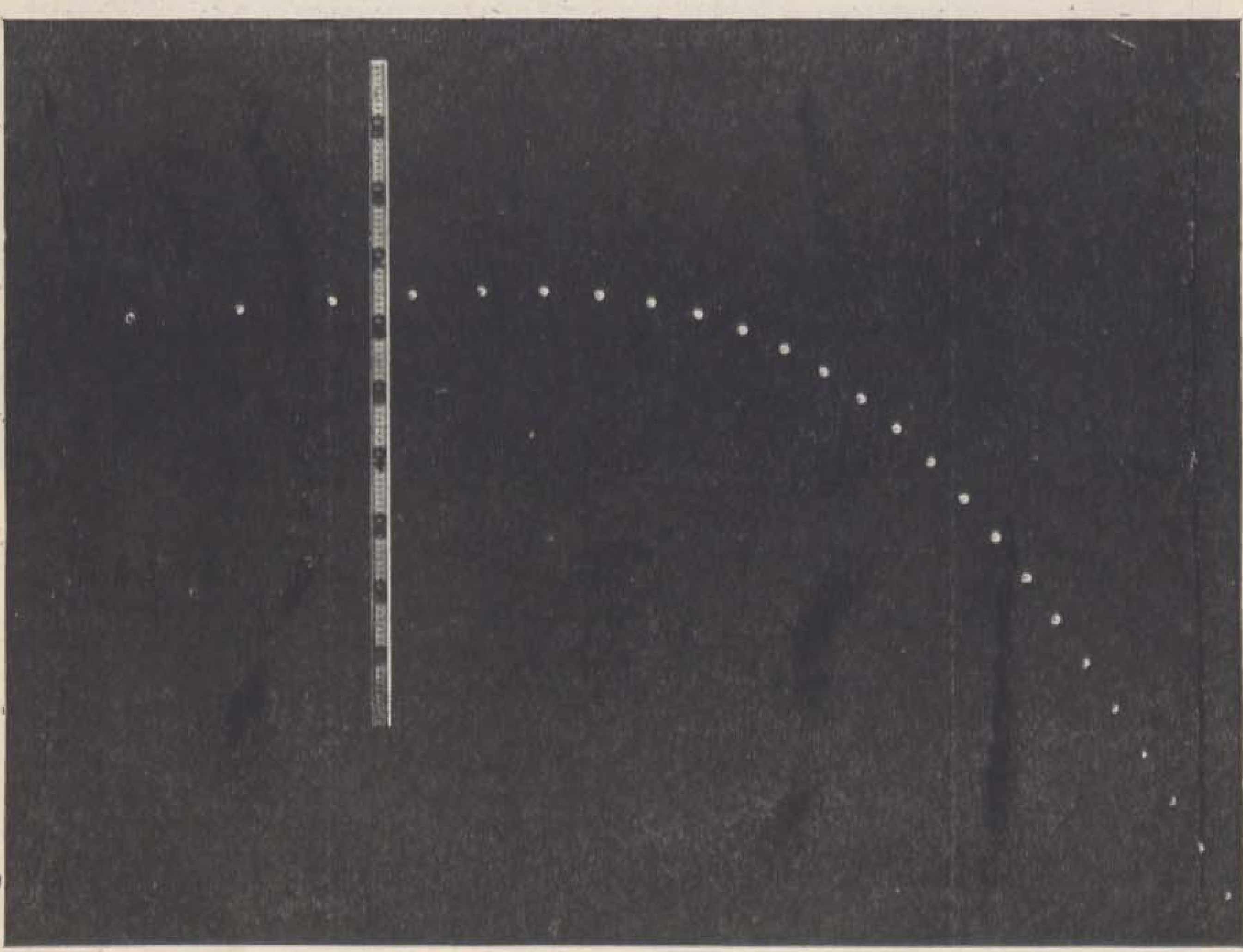


Fig. 11

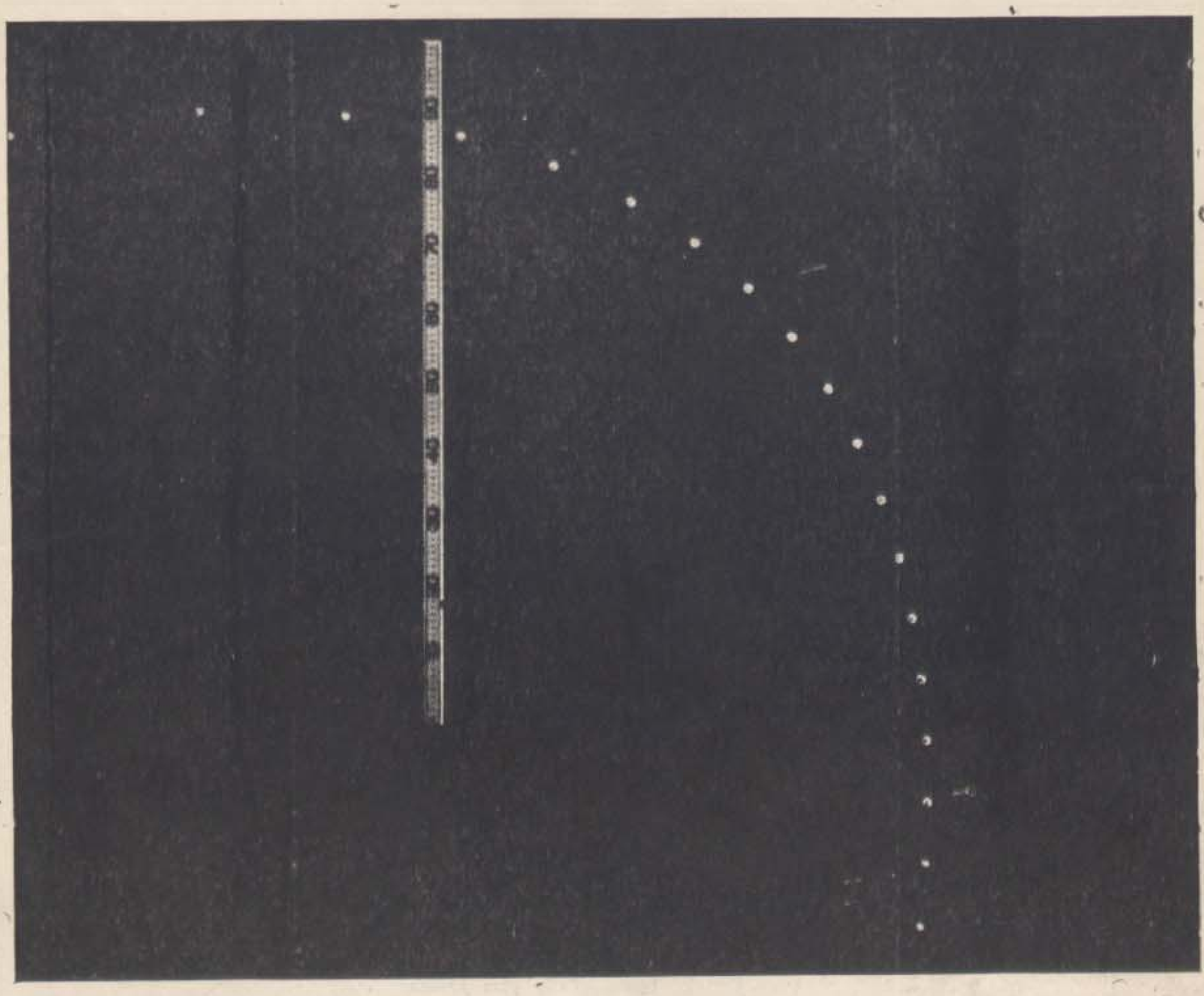


Fig. 12

III — 6. Fôrça Centrípeta.

O movimento circular com velocidade constante em módulo constitui um movimento acelerado; embora o módulo da velocidade permaneça o mesmo, a direção do vetor velocidade varia continuamente (Texto, Seção 6-6). Sabemos, pela lei de Newton, que é necessária uma fôrça para manter esta aceleração. Como se relaciona esta fôrça com a velocidade do objeto, sua massa e o raio do círculo?

Para responder a estas questões, usaremos o aparelho simples indicado na Fig. 13, o qual nos possibilita medir a fôrça, enquanto examinamos o movimento. Quando o tubo de vidro é movido num pequeno círculo, acima de sua cabeça, a rôlha de borracha se movimenta em volta, num círculo horizontal, na extremidade de um fio que é passado pelo tubo e ligado a algumas arruelas suspensas na extremidade inferior. A fôrça da gravidade nestas arruelas, agindo ao longo do fio, fornece a fôrça horizontal necessária para manter a rôlha movimentando-se num círculo. Esta fôrça horizontal é denominada fôrça centrípeta.

Com uma arruela sòmente na extremidade do fio, para impedir que a rôlha escape, gire esta ràpidamente acima de sua cabeça, segurando, também, o fio abaixo do tubo. Necessita você aumentar a fôrça sôbre o fio, quando aumenta a velocidade da rôlha? Que acontece se você deixa de segurar o fio?

Verifique, agora, quantitativamente, a dependência entre a fôrça aceleradora e a velocidade,

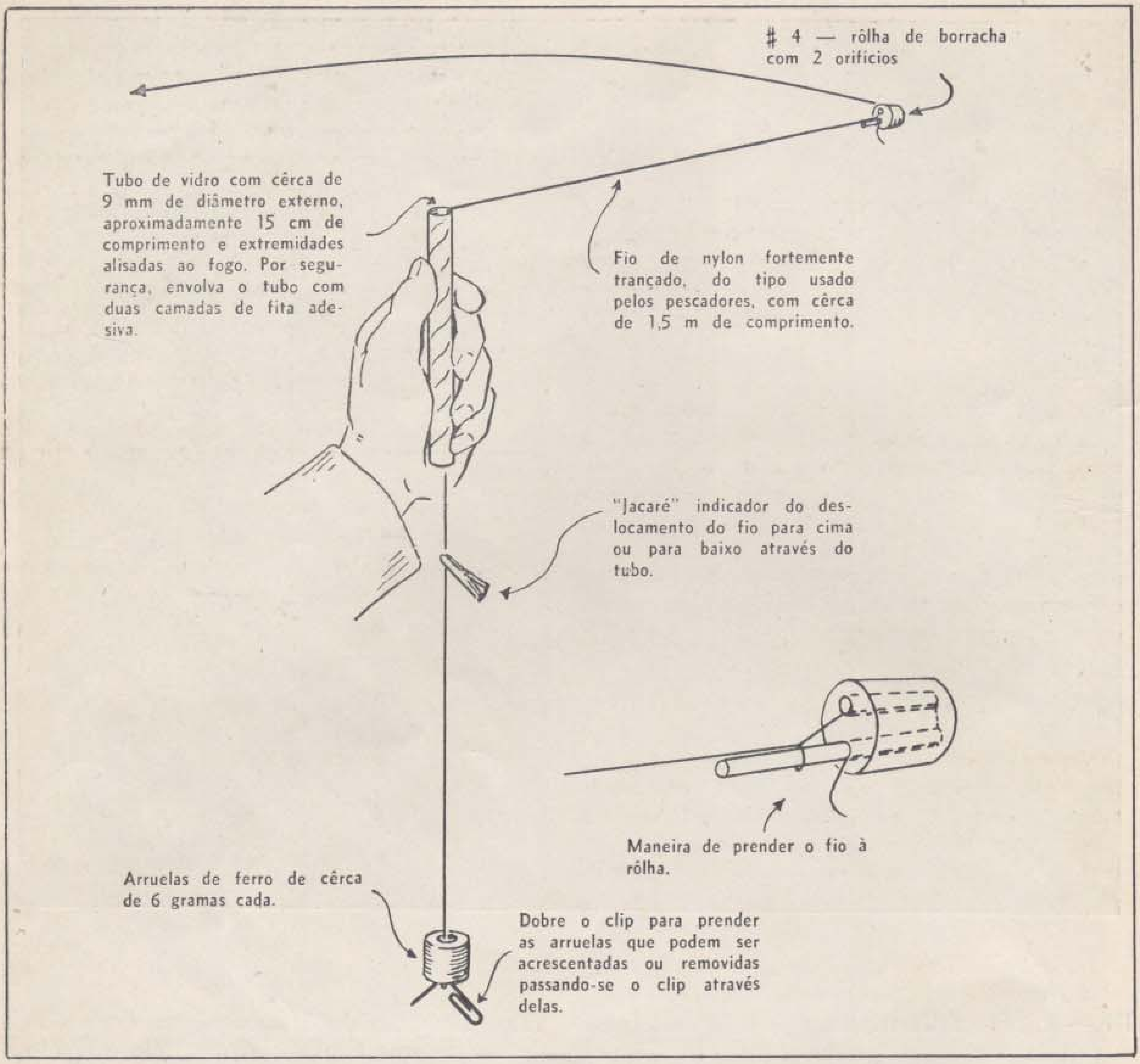


Fig. 13

a massa, e o raio. Descubra, inicialmente, como a fôrça depende da velocidade mantendo constantes a massa e o raio.

Puxe o fio através do tubo, de modo que a rolha gire num círculo de aproximadamente 100 cm de raio. Prenda ao fio um terminal "jacaré", logo abaixo do tubo, o qual, servindo como um índice, permitirá que você mantenha o raio constante, enquanto gira a rôlha. Mantenha suspensas seis ou mais arruelas na extremidade do fio.

Para determinar a frequência de revolução da rôlha, peça a seu companheiro que meça o tempo, enquanto você gira a rôlha e conta o número de revoluções. Calcule o período e a frequência, $f = 1/T$, a partir do tempo e do número de voltas. Repita a experiência com um número maior de arruelas.

Represente gràficamente o período do movimento em função do número de arruelas. Pode você imaginar um modo mais conveniente de representar seus dados? Experimente representar gràficamente a frequência, em vez do período. Tente f^2. Qual é a relação de dependência entre a fôrça centrípeta e a frequência, mantendo-se constantes a massa e o raio?

Para verificar a dependência entre a fôrça centrípeta e a massa girante, você pode colocar duas rôlhas na extremidade do fio. Que espera encontrar? Em que baseia sua suposição?

É mais difícil investigar experimentalmente a dependência entre a fôrça centrípeta e o raio, quando a frequência e a massa permanecem constantes. Pode você sugerir um modo de fazê-lo? Qual é a relação de dependência entre a fôrça centrípeta e a massa, o raio e a frequência?

Você observará que, enquanto a rôlha gira, a porção do fio compreendida entre o tubo e a rôlha não fica perfeitamente horizontal. A fôrça gravitacional exercida sôbre a rôlha, puxa-a para baixo. Pode você perceber por que êste efeito da fôrça gravitacional não modifica a relação entre a fôrça (medida em número de arruelas), o comprimento do fio entre o tubo e a rôlha, e a frequência de revolução?

III — 7. Lei das Áreas Iguais.

Kepler descobriu que os planêtas seguem trajetórias elíticas, e que uma linha reta imaginária, traçada do Sol a um planêta, varreria áreas iguais em intervalos iguais de tempo. Não podemos realizar experiências com os planêtas, mas podemos experimentar com um pêndulo animado de movimento elítico.

A extremidade de um pêndulo que oscile num pequeno arco, move-se de um lado para outro, ao longo de uma linha aproximadamente horizontal. Quando um pêndulo dêste tipo é impulsionado lateralmente, sua extremidade descreve uma elipse. Você descobrirá, nesta experiência, se a extremidade do pêndulo varre, também, áreas iguais em intervalos iguais de tempo.

O pêndulo é, também, nosso aparelho medidor de tempo. Consta êle de um copo cônico de papel, cheio de areia fina (ou sal), suspenso à extremidade de um fio. Uma pequena abertura no fundo do copo permite a vazão a uma taxa razoàvelmente constante. Quando o copo oscila numa elipse, a massa de areia depositada em qualquer arco da elipse, será proporcional ao tempo que leva o copo para percorrer o arco. Cada pedaço de papel disposto ao longo do trajeto do copo, coletará, portanto, uma massa de areia proporcional ao tempo necessário para o copo passar sôbre êste papel (Fig. 14).

Coloque uma grande folha de papel debaixo do pêndulo, centralizada em relação à posição de repouso do pêndulo. Marque no papel a posição de repouso. Ensaie diversas oscilações, usando o copo carregado de areia e estando vedado o orifício de seu fundo, para obter a órbita aproximada, antes da oscilação definitiva. Coloque, então, pedacinhos de papel em volta da órbita, como indica a figura. Faça o pêndulo descrever sua órbita novamente, estando desobturado o orifício. Por que é uma boa idéia fazer com que o copo descreva várias voltas completas?

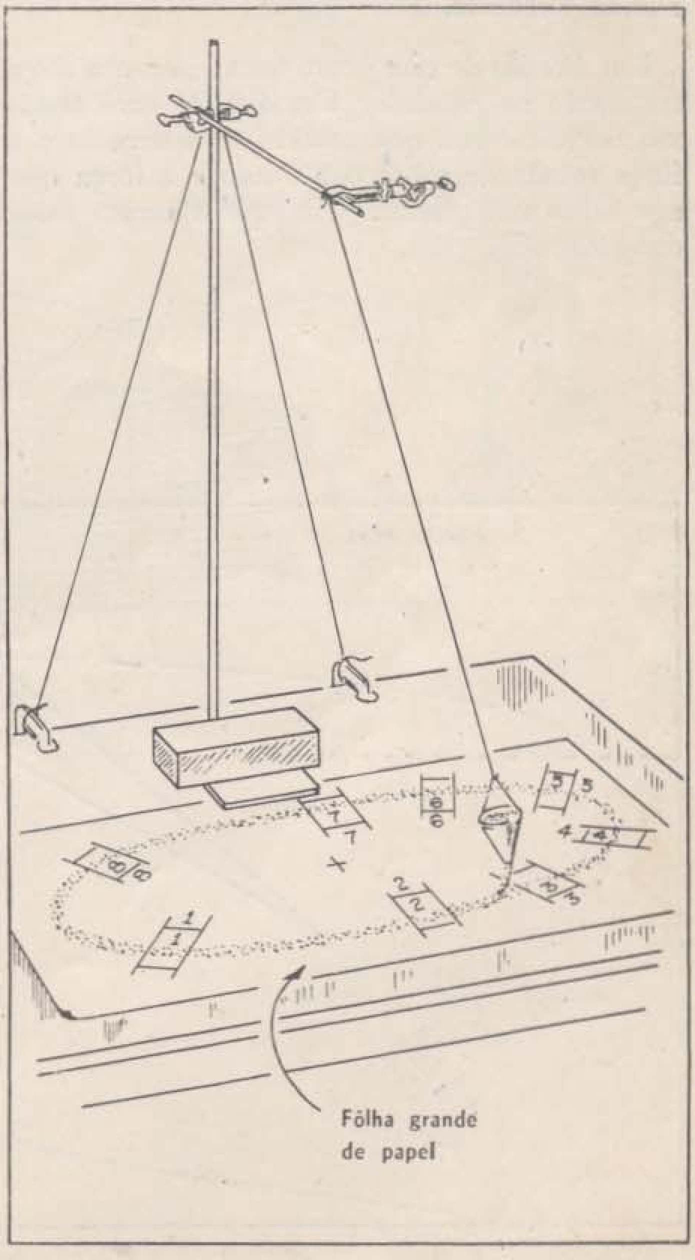


Fig. 14

Ao longo do trajeto elítico, marque com um par de pontos, a posição de cada pedacinho de papel. As linhas traçadas do centro da elipse a um par de pontos (A e B, Fig. 15) e o arco AB da elipse, delimitam a área varrida pelo pêndulo à medida que êle se move ao longo dêste arco.

Quais são os tempos necessários para que o pêndulo atravesse cada pedaço de papel, medidos em têrmos de massa de areia? Qual é a área varrida pelo pêndulo ao atravessar cada pedaço de papel? São varridas áreas iguais em tempos iguais por uma linha que vai da extremidade do pêndulo ao centro da elipse?

Repita a experiência com uma elipse de tamanho diferente.

Em direção de que ponto atua sempre a fôrça resultante no pêndulo? Como pode você testar sua resposta? Em que sentido se assemelham a fôrça resultante sôbre o pêndulo e a fôrça que age sôbre um planêta? Em que diferem essas duas fôrças?

Outro método

Retire o copo de papel e suspenda ao fio uma pequena esfera pesada. Tire uma fotografia de multipla exposição do pêndulo à medida que êle eftua uma oscilação completa (Fig. 16). A câmara é colocada diretamente acima do pêndulo, olhando para baixo, e o disco estroboscópico acionado por motor é colocado diretamente em frente das lentes. A pequena esfera é iluminada por meio de duas lâmpadas de luz intensa. Obtém-se melhor resultado se o pêndulo oscila ao longo de um arco vertical máximo de 10 a 15 graus. Quanto mais comprido fôr o pêndulo, tanto maior será a elipse. Se você não tem o equipamento fotográfico necessário, examine as Figs. 17, 18 e 19, que correspondem a fotografias tiradas usando a montagem indicada na Fig. 15:

A análise destas fotografias é semelhante à descrita na seção anterior. Observe, entretanto, que são iguais os intervalos de tempo entre imagens consecutivas.

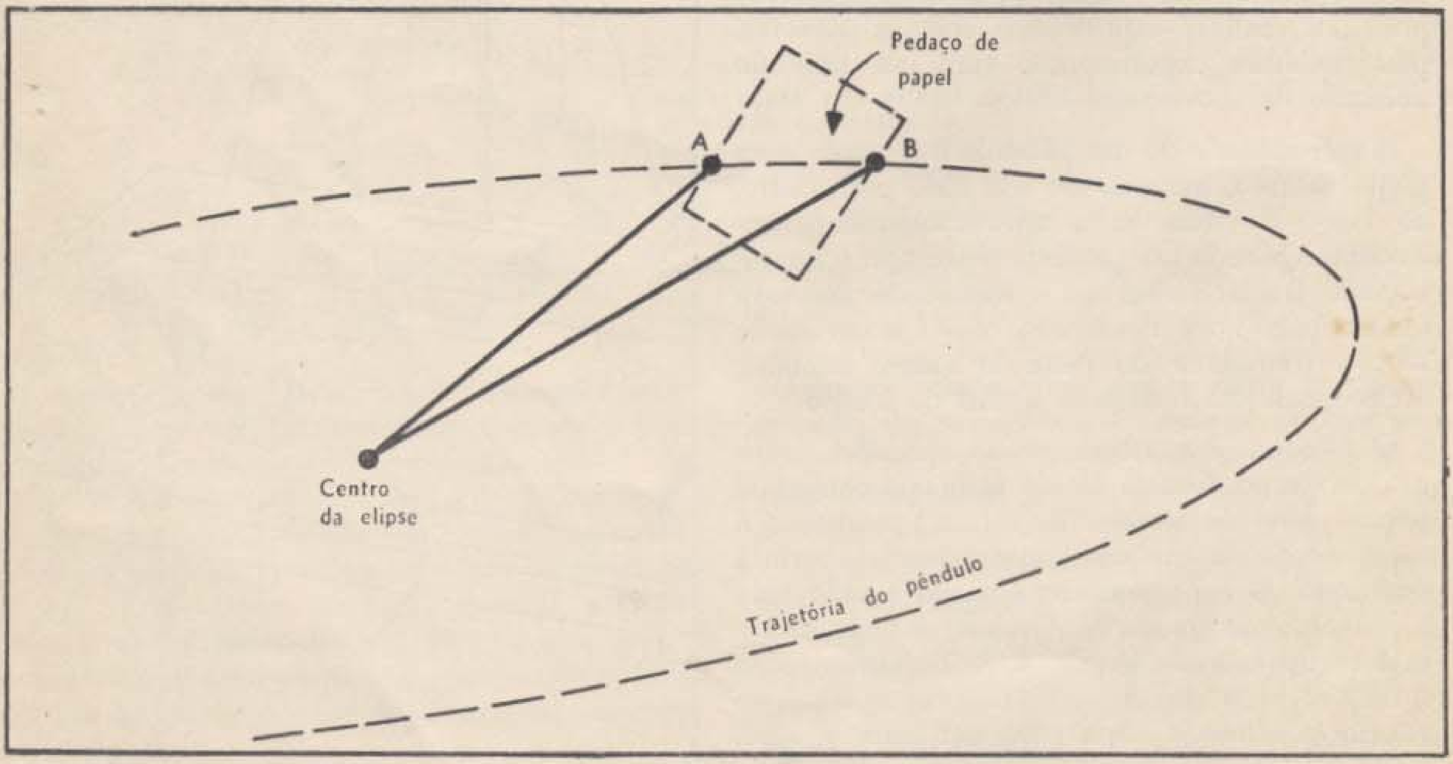


Fig. 15

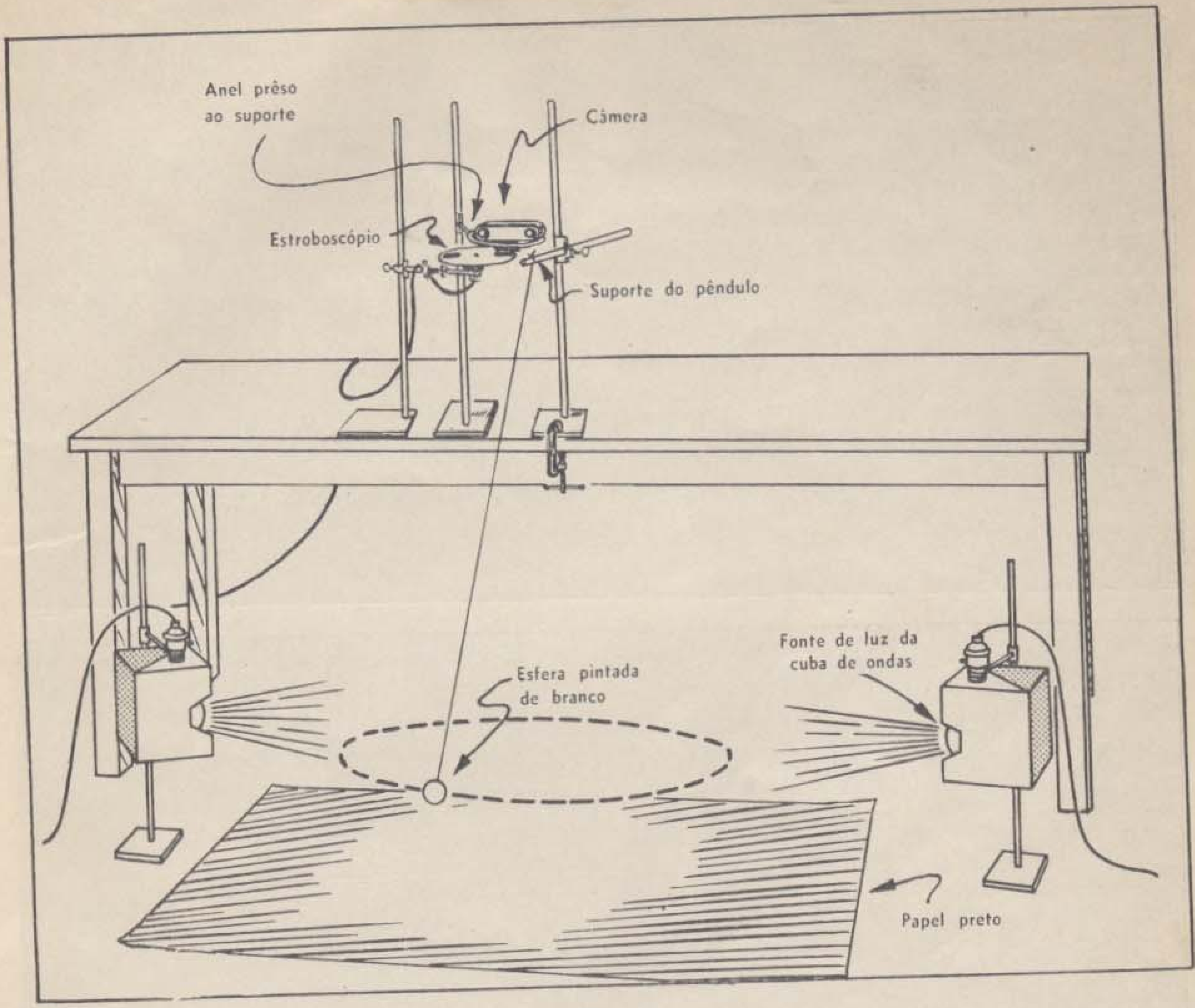

Anel prêso
ao suporte
Câmera
Estroboscópio
Suporte do pêndulo
Fonte de luz da
cuba de ondas
Esfera pintada
de branco
Papel preto

Fig. 16

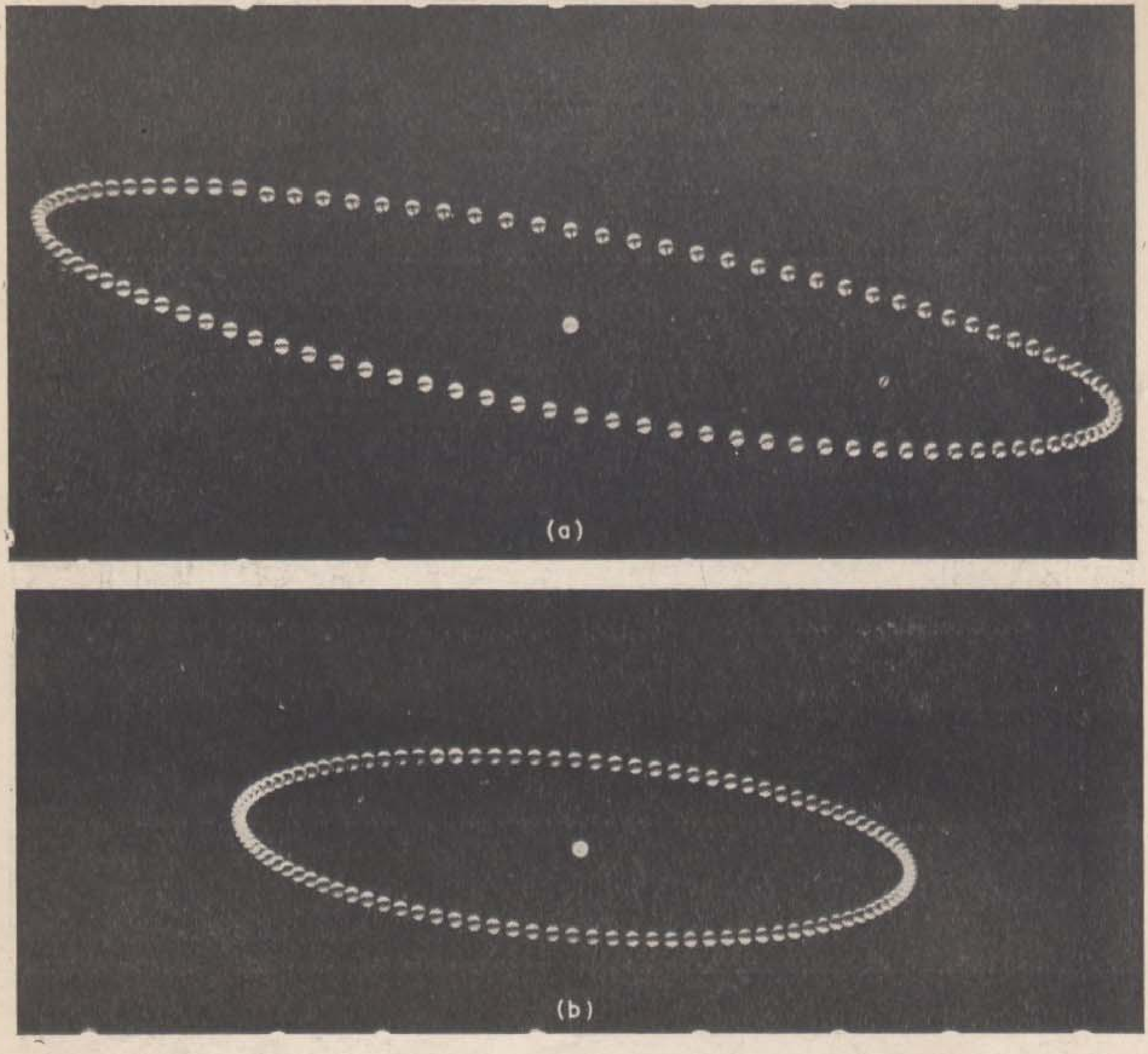


Fig. 17

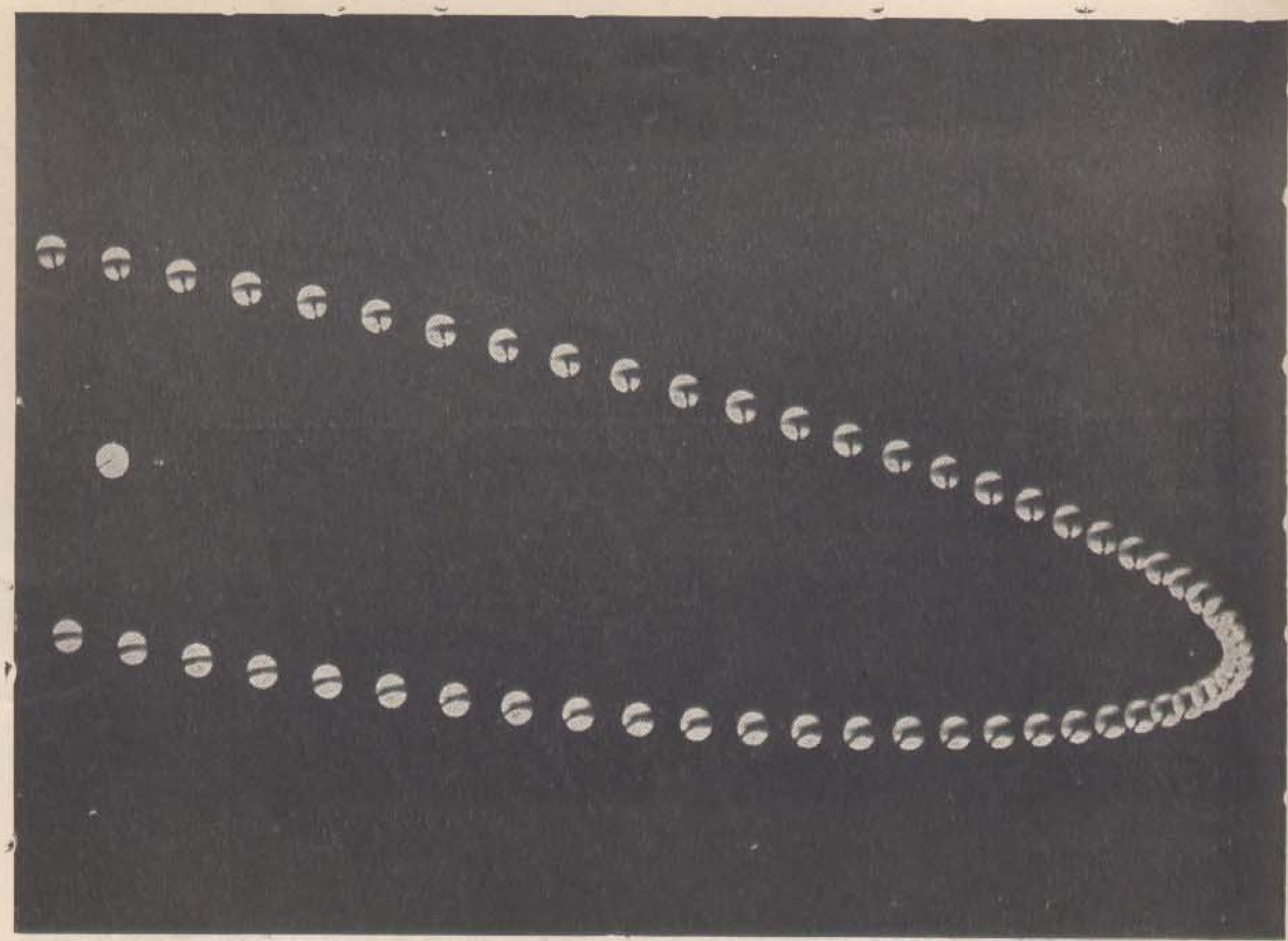


Fig. 18

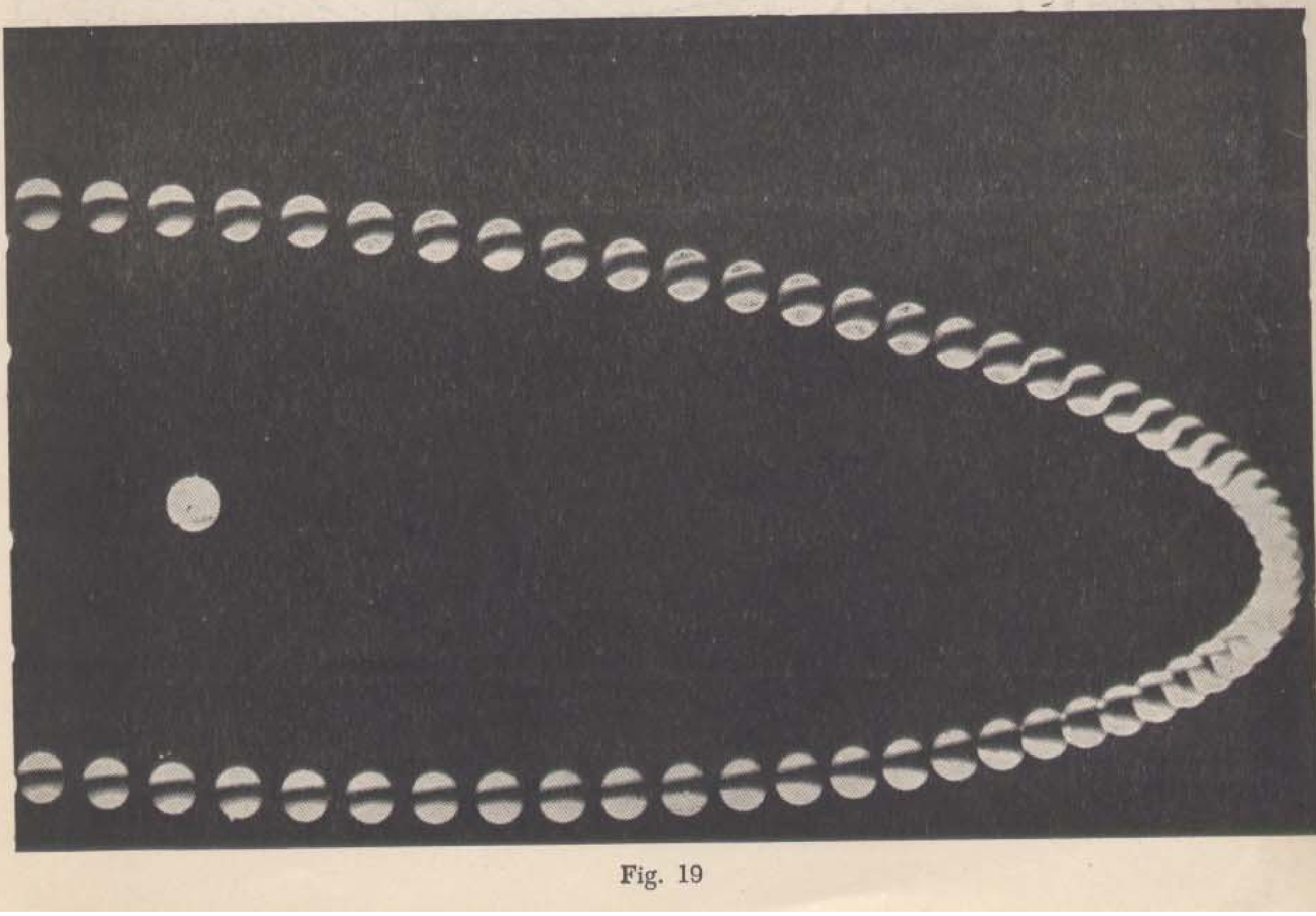


Fig. 19

III — 8. Variações da Quantidade de Movimento numa Explosão.

Dois carrinhos são impelidos para longe um do outro, a partir do repouso, em consequência da ação, entre êles, de uma fôrça súbita – uma "explosão". Como se modificam as quantidades de movimento dos carrinhos?

Para aplicar a fôrça súbita, usamos uma mola que comprimimos e, inopinadamente, descomprimimos (Fig. 20). Solte a mola estando o carrinho em repouso. Que observa você? Experimente-o com diferentes cargas no carrinho. Que conclui você acêrca da componente horizontal da quantidade de movimento do carrinho, antes e depois da explosão?

Coloque um segundo carrinho encostado ao primeiro, de forma que a mola o empurre, quando se distender. Que acontece, agora, quando você solta a mola? Faça esta experiência com várias cargas nos carrinhos. Que diria você, qualitativamente, sôbre as velocidades dos dois carrinhos, quando você os carrega com massas diferentes? Que acha você da relação entre as quantidades de movimento dos dois carrinhos depois da "explosão"?

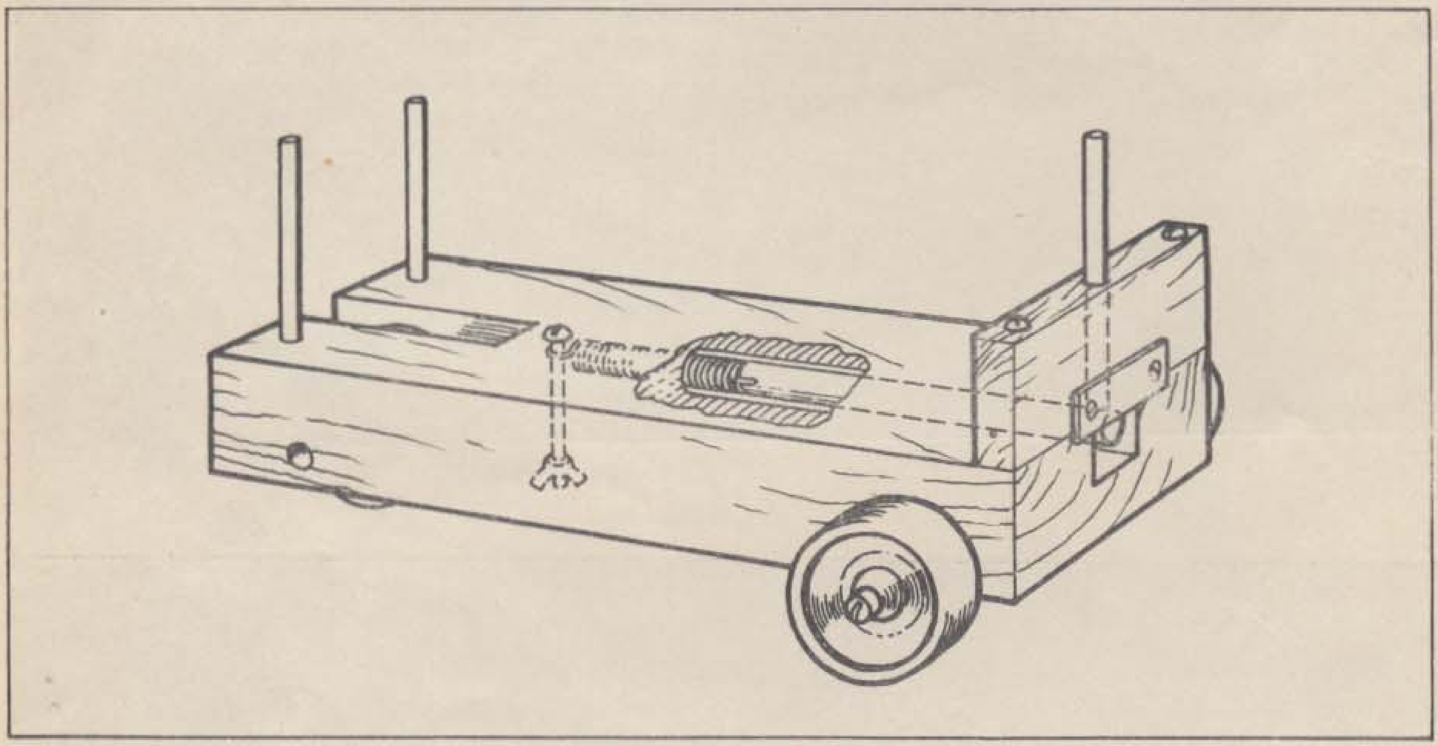


Fig. 20

Para tornar esta experiência quantitativa, necessitamos medir as velocidades e as massas dos dois carrinhos. Não precisamos, entretanto, conhecer suas velocidades em metros por segundo; qualquer unidade servirá. Pode-se determinar suas velocidades em têrmos das distâncias percorridas por ambos os carrinhos durante o mesmo intervalo de tempo. Suponha que fazemos os carrinhos partir exatamente do meio da distância compreendida entre dois aparadores de madeira, e que êles se movimentam com igual velocidade. Ouviremos sòmente um som porque êles atingem os aparadores ao mesmo tempo. Se um dêles se movimentar mais ràpidamente do que o outro, alcançará antes a extremidade, e ouviremos dois ruídos distintos, ao invés de um. Podemos, entretanto, deslocar o ponto de partida, de forma que o carrinho mais rápido tenha que percorrer uma distância maior, antes de alcançar o aparador. Podemos determinar, depois de algumas tentativas, uma posição a partir da qual ambos os carrinhos levarão o mesmo tempo para se deslocar até os aparadores. As distâncias percorridas pelos carrinhos, a partir das posições de repouso, são indicadas, na Fig. 21, como x_1 e x_2. Os carrinhos percorrem estas distâncias no mesmo intervalo de tempo t e, se êles se deslocam com velocidade constante, podemos escrever para suas velocidades:

$$v_1 = \frac{x_1}{t}; \qquad v_2 = \frac{x_2}{t}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

As velocidades são, portanto, proporcionais às distâncias percorridas no mesmo intervalo de tempo.

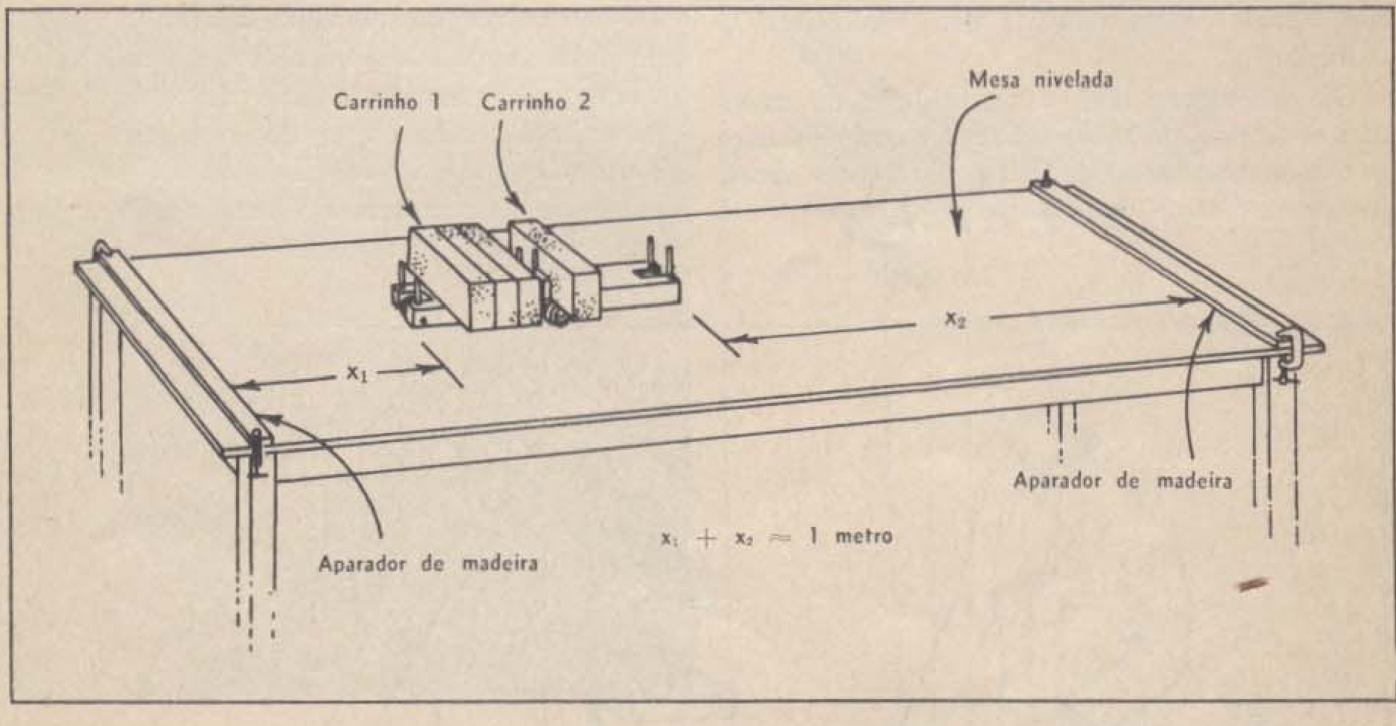


Fig. 21

Valendo-se dêste método de deslocar o ponto de partida para a obtenção de tempos iguais, determine a relação entre as quantidades de movimento de seus carrinhos depois da explosão. Qual é a modificação na quantidade de movimento de cada carrinho como consequência da explosão? Experimente-o com diferentes combinações de massas nos carrinhos. Pode você inferir algumas conclusões relativamente à quantidade de movimento total do sistema depois da explosão comparada com quantidade de movimento total antes da explosão?

Qua aconteceria à quantidade de movimento total de seus carrinhos se, ao invés de uma mola, você colocasse entre êles um bloco de dinamite, e os pedaços dos carrinhos se espalhassem em tôdas as direções? (Não o faça!)

III — 9. O Carrinho e o Tijolo.

Que acontece quando se faz cair um tijolo sôbre um carrinho em movimento, quando o carrinho passa por baixo do tijolo? Pendure um tijolo de tal forma que o carrinho passe exatamente por baixo dêle, sem tocá-lo (Fig. 22). O tijolo suspenso deverá estar situado horizontalmente e imóvel. Puxe o carrinho para trás, empurre-o, e solte o tijolo quando o carrinho passar por baixo dêle. Que acontece? Tente a experiência de novo, usando o carrinho carregado com números diferentes de tijolos. Qual é o efeito do aumento de massa do carrinho, carregando-o com tijolos?

Para fazer medidas precisas, registre o movimento em ambos os casos, para o carrinho carregado e vazio. Uma vez que você quer ter o movimento tão uniforme quanto possível, antes e depois do tijolo colidir com o carrinho, faça o carrinho partir com uma velocidade razoàvelmente elevada.

Considerando as fitas e as massas do carrinho e do tijolo, calcule a variação da quantidade de movimento do carrinho e a variação da quantidade de movimento horizontal do tijolo. Você pode calcular essas variações das quantidades de movimento em kg $\times$ m por "tique". Como se confrontam elas? Qual é a quantidade de movimento horizontal total do sistema carrinho — tijolo antes e depois dêles interagirem? É a quantidade de movimento conservada?

Qual é o impulso horizontal aplicado ao tijolo que cai? Examinando suas fitas, tente avaliar quanto tempo durou a interação. Pode você fazer uma avaliação grosseira da fôrça horizontal aplicada ao tijolo que cai? Compare esta fôrça com a fôrça exercida pelo tijolo sôbre o carrinho?

Que aconteceu com a quantidade de movimento vertical do tijolo? Faria alguma diferença se o tijolo fôsse sôlto de alturas diferentes, desde que não fôssem danificados o carrinho ou a mesa?

Que aconteceria se, ao invés de fazer cair o tijolo, você suspendesse um funil cheio de areia acima da mesa, e deixasse a areia escoar-se para dentro de uma caixa no carrinho, quando êste passasse por baixo do funil? Que aconteceria à velocidade do carrinho se, ao invés de deixar a areia escoar-se para dentro dêle, você a colocasse, inicialmente, dentro dêle e a deixasse escoar-se para fora?

III — 10. Uma Colisão em duas Dimensões.

Investigamos, anteriormente, as quantidades de movimento de corpos que colidem, movendo-se ao longo de uma simples linha reta. Que acontece quando, depois da colisão, os dois corpos tomam direções diferentes? Para descobri-lo, faremos uma bola de aço rolar ao longo de uma rampa, de forma que ela colida levemente com uma outra bola de aço, de igual tamanho, fazendo-a saltar de um suporte situado perto da extremidade da mesa (Fig. 23). A partir de suas massas e velocidades, calcularemos, então, as quantidades de movimento.

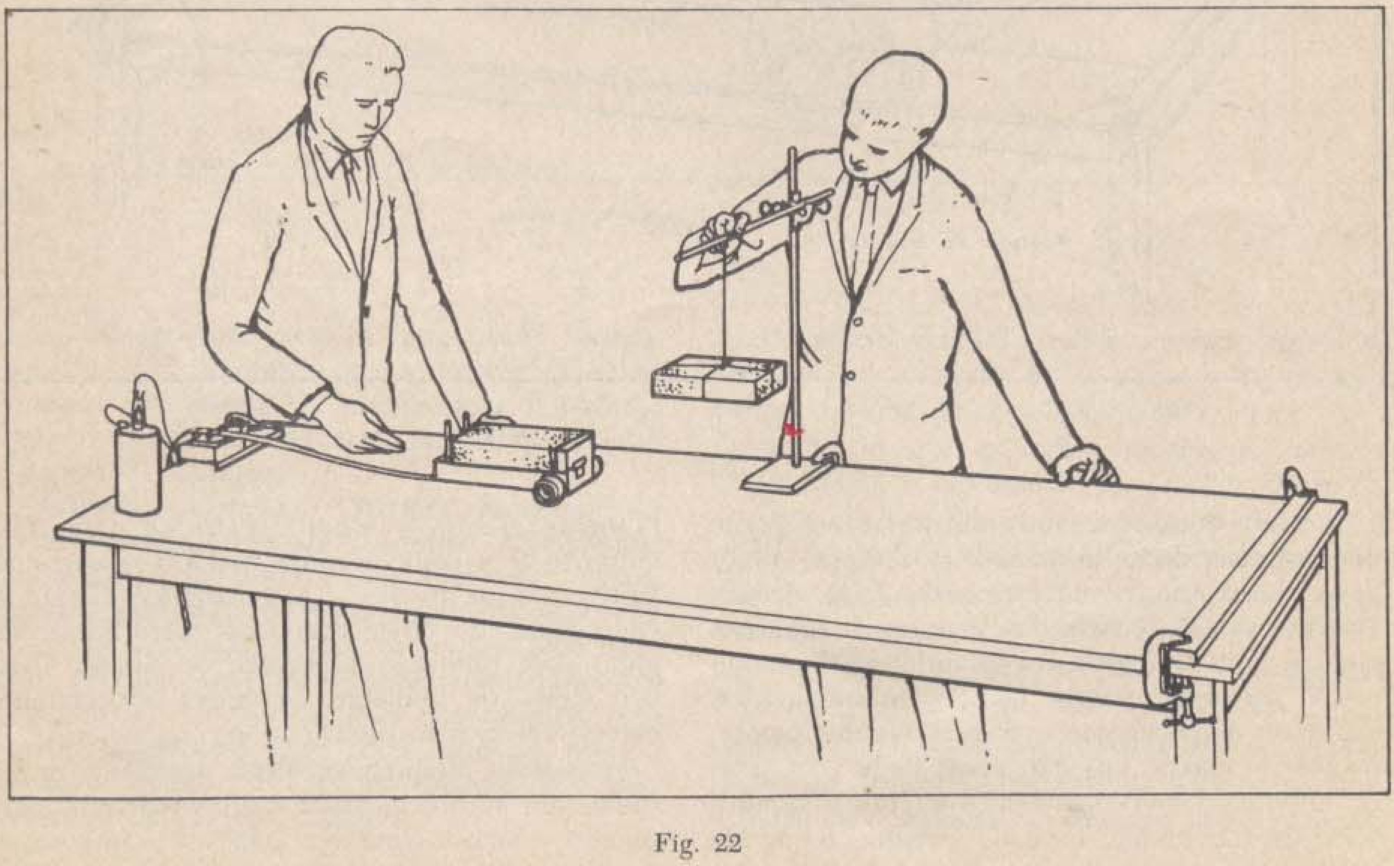


Fig. 22

Para determinar as velocidades das esferas, valer-nos-emos do que aprendemos sôbre o movimento dos projéteis (veja Cap. 21, Seção 21-3). Sabemos que objetos projetados da extremidade de uma mesa, com diferentes velocidades horizontais, levam o mesmo tempo para chegar ao solo. Desprezando a resistência do ar, a componente horizontal da velocidade dêsses objetos permanece constante, e, portanto, a distância que êles percorrem horizontalmente é proporcional a sua velocidade horizontal. Pode-se aproveitar êste fato para medir as velocidades das esferas após elas terem colidido.

Para dar velocidade inicial a uma das esferas, faça-a rolar ao longo de uma régua com canaleta (Fig. 23). A esfera a ser atingida repousa

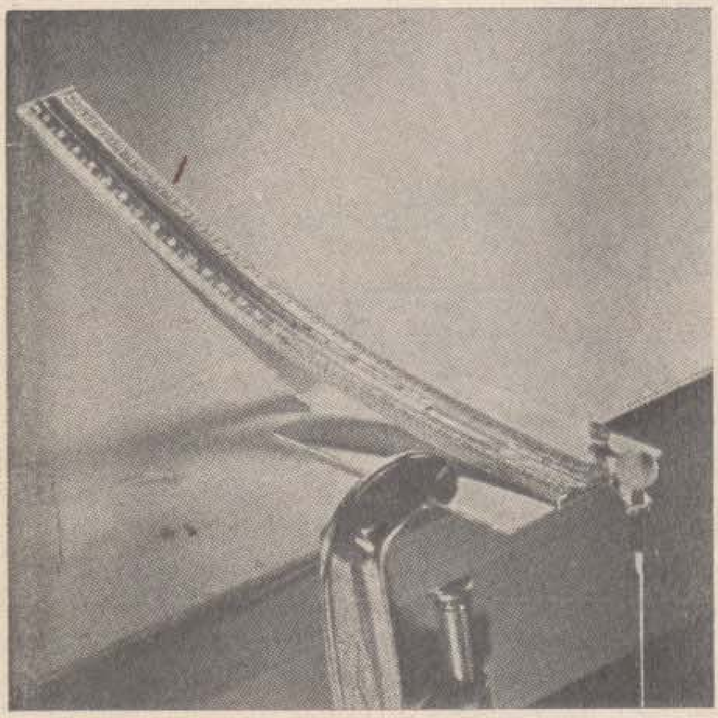


Fig. 23

sôbre uma ligeira depressão na extremidade de um parafuso. Coloque o parafuso diretamente no trajeto da esfera incidente, à distância de um raio da extremidade da régua. Regule a altura do parafuso, de forma que a esfera incidente passe ligeiramente acima do tôpo do parafuso ao rolar ao longo da rampa, a partir de determindo ponto sôbre a régua (25 cm constitui uma boa escolha).

Determine, então, usando o fio de prumo, o ponto, no chão, diretamente abaixo do parafuso.

Junte, com fita adesiva, quatro fôlhas de papel de seda ou papel vegetal, de forma a ter uma única fôlha grande. Certifique-se de que as fôlhas não se superpõem. Faça o mesmo com quatro fôlhas de papel carbono. Coloque o papel carbono no chão, com o lado do carbono para cima, e o papel vegetal sôbre êle; ponha pesos sôbre o papel para mantê-lo no lugar. O prumo deve cair sôbre a metade do lado mais curto do papel (Fig. 24); marque êste ponto. Faça a esfera de aço rolar pela régua, a partir

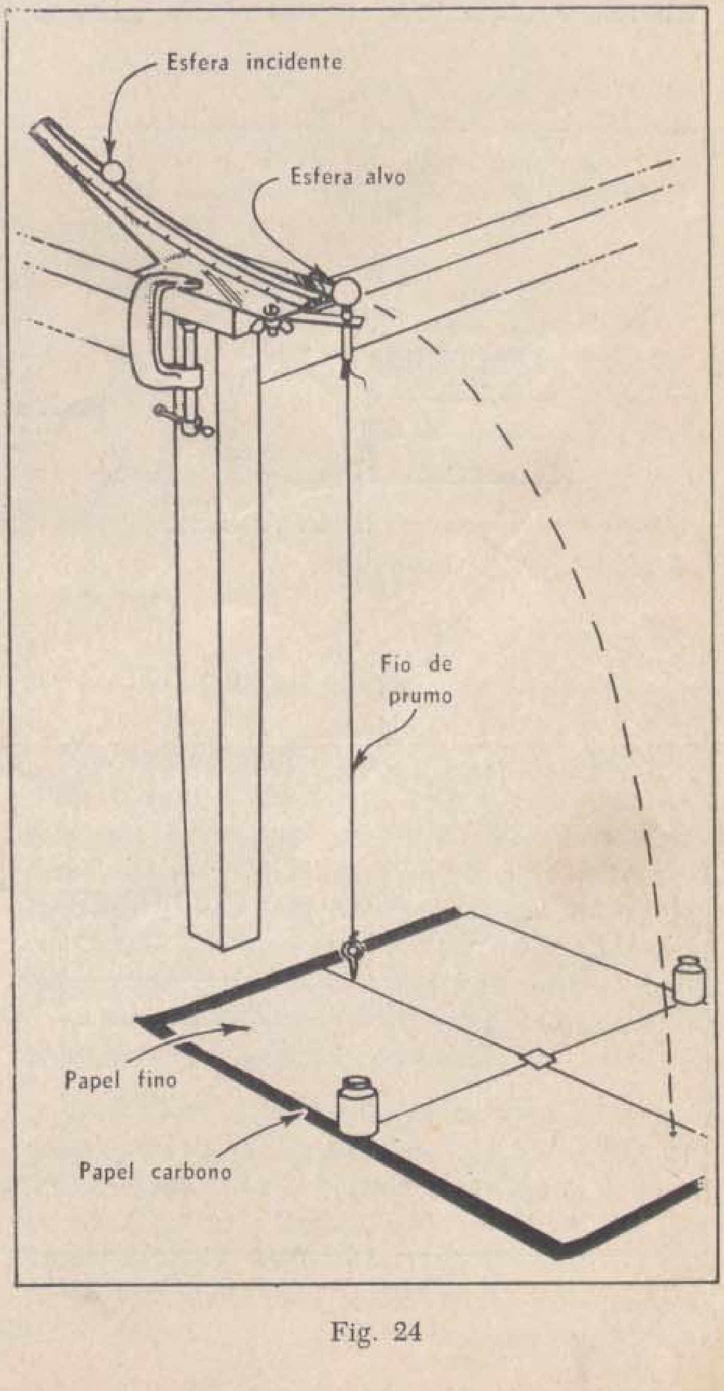


Fig. 24

da marca de 25 cm, dez ou quinze vêzes, e trace um círculo em tôrno da distribuição dos pontos obtidos sôbre o papel. Até que ponto é a velocidade inicial sempre a mesma?

Se colocarmos, agora, no parafuso, a esfera a ser atingida, e fizermos rolar uma outra esfera ao longo da rampa, as colisões ocorrerão antes que a esfera incidente esteja sôbre o parafuso. A esfera incidente, retardada pela colisão, saltará, então, da extremidade da rampa. Para impedir isto, precisamos colocar a esfera-alvo mais longe da rampa. A posição exata da esfera alvo depende do tipo de colisão que desejamos (mais ou menos excêntrica). Para uma colisão frontal, o parafuso que sustenta a esfera-alvo estará a três raios da rampa [Fig. 25 (a)] e à altura na qual você o ajustou anteriormente. (Percebe por quê?). Para uma colisão leve, o parafuso deve estar a uma distância ligeiramente maior que um raio a partir da rampa [Fig. 25 (b)]. Tais colisões são pouco frequentes e, por esta razão, convencionalmente, colocamos o parafuso a cêrca de 2,5 raios a partir da rampa [Fig. 25 (c)].

Marque o ponto no papel diretamente abaixo desta nova posição do parafuso. Tendo equilibrado uma bola de aço no parafuso, tente várias colisões, fazendo rolar a bola incidente da marca de 25 cm na régua. A fim de modificar o ponto de colisão, desloque o parafuso de

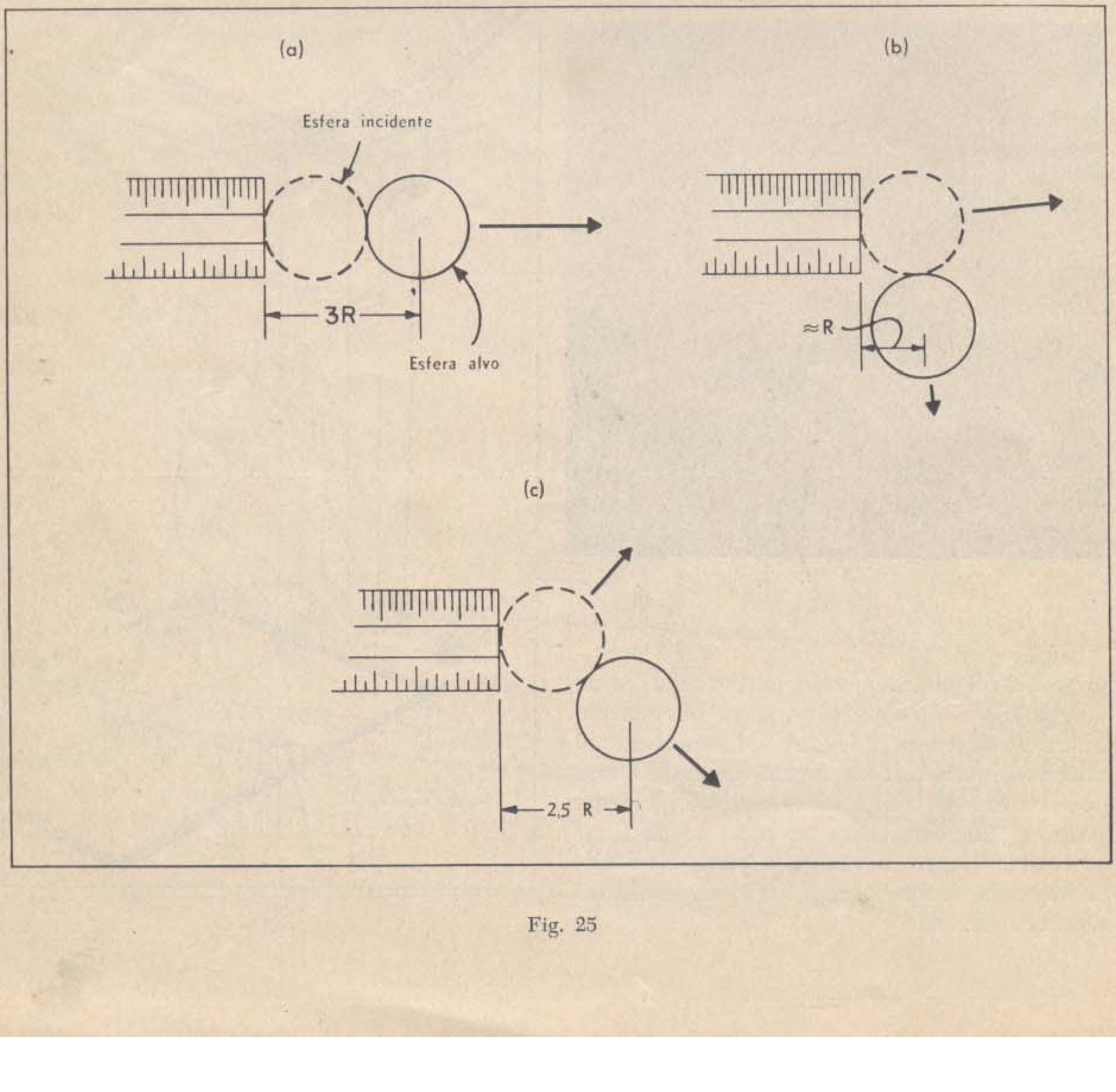


Fig. 25

uma pequena distância, paralela à extremidade da rampa. Um círculo numerado em volta de cada impacto no papel e de cada ponto de partida da bola-alvo, ajudá-lo-ão a identificar as diversas marcas no papel.

Desenhe no papel os vetores que representam as velocidades das bolas depois da colisão. A posição da bola incidente no momento do impacto pode ser determinada com o auxílio da Fig. 26.

Uma vez que as massas das bolas são iguais, os vetores velocidade representam as quantidades de movimento das bolas. Adicione gràficamente, no seu papel, os dois vetores quantidade de movimento, colocando a origem do vetor quantidade de movimento da bola alvo na extremidade do vetor quantidade de movimento da bola incidente.

Compare o vetor soma das duas quantidades de movimento finais com a quantidade de movimento inicial da bola incidente. É a quantidade de movimento conservada nestas interações? Compare a soma aritmética dos dois módulos das quantidades de movimento depois da colisão com o módulo da quantidade de movimento inicial da bola incidente.

Repita a experiência, usando duas esferas de massas desiguais, mas de mesmo tamanho. Qual delas usaria você como esfera incidente? Compare o vetor soma das velocidades finais com a velocidade inicial. Como pode você converter os vetores velocidade em vetores quantidade de movimento, neste caso, em que as massas das duas esferas não são iguais? Compare o vetor soma das quantidades de movimento finais com a quantidade de movimento inicial.

Compare entre si as componentes das quantidades de movimento finais das duas bolas, segundo uma direção em ângulo reto com a quantidade de movimento inicial. Que verifica você?

°

Para cada colisão que envolve massas iguais, calcule o *quadrado* das velocidades antes e depois da colisão. Compare-os. Sugere isto que algo mais, além da quantidade de movimento, permanece constante? Faça os mesmos cálculos para as colisões de massas desiguais. Permanece constante o quadrado das velocidades? Para massas desiguais, multiplique os quadrados das velocidades pelas massas respectivas e confronte os valôres obtidos. Na sua opinião, o que mais permanece constante além da quantidade de movimento?

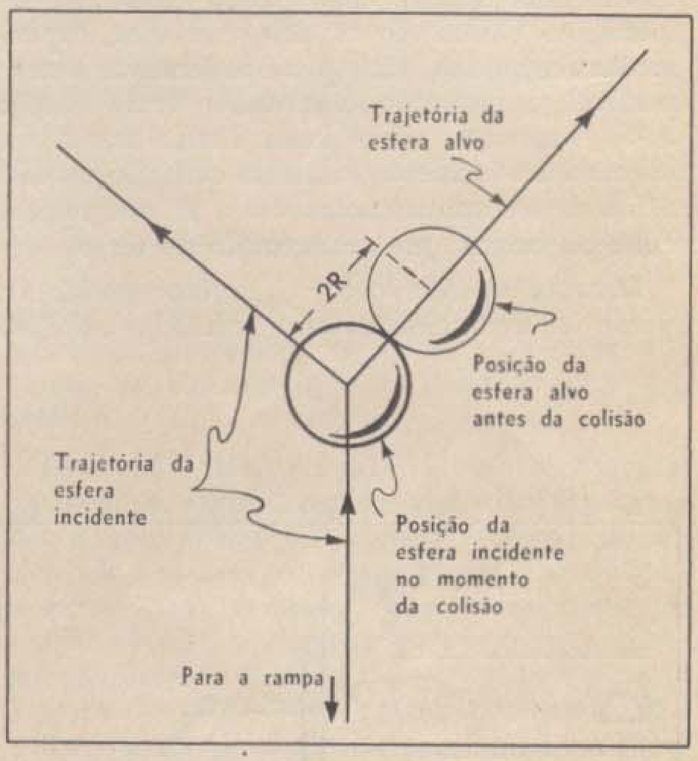


Fig. 26

III — 11. Colisões Lentas.

Nas experiências já realizadas, o tempo durante o qual se davam as colisões era tão curto, que era impossível examinar, detalhadamente, como as velocidades se modificavam durante as colisões. Você pode analisar apenas as mudanças finais. Na presente experiência, você estudará, qualitativamente, colisões muito lentas entre dois carrinhos, e descobrirá o que acontece enquanto êles estão interagindo.

Você usará dois carrinhos carregados e equipados com molas aparadoras "macias" (Fig. 27), e examinará uma interação semelhante à descrita no Cap. 24, Seção 24-5. A fôrça de interação, naquele caso, era zero quando a separação era maior que a distância d, e era constante quando a separação era menor que d. Com as molas aparadoras nos carrinhos, a interação se inicia quando os aparadores entram em contacto, e os carrinhos estão separados pela distância *d* (Fig. 27). À medida que os carrinhos se aproximam durante a interação, a fôrça aumenta, em vez de permanecer constante como a fôrça descrita no texto. Os resultados globais, entretanto, são muito próximos, ainda que seja difícil uma análise matemática cuidadosa da interação. Utilizando os dois carrinhos, experimente reproduzir, tão aproximadamente quanto possível, a interação descrita no texto (Seção 24-5), fazendo-a muito lenta. Ponha três tijolos no carrinho incidente e um no carrinho parado, a fim de ter aproximadamente a mesma relação entre as massas que no exemplo do texto.

Durante a interação, o carrinho incidente, perde energia cinética e o carrinho atingido ganha. Que pode você dizer sôbre a energia cinética total, quando os carrinhos estão à distância mínima um do outro? Como se confrontam as velocidades dos carrinhos quando estão separados pela distância mínima?

Que acontece em colisões com carrinhos igualmente carregados?

*

Como são afetados o tempo de interação e a distância mínima de separação por: (a) modificação na massa total nos carrinhos; (b) mudança da velocidade do carrinho incidente?

Tente colisões com carrinhos carregados, estando ambos, inicialmente, em movimento.

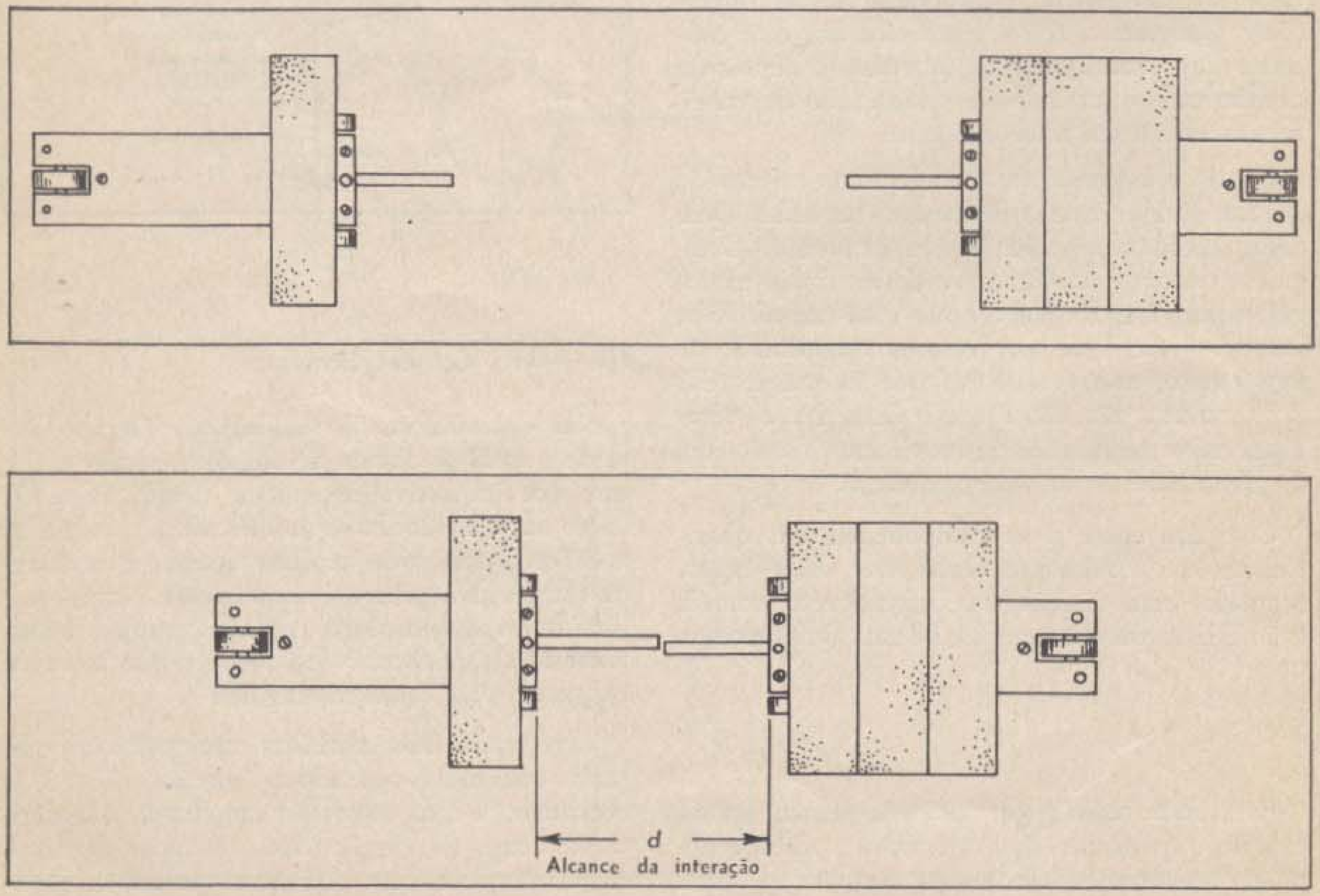


Fig. 27

III — 12. Variações na Energia Potencial.

Suspenda a uma mola prêsa num suporte a massa de, aproximadamente, um quilograma. Levante a massa alguns centímetros acima de sua posição de equilíbrio, e solte-a. No alto e na parte inferior de seu movimento, ela está em repouso. Quando a massa está na extremidade inferior da trajetória, sua energia está armazenada na mola. No tôpo da trajetória, sua energia está armazenada no campo gravitacional. Compare a variação da energia gravitacional com a variação da energia potencial armazenada na mola.

Você pode determinar a variação da energia potencial da mola quando ela é distendida de uma distância $\triangle x$, de x_1 a x_2, calculando o trabalho realizado para distendê-la de x_1 a x_2 (Fig. 28). A variação da energia potencial gravitacional, quando a massa cai desta mesma distância $\triangle x$, pode ser determinada calculando-se o trabalho realizado para suspender a massa da distância $\triangle x$. Você pode, então, comparar a perda de energia gravitacional quando a massa cai, a partir do repouso até seu ponto mais baixo, com a energia ganha pela mola nesse mesmo trajeto.

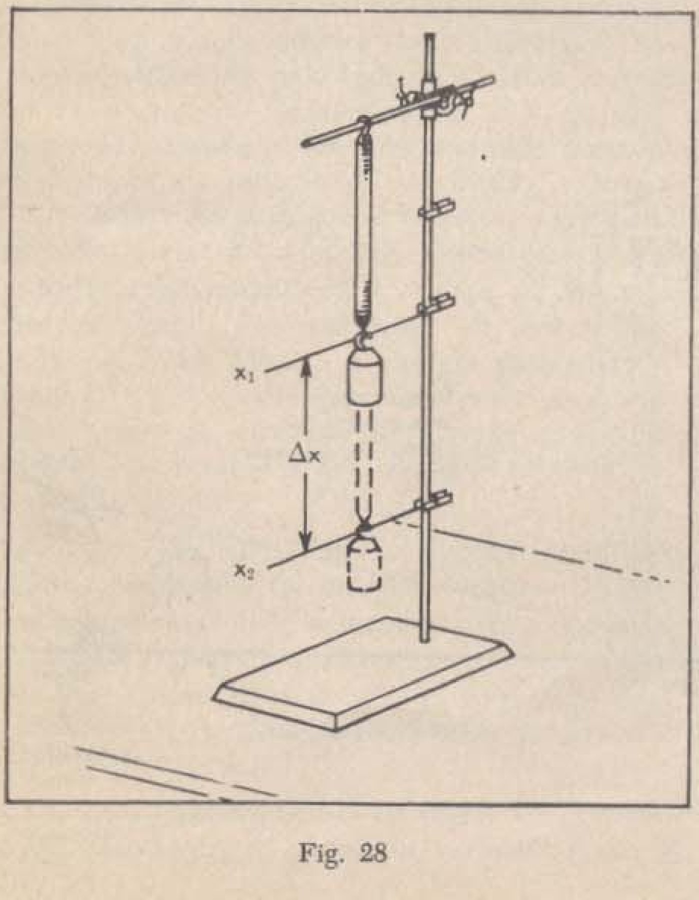


Fig. 28

Para determinar a energia potencial da mola, verifiquemos, inicialmente, como se relaciona a distensão x da mola com a fôrça que a distente. Suspenda massas conhecidas, na extremidade da mola, até um máximo de aproximadamente 1,5 kg, e verifique a distensão x, em metros, em *função* da fôrça F, em newtons. Faça um gráfico de x em função de F. Dentro do limite de suas medidas, é F proporcional a x, para esta mola?

Se o gráfico que você obteve é uma linha reta, determine, a partir de sua inclinação, a constante da mola, $k = \dfrac{F}{x}$, e escreva a função energia potencial da mola, isto é, a equação da energia armazenada na mola, em função da distensão. Como pode você determinar a energia potencial armazenada na mola, para certa distensão, se não obteve uma linha reta em seu gráfico?

Pendure, então, a massa de um quilograma na mola, e mantenha-a em sua mão, de forma que a mola se distenda aproximadamente 20 cm além de seu comprimento natural quando está suspensa sem a massa. Use prendedores de roupa, presos ao suporte, para marcar a extremidade inferior da mola descarregada e o ponto a partir do qual você deixa cair a massa. Solte-a e observe até que distância cai. Ponha um prendedor de roupa no suporte para marcar o ponto mais baixo da queda. Abandone a massa diversas vêzes até que você localize precisamente o ponto mais baixo da vibração.

Calcule a perda de energia potencial gravitacional e o ganho de energia potencial da mola, quando a massa cai. Compare essas duas quantidades de energia. Repita a experiência acima, soltando a massa de um ponto a aproximadamente 25 cm da extremidade inferior da mola descarregada. Repita a experiência com uma massa de 0,5 kg, e calcule a variação da energia potencial gravitacional e da energia potencial da mola, quando a massa cai de um ponto situado aproximadamente 10 cm abaixo da extremidade da mola descarregada.

É a energia conservada nestas interações entre as massas e a mola? São elas interações elásticas?

Quanto vale a soma das duas energias potenciais no instante em que a massa de um quilograma passa pela posição média de sua trajetória? Como se confronta ela com a energia da massa? Como você explica isto? Como poderia você testar sua explicação?

*

Se dispuser de tempo, faça um gráfico da soma das duas energias potenciais em função da distensão da mola. Que pode você deduzir dêste gráfico?

III — 13. A Energia de um Pêndulo Simples.

Num pêndulo em oscilação, a energia cinética é transformada em energia potencial e vice-versa. Podemos investigar esta transformação usando uma fita de registrar tempo, prêsa a um pêndulo, para medir a velocidade em diferentes posições, durante a oscilação. A fim de comparar a energia cinética e a energia potencial, devemos tomar o cuidado de expressá-las nas mesmas unidades — por exemplo, em joules.

Suspenda um corpo pesado, tal como um tijolo, numa corda comprida, presa num suporte rígido. O pêndulo deverá ter, no mínimo, 2 metros de comprimento. Meça o comprimento do pêndulo a partir do ponto de suspensão ao centro do tijolo. Coloque um marcador de tempo aproximadamente ao nível do ponto mais baixo da trajetória (Fig. 29). Puxe o tijolo para o lado, não mais do que 15° a partir da vertical, e mantenha-o nesta posição com um barbante, de forma que a linha de ação da fôrça do barbante passe pelo centro de gravidade do tijolo.

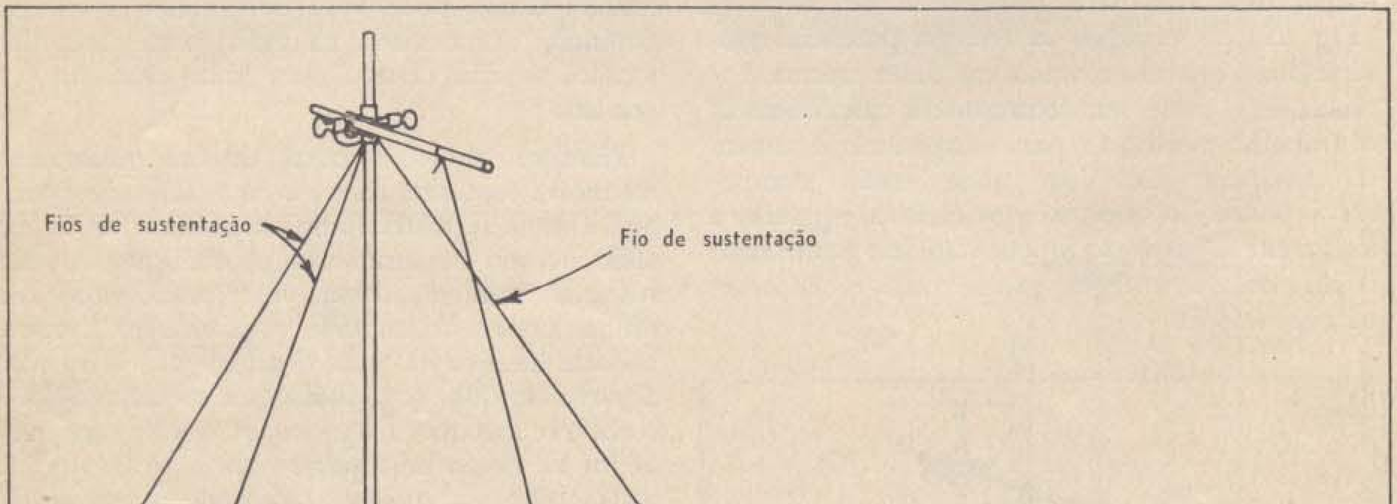


Fig. 29

Faça funcionar o marcador de tempo e solte o barbante. O tijolo oscilará, puxando a fita e registrando suas posições em intervalos sucessivos de tempo. (Peça ao seu companheiro que segure o tijolo imediatamente *depois* que êle começar a voltar, no fim de sua primeira oscilação).

Levando em consideração os dados registrados na fita e a calibração do marcador de tempo em segundos, faça um gráfico da distância percorrida pelo tijolo em função do tempo, medindo a distância a partir da posição de equilíbrio do pêndulo.

Valendo-se dos dados de seu gráfico, determine a velocidade do tijolo para, no mínimo, oito posições diferentes. Desde que você conheça a velocidade e a massa do tijolo, você pode calcular a energia cinética do pêndulo em qualquer posição. (Quais são as unidades de energia se você usa o tijolo como unidade de massa? Quais são elas se você mede a massa do tijolo em quilogramas?). Faça um gráfico da energia cinética do pêndulo em função da posição. Em que ponto é mínima a energia cinética? E em que ponto é máxima?

Como varia a energia potencial com a posição do tijolo? Para descobri-lo, precisamos conhecer as alturas até as quais o tijolo foi erguido. Existe uma relação simples entre a distância horizontal percorrida pelo tijolo e a altura à qual êle foi levantado. Chamando de L o comprimento do pêndulo, x seu deslocamento horizontal a partir da posição de equilíbrio, e h sua altura acima da posição de repouso, você pode demonstrar que $h = x^2/2\ L$, desde que x, seja pequeno relativamente a L (Veja as observações na fórmula dos fabricantes de lentes, Parte II, pg. 373). Qual é a energia potencial do pêndulo nas posições para as quais você calculou a energia cinética? Represente a energia potencial no mesmo gráfico no qual representou a energia cinética.

Compare as variações da energia potencial com as variações da energia cinética. Represente, em seu gráfico, a soma das duas energias. Está você seguro de que usou as mesmas unidades para ambas? Que conclusão você pode tirar relativamente à soma das energias potencial e cinética do pêndulo?

Por que restringimos a oscilação do pêndulo a 15° ou menos, a partir da vertical? Poderia você realizar esta experiência com oscilações maiores? Como determinaria, neste caso, a energia potencial? Esperaria você que, neste caso, a soma das duas energias fôsse constante?

Por que foi desnecessário medir a massa do tijolo a fim de comparar as energias cinética e potencial?

III — 14. Uma Colisão Frontal.

A finalidade desta experiência é investigar as variações de quantidade de movimento e de energia cinética, resultantes de uma colisão entre um carrinho em movimento e um carrinho parado. A Fig. 30 mostra a disposição do aparêlho.

Coloque o carrinho parado perto da metade da mesa, de forma que ambos os carrinhos possam percorer distâncias suficientemente longas, e se possa obter medidas precisas de suas velocidades, antes e depois da colisão. Registre o movimento nas fitas, usando combinações diferentes de massas nos carrinhos, mas tenha sempre, no mínimo, um tijolo no carrinho mais leve. Por que é necessário ter no carrinho inicialmente em movimento uma massa igual ou maior que a massa no carrinho parado?

Faça um gráfico da velocidade de cada carrinho em função do tempo. Considerando o gráfico, quais são as velocidades dos carrinhos imediatamente antes e imediatamente depois da colisão? Ainda a partir do gráfico pode você avaliar o tempo de duração da colisão?

Determine, agora, a quantidade de movimento de cada carrinho antes e depois da colisão. Compare a soma das quantidade de movimento dos carrinhos antes da colisão com a soma das quantidades de movimento depois da colisão. Qua conclui você? Em que unidades expressou você as quantidades de movimento?

Calcule a energia cinética dos carrinhos antes e depois da colisão. Permanece constante a energia cinética? O que poderia ser causa de perdas na energia cinética?

Se dispuzer de tempo, repita a experiência removendo a mola aparadora e prendendo um objeto macio, como um apagador de quadro negro, à frente de um dos carrinhos Registre o movimento nas fitas, e calcule a quantidade de movimento e a energia cinética do sistema antes e depois da colisão. Que indicam seus resultados relativamente à conservação da quantidade de movimento? E relativamente à conservação da energia cinética?

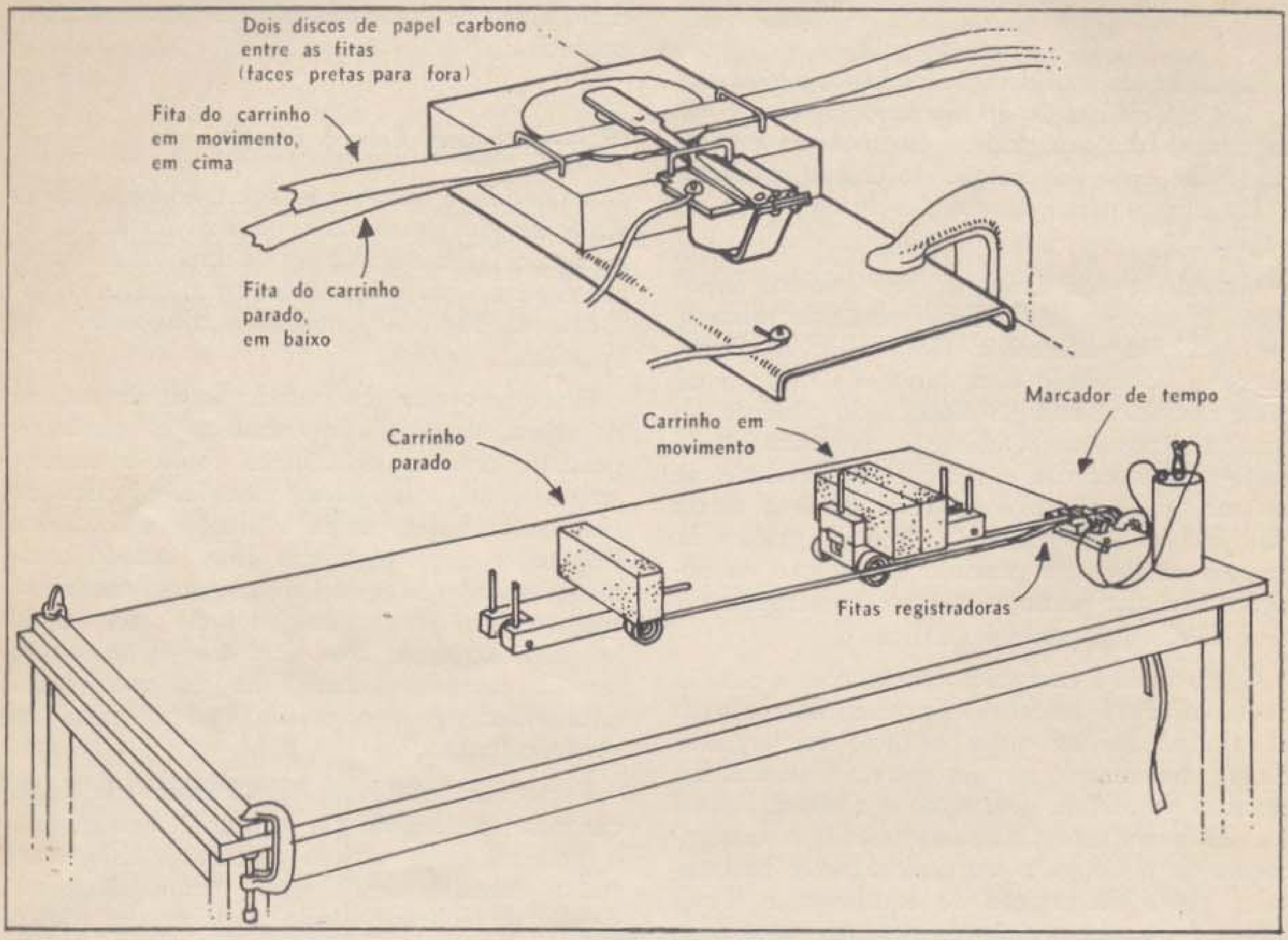


Fig. 30