LOM3253 Física Matemática

Parte 1. Funções de variável complexa
Prof. Dr. Viktor Pastoukhov

Parte 2. EDPs da física (com séries e funções especiais)
Profª Drª Cristina Bormio Nunes

EEL-USP - 2018 – S2

LOM3253 Física Matemática
2018 – S2

1.1. Apresentação da disciplina. Números complexos

Prof. Dr. Viktor Pastoukhov – EEL-USP

Apresentação da disciplina

- Objetivos e função na estrutura do Curso
- Aplicações
- Requisitos
- Ementa atual
- Sistema de avaliação
- Calendário das aulas

Apresentação da disciplina - escopo

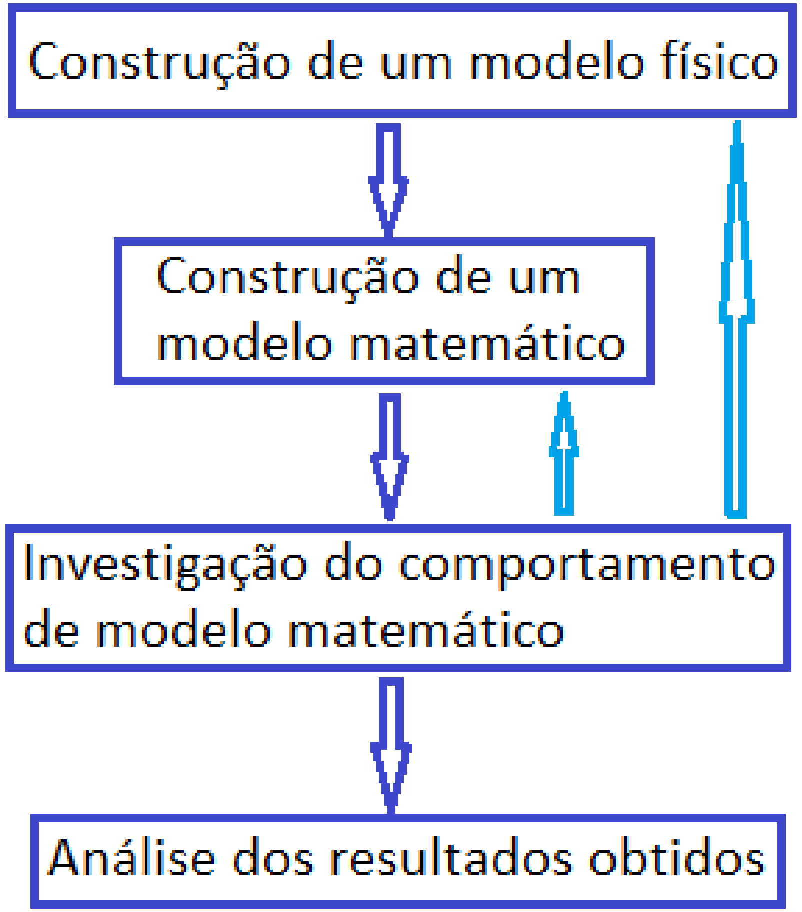
- Fluxograma simplificado de investigação científica

1. Construção de um modelo físico: idealização das propriedades de corpo considerado ações externas.

2. Construção de um modelo matemático: formulação matemática do comportamento de modelo físico.

3. Investigação do comportamento de modelo matemático, começando com a escolha de método.

4. Análise dos resultados obtidos.



Apresentação da disciplina - específica

- Fenômenos estáticos, cinéticos, dinâmicos etc.
- Modelos **determinísticos** e modelos probabilísticos
- Modelos discretos e modelos **contínuos**

Ementa Júpiter 2018

Objetivos

Introdução às funções de variáveis complexas e suas aplicações. Apresentar equações diferenciais de interesse em engenharia física e desenvolver técnicas de soluções, verificando propriedades e métodos de resolução. Estudo de funções especiais em Engenharia Física.

Programa

Funções de uma variável complexa: séries infinitas, funções analíticas, condições de Cauchy Riemann, integrais de contorno, teorema de Cauchy, teorema dos resíduos, Função delta.
Equação de Laplace, equação da difusão (do calor), equação de ondas (corda vibrante);
Série de Fourier, Transformadas Integrais de Fourier e Laplace.
Funções especiais: Polinômios de Legendre, Harmônicos Esféricos, Funções de Bessel.

Bibliografia

• ARFKEN, G. and WEBER, H. J. Mathematical Methods for Physicists.
• BROWN, JAMES W. and CHURCHILL, RUEL V., Complex Variables and Applications, Mc Graw Hill Higher Education, 7a. ed.
• BUTKOV, Eugene. Física Matemática.
• BELLANDI FILHO,J., Funções Especiais, Ed. Papirus, 1985.

Ementa Júpiter 2018

Avaliação

Método

Aulas expositivas teóricas, aulas de exercícios.

Critério

Duas provas escritas: conceitos P1 e P2. Conceito Final = (P1 + 2P2)/3

Norma de Recuperação

Aplicação de uma prova escrita dentro do prazo regimental antes do início do próximo semestre letivo. A nota da segunda avaliação será a média aritmética entre a nota da prova de recuperação e a nota final da primeira avaliação

Calendário das aulas 2018 – S2

Parte 1. Funções de variável complexa
de 30/07/18 até 10/10/18 (15 aulas de 2 h)

Parte 2. EDPs da física (com séries e funções especiais)
de 15/10/18 até 05/12/18 (15 aulas de 2 h)

P1: 08/10/18;   P2: 03/12/18 e(ou) 05/12/18

Calendário das aulas – parte 1

<u>Datas:</u> 30/7-2ª; 1/8-4ª; 6/8-2ª; 8/8 – 4ª; 13/8-2ª;

20/8-2ª; 22/8 – 4ª; 10/9-2ª; 12/9 – 4ª; 24/9-2ª;

26/9 – 4ª; 1/10-2ª; 3/10 – 4ª; 8/10-2ª; 10/10 – 4ª;

Não haverá aulas nos dias:

15/8 – feriado municipal; **27/8 e 29/8 - férias do professor;**

3/9 e 5/9 – recesso escolar; **17/9 e 19/9 - SEMEF**

Temas das aulas – parte 1

30/7-2ª. Apresentação da Matéria. Conceitos gerais. Números complexos: definição, propriedades, módulo e complexo conjugado.

1/8-4ª. Números complexos: forma polar, fórmula de Moivre.

6/8-2ª. Números complexos: operações elementares, representação gráfica no plano complexo, cálculo de raízes.

8/8-4ª. Função exponencial de variável complexa, fórmula de Euler.

13/8-2ª. Funções de variável complexa: séries infinitas, funções analíticas, derivadas. Equações de Cauchy-Riemann, aplicações.

Temas das aulas – parte 1

20/8-2ª. Funções de variável complexa: trigonométricas, hiperbólicas. Aplicações na trigonometria.

22/8-4ª. Funções de variável complexa: logaritmo. Aplicações.

10/9-2ª. Arcos e contornos, integral de contorno. Teorema de Cauchy. Fórmula integral de Cauchy.

12/9-4ª. Funções harmônicas, problemas de Dirichlet e de Neumann.

24/9-2ª. Séries de funções complexas, convergência, séries de potências.

Temas das aulas – parte 1

26/9-4ª. Série de Taylor, Série de Laurent.

1/10-2ª. Singularidades, teorema de resíduo. Aplicações: integrais impróprias.

3/10-4ª. Aplicações: funções trigonométricas. Função delta.

8/10-2ª. Prova P1.

10/10-4ª. Introdução às funções especiais. Revisão dos temas anteriores e vista da prova.

Introdução às funções de variável complexa

Referências adicionais:

A1) Geraldo Ávilla, “Variáveis complexas e aplicações”, 3ª ed., LTC., 2008.

A2) Geraldo Ávilla, “Variáveis complexas”, LTC., 2000.

A3) Sérgio L. Zani, “Funções de uma variável complexa”, ICMC – www.icmc.usp.br/~szani/complexa.pdf *www.icmc.usp.br/~szani/complexa.pdf*

A4) Capelas de Oliveira, e., Rodrigues Jr., W.A., “Introdução às variáveis complexas e aplicações”, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, 2000.

Números complexos - definição

Considere em $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o plano cartesiano, duas operações dadas por:

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2. $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Também podemos definir a multiplicação de um par (x, y) por um número real λ da seguinte forma:

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \qquad \text{(multiplicação por escalar).}$$

A primeira das operações acima nada mais é do que a soma de coordenadas vetoriais que já é familiar de Álgebra Linear ou Cálculo II e como visto, satisfaz as propriedades associativa e comutativa apresenta um elemento neutro e para todo par ordenado existe um recíproco que somada a ele resulta no elemento neutro. Note que $\mathbb{C}$ com a adição e a multiplicação por escalar real é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão dois.

Com relação à operação 2, temos a seguinte

Proposição 1 *A operação definida em* $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *por*

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

é associativa e comutativa e satisfaz $(1, 0) \cdot (x, y) = (x, y)$, *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Além do mais, se $(x, y) \neq (0, 0)$ *então existe* $(u, v) \in \mathbb{C}$ *tal que* $(x, y) \cdot (u, v) = (1, 0)$.

Números complexos - definição

Definição 1 *O conjunto* $\mathbb{C}$ *munido das operações de adição e multiplicação definidas acima é chamado de corpo dos números complexos.*

Vale a pena observar que as seguintes propriedades

1. $(x,0)+(y,0)=(x+y,0), \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$
2. $(x,0)\cdot(y,0)=(xy,0), \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$

dizem que o subconjunto dos números complexos dado por $\mathcal{R}=\{(x,0);x\in\mathbb{R}\}$ é preservado pela adição e multiplicação. Desta forma, é natural identificarmos $\mathcal{R}$ com o conjunto dos números reais. Em outras palavras: podemos assumir que o conjunto dos números reais é um subconjunto dos números complexos.

Números complexos – notação

Como já observamos, $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com respeito à adição e a multiplicação por escalares reais. Além do mais, por seus elementos serem pares ordenados, $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial bidimensional sobre $\mathbb{R}$. Desta forma, como $(1,0)$ e $(0,1)$ formam uma base, todo par $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ se escreve de maneira única como

$$z = x(1,0) + y(0,1).$$

Já vimos que $(1,0)$ é o elemento neutro da multiplicação e como $(1,0)\in\mathcal{R}$, vamos denotá-lo também por 1.

Vejamos o comportamento de $(0,1)$. Temos

$$(0,1)\cdot(0,1) = (0-1, 0-0) = (-1,0) = -(1,0),$$

ou seja,

$$(0,1)^2 = -(1,0). \tag{2.1}$$

Assim, o número complexo $(0,1)$ possui quadrado recíproco aditivo do elemento neutro da adição. Usaremos a notação $i=(0,1)$, obtendo

$$i^2 = -1.$$

Dado $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, o número x é chamado de parte real do número complexo z e é denotado por $\Re z$. O número y é chamado de parte imaginária do número complexo z e é denotado por $\Im z$. Temos $z = 0$ se e somente se $\Re z = \Im z = 0$.

Números complexos – operações

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

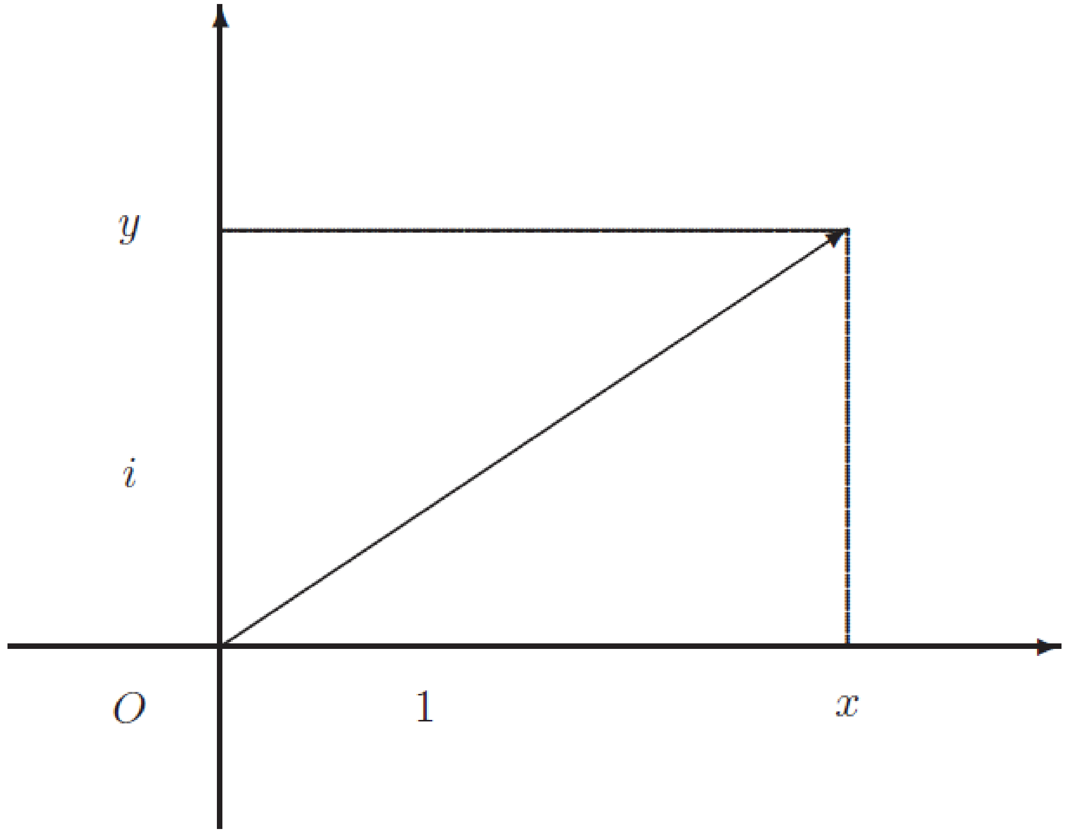
Exemplo 1 *Encontre as partes real e imaginária de* $z = (1 + i)^2$.

Temos $z = (1 + i)(1 + i) = 1 + i + i + i^2 = 2i$. Logo $\Re z = 0$ e $\Im z = 2$.

Exemplo 2 *Encontre as partes real e imaginária de* $z = (1 + i)/(1 - i)$.

Temos $z = (1 + i)(1 - i)^{-1} = (1 + i)(\frac{1}{1^2+(-1)^2} - i\frac{-1}{1^2+(-1)^2}) = \frac{1}{2}(1 + i)^2 = \frac{1}{2}2i = i$. Logo $\Re z = 0$ $\Im z = 1$.

Números complexos – módulo e conjugado



Com esta visão geométrica dos números complexos, definimos o módulo de $z = x+iy, x, y \in \mathbb{R}$, como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. A partir daí, definimos a distância entre dois números complexos z_1 e z_2 como $|z_1 - z_2|$. É imediato que valem as desigualdades $\Re z \leq |\Re z| \leq |z|$ e $\Im z \leq |\Im z| \leq |z|$.

O conjugado de $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$, é definido como $\overline{z} = x - iy$. Geometricamente, $\overline{z}$ é a reflexão do vetor que representa z com relação ao eixo real.

Números complexos – propriedades

$$Para\ todo\ z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ temos$$

$$|z| = |\overline{z}|$$

$$z + \overline{z} = 2\Re z$$

$$z - \overline{z} = 2i\Im z$$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}\ se\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

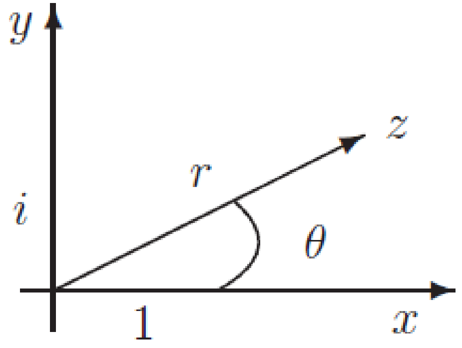
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ se\ z_2 \neq 0$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

Números complexos – forma polar

Dado um número complexo $z \neq 0$, podemos representá-lo em coordenadas polares como



$$z = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta), \qquad r = |z| \qquad \theta = \arg z$$

Colocando $z = x + iy \neq 0, x, y \in \mathbb{R}$, vemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vejamos como se comporta o $\arg z \in [0, 2\pi)$. Se z for um número real então $\arg z = 0$ se $\Re z > 0$ e $\arg z = \pi$ se $\Re z < 0$. Se z é um número imaginário puro então $\arg z = \frac{\pi}{2}$ se $\Im z > 0$ e $\arg z = \frac{3\pi}{2}$ se $\Im z < 0$. Finalmente, se $\Re z \neq 0$ e $\Im z \neq 0$ então $\theta = \arg z$ fica determinado pela equação

$$\tan\theta = \frac{\Im z}{\Re z}$$

Exemplo 7 *Encontre uma representação polar para $z = 1 + i$.*

Temos $r = |z| = \sqrt{2}$. Como z se encontra no primeiro quadrante temos que a solução para $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$ é $\theta = \frac{\pi}{4}$. Assim, uma forma polar de z é

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right).$$

Números complexos – forma polar

$r_1 r_2$ *e* $\theta_1 + \theta_2$ *representam o módulo e um argumento de* $z_1 z_2$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)] \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + i(\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \cos\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_1)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$

r_1/r_2 *e* $\theta_1 - \theta_2$ *representam o módulo e um argumento de* z_1/z_2

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{1}{r_2^2} r_1 r_2(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)) \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)) \end{aligned}$$

Observação 2 *Seja* $z_o = \cos\theta_o + i\,\mathrm{sen}\,\theta_o$, $\theta_o > 0$. *Dado* $z \in \mathbb{C}$, *temos que* $z_o z$ *é a rotação do vetor que representa* z *pelo ângulo* θ_o *no sentido anti-horário. Se* $\theta_o < 0$ *a rotação é no sentido oposto.*

Números complexos – forma polar, raízes

para todo $n \in \mathbb{N}$ *temos*

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)).$$

Além do mais, se $z \neq 0$, *a fórmula acima é valida para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

(De Moivre) *Para todo* $\theta \in \mathbb{R}$ *e todo* $n \in \mathbb{Z}$ *temos*

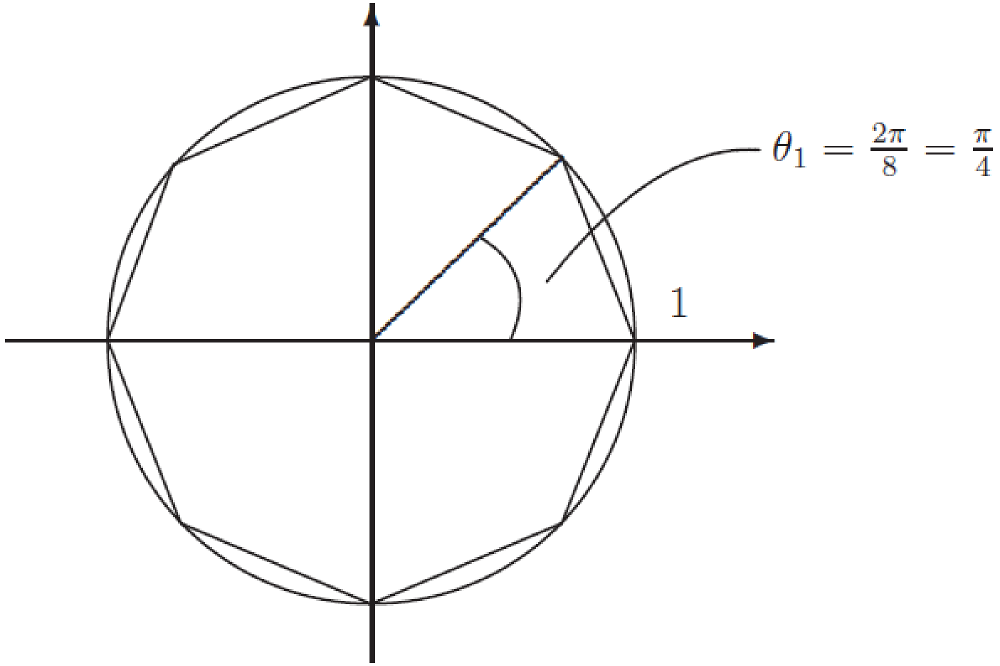
$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

$$z^n = z_o \qquad r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)) = r_o(\cos\theta_o + i\,\mathrm{sen}\,\theta_o)$$

$$\begin{cases} r^n = r_o \\ n\theta = \theta_o + 2k\pi, \ \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{r_o} \\ \theta = \frac{\theta_o}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \ \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$z_k = \sqrt[n]{r_o}(\cos\theta_k + i\,\mathrm{sen}\,\theta_k)$$

Números complexos – raízes



As raízes de $z^8 = 1$.

Exemplo 10 *Encontre todas as raízes de* $z^4 = 1$

$$\zeta_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right), \qquad k = 0, \ldots, 3$$

$$\zeta_0 = 1, \qquad \zeta_1 = i, \qquad \zeta_2 = -1 \qquad \text{e} \qquad \zeta_3 = -i$$

Exemplo 11 *Encontre as raízes de* $z^3 = 1 - i$

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right),$$

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{15\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{23\pi}{12}\right).$$

Números complexos - exercícios

(Ref. A1):

(p.7)

Reduza à forma $a + bi$ cada uma das seguintes expressões

2. $(-3+4i)-(1-2i)$; **4.** $(3-5i)(-2-4i)$; **6.** $(3i-1)\left(\frac{1}{3}-\frac{i}{2}\right)$; **8.** $(2+3i)^2$;

10. $(1+i)^3$; **18.** $\frac{1}{4-3i}$; **20.** $\frac{1+i}{3-2i}$; **24.** $\frac{1-i}{\sqrt{2}-i}$; **26.** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30}$;

16. Mostre que $(x+iy)^n(x-iy)^n = (x^2+y^2)^n$

Números complexos - exercícios

(Ref. A1):

(p.8)

Represente graficamente os números complexos z_1, z_2, $z_1 z_2$ e $\frac{z_1}{z_2}$

30. $z_1 = \frac{1=i}{2\sqrt{2}}$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$; **32.** $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 3 - {}^{i}/_{2}$;

(p. 12)

Determine o argumento de números complexos dados, escreva esses números na forma polar e represente-os graficamente:

2. $\mathrm{z} = 1 + i\sqrt{3}$; **6.** $\mathrm{z} = -1 - i$; **8.** $\mathrm{z} = \frac{-4}{-i+\sqrt{3}}$

(p.15)

4. Prove que $|z| \le |x| + |y| \le \sqrt{2}|z|$, **onde** $\mathrm{z} = x + iy$

Números complexos - exercícios

(Ref. A1):

(p. 19)
Calcule as raízes dos números complexos e faça a representação gráfica correspondente:

4. $\sqrt{-2i}$; **6.** $\sqrt[3]{-i}$; **8.** $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{1/2}$

(p. 24)
Reduza à forma $re^{i\theta}$ **e faça os gráficos correspondentes:**
2. $1-i$; **4.** $-1-i$; **6.** $1-i\sqrt{3}$; **12.** $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$

16. **Sendo que** $z = re^{i\theta}$, **prove que** $\left|e^{iz}\right| = e^{-r sen\theta}$
20. **Determine z de forma que triângulo de vértices** z, i, iz **seja equilátero.**

(p. 32)
Represente graficamente os conjuntos:

8. $Im\, z \geq 1$; **10.** $|z+1| \leq 2$; **14.** $1 < |z-1+i| < 2$; **22.** $|z+5| = |z-1-i|$