



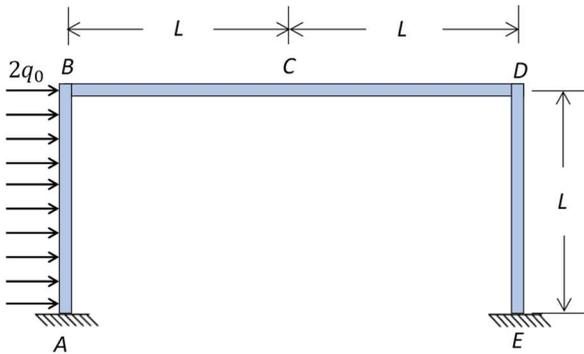
PME3211 – Mecânica dos Sólidos II – Prova Substitutiva – 05/12/2018

Duração: 120 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

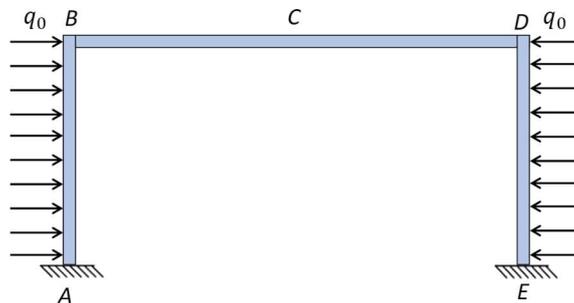
1ª Questão (3,5 pontos)



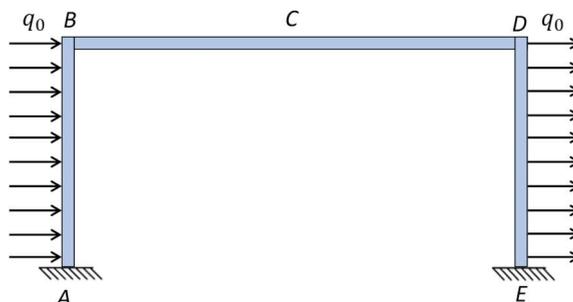
O pórtico plano $ABCDE$ da figura está engastado em A e em E . Ele é formado por barras retas, de mesma rigidez flexional EI dada, soldadas em ângulos de 90° . Sobre a lateral AB está aplicada uma força distribuída uniforme, de magnitude $2q_0$. Desprezando os efeitos devidos à força normal e à força cortante, pede-se determinar a rotação no ponto C .

Solução:

Como a estrutura é simétrica, o carregamento da estrutura pode ser decomposto em uma soma de um carregamento simétrico:



e um carregamento anti-simétrico:



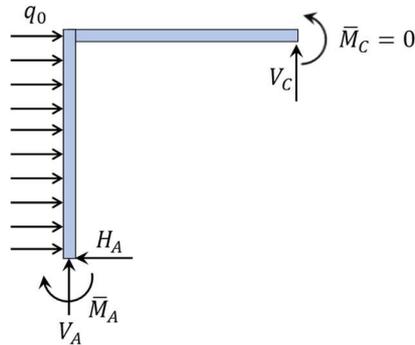
(0,5)

Como o carregamento simétrico não causa rotação em C , basta analisar apenas o efeito do carregamento anti-simétrico.

(0,5)



Para tanto, podemos cortar a estrutura em C , colocando um vínculo adequado, que é um apoio simples. Para a metade esquerda da estrutura teremos, então, o seguinte DCL :

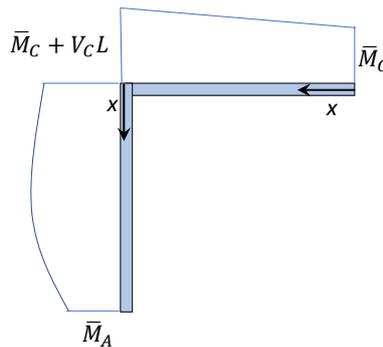


(0,5)

onde já foi adicionado o momento fictício \bar{M}_C que permitirá o cálculo da rotação em C . Note que a estrutura resultando é hiperestática, com grau de hiperestaticidade 1. Vamos, então, adotar V_C como incógnita hiperestática que pode ser calculada usando o princípio da energia complementar mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_C} = 0$$

Desprezando os efeitos da força normal e da força cortante, como o problema é plano, só resta a energia complementar correspondente à flexão. Para calcular essa energia, é conveniente primeiro esboçar o diagrama de momentos fletores:



A estrutura pode ser dividida em dois trechos, AB e BC ; a energia complementar total será a soma das energias complementares correspondentes a esses trechos:

$$U^* = U_{AB}^* + U_{BC}^*$$

- Para o trecho AB temos, usando a coordenada x indicada na figura:

$$M_{AB}(x) = \bar{M}_C + V_C L - q_0 \frac{x^2}{2}$$



$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial V_C} = L$$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}_C} = 1$$

- Para o trecho CD temos, usando a coordenada x indicada na figura:

$$M_{BC}(x) = \bar{M}_C + V_C x$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial V_C} = x$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial \bar{M}_C} = 1$$

Como

$$0 = \frac{\partial U^*}{\partial V_C} = \frac{\partial U_{AB}^*}{\partial V_C} + \frac{\partial U_{BC}^*}{\partial V_C}$$

Então:

$$0 = \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial V_C} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial V_C} dx$$

Assim, usando as expressões definidas anteriormente e zerando o momento fictício \bar{M}_C :

$$0 = \int_0^L \left(V_C L - q_0 \frac{x^2}{2} \right) L dx + \int_0^L V_C x^2 dx$$

e, portanto,

$$V_C = \frac{q_0 L}{8}$$

(o sinal positivo indica que a reação V_C tem o mesmo sentido que foi desenhado no diagrama de corpo livre)

(1,0)

A rotação do ponto B pode ser calculada pelo teorema de Crotti-Engesser, anulando o momento fictício:

$$\theta_C = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}_C} \right)_{\bar{M}_C=0}$$

ou seja,

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}_C} \right)_{\bar{M}_C=0} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial \bar{M}_C} \right)_{\bar{M}_C=0} dx$$

Assim,

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left[\int_0^L \left(V_C L - q_0 \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^L V_C x dx \right]$$

e, portanto,



$$\theta_c = -\frac{1}{EI} \left[\frac{3}{2} V_c L^2 + \frac{1}{6} q_0 L^3 \right]$$

e, finalmente, usando o valor que foi calculado para V_c :

$$\theta_c = \frac{q_0 L^3}{48EI}$$

(o sinal positivo indica que o sentido da rotação é o mesmo do momento fictício adotado e, portanto, a rotação se dá no sentido anti-horário)

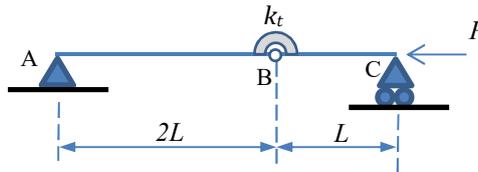
(1,0)



2ª Questão (3,0 pontos)

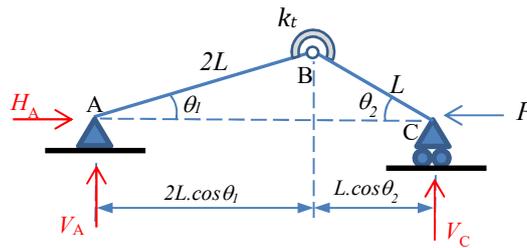
A estrutura idealizada indicada na figura abaixo é formada por duas barras rígidas (AB e BC) conectadas por uma mola de torção de constante k_t (em N.m). Os comprimentos das barras AB e BC são respectivamente $2L$ e L . Desprezando o peso próprio das barras e considerando que sobre o ponto C é aplicada uma força de compressão de magnitude P , pede-se:

- determinar as reações de apoio em A e em C;
- obter a E.D.O. para a determinação dos estados de equilíbrio considerando a possibilidade de não-linearidade geométrica;
- linearizar a E.D.O. obtida no item anterior e calcular a carga crítica de flambagem do sistema.



Solução:

a) Consideremos uma configuração de equilíbrio genérica como a indicada na figura abaixo:



Pelas equações de equilíbrio da estática, teremos:

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_A = P$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_A + V_C = 0$$

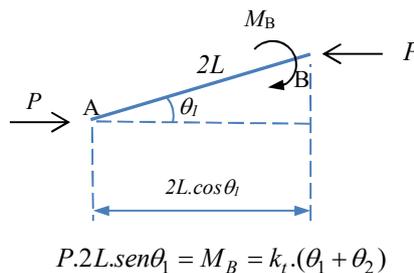
$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow V_C \cdot (2L \cos \theta_1 + L \cos \theta_2) = 0$$

De onde resultam:

$$H_A = P, \quad V_A = V_C = 0$$

(0,5 pts)

b) Impondo o equilíbrio de momentos para o trecho AB, teremos:





Mas, da figura é imediato constatar que:

$$2L \cdot \text{sen}\theta_1 = L \cdot \text{sen}\theta_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \text{sen}\theta_1 = \text{sen}\theta_2 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_2 = \arcsen(2 \cdot \text{sen}\theta_1)$$

Logo, a equação de equilíbrio, considerando a possibilidade de não linearidade-geométrica fica:

$$P \cdot 2L \cdot \text{sen}\theta_1 = k_t \cdot (\theta_1 + \arcsen(2 \cdot \text{sen}\theta_1))$$

(1,5 pts)

c) Considerando a hipótese de linearidade geométrica (pequenos deslocamentos e pequenas rotações), teremos as relações linearizadas:

$$P \cdot 2L \cdot \theta_1 = k_t \cdot (\theta_1 + \theta_2)$$

e

$$2L \cdot \text{sen}\theta_1 = L \cdot \text{sen}\theta_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \theta_1 \cong \theta_2$$

Logo:

$$P \cdot 2L \cdot \theta_1 = k_t \cdot (\theta_1 + 2\theta_1) \quad \Leftrightarrow \quad (2PL - 3k_t) \cdot \theta_1 = 0$$

De onde decorre:

$$\theta_1 = 0 \quad (\text{solução trivial})$$

ou

$$P_{cr} = \frac{3k_t}{2L} \quad (\text{carga crítica})$$

(1,0 pts)



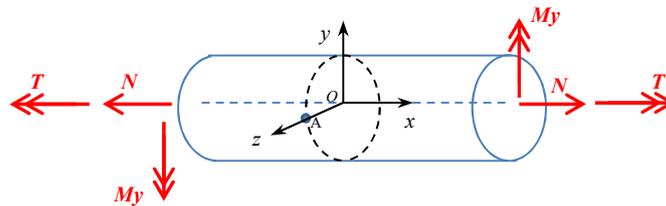
3ª Questão (3,5 pontos)

A figura abaixo ilustra um segmento de uma barra de seção transversal circular cheia (diâmetro d) sobre a qual atuam os seguintes esforços (todos referidos ao sistema de eixos $Oxyz$ indicado):

- Uma força normal $N = 10P$;
- Um momento fletor $M_y = 2,5Pd$;
- Um momento torçor $T = 5Pd$.

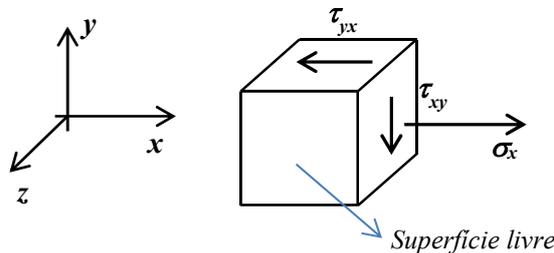
O material da barra possui módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. Se um único extensômetro for colado sobre a superfície da barra no ponto $A = (0, 0, d/2)$ antes da aplicação dos esforços indicados, determine:

- o tensor das tensões e o tensor das deformações no ponto A após a aplicação dos esforços;
- os alongamentos principais no ponto A;
- a melhor orientação do extensômetro para que a leitura (em valor absoluto) seja a maior possível.



Solução:

a). O estado tensional no ponto A fica dado por:



(0,5 pts)

Onde:

$$\sigma_x = \frac{4N}{\pi d^2} + \frac{M_y \cdot 64}{\pi d^4} \cdot \frac{d}{2} = \frac{4N}{\pi d^2} + \frac{32M_y}{\pi d^3}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{T}{(\pi d^4 / 32)} \cdot \frac{d}{2} = -\frac{16T}{\pi d^3}$$

Ou seja:

$$\sigma_x = \frac{40P}{\pi d^2} + \frac{80P}{\pi d^2} = \frac{120P}{\pi d^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{80P}{\pi d^2}$$

Assim, o tensor das tensões no ponto A fica dado por:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{40P}{\pi d^2}$$

(1,0 pts)

Pela lei de Hooke generalizada, teremos:



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{120P}{E.\pi d^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = -\frac{30P}{E.\pi d^2}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = -\frac{30P}{E.\pi d^2}$$

E

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} . \tau_{xy} = \frac{2,5}{E} . \left(-\frac{80P}{\pi d^2} \right) = -\frac{200P}{E.\pi d^2}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} . \tau_{xz} = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} . \tau_{yz} = 0$$

Logo, o tensor das (pequenas) deformações fica dado por:

$$[E]_b = \begin{bmatrix} 12 & -10 & 0 \\ -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \frac{10P}{E.\pi d^2}$$

(1,0 pto)

b) Os alongamentos principais no ponto A são dados por:

$$\det([E] - \varepsilon.[I]) = \det \begin{bmatrix} 12\beta - \varepsilon & -10\beta & 0 \\ -10\beta & -3\beta - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -3\beta - \varepsilon \end{bmatrix} = 0$$

Onde: $\beta = \frac{10P}{E.\pi d^2}$ é uma deformação de referência (ou seja, todas as demais deformações são múltiplos de β).

Desta forma, teremos a equação característica e seus auto-valores:

$$-(3\beta + \varepsilon) \cdot (\varepsilon^2 - 9\beta\varepsilon - 136\beta^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = -3\beta \\ \varepsilon = \frac{9\beta \pm 25\beta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 17\beta \\ \varepsilon_2 = -3\beta \\ \varepsilon_3 = -8\beta \end{cases}$$

Ou, de forma explícita:

$$\varepsilon_1 = \frac{170P}{E.\pi d^2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{30P}{E.\pi d^2}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{80P}{E.\pi d^2}$$

(0,5 pto)

c) O maior alongamento possível que pode ser registrado pelo extensômetro deve ter a direção de \vec{n}_1 (direção principal associada ao alongamento $\varepsilon_1 = 17\beta$), a qual é dada por:

$$([E] - \varepsilon_1.[I]) \cdot \{\vec{n}_1\} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ -10 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De onde temos as relações:

$$n_{x1} + 2.n_{y1} = 0 \quad \text{e} \quad n_{z1} = 0$$

Ou seja:

$$\vec{n}_1 = \frac{(2, -1, 0)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right)$$

(0,5 pto)