



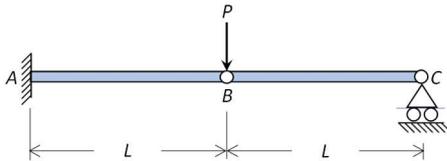
PME3211 – Mecânica dos Sólidos II – 3ª Prova – 28/11/2018

Duração: 120 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

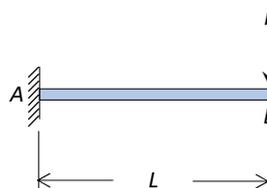
1ª Questão (3,0 pontos)



A estrutura da figura é formada por duas barras iguais, AB e BC , de comprimento L e rigidez flexional EI . A barra AB está engastada em A e articulada em B . A barra BC , por sua vez, está articulada em B e simplesmente apoiada em C . Há uma força vertical P aplicada na articulação B , conforme a figura. Pede-se:
a) calcular a rotação da extremidade B da barra AB ;
b) calcular a rotação da extremidade B da barra BC .

Solução:

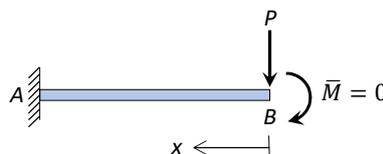
- i) A barra BC é uma barra biarticulada, sem força intermediária aplicada, como a barra de uma treliça. Portanto a barra BC só poderia estar sujeita a uma força normal. Como o vínculo em C é um apoio simples, essa força é nula e, portanto, a barra BC não está sujeita a nenhuma tipo de esforço, não se deforma e funciona como um corpo rígido. Assim, para calcular a rotação em B da barra AB basta isolar essa barra conforme o diagrama:



Note que a estrutura resultante é **isostática**.

(1,0)

- ii) Para calcular a rotação em B da barra AB , adicionamos um momento fictício em B :



Pelo teorema de Crotti-Engesser, chamando de θ_B^- a rotação à esquerda de B , temos:

$$\theta_B^- = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M(x) \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0} dx$$

Mas:

$$M(x) = -(\bar{M} + Px)$$



e, portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = -1$$

Assim:

$$\theta_B^- = \frac{1}{EI} \int_0^L P x dx = \frac{PL^2}{2EI}$$

Note que o sinal positivo indica que a rotação tem o mesmo sentido do momento fictício adotado (horário).

(1,0)

iii) Como a barra BC tem um movimento de corpo rígido, a rotação da extremidade B dessa barra, que indicaremos por θ_B^+ , será dada por:

$$\theta_B^+ = \frac{y_B}{L}$$

onde y_B é o deslocamento vertical do ponto B , que pode ser obtido usando o teorema de Crotti-Engesser:

$$y_B = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Mas,

$$M(x) = -Px$$

e, portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Assim:

$$y_B = \frac{1}{EI} \int_0^L P x^2 dx = \frac{PL^3}{3EI}$$

e, portanto,

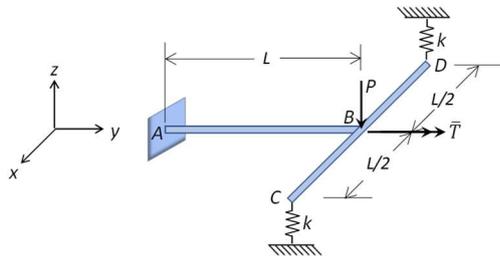
$$\theta_B^+ = \frac{pL^2}{3EI}$$

O sinal positivo de y_B corresponde a um deslocamento no mesmo sentido de P . Portanto θ_B^+ tem o sentido anti-horário.

(1,0)



2ª Questão (3,5 pontos)

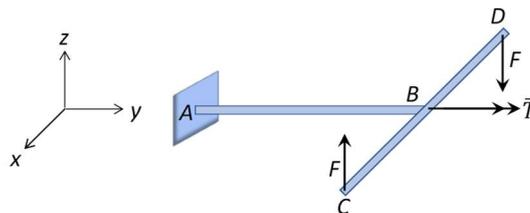


A estrutura $ABCD$ esquematizada na figura é formada por duas barras iguais, de comprimento L , rigidez flexional EI e rigidez à torção GI_p , que estão soldadas no ponto B . Essa estrutura está presa em C e D a duas molas iguais, de rigidez k . No ponto B há uma força vertical P e um torque \bar{T} aplicados. Pede-se determinar o ângulo de giro da barra AB em B .

Dados: $GI_p = \frac{4}{5}EI$ e $k = \frac{12EI}{L^3}$

Solução:

Só o carregamento anti-simétrico contribue para o giro da barra AB , ou seja, a carga P pode ser retirada do problema, restando apenas \bar{T} . Como um carregamento anti-simétrico provoca reações vinculares anti-simétricas, as forças nas molas são iguais em módulo e têm sentidos opostos. Assim, basta estudar o problema:



(0,5)

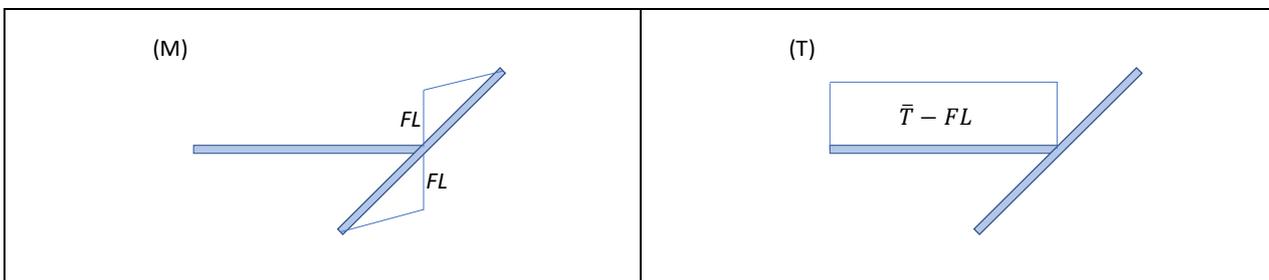
A estrutura resultante é hiperestática, com grau de hiperestaticidade 1. Podemos escolher F com ingónita hiperestática. Assim, pelo teorema da energia complementar mínima,

$$\frac{\partial U^*}{\partial F} = 0$$

Desprezando o efeito da força normal e da força cortante nas barras, a energia complementar da estrutura é a soma de três parcelas:

$$U^* = U_{flexão}^* + U_{torção}^* + U_{molas}^*$$

Para calcular, adequadamente, as parcelas devidas à flexão e à torção, devemos construir os diagramas de esforços solicitantes:





Assim, as parcelas da energia complementar são:

$$U_{flexão}^* = 2 \int_0^{L/2} \frac{(Fx)^2}{2EI} dx = \frac{FL^3}{24EI}$$
$$U_{torção}^* = \frac{(\bar{T} - FL)^2 L}{2GI_p} = \frac{5(\bar{T} - FL)^2 L}{8EI}$$
$$U_{molas}^* = 2 \frac{F^2}{2k} = \frac{F^2 L^3}{12EI}$$

E, portanto,

$$U^* = \frac{L}{8EI} (5\bar{T}^2 - 10\bar{T}FL + 6F^2L^2)$$

(1,0)

Assim:

$$0 = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{L}{8EI} (-10\bar{T}L + 12FL^2)$$

Portanto,

$$F = \frac{5\bar{T}}{6L}$$

(1,0)

Substituindo esse valor na energia complementar:

$$U^* = \frac{5}{48} \frac{\bar{T}^2 L}{EI}$$

O giro do ponto B da barra AB pode ser obtido a partir do teorema de Crotti-Engesser:

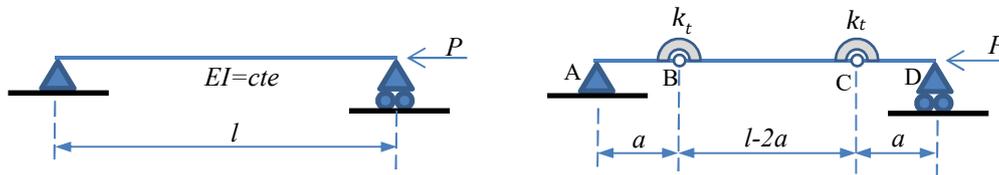
$$\phi_B = \frac{\partial U^*}{\partial \bar{T}} \Rightarrow \phi_B = \frac{5}{24} \frac{\bar{T}L}{EI}$$

(1,0)



3ª Questão (3,5 pontos)

- a) A partir da E.D.O. de 4ª ordem que descreve os deslocamentos transversais do eixo central de uma viga biapoiada submetida unicamente a um esforço de compressão P (conforme ilustrado na figura abaixo à esquerda), determine, passo-a-passo, a equação característica associada ao problema de auto-valores e auto-vetores, as respectivas cargas críticas de flambagem e os modos de flambagem associados. Desenhe os dois primeiros modos de flambagem e indique as cargas associadas a estes dois modos;
- b) Considere o mesmo problema anterior porém com a inclusão do peso próprio da viga, o qual pode ser caracterizado por um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q_0 (em N/m) dirigido verticalmente para baixo. Pede-se a equação da linha elástica resultante em função dos parâmetros P , q_0 , EI e l . Mostre o que ocorre com o deslocamento a meio vão quando $P \rightarrow P_{cr1}$;
- c) Para a viga idealizada (indicada na figura abaixo à direita) composta por três segmentos indeformáveis AB, BC e CD e duas molas de torção de mesma constante k_t , distantes a das extremidades A e D, determine as relações $a = a(EI, l)$ e $k_t = k_t(EI, l)$ para que as duas primeiras cargas críticas do sistema idealizado coincidam numericamente com as duas primeiras cargas críticas do sistema apresentado no item (a).



Solução:

- a) A E.D.O. que descreve os deslocamentos transversais do eixo central da viga no caso em tela é dada por:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{q(x)}{EI}$$

Considerando, inicialmente, apenas o carregamento de compressão devido à carga P , a E.D.O. fica:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 0$$

Denotando:

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

Resulta:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k^2 \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 0$$

Procurando soluções da forma:

$$v(x) = C \cdot e^{\lambda x}$$

Virá, após substituição na E.D.O.:

$$C \cdot e^{\lambda x} \cdot [\lambda^4 + k^2 \lambda^2] = 0$$

E, como não nos interessa a solução trivial (ou seja, $v(x) = C \cdot e^{\lambda x} \neq 0$), devemos ter:

$$\lambda^4 + k^2 \lambda^2 = \lambda^2 \cdot (\lambda^2 + k^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 0 \text{ (raiz de multiplicidade 2)} \\ \lambda = \pm i \cdot k \end{cases}$$



Desta forma, a solução geral da E.D.O. homogênea fica dada por:

$$v(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cdot \text{sen}(k \cdot x) + C_4 \cdot \text{cos}(k \cdot x)$$

(0,5 pto)

Resta aplicar as condições de contorno do problema que, no caso, são:

(0,5 pto)

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_4 = 0$$

$$v''(0) = 0 \Leftrightarrow -C_4 \cdot k^2 = 0 \Leftrightarrow C_4 = 0$$

$$v(l) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 \cdot l + C_3 \cdot \text{sen}(k \cdot l) + C_4 \cdot \text{cos}(k \cdot l) = 0$$

$$v''(l) = 0 \Leftrightarrow -C_3 \cdot k^2 \cdot \text{sen}(k \cdot l) - C_4 \cdot k^2 \cdot \text{cos}(k \cdot l) = 0$$

Das duas primeiras equações decorre que: $C_1 = C_4 = 0$

De forma que, substituindo estes resultados nas duas últimas equações:

$$C_2 \cdot l + C_3 \cdot \text{sen}(k \cdot l) = 0$$

$$C_3 \cdot \text{sen}(k \cdot l) = 0$$

Logo, é imediato concluir que devemos ter: $C_2 = 0$ e $\text{sen}(k \cdot l) = 0$

Assim, as soluções (não-triviais) da E.D.O. homogênea que satisfazem as condições de contorno do problema são da forma:

$$v(x) = C \cdot \text{sen}(k \cdot x)$$

E a equação característica que nos permite determinar as cargas críticas de flambagem é:

$$\text{sen}(k \cdot l) = 0 \Leftrightarrow k \cdot l = n \cdot \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Logo:

$$k^2 = \frac{P}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \Leftrightarrow P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

O primeiro modo de flambagem é obtido para $n = 1$, resultando:

$$P_{cr,1} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

E o modo associado é:

$$v_1(x) = C \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)$$

Esquemáticamente:



O segundo modo de flambagem é obtido para $n = 2$, resultando:

(0,5 pto)

$$P_{cr,2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

E o modo associado é:

$$v_2(x) = C \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot x}{l}\right)$$



Esquemáticamente:



b) Considerando agora o caso em que o carregamento distribuído é dado por: $q(x) = q_0 = cte$, teremos a seguinte E.D.O. resultante:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k^2 \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{q_0}{EI}$$

Cuja solução é a soma da solução da E.D.O. homogênea com uma solução particular da E.D.O. não-homogênea, ou seja:

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot \text{sen}(k \cdot x) + C_4 \cdot \text{cos}(k \cdot x) + v_p(x)$$

Onde é imediato verificar que vale:

$$v_p(x) = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot k^2 EI}$$

Logo, a solução completa fica:

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot \text{sen}(k \cdot x) + C_4 \cdot \text{cos}(k \cdot x) - \frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot k^2 EI}$$

Aplicando novamente as condições de contorno virão:

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_4 = 0$$

$$v''(0) = 0 \Leftrightarrow -C_4 \cdot k^2 - \frac{q_0}{k^2 EI} = 0 \Leftrightarrow C_4 = -\frac{q_0}{k^4 EI}$$

$$v(l) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 \cdot l + C_3 \cdot \text{sen}(k \cdot l) + C_4 \cdot \text{cos}(k \cdot l) - \frac{q_0 \cdot l^2}{2 \cdot k^2 EI} = 0$$

$$v''(l) = 0 \Leftrightarrow -C_3 \cdot k^2 \cdot \text{sen}(k \cdot l) - C_4 \cdot k^2 \cdot \text{cos}(k \cdot l) - \frac{q_0}{k^2 EI} = 0$$

De onde decorre imediatamente que:

$$C_1 = \frac{q_0}{k^4 EI} \quad \text{e} \quad C_4 = -\frac{q_0}{k^4 EI}$$

Logo:

$$C_3 = -\frac{q_0}{k^4 EI} \frac{(1 - \text{cos}(k \cdot l))}{\text{sen}(k \cdot l)} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{q_0 \cdot l}{2 \cdot k^2 EI}$$

Resultando, finalmente:

$$v(x) = \frac{q_0}{k^4 EI} \left[1 - \text{cos}(k \cdot x) - \frac{(1 - \text{cos}(k \cdot l))}{\text{sen}(k \cdot l)} \cdot \text{sen}(k \cdot x) \right] + \frac{q_0}{2 k^2 EI} \cdot [lx - x^2]$$

(0,5 pts)



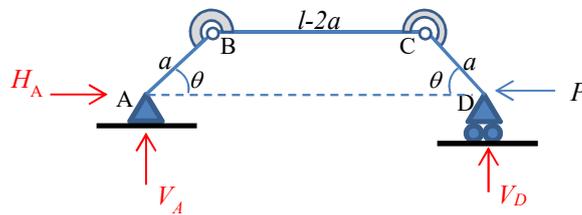
Em particular, para $x = l/2$ e $kl \rightarrow \pi$, (1º modo):

$$v(l/2) \rightarrow \frac{q_0}{k^4 EI} \left[1 - \frac{2}{\text{sen}(\pi)} \right] + \frac{q_0 l^2}{8k^2 EI}$$

Ou seja, as deflexões aumentam significativamente conforme a carga aplicada se aproxima do valor crítico.

c) Pela simetria da estrutura e por comparação com os modos de flambagem vistos na parte (a) do problema, podemos verificar que os modos de flambagem da estrutura idealizada serão:

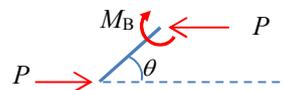
1º Modo (modo simétrico):



Impondo o equilíbrio de forças e de momentos para a estrutura como um todo, obtemos:

$$V_A = V_D = 0 \quad \text{e} \quad H_A = P$$

Impondo o equilíbrio de forças e de momentos apenas para o trecho AB, virá:



$$Pa \cdot \text{sen}(\theta) = M_B = k_t \cdot \theta$$

Linearizando a equação de equilíbrio, virá:

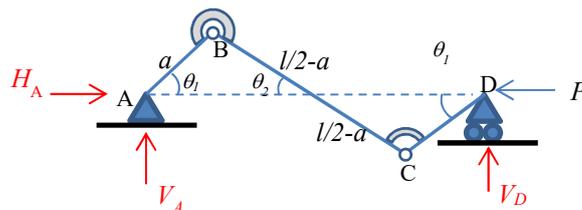
$$(Pa - k_t) \cdot \theta = 0$$

Cuja única solução não-trivial leva a:

$$P_{cr,1} = \frac{k_t}{a}$$

(0,5 pts)

2º Modo (modo anti-simétrico):

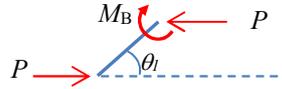


Novamente, impondo o equilíbrio de forças e de momentos para a estrutura como um todo, obtemos:

$$V_A = V_D = 0 \quad \text{e} \quad H_A = P$$



Impondo o equilíbrio de forças e de momentos apenas para o trecho AB, virá:



$$Pa.\text{sen}(\theta_1) = M_B = k_t \cdot (\theta_1 + \theta_2)$$

Mas, pela geometria da estrutura na configuração deformada, percebe-se que:

$$a.\text{sen}(\theta_1) = \left(\frac{l}{2} - a\right).\text{sen}(\theta_2)$$

Linearizando as relações acima, teremos:

$$Pa.\theta_1 = k_t \cdot (\theta_1 + \theta_2) \quad \text{e} \quad \theta_1 = \left(\frac{l}{2a} - 1\right).\theta_2$$

Cuja única solução não-trivial leva a:

$$P_{cr,2} = \frac{k_t \cdot l}{a \cdot (l - 2a)}$$

(0,5 pts)

Finalmente, para que as duas cargas críticas do sistema idealizado sejam idênticas às cargas críticas do sistema estrutural visto em (a), devemos ter:

$$P_{cr,1} = \frac{k_t}{a} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{e} \quad P_{cr,2} = \frac{k_t \cdot l}{a \cdot (l - 2a)} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

Resolvendo para k_t e para a , resultam:

$$a = \frac{3l}{8} \quad \text{e} \quad k_t = \frac{3\pi^2 EI}{8l}$$

(0,5 pts)