Q1: __________

Q2: __________

Nota: ________

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

PME3211 – Mecânica dos Sólidos II – 2ª Prova – 10/10/2018

Duração: 100 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

Nome: ______________________________________ N.USP: __________ Assinatura: ___________________

1ª Questão (4,0 pontos)

Em uma lata de refrigerante fechada são colocados dois extensômetros: um na direção circunferencial e outro na direção longitudinal. Nessa situação a leitura dos extensômetros é zerada. A lata tem diâmetro externo de 60mm, espessura de 0,2mm e é feita de alumínio com módulo de elasticidade $E = 75GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$. Quando a lata é aberta a leitura do extensômetro circunferencial é $\varepsilon_C = -100\mu$. Pergunta-se:

a) qual é a leitura do extensômetro longitudinal quando a lata é aberta?

b) qual é a pressão interna do refrigerante na lata fechada?

Solução:

A tensão longitudinal em um vaso de pressão cilíndrico é dada por:

(0,5)

$$\sigma_L = p\frac{r}{2t}$$

e a tensão circunferencial por:

(0,5)

$$\sigma_C = p\frac{r}{t}$$

Assim, pela lei de Hooke:

(0,5)

$$\varepsilon_L = \frac{1}{E}(\sigma_L - \nu\sigma_C) = \frac{pr}{2Et}(1-2\nu)$$

e

(0,5)

$$\varepsilon_C = \frac{1}{E}(\sigma_C - \nu\sigma_L) = \frac{pr}{2Et}(2-\nu)$$

Então, a relação entre ε_L e ε_C é:

$$\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_C} = \frac{1-2\nu}{2-\nu}$$

para $\nu = 1/3$:

(1,0)

$$\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_C} = \frac{1}{5} \Rightarrow \varepsilon_L = -20\mu$$

A pressão interna pode ser calculada diretamente a partir da expressão de $\varepsilon_L$ou da expressão de ε_C. Assim:

(1,0)

$$p = -\frac{2Et\varepsilon_C}{r(2-\nu)} \Rightarrow p = 60kPa$$

<u>2ª Questão</u> <u>(6,0 pontos)</u>

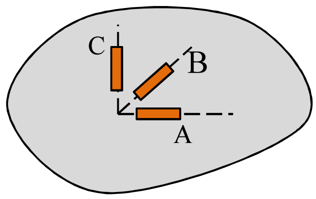
Uma roseta com 3 extensômetros a 45° (nomeados A, B e C) é utilizada para determinar as deformações em um ponto da superfície de uma dada estrutura, conforme indicado na figura ao lado, sendo obtidos os valores: $\varepsilon_A = \varepsilon_C = 210\mu$, $\varepsilon_B = 420\mu$. Admita condições de linearidade geométrica e que o material seja homogêneo, isótropo e tenha comportamento elástico-linear com constantes elásticas $E = 280$ GPa e $\nu = 0{,}4$. Pede-se:

a) O maior e o menor alongamento que pode ser medido neste ponto com auxílio de extensômetros e as direções em que eles ocorrem (indique estas direções em relação aos extensômetros A, B e C através de desenhos);

b) A maior distorção entre as fibras que passam pelo ponto e cujos versores (tangentes às fibras) são paralelos à superfície da estrutura. Indique estas direções em relação aos extensômetros A, B e C em um desenho;

c) O valor da maior tensão de cisalhamento no ponto (considerando todos os planos possíveis que passam pelo ponto) e as normais aos planos em que ela atua;

d) Considerando que o material tenha comportamento dúctil com tensão de escoamento 350 MPa, determine o coeficiente de segurança com relação ao início de escoamento no ponto utilizando um critério apropriado. Justifique a escolha do critério adotado!

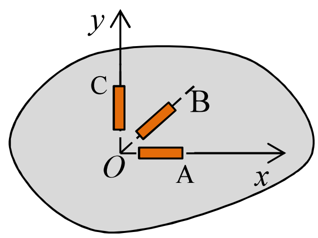


<u>Importante:</u> Respostas numéricas sem a devida justificativa, ainda que corretas, não serão consideradas!

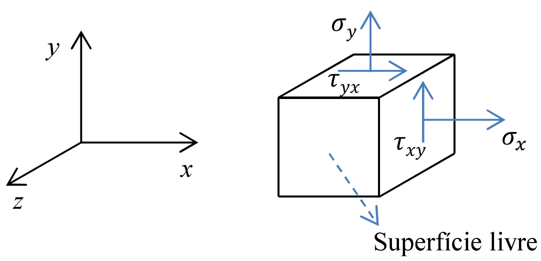
<u>Solução:</u>

a) Consideremos o sistema de eixos *Oxyz* como indicado abaixo (com o eixo *Oz* ortogonal à superfície da estrutura):

(0,5)



O estado tensional no ponto em questão fica dado por:



Consequentemente o estado de deformações no ponto fica (utilizando a Lei de Hooke):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x\right]$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left[\sigma_x + \sigma_y\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

O tensor das deformações, na base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, fica então dado por:

$$[E]_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

E o alongamento segundo uma fibra cujo versor tangente seja dado por $\vec{n} = \{cos\theta \quad sen\theta \quad 0\}^t$ fica dado por:

$$\varepsilon(\theta) = \{\vec{n}\}^t.[E].\{\vec{n}\}$$

Resultando:

$$[E].\{\vec{n}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x cos\theta + \gamma_{xy} sen\theta/2 \\ \gamma_{xy} cos\theta/2 + \varepsilon_y sen\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

E, finalmente:

$$\varepsilon(\theta) = \varepsilon_x cos^2\theta + \varepsilon_y sen^2\theta + \gamma_{xy} cos\theta sen\theta$$

Pelos dados do problema, temos:

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_x = \varepsilon_A$$

$$\varepsilon(\pi/2) = \varepsilon_y = \varepsilon_C$$

$$\varepsilon(\pi/4) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}}{2} = \varepsilon_B$$

Assim, obtemos:

$$\varepsilon_x = 210\mu \quad , \quad \varepsilon_y = 210\mu \quad , \quad \gamma_{xy} = 420\mu$$

Finalmente, das três primeiras equações constitutivas, é imediato mostrar que:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}[\sigma_x + \sigma_y] = -\frac{\nu}{(1-\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Logo:

$$\varepsilon_z = -\frac{0{,}4}{0{,}6}(420\mu) = -280\mu$$

E o tensor das deformações fica:

$$[E]_b = \begin{bmatrix} 210 & 210 & 0 \\ 210 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & -280 \end{bmatrix} \ (\mu)$$

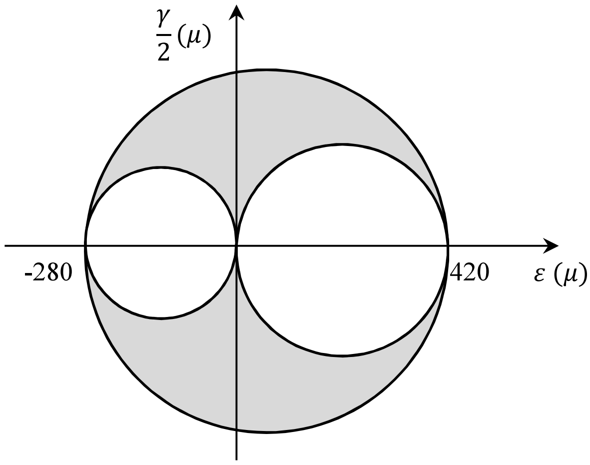
Os alongamentos principais correspondem aos auto-valores do tensor das deformações obtidos por:

$$det([E] - \varepsilon[I]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det \begin{bmatrix} 210-\varepsilon & 210 & 0 \\ 210 & 210-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -280-\varepsilon \end{bmatrix} = 0$$

Resultando:

$$-(280+\varepsilon).(\varepsilon^2 - 420\varepsilon) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon = 420\mu = \varepsilon_1 \\ \varepsilon = 0 = \varepsilon_2 \\ \varepsilon = -280\mu = \varepsilon_3 \end{cases}$$

Os círculos de Mohr das deformações ficam:



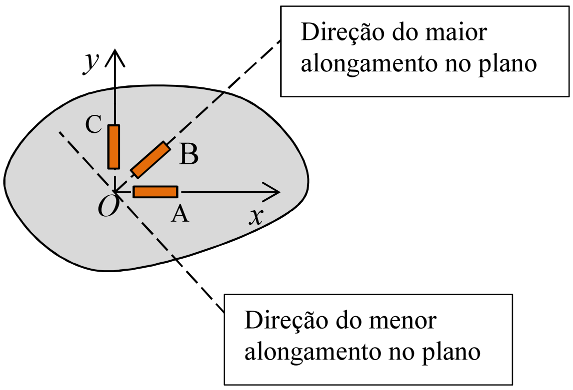
Do exposto, podemos afirmar que: (1,0)

i) O maior alongamento que pode ser medido na superfície da estrutura por meio de extensômetros é 420μ e sua direção é a do extensômetro B (que coincide com a direção principal $\vec{n}_1$);

ii) O menor alongamento que pode ser medido na superfície da estrutura por meio de extensômetros é 0μ e sua direção é ortogonal à direção do extensômetro B (que coincide com a direção principal $\vec{n}_2$).

Esquematicamente:

(0,5)



b) Dos círculos de Mohr podemos observar que a maior distorção entre as fibras que passam pelo ponto e cujos versores (tangentes às fibras) são paralelos à superfície da estrutura vale: (1,0)

$$\gamma_{máx,plano} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 420\mu$$

Tal distorção ocorre entre as fibras que formam ângulos de 45° com as direções principais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, ou seja, irá ocorrer justamente entre as direções *x* e *y* do sistema de coordenadas *Oxyz*. De fato, vemos que:

$$\gamma_{máx,plano} = \gamma_{xy} = 420\mu$$

c) Aplicando novamente a lei de Hooke, mas utilizando agora as direções principais de tensão e deformação, teremos:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

De onde obtemos (alternativamente):

$$\sigma_1 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2G\varepsilon_1$$
$$\sigma_2 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2G\varepsilon_2$$
$$\sigma_3 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2G\varepsilon_3$$

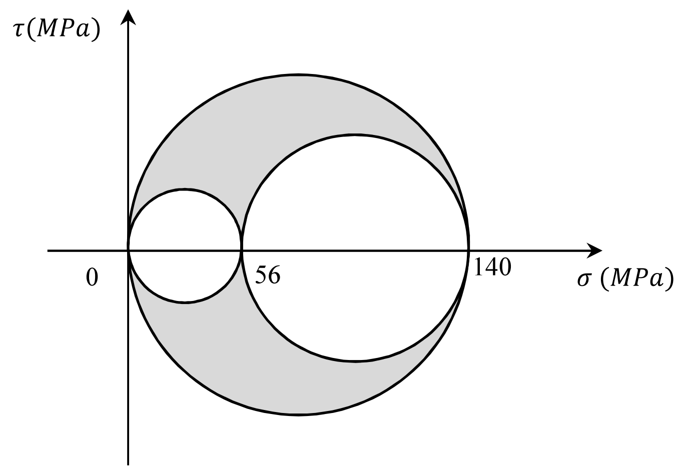
Onde:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{0{,}4.280}{1{,}4.0{,}2} GPa = 400\ GPa$$
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{280}{2.1{,}4} GPa = 100\ GPa$$

Daí:

$$\sigma_1 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2G\varepsilon_1 = \frac{(400.140 + 200.420)}{1000} MPa = 140\ MPa$$
$$\sigma_2 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2G\varepsilon_2 = \frac{(400.140 + 0)}{1000} MPa = 56\ MPa$$
$$\sigma_3 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2G\varepsilon_3 = \frac{(400.140 - 200.280)}{1000} MPa = 0\ MPa$$

Os círculos de Mohr das tensões ficam então dados por: (1,0)



Do exposto verifica-se que a maior tensão de cisalhamento, considerando-se todos os planos que passam pelo ponto será:

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 70MPa$$ (0,5)

A máxima tensão de cisalhamento ocorre sempre em planos cujas normais formam 45 entre as direções principais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_3$. Neste caso, como as direções principais de tensão e de deformação são as mesmas, teremos:

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)_b$$

$\vec{n}_3 = (0,0,1)_b$

Assim, a máxima tensão de cisalhamento ocorre nos planos cujas normais são: (0,5)

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{n}_1 + \vec{n}_3}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) . \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

e

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{n}_1 - \vec{n}_3}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right) . \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

d) Para materiais com comportamento dúctil podemos utilizar o Critério de Tresca (critério da máxima tensão de cisalhamento) ou o Critério de Von Mises (critério da máxima energia específica de distorção). O primeiro fornece resultados mais conservativos e, portanto, será o critério escolhido. Neste caso, o coeficiente de segurança com relação ao início de escoamento no ponto será: (1,0)

$$(CS) = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{350}{140} = 2,5$$