Schroedinger, cujo significado é o de dar a probabilidade de um curso definido do processo mecânico. Se, por exemplo, a amplitude da onda condutora for zero num certo ponto do espaço, isto significa que a probabilidade de encontrarmos o elétron nesse ponto é praticamente nula".

Assim como na interpretação de Einstein da radiação não especificamos a localização exata de um fóton num dado instante, mas em vez disso especificamos, por meio de $\overline{\mathcal{E}^2}$, a probabilidade de encontrar um fóton numa certa região num dado instante, também na interpretação de Born não especificamos a localização exata de uma partícula em um certo instante, mas, em vez disso, especificamos, por meio de Ψ^2, a probabilidade de encontrar uma partícula em um dado ponto em um dado instante. Assim como estamos habituados a somar funções de onda ($\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$) para duas ondas eletromagnéticas superpostas cuja intensidade resultante é dada por $\mathcal{E}^2$, também vamos somar funções de onda para duas ondas de matéria superpostas ($\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi$) cuja intensidade resultante é dada por Ψ^2. Isto é, um *princípio de superposição* se aplica tanto à matéria quanto à radiação. Isto está de acordo com o fato experimental notável de que a matéria exibe propriedades de interferência e difração, um fato que não pode ser entendido com base nas idéias da mecânica clássica. Devido ao fato de que ondas podem se superpor tanto construtivamente (em fase) quanto destrutivamente (fora de fase), duas ondas podem se combinar ou para darem uma onda resultante de grande intensidade ou para se cancelarem, mas duas partículas clássicas de matéria não podem se combinar de forma a se cancelarem.

O estudante pode aceitar a lógica dessa fusão dos conceitos de onda e partícula, mas ainda assim perguntar se se faz necessária uma interpretação estatística ou probabilística. Foram Heisenberg e Bohr quem, em 1927, pela primeira vez mostraram quão essencial era o conceito de probabilidade para a união das descrições ondulatória e corpuscular da matéria e radiação. Vamos investigar esses assuntos nas próximas seções.

3-3 O PRINCÍPIO DA INCERTEZA

O uso de considerações probabilísticas não é estranho à física clássica. Por exemplo, a mecânica estatística clássica se utiliza da teoria de probabilidades. Entretanto, na física clássica as leis básicas (tais como as leis de Newton) são determinísticas, e a análise estatística é apenas um artifício prático para tratar sistemas muito complicados. De acordo com Heisenberg e Bohr, no entanto, a interpretação probabilística é fundamental em mecânica quântica, e deve-se abandonar o determinismo. Vejamos de que forma se chega a essa conclusão.

Na mecânica clássica, as equações de movimento de um sistema, conhecidas as forças que atuam sobre ele, podem ser resolvidas de forma a dar a posição e o momento de uma partícula para todos os valores do tempo. Tudo que é necessário saber é a posição e o momento precisos da partícula em um certo instante $t = 0$ (as condições iniciais), e assim o movimento futuro fica determinado de forma exata. Esta mecânica foi utilizada com grande sucesso no mundo macroscópico, por exemplo, na astronomia, para prever os movimentos subseqüentes de objetos em função de seus movimentos iniciais. Observemos, no entanto, que no processo de realizar observações o observador interage com o sistema. Um exemplo da astronomia contemporânea é a medição precisa da posição da Lua pela reflexão de radar. A posição da Lua é perturbada pela medida, mas, devido à sua grande massa, essa perturbação pode ser ignorada. Em uma escala um tanto menor, como por exemplo uma experiência macroscópica cuidadosamente planejada na Terra, tais perturbações também são normalmente pequenas, ou ao menos controláveis, e podem ser previstas acuradamente por cálculos convenientes. Portanto, uma hipótese naturalmente feita pelos físicos clássicos foi que para sistema microscópicos, a posição e o momento de um objeto, por exemplo um elétron, poderiam de maneira análoga ser determinados de forma precisa pelas observações. Heisenberg e Bohr questionaram essa hipótese.

A situação é algo semelhante à existente quando do nascimento da teoria da relatividade.

Os físicos falavam de intervalos de comprimento e intervalos de tempo, isto é, de espaço e tempo, sem se perguntarem criticamente como se poderia medi-los na realidade. Por exemplo, falavam da simultaneidade de dois eventos separados sem se perguntarem ao menos como alguém poderia fisicamente estabelecer uma simultaneidade. Na realidade, Einstein mostrou que a simultaneidade não era de forma alguma um conceito absoluto, como se supunha anteriormente, mas que dois eventos separados que eram simultâneos para um observador ocorriam em tempos diferentes para outro observador em movimento relativamente ao primeiro. A simultaneidade é um conceito relativo. Da mesma forma, então, devemos nos perguntar como na realidade medimos a posição e o momento.

Podemos determinar por meio de uma experiência real a posição e o momento no mesmo instante da matéria ou de radiação? A resposta dada pela teoria quântica é: não com precisão maior do que a que é permitida pelo *princípio da incerteza* de Heisenberg. Este princípio, também chamado princípio da indeterminação, tem duas partes. A primeira é relativa à medida simultânea de posição e momento. Ela afirma que uma experiência não pode determinar simultaneamente o valor exato de uma componente do momento, por exemplo p_x, de uma partícula e também o valor exato da coordenada correspondente, x. Em vez disso, a precisão de nossa medida está inerentemente limitada pelo processo de medida em si, de forma tal que

$$\Delta p_x \Delta x \geqslant \hbar/2 \tag{3-5}$$

onde o momento p_x é conhecido com uma incerteza de Δp_x, e a posição x no mesmo instante com incerteza Δx. Aqui $\hbar$ (leia h cortado) é um símbolo simplificado para $h/2\pi$, onde h é a constante de Planck. Isto é,

$$\hbar \equiv h/2\pi$$

Há relações correspondentes para as outras componentes do momento, ou seja, $\Delta p_y \Delta y \geqslant \hbar/2$, $\Delta p_z \Delta z \geqslant \hbar/2$, bem como para o momento angular. É importante notar que esse princípio não tem nada a ver com possíveis melhorias nos instrumentos que possam nos dar melhores determinações simultâneas de p_x e x. O que o princípio diz na realidade é que mesmo que tenhamos instrumentos ideais nunca poderemos obter resultados melhores do que $\Delta p_x \Delta x \geqslant \hbar/2$. Observemos também que está envolvido o *produto* de incertezas, de forma que, por exemplo, quanto mais modificarmos uma experiência para melhorarmos nossa medida de p_x, mais abrimos mão de poder determinar x precisamente. Se conhecemos p_x exatamente, nada sabemos a respeito de x (isto é, se $\Delta p_x = 0$, $\Delta x = \infty$). Portanto, *a restrição não é em relação à precisão com que p_x ou x podem ser medidas, mas em relação ao produto $\Delta p_x \Delta x$ numa medida simultânea de ambos.*

A segunda parte do princípio da incerteza está relacionada com a medida da energia E e do tempo t necessário à medida, como, por exemplo, o intervalo de tempo Δt durante o qual um fóton com incerteza na energia ΔE é emitido de um átomo. Neste caso,

$$\Delta E \Delta t \geqslant \hbar/2 \tag{3-6}$$

onde ΔE é a incerteza no nosso conhecimento da energia E de um sistema e Δt é o intervalo de tempo característico da rapidez com que ocorrem mudanças no sistema.

Mostraremos mais tarde que as relações de Heisenberg são conseqüência do postulado de de Broglie e de propriedades simples comuns a todas as ondas. Como o postulado de de Broglie é verificado pelas experiências que já discutimos, podemos dizer que o princípio da incerteza está baseado na experiência. Breve consideraremos a consistência do princípio com outras experiências. Notemos, entretanto, que é novamente a constante de Planck h que distingue os resultados quânticos dos clássicos. Se h, ou $\hbar$, fossem zero em (3-5) e (3-6), não haveria nenhuma limitação básica sobre nossas medidas, o que é o ponto de vista clássico. Mais uma vez é o fato de h ser pequeno que tira o princípio da incerteza do alcance de nossas experiências cotidianas. Isto é análogo ao que ocorre na relatividade, onde a pequenez da razão v/c nas situações macroscópicas tira a relatividade do alcance das experiências cotidianas. Em princípio, portanto, a física clássica tem validade limitada e a sua aplicação a sistemas microscópicos conduzirá a contradições com os resultados experimentais. Se não podemos determinar x e p simultaneamente, então não podemos especificar as condições iniciais do movimento de forma exata. Assim, não podemos determinar precisamente o comportamento futuro de um sistema. Em vez

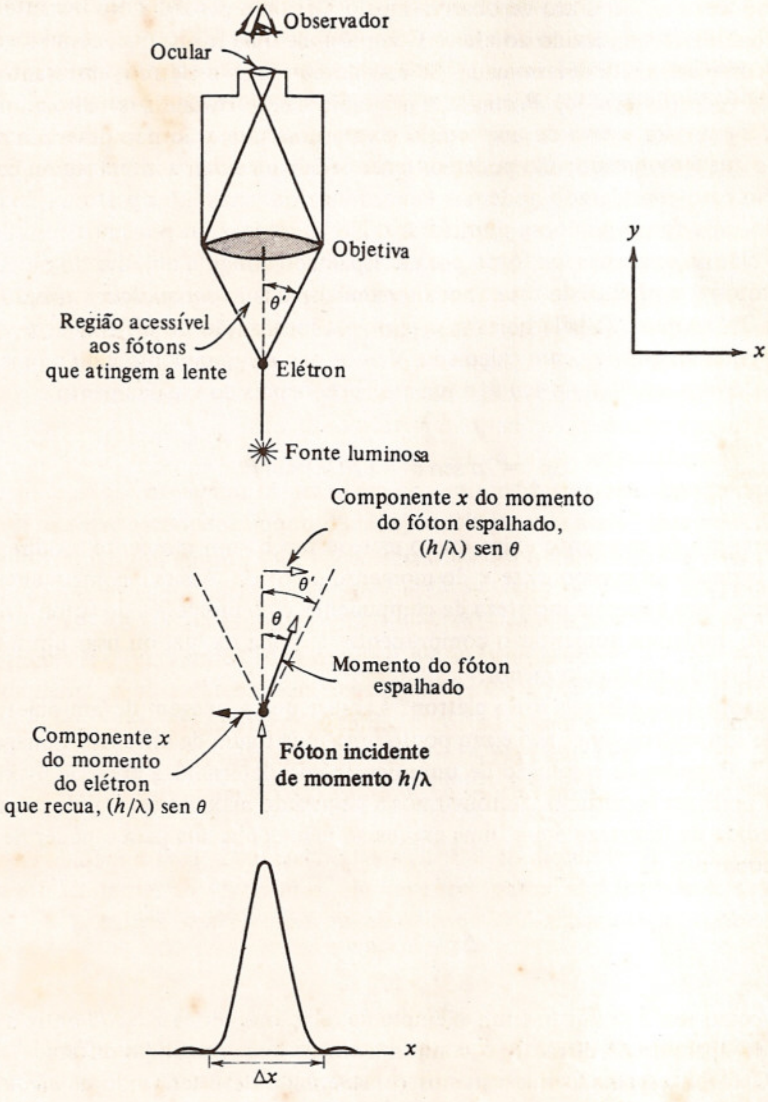

FIGURA 3-6. A experiência imaginária do microscópio de Bohr. *Ao alto*: O equipamento. *No meio*: O espalhamento de um fóton pelo elétron. *Embaixo*: A figura de difração da imagem do elétron vista pelo observador.

de fazer previsões determinísticas, podemos afirmar apenas os possíveis resultados de uma observação, dando as probabilidades relativas de sua ocorrência. Como o ato de observar um sistema o perturba de uma forma que não é completamente previsível, a observação altera o movimento do sistema fazendo com que ele não possa ser perfeitamente conhecido.

Vamos agora ilustrar a origem física do princípio da incerteza. Com a compreensão que ganharemos, poderemos apreciar melhor a demonstração formal dada na próxima seção. Inicialmente vamos usar uma experiência imaginária devida a Bohr para verificar (3-5). Digamos que queiramos medir com toda a precisão possível a posição de uma partícula "pontual", como um elétron. Para maior precisão usaremos um microscópio para "ver" o elétron, como é mostrado na figura 3-6. Para ver o elétron precisamos iluminá-lo, pois é na verdade o fóton de luz espalhado pelo elétron que é visto pelo observador. Já aqui, mesmo antes de qualquer cálculo, surge o princípio da incerteza. Só o ato de observarmos o elétron o perturba. No instante que iluminamos o elétron, ele recua, devido ao efeito Compton, de uma forma que, como logo veremos, não pode ser completamente determinada. Se não iluminarmos o elétron, entretanto, não seremos capazes de vê-lo (detectá-lo). Portanto o princípio da incerteza diz respeito ao processo de medida em si, e expressa o fato de que sempre existe uma interação não determinável entre o observador e o que é observado; não podemos fazer nada para evitar a interação ou para corrigir seus efeitos. No caso considerado podemos tentar reduzir ao máximo a perturbação causada ao elétron usando uma fonte luminosa muito fraca. No caso extremo podemos considerar que é possível ver o elétron se apenas *um* fóton por ele espalhado atingir a objetiva do microscópio. O momento do fóton é $p = h/\lambda$. Este fóton pode ter sido espalhado *em qualquer direção* dentro da região angular $2\theta'$ subtendida pela objetiva a partir da localização do elétron. É por isso que a interação não pode ser previamente calculada. Vemos que a componente x do momento do fóton pode variar de $+p$ sen θ' a $-p$ sen θ' e sua incerteza depois do espalhamento é

$$\Delta p_x = 2p \operatorname{sen} \theta' = (2h/\lambda) \operatorname{sen} \theta'$$

A lei de conservação do momento exige que o elétron receba um momento na direção x igual em módulo à variação da componente x do momento do fóton. Assim a componente x do momento do elétron tem a mesma incerteza da componente x do momento do fóton. Observe que para reduzir Δp_x podemos aumentar o comprimento de onda da luz, ou usar um microscópio cuja objetiva subtenda um ângulo menor.

Mas e quanto à coordenada x do elétron? Lembre que a imagem de um objeto pontual, vista através de um microscópio, não é um ponto, mas uma figura de difração; a imagem do elétron é "difusa". O poder de resolução de um microscópio determina a precisão máxima com a qual o elétron pode ser localizado. Se tomarmos a largura do máximo central da difração como sendo uma medida da incerteza em x, uma expressão bem conhecida para o poder de resolução de um microscópio nos dá

$$\Delta x = \lambda / \operatorname{sen} \theta'$$

(Observe que, como sen $\theta \simeq \theta$, isto é um exemplo da relação genérica $a \simeq \lambda/\theta$ entre a dimensão característica do aparelho de difração, o comprimento de onda das ondas difratadas e o ângulo de difração.) O fóton espalhado que estamos considerando deve ter vindo de *algum lugar* de uma região com essa largura centrada no eixo do microscópio, de forma que a incerteza na localização do elétron é Δx. (Não podemos ter certeza do local exato de origem de cada fóton embora após um grande número de repetições da experiência os fótons produzam a figura de difração mostrada anteriormente.) Observe que para diminuir Δx podemos usar luz com comprimentos de onda mais curtos, ou um microscópio cuja objetiva subtenda um ângulo maior.

Se tomarmos agora o produto das incertezas verificamos que

$$\Delta p_x \Delta x = \left(\frac{2h}{\lambda} \text{sen}\,\theta'\right)\left(\frac{\lambda}{\text{sen}\,\theta'}\right) = 2h \tag{3-7}$$

que concorda razoavelmente com o limite mínimo $\hbar/2$ fixado pelo princípio da incerteza. Não podemos *simultaneamente* tornar Δp_x e Δx tão pequenos quanto queiramos, pois o procedimento que diminui um deles aumenta o outro. Por exemplo, se usarmos luz de pequeno comprimento de onda (como raios γ) para reduzir Δx através de uma melhor resolução, aumentamos o recuo Compton do elétron e conseqüentemente Δp_x, e vice-versa. De fato, o comprimento de onda λ e o ângulo θ' subtendido pela objetiva sequer aparecem no resultado. Na prática, uma experiência dá resultados piores do que (3-7) sugere, pois esse resultado representa a situação mais ideal possível. No entanto, chegamos a ele a partir de fenômenos físicos perfeitamente mensuráveis, como o efeito Compton e o poder de resolução de uma lente.

Este resultado não deve parecer misterioso ao estudante. Resulta diretamente da quantização da radiação. Deveremos ter no mínimo um fóton iluminando o elétron, ou então absolutamente nenhuma iluminação; e mesmo um único fóton carrega um momento $p = h/\lambda$. É esse fóton espalhado que realiza a interação necessária entre o microscópio e o elétron. Essa interação perturba a partícula de uma forma que não pode ser exatamente prevista ou controlada. Como resultado, as coordenadas e momento da partícula não podem ser completamente conhecidos após a medida. Se a física clássica fosse válida, então, como a radiação é considerada contínua em vez de granular, poderíamos reduzir a iluminação a níveis arbitrariamente pequenos e dar ao elétron um momento arbitrariamente pequeno ao mesmo tempo usando comprimentos de onda arbitrariamente pequenos para obter uma resolução "perfeita". Em princípio não haveria nenhum limite mínimo simultâneo para a resolução e o momento transferido, e não existiria nenhum princípio de incerteza. Mas isto não pode ser feito; o fóton é indivisível. Novamente vemos, a partir de $\Delta p_x \Delta x \geqslant \hbar/2$, que a constante de Planck é uma medida da menor perturbação não controlável que distingue a física quântica da física clássica.

Vamos agora considerar (3-6), que relaciona as incertezas na energia e no tempo. Para o caso de uma partícula livre podemos deduzir (3-6) de (3-5), que relaciona posição e momento, da seguinte maneira. Considere um elétron movendo-se ao longo do eixo x com energia $E = p_x^2/2m$. Se p_x tem uma incerteza Δp_x, então a incerteza em E é dada por $\Delta E = (p_x/m)\Delta p_x = v_x \Delta p_x$. Aqui v_x pode ser interpretado como a velocidade de recuo ao longo de x do elétron que é iluminado em uma medida da posição. Se o intervalo de tempo necessário para a medida é Δt, então a incerteza em sua posição x é $\Delta x = v_x \Delta t$. Combinando $\Delta t = \Delta x / v_x$ e $\Delta E = v_x \Delta p_x$, obtemos $\Delta E \Delta t = \Delta p_x \Delta x$. Mas $\Delta p_x \Delta x \geqslant \hbar/2$. Portanto

$$\Delta E \Delta t \geqslant \hbar/2$$

EXEMPLO 3-3

Verificou-se que a velocidade de um projétil (m = 50 g) e a velocidade de um elétron (m = 9,1 x 10^{-28} g) são iguais a 300 m/s, com uma incerteza de 0,01% . Com que precisão fundamental poderíamos ter localizado a posição de cada um, em uma medida simultânea com a da velocidade?