

2.1 Momentos

Tratando nesta seção apenas um dos exemplos de estatística visto em aula com maiores esclarecimentos.

Primeiramente, trata-
mos um desdobramen-
to da independên-
cia entre as VAs i.i.d.
(independentes e identi-
camente distribuídas)
da sequência de
experimentos.

Da independência
entre $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$
temos, dentre outras,
a condição de fato-
ração das fdp's con-
juntas do par de
VAs no produto das
respetivas fdp's

marginais. Isto é,
para $i \neq j$ com i, j
 $\in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

$$p_{x_i x_j}(x_i, x_j) = p(x_i) p(x_j)$$

e o momento de
2ª ordem cruzado

$$E[X_i X_j] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j$$

$$P_{X_i X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_i P_i(x_i) dx_i$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_j P_j(x_j) dx_j$$

Pela distribuição
idêntica, as médias
são iguais. Seja
 μ a média comum.

Assim, temos

$$E[X_i X_j] = \mu^2$$

Como consequência

a covariância, momento
centrado cruzado de
2ª ordem, σ^2

$$\text{cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j] \\ - E[X_i] E[X_j]$$

$$= \mu_x^2 - \mu_x \cdot \mu_x$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$$

para $i \neq j$.

Se X_i, X_j tiverem
médias nulas, tam-
bém

$$E[X_i X_j] = 0$$

como acontece

Quando X_i e X_j representam VAB associada a amostras de sinais de voz. Mas, no caso geral,

$$E[X_i X_j] = \mu_x^2$$

Isto posto, pros

Seguimos com a análise do viés do estimador da variância $\hat{\sigma}_x^2$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_x)^2$$

A média populacional deste estimador é dada por

$$E \hat{\sigma}^2(0) = \frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(E X_i^2 - 2 E X_i M_x + E M_x^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (A_i - B_i + C)$$

Seendo

$$A_i = EX_i^2$$
$$= EX_i^2$$

pela distribuição
idêntica,

$$B_i = E[X_i \hat{\mu}_x]$$
$$= \frac{1}{n} EX^2 + \frac{n-1}{n} \mu_x^2$$

$$\begin{aligned}
 C &= E \hat{\mu}_x^2 \\
 &= E \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} E[x_i x_j] \\
 &= \frac{1}{n^2} \left(n E X^2 + (n^2 - n) \mu_x^2 \right)
 \end{aligned}$$

porque o somatório

duplo consiste em n^2 parcelas, sendo n delas produtos da mesma variável no argumento de $E[\cdot]$. Assim,

$$C = \frac{1}{n} EX^2 + \frac{n-1}{n} \mu_x^2$$

É interessante notar que

$$E \hat{\mu}_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} + \mu_x^2$$

ou seja, $\hat{\mu}_x$ é uma estatística não-enviciada de μ_x e tem variância ou espalhamento n vezes menor.

Substituindo A_i, B_i
 $\in \mathbb{C}$, obtemos

$$E \hat{\sigma}_x^{2(0)} = \frac{1}{n} [n EX^2 - 2 EX^2 - 2(n-1) \mu_x^2 + EX^2 + (n-1) \mu_x^2]$$

ou

$$\begin{aligned}
 E[\hat{\sigma}_x^2(0)] &= \\
 &= \frac{1}{n} [(n-1)(E[X^2] - \mu_x^2)] \\
 &= \frac{n-1}{n} \sigma_x^2
 \end{aligned}$$

ou seja, $\hat{\sigma}_x^2(0)$ não converge para σ_x^2 , é enviesado. Entre-

tanto, para $n \rightarrow \infty$,
 $\hat{\sigma}_x^2(0)$ converge para
o valor desejado

Diz-se que $\hat{\sigma}_x^2(0)$
é assintoticamente
não-enviesado.

Por outro lado, um
estimador alterna-

tivo da variância
que é não-enviesado

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \hat{\mu}_x)^2.$$