

CAPÍTULO 4. A NATUREZA DA TURBULÊNCIA

4.1 Turbulência, Ordem e Caos: Algumas Considerações Filosóficas

Os conceitos de **ordem**, **desordem** e **caos** são muitas vezes mal definidos quando aplicados à turbulência em escoamentos.

Em Termodinâmica desordem está associada a entropia do sistema (Segunda Lei da Termodinâmica) e a maximização da **desordem** está associada à evolução do sistema. Não se pode estabelecer uma analogia direta quando se trata da evolução de escoamento laminar para turbulento. A literatura é rica em exemplos fenomenológicos mostrando que no caminhamento para a transição, a partir das perturbações lineares, formam-se estruturas de coerência, que são caracterizadas por organização espacial, ou por certo padrão de **ordem**. Essas estruturas de coerência devem ser consideradas como parte do processo turbulento, mas sua previsibilidade no tempo e no espaço não é possível, apesar do considerável grau de **ordem**. É errôneo, portanto, associar o conceito de imprevisibilidade com desorganização espacial. Portanto um escoamento é turbulento porque é imprevisível no espaço (posição no espaço) e não porque é simplesmente um movimento desordenado. Sendo assim, a análise estatística da turbulência continua sendo válida, tendo em vista a imprevisibilidade espacial. Essas idéias não são novas e *Lucrecius* já as usava ao procurar interpretar o **Universo** (apud SERRES, 1967). Em outras palavras, estruturas coerentes emergem do caos sob a ação de perturbações externas. Ficamos, portanto, com a posição de John Lumley (ver GEORGE E ARNDT, 1989) ao defender a importância da análise estatística no estudo da turbulência, o que pode ser combinado com a idéia de coerência de estruturas e com a aplicação da teoria dos sistemas dinâmicos.

As considerações acima, de caráter até filosófico, implicam que no estudo da Turbulência, não se pode aceitar cegamente nenhuma afirmação. *Não há um caminho único para a verdade absoluta, ou há?*

4.2. Definição de Turbulência

No capítulo 2 apresentou-se uma primeira definição de turbulência de acordo com Corrsin (DAVIDSON, 2007): "A turbulência em um escoamento incompressível

corresponde a uma distribuição espacialmente complexa de vorticidade que é adveccionada aleatoriamente de acordo com a equação 2.34 ou 2.35. O campo de vorticidade é aleatório no espaço e no tempo, e exibe uma ampla faixa de distribuição contínua de escalas de comprimento e tempo". Essas escalas de turbulência estão associadas ao que se chama na literatura de turbilhões ou *eddies*.

Por outro lado, argumenta-se na literatura científica que a equação de Navier-Stokes contém toda a informação da turbulência, ou, em outras palavras, para se resolver um escoamento turbulento basta resolver a equação de Navier-Stokes (FOIAS ET AL, 2001). É por isso que uma das prioridades científicas do século XXI é a solução da equação de Navier – Stokes para qualquer número de Reynolds. Enquanto essa meta não é alcançada preferimos definir um escoamento com natureza turbulenta, como aquele que apresenta as seguintes características, conforme discutido em Tennekes e Lumley (1987):

- **Irregularidade:** Os escoamentos turbulentos são irregulares (ou aleatórios), o que torna difícil a análise determinística. Poderíamos aperfeiçoar esse conceito, dizendo que o escoamento turbulento deve ser imprevisível, no sentido que as evoluções das perturbações (amplificações) no decorrer do tempo não possam ser previstas, embora um razoável grau de coerência seja mantido no escoamento (ver figura 4.1).
- **Difusividade:** A difusividade da turbulência, que causa um rápido processo de mistura aumentando as taxas de transferência de quantidade de movimento, calor e massa, é uma outra importante característica dos escoamentos turbulentos.
- **Número de Reynolds Altos:** a turbulência normalmente se origina a partir das instabilidades geradas nos escoamentos laminares, quando o número de Reynolds torna-se grande. Essas instabilidades estão relacionadas com a interação entre os termos viscosos e não-lineares das equações do movimento.



Figura 4.1. Visualização da instabilidade de um jato axissimétrico desenvolvendo-se para um escoamento turbulento. (Fonte: VAN DIKE, 1982)

- Flutuações de Vorticidade Tridimensional:** A turbulência é rotacional e tridimensional, caracterizando-se, portanto, por altos níveis de flutuações de vorticidade. Dessa forma, a dinâmica da vorticidade tem um papel muito importante na descrição dos escoamentos turbulentos. Um importante mecanismo de manutenção de vorticidade, (“vortex-stretching”), em princípio, está ausente nos escoamentos bidimensionais. Novos conceitos têm surgido com relação a esse assunto. Nas simulações numéricas das instabilidades de Kelvin-Helmholtz ficou claro que existem estruturas coerentes que se formam e que mantêm certa coerência no caminhar. A dinâmica dessas estruturas é essencialmente bidimensional. É importante salientar que o conceito de coerência está associado ao fato que as estruturas são encontradas com uma forma aproximadamente semelhante depois de certo intervalo de tempo, e a certa distância da origem, no entanto, podemos notar que essas estruturas, ainda assim, são imprevisíveis, como mostra a figura 4.2. Nessa figura, estão mostrados os contornos de vorticidade, a partir de um cálculo numérico bidimensional de uma camada de mistura variando temporalmente, conforme Staquet et al em 1985 (apud LESIEUR, 1990). A evolução do escoamento no tempo é apresentada para quatro perturbações iniciais independentes, superpostas ao perfil de velocidade. É importante observar que existem diferenças de instante para instante.

Portanto a rapidez no desenvolvimento de técnicas numéricas e de visualização de escoamentos turbulentos tem provocado mudanças na interpretação da dinâmica da turbulência, o que não significa que as teorias anteriores se tornaram obsoletas, mas devem ser interpretadas a partir dos novos conhecimentos.

- **Dissipação:** Os escoamentos turbulentos são dissipativos, ou seja, as tensões viscosas realizam trabalho de deformação que aumenta a energia interna do fluido à custa da energia cinética de turbulência. A turbulência necessita, portanto, de um contínuo suprimento de energia, caso contrário ela decai rapidamente.
- **Contínuo:** A turbulência é um fenômeno que se enquadra dentro da Mecânica dos Meios Contínuos. Mesmo as menores escalas dos escoamentos turbulentos são significativamente maiores que as escalas do movimento molecular.
- **Turbulência Uma Propriedade do Escoamento:** A turbulência não é uma propriedade física do fluido, mas sim, do escoamento. Em outras palavras, se o número de Reynolds fosse suficientemente grande, a dinâmica do escoamento turbulento seria a mesma, qualquer que fosse o fluido e sua representação seria através do espectro completo de turbilhões.

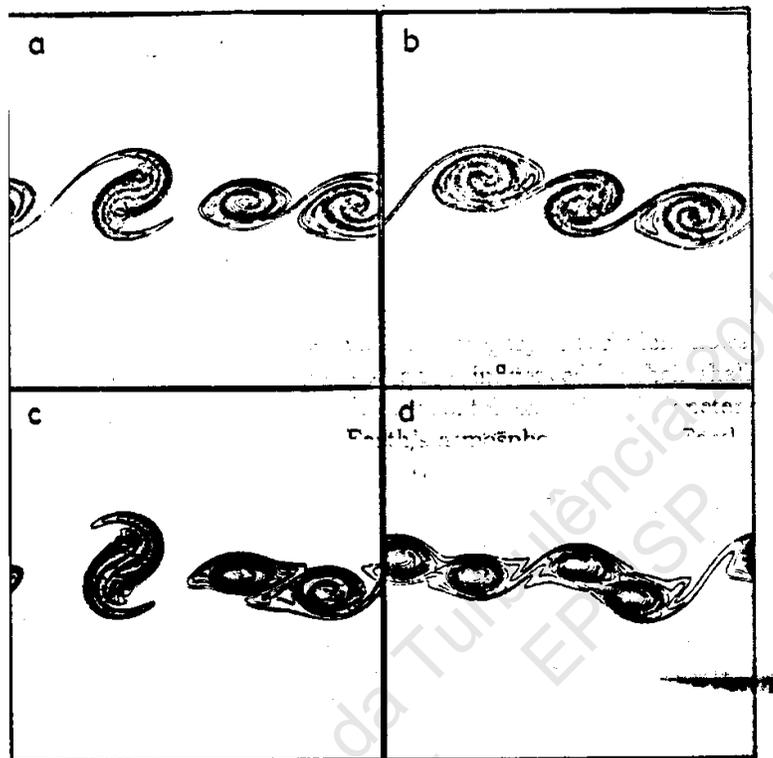


Figura 4.2. Contorno de vorticidade de um escoamento bidimensional em camada de mistura. (Fonte: LESIEUR, 1990)

Uma forma clássica para meditarmos sobre a turbulência seria observamos o fluxo de água em torno de um leito rochoso assentado em um pequeno córrego, conforme reproduzido na *figura 4.3* extraída de Briggs & David Peat (1989). A observação da figura mostra um movimento laminar inicial da água em torno do leito rochoso para vazões baixas, sendo que as linhas de corrente passam por esse leito sem divergirem. Com o aumento da vazão as velocidades são maiores e aparecem vórtices estacionários logo a jusante do leito rochoso. Aumentando-se ainda mais a vazão e, conseqüentemente a velocidade, os vórtices começam a se destacar formando-se uma esteira de vórtice (esteira de Von Kármán). Com vazões ainda mais altas rompe-se o movimento periódico de vórtices, e o escoamento a jusante da rocha torna-se turbulento, com muitos graus de liberdade. Da Vinci já observava, no período do renascimento, que o processo de geração de turbulência em torno de um obstáculo em um rio, ocorria com uma intensificação do processo de vorticidade e uma multiplicação de escalas de vórtices em fragmentos cada vez menores.



Figura 4.3. Representação esquemática da formação de um escoamento turbulento de água em torno de um leito rochoso de um córrego. (Fonte: BRIGGS AND DAVID PEAT, 1989)

Pode-se dizer que o escoamento turbulento envolve a interação de várias escalas de movimento de turbilhões (*eddies*). Embora seja difícil uma definição precisa de

escala de turbilhão (*eddy*), a idéia intuitiva, todavia, é bastante clara, como já observava Da Vinci (ver *figuras 1.4 e 1.5*).

4.3. O Conceito de Turbulência Plena e Livremente Desenvolvida

A turbulência é plenamente desenvolvida quando está livre de se desenvolver sem a imposição de *constraints* ao escoamento, entendendo-se como *constraints* fronteiras de qualquer tipo, forças externas ou a própria viscosidade, que definem as maiores escalas de turbulência. Dessa forma, só poderíamos pensar em uma estrutura universal da turbulência nas pequenas escalas, quando a viscosidade não tem um papel importante na dinâmica dessas escalas, o que ocorre na camada inercial dos escoamentos turbulentos com altos números de Reynolds. Nenhum dos escoamentos turbulentos mais comuns podem ser considerados desenvolvidos ou universais, mesmo para altos números de Reynolds, em termos das maiores escalas (escalas energéticas), pois em todos esses casos, as condições de turbulência são estabelecidas pelas condições iniciais e de fronteira.

Frisch (1995) estabelece a diferença entre turbulência e caos introduzindo o conceito de uma escala H . Sendo H uma escala imposta por *constraints* em um escoamento, existe um movimento aleatório significativo em escalas muito menores que H e quanto maiores os valores de Re , maiores serão as taxas de deformação e de vorticidade das menores escalas, que nesses casos são maiores que as taxas relativas ao movimento das maiores escalas. É isso que caracteriza a **Turbulência** e a diferença do **Processo Caótico**, caracterizado para menores valores de Re , onde, a taxa de deformação das menores escalas é menor do que das maiores escalas, ocorrendo, nesse caso, dissipação direta, não podendo a estrutura das menores escalas ser considerada universal.

A turbulência de grade gerada em um túnel de vento é normalmente referenciada como um caso clássico de turbulência livre, visto que nesse caso não há interação entre o escoamento médio gerado pelas malhas, que é aproximadamente uniforme, e a turbulência propriamente dita. O problema é que nesses ensaios o número de Reynolds não é suficientemente alto para reproduzir a camada inercial.

A figura 4.4 extraída de Davidson (2007) mostra os estágios de escoamento a jusante de uma sistema de grade montado em um túnel de vento. O estágio (i) representa a transição para a turbulência desenvolvida com a formação de pares de vórtices discretos a jusante das barras da grade. O estágio (ii) mostra a turbulência desenvolvida evoluindo livremente, cujos turbilhões menores decaem mais rapidamente e, depois de certo intervalo de tempo, percebe-se que a turbulência é dominada pelas maiores escalas, com turbilhões com rotação mais lenta e com menores frequências (estágio iii).

A turbulência na atmosfera terrestre e nas atmosferas geofísicas (Júpiter, Saturno), que se originam com grandes escalas integrais são as que mais se aproximam de uma turbulência plena e universalmente desenvolvida.

Na turbulência desenvolvida em *shear-flows* com predominância de um escoamento médio unidimensional (escoamento em camada limite, esteiras, jatos submersos, escoamentos em condutos) existe uma interação contínua entre o escoamento médio e a turbulência, diferentemente do que ocorre na turbulência de grade.

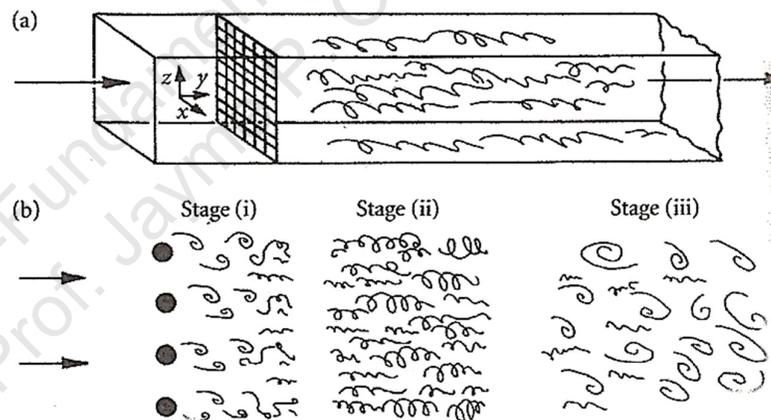


Figura 4.4. Visualização dos estágios de turbulência de grade em túnel de vento (Fonte: DAVIDSON, 2007).

4.4. Métodos de Análise de Escoamentos Turbulentos

Apresentam-se, a seguir, alguns dos métodos de análise de turbulência em escoamentos:

4.4.1. Método Determinístico

Se em um determinado escoamento turbulento conhecem-se as posições iniciais e as velocidades num dado instante (t_0) para todas as escalas do escoamento, então existe somente um estado possível para o escoamento em um instante qualquer $t > t_0$. Matematicamente, significa utilizar a equação de Navier-Stokes para resolver o escoamento, o que conduz a uma única solução em um determinado instante. Sabe-se que isto hoje é impossível visto que para altos valores de Reynolds com pequenas modificações nas condições iniciais de perturbação ocorrem diferenças significativas nas soluções, como discutido anteriormente. Aplicações de técnicas de modelagem numérica como *LES – Large Eddies Simulation* tem permitido a previsão da forma a partir da reprodução direta das maiores escalas de turbulência, mas não a previsão da fase ou da posição exata dessas estruturas.

4.4.2. Método Estatístico

Na publicação *Advances in Turbulence* (ver *GEORGE & ARNDT, 1989*) John Lumley rebateu algumas posições dogmáticas dos deterministas da turbulência. Dentre as afirmações lapidárias discutidas por Lumley encontram-se as seguintes: (a) “*You can’t learn anything about turbulence from averaged equations*”. (b) “*We looked and looked for a typical eddy and finally found one*”. Com relação a primeira afirmação (a), Lumley rebate com outra frase: “*You can’t learn anything about turbulence from the usual equations averaged the usual way*”, argumentando portanto a necessidade de determinação dos momentos de ordem superior do processo aleatório, muitas vezes de difícil determinação prática. Com relação a segunda frase, (b), Lumley afirma que é isto que acontece quando se abandona a estatística. O que é um turbilhão típico senão uma idealização que exige um tratamento estatístico!!

Portanto a análise estatística dos processos turbulentos constitui-se em uma forma imaginativa, podendo, inclusive, incluir idéias de estruturas de coerência e idéias provenientes da teoria de dinâmica de sistemas. Em outras palavras *não há uma única trajetória para a verdade absoluta, ou há?*

4.4.3. Análise Dimensional

A teoria de *Kolmogorov* de 1941 que será discutida a seguir, nada mais é do que uma série de relações obtidas com o auxílio da análise dimensional, sendo uma ferramenta muito importante para o estudo da turbulência.

4.5. A Teoria de Kolmogorov

Em 1941, o matemático russo Andrei Nikolaevich Kolmogorov apresentou um trabalho que deu origem a uma nova teoria para o entendimento da turbulência, teoria essa que foi apresentada a partir da postulação das hipóteses básicas, mencionadas a seguir. A partir dessa data, ao longo de quase 70 anos, esta teoria tem sido discutida e algumas vezes contestada, principalmente por ser considerada pelos seus críticos, não como um teoria universal, mas sim, como um conjunto de hipóteses baseadas na análise dimensional. Frisch (1995) discute em detalhe essa teoria tratada por ele como *K41*.

4.5.1. A Hipótese de Isotropia Local de Kolmogorov

“Para números de Reynolds suficientemente altos, os movimentos das pequenas escalas de turbulência ($\lambda < \lambda_0$) são estatisticamente isotrópicos”.

Portanto esta hipótese está associada com a isotropia nas pequenas escalas de turbulência, definida por *Kolmogorov* como isotropia local. Nas grandes escalas, todavia, o escoamento é tipicamente anisotrópico e influenciado pelas condições de fronteira do escoamento. *Kolmogorov* argumentou em sua teoria que como a energia turbulenta extraída do escoamento médio é transferida em cascata das maiores escalas para as menores escalas (o conceito de cascata de turbilhões será apresentado a seguir) a informação sobre a geometria das maiores escalas, determinada pelo escoamento médio e pelas condições de fronteira, é perdida no processo de transferência em cascata e, em consequência, o movimento das pequenas escalas de turbulência é estatisticamente independente do movimento das grandes escalas do escoamento (é gerido por altas frequências, ou altos números de onda). Em outras palavras, o movimento de pequena escala tem uma pequena distância a percorrer de maneira a se ajustar às mudanças circunstanciais; tal ajuste pode ocorrer em um curto espaço de tempo comparado com o

tempo para o decaimento, e, portanto, as mudanças podem ser consideradas independentes do *constraint* que gerou a turbulência.

Essa hipótese, conhecida como “hipótese de equilíbrio universal”, é tanto mais verdadeira quanto maior o número de Reynolds, quando o movimento nas pequenas escalas seria universal e semelhante para qualquer escoamento turbulento com altos valores de Reynolds, independentemente do fluido escoado.

4.5.2. A Primeira e a Segunda Hipótese de Similaridade de Kolmogorov

Segunda Hipótese de Similaridade de Kolmogorov: “Em todo escoamento turbulento com número de Reynolds suficientemente alto, sob o ponto de vista estatístico, o movimento das pequenas escalas é única e universalmente determinado pela escala integral l e pela taxa média de dissipação de energia ϵ , sendo independente da viscosidade ν ”.

Define-se ϵ como a taxa de dissipação de energia por unidade de massa, que é determinada pela energia que provém das maiores escalas e que vai sendo transferida às escalas decrescentes até chegar às escalas dissipativas, o que implica que ϵ pode ser avaliado a partir do movimento das escalas energéticas. Pressupõe-se, portanto, através desse modelo, que a dissipação direta das maiores escalas é desprezível. Em termos dimensionais, tem-se que no sistema internacional a unidade de ϵ corresponde, portanto, a m^2s^{-3} .

$$[\epsilon] = \frac{[E]}{[TM]} = \frac{[FL]}{[TM]} = \frac{[MLT^{-2}L]}{[TM]} = [L^2T^{-3}]$$

Ao se conceituar a cascata de energia o termo de importância central é a taxa de transferência de energia dos maiores turbilhões para os menores, o que é expresso por:

$$\frac{[u(l)]^2}{\tau^3(l)} = \epsilon \quad (4.1)$$

Portanto, de acordo com a segunda hipótese de Kolmogorov, universaliza-se o espectro de turbulência na zona inercial, podendo ser representado pela seguinte equação:

$$E(\kappa) = C\epsilon^{2/3}\kappa^{-5/2} \quad (4.2)$$

sendo k , o número de onda (inverso do comprimento de onda) relativo a escala de turbulência e C uma constante universal adimensional, normalmente adotada igual a unidade. *Landau e Lifshitz* contestaram em seu livro de Mecânica dos Fluidos, cuja primeira edição foi lançada em 1944, o caráter de universalidade da Teoria de Kolmogorov (ver LANDAU & LIFSHITZ-1989), mas suas contestações não resistiram a análise da crítica e embora a equação (4.2) seja independente das equações do movimento, ela tem sido plenamente verificada, seja através de experimentos físicos, seja através de experimentos numéricos.

A figura 4.5 é uma representação teórica dos espectros de número de onda $E(k)$ e $k^2 E(k)$ sendo que a zona inercial se forma entre os números de onda k_1 e k_2 .

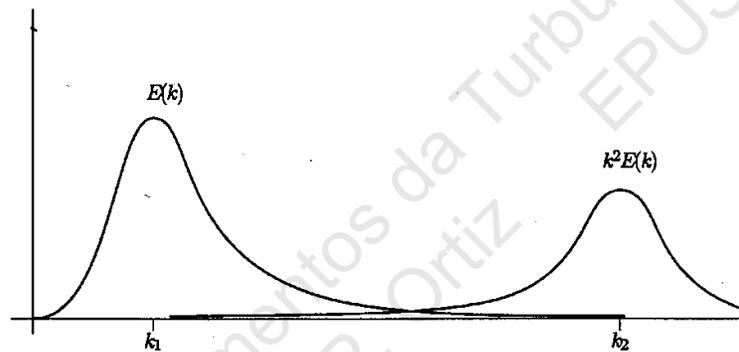


Figura 4.5 Representação teórica dos espectros de número de onda $E(k)$ e $k^2 E(k)$. (Fonte: DAVIDSON, 2007).

Primeira Hipótese de Similaridade de Kolmogorov: “Em todo escoamento turbulento com número de Reynolds suficientemente altos, mas não infinitos, sob o ponto de vista estatístico, o movimento das pequenas escalas tem uma forma universal que é unicamente determinado pela viscosidade do fluido ν , pela taxa de dissipação por unidade de massa ϵ e pela escala integral l ”. A partir de uma simples interpretação dimensional o espectro de energia neste caso (ver BARENBLATT E CHORIN, 1998), resulta:

$$F(\kappa) = 2R_e^{-1} \kappa^2 E(k) \quad (4.3)$$

Para altos valores de Re pode-se esperar altos valores de κ antes que o espectro de dissipação $\kappa^2 E(\kappa)$ seja significativo. Na figura 4.5 κ_1 corresponde a um número de

onda relativo à escala integral e κ_2 corresponde a um número de onda relativo a escala dissipativa , sendo a região entre κ_1 e κ_2 conhecida como zona inercial.

4.6. A Fenomenologia do Escoamento Turbulento

A aplicação da Teoria de Kolmogorov pressupõe escoamento turbulento desenvolvido com independência estatística nas pequenas escalas. Sob o ponto de vista fenomenológico tem-se associado ao estudo dos escoamentos turbulentos plenamente desenvolvidos imagens mentais e representativas da dinâmica e da física do escoamento. Dentro dessa ótica se enquadra o conceito de *cascata de turbilhões*, atribuído a Lewis Fry Richardson em 1922 (*apud FRISCH, 1995*) que se inspirou no movimento das nuvens e no verso de Jonathan Swift:

*So, nat'ralists observe, a flea
Hath smaller fleas that on him prey;
And these have smaller yet to bite 'em,
And so proceed ad infinitum.
Thus every poet, in his kind,
Is bit by him that comes behind.*

As duas últimas linhas desse poema, normalmente não são mencionadas nas publicações de turbulência, mas conforme sugere Frisch (1985) , poderiam ser também relevantes , se a palavra *poet* fosse substituída pela palavra *fluid dynamicist*.

A *figura 4.6* é uma representação esquemática da visão de Richardson incorporada pela Teoria de Kolmogorov.

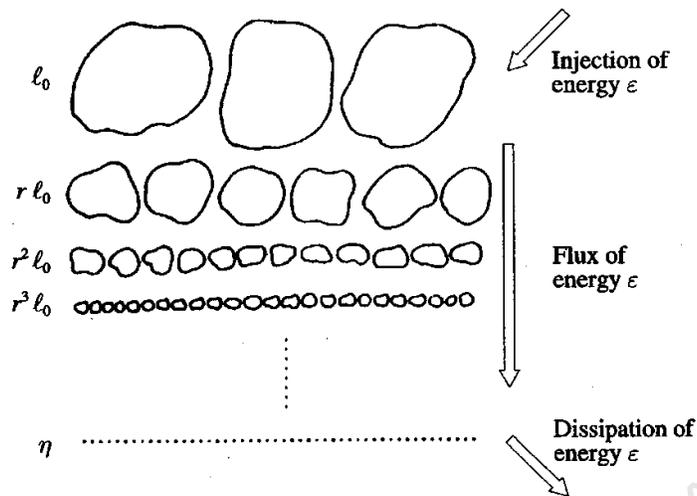


Figura 4.6. Representação esquemática da cascata de turbilhões do escoamento turbulento. (Fonte: FRISCH, 1995)

O fluxo em cascata representado através do espectro de energia ou de número de onda de um sinal turbulento caracteriza-se por três regiões: zona de produção da turbulência (grandes escalas), zona inercial (processo de transferência em cascata com menores escalas) e zona de dissipação (micro-escalas). A zona inercial, de acordo com a teoria, deve apresentar um decaimento dado por $k^{-5/2}$, o que tem sido verificado em diversos trabalhos experimentais.

Verifica-se que a energia é introduzida no topo da cascata com uma taxa de dissipação ϵ havendo um fluxo contínuo de energia das pulsações de grande escala (baixa frequência e alta amplitude de pulsação) para as pulsações de pequena escala (alta frequência e baixa amplitude de pulsação) até as pulsações de micro-escalas quando a energia cinética é dissipada em calor. Naturalmente não se deve interpretar esta figura literalmente: “turbilhões não tem necessariamente a forma apresentada no esquema e os menores turbilhões, muitas vezes, estão embebidos dentro dos maiores turbilhões”.

Uma leitura atenta das anotações de Leonardo da Vinci, (referenciadas em *Piumati 1894, fo.74, v – apud FRISCH, 1995*) revelam que ele já pensava em termos da teoria da cascata de turbilhões ao escrever:

Doue la turbolenza dellacqua sigenera
 Doue la turbolenza dellacqua simantiene plugho
 Doue la turbolenza dellacqua siposa

Cuja tradução para o inglês é apresentada abaixo:

Where the turbulence of water is generated.

Where the turbulence of water maintains for long.

Where the turbulence of water comes to rest.

A K41 não faz referência explícita às idéias de Richardson, mas em seu trabalho de 1962, Kolmogorov escreveu que as hipóteses de sua teoria foram fisicamente baseadas na idéia de cascata de Richardson (*apud Frisch, 1985*).

Portanto, o movimento turbulento, sob o ponto de vista qualitativo, pode ser considerado como resultante da superposição de movimentos (pulsações turbulentas) de diferentes escalas, entendendo-se aqui por escala o movimento de ordem de grandeza das distâncias sobre as quais a velocidade do movimento varia notavelmente. Dessa forma, poderíamos associar um número de Reynolds local para cada escala de turbulência ou turbilhão (o famoso *eddie* da literatura inglesa):

$$R_{e_\lambda} = \frac{v_\lambda \lambda}{\nu} \tag{4.4}$$

De acordo com a segunda hipótese de similaridade de *Kolmogorov* :

$\epsilon = \epsilon(u, l)$, que com a ajuda da análise dimensional resulta na seguinte função adimensional:

$$\epsilon = A \frac{u^3}{l} \tag{4.5}$$

sendo:

$A \rightarrow$ constante adimensional;

$u \rightarrow$ escala de velocidades associada a escala integral de turbilhão;

$l \rightarrow$ escala de comprimento dos maiores turbilhões (escala integral de comprimento).

Evidentemente que a análise dimensional não prevê o valor da constante de proporcionalidade, considerado igual a **1** nas aplicações práticas, sem maiores rigores teóricos.

Já, de acordo com a primeira hipótese de *Kolmogorov*, os únicos parâmetros importantes na descrição da turbulência nas pequenas escalas são:

$\epsilon \rightarrow$ taxa de dissipação de energia por unidade de massa, já definida, que corresponde à taxa com que a energia flui através da cascata;

$\nu \rightarrow$ viscosidade cinemática que termina com o processo da cascata.

Essa hipótese define as chamadas micro-escalas de *Kolmogorov*, que serão apresentadas a seguir.

Sob o ponto de vista prático, a hipótese de isotropia pressupõe valores iguais do desvio médio quadrático (*root mean square - RMS*) das flutuações do sinal turbulento nas três direções:

$$\begin{aligned} u &= U + u' \\ v &= V + v' \\ w &= W + w' \\ p &= P + p' \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\sqrt{u'^2} = \sqrt{v'^2} = \sqrt{w'^2} \tag{4.7}$$

hipótese difícil de se observar no dia a dia das medições de turbulência no mundo real.

4.7. O Conceito de Difusividade e de Viscosidade Turbulenta

4.7.1. Histórico

O transporte turbulento de quantidade de movimento pode ser entendido fazendo-se uma analogia com o transporte molecular, com os turbilhões de pequena escala fazendo o papel das moléculas e a escala integral fazendo o papel do caminho livre das moléculas da teoria molecular (*mean free path*). Esta visão foi apresentada por Prandtl

em 1925 quando introduziu o conceito de comprimento de mistura formulando o primeiro modelo de turbulência.

Na verdade, o conceito de viscosidade turbulenta como uma propriedade do escoamento e não uma propriedade do fluido no caso da teoria molecular é um conceito bastante antigo. Após a introdução do termo viscoso na equação da hidrodinâmica em 1823, resultando na equação de Navier-Stokes, a pergunta que se fazia na época era se o coeficiente de viscosidade era o mesmo em todo o lugar e neste sentido existem textos de Saint Venant de 1851, que foram ressaltados por Boussinesq em 1877. Boussinesq, que era aluno de Saint Venant, levou adiante a idéia de que a “turbulência aumentaria a viscosidade”.

Os trabalhos pioneiros de Saint Venant e de Boussinesq se apoiaram em observações experimentais em canais na metade do século XIX.

O desenvolvimento da aerodinâmica no começo do século XX levou ao redescobrimto das idéias de Saint Venant e Boussinesq.

Sob um ponto de vista mais fundamental, parece que a idéia de viscosidade turbulenta emergiu tendo em vista o fato de que a grande maioria dos escoamentos da natureza são turbulentos, de modo que o conceito de viscosidade molecular não era apropriado para a descrição dos escoamentos em geral. Por outro lado, no século XIX, a distinção conceitual entre “moléculas verdadeiras” e “fictícias” (*fluid balls*) (*ver SCHLICHTING, 1979*) não era muito clara, quando turbilhões (*eddies*) eram considerados como uma forma particular de moléculas.

4.7.2. A Analogia entre Difusividade (ou Viscosidade) Molecular e Turbulenta

4.7.2.1. Difusão Molecular

O processo de difusão molecular ocorre, por exemplo, quando há gradiente de temperatura em um sistema fluido que ocasiona a migração de moléculas de posições de maior temperatura para posições de menor temperatura. O processo de difusão molecular de calor é descrito na literatura pela Lei de Fourier e, analogamente, teríamos

a Lei de Newton da viscosidade para a transferência de quantidade de movimento e a Lei de Fick para a transferência de massa.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} = \gamma \nabla^2 \theta \quad (4.8)$$

onde: $\theta \rightarrow$ temperatura;

$\gamma \rightarrow$ coeficiente de difusividade térmica (L^2/T).

4.7.2.2. Difusão Turbulenta

Admitindo-se válida uma analogia entre o processo de difusão molecular e o processo de difusão turbulenta, conforme mencionado anteriormente, poder-se-ia admitir a seguinte equação para a difusão turbulenta:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \gamma_t \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} \quad (4.9)$$

onde: $\gamma_t \rightarrow$ coeficiente de difusividade turbulenta.

4.7.2.3. Exercício Aplicativo

O exercício apresentado abaixo, extraído de Tennekes & Lumley (1972), ilustra a ordem de grandeza de processos de difusões molecular e turbulenta.

Considere-se o caso de um ambiente com geometria quadrada, sujeito a um aquecimento pontual, conforme representado na figura e admita-se que não há nenhuma movimentação do ar atmosférico no interior desse ambiente. Determinar o tempo para a difusão de calor (molecular ou turbulenta) no interior do ambiente.

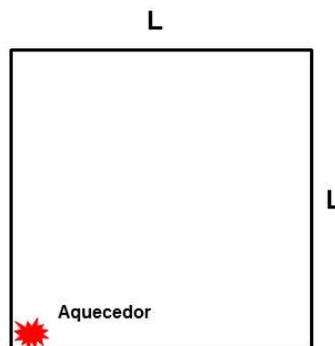


Figura 4.7 Representação esquemática de um ambiente fechado, com geometria quadrada, sujeito a um processo de aquecimento.

Solução:

Não havendo nenhuma movimentação do ar no ambiente, o processo de transferência de calor é governado pela equação da difusão molecular e considerando a aplicação da Lei de Fourier, sob o ponto de vista da análise dimensional, resulta:

$$\frac{\Delta\theta}{T_m} \approx \gamma \frac{\Delta\theta}{L^2}$$

$$T_m \approx \frac{L^2}{\gamma} \quad (4.10)$$

onde: $T_m \rightarrow$ escala de tempo de difusão molecular;

$L \rightarrow$ escala de comprimento (dimensão do ambiente).

Resolvendo-se numericamente, a partir dos dados de Tennekes & Lumley (1972):

$L = 5 \text{ m}$ e $\gamma = 0,20 \text{ cm}^2/\text{s}$, resulta:

$$\frac{(500)^2}{0,20} \approx 10^6 \text{ s} \approx 300h$$

o que mostra que a difusão molecular é muito ineficiente no processo de transferência de calor no ambiente em questão.

Se admitirmos agora que há movimentação de ar no ambiente, temos um processo de difusão turbulenta que passa a ser descrito pela equação 4.9, e cuja escala de tempo é dada por:

$$T_t \approx \frac{L}{u} \quad (4.11)$$

onde: $L \rightarrow$ escala de comprimento dos maiores turbilhões (escala integral);

$u \rightarrow$ escala de velocidade desses turbilhões (poderia estar associada ao desvio médio quadrático das flutuações turbulentas de velocidade);

$T_t \rightarrow$ escala de tempo turbulenta.

Numericamente, utilizando os dados de TENNEKES & LUMLEY (1972), tem-se para a estimativa de $u \approx 5 \text{ cm/s}$, o seguinte resultado:

$$T_t \approx \frac{L}{u} \approx \frac{5}{0,05} \approx 100s$$

o que implica:

$T_m \gg T_t \Rightarrow$ a difusão por movimento turbulento é muito mais rápida que a difusão por movimento molecular.

Portanto:

$$\frac{T_t}{T_m} \approx \frac{\frac{L}{u}}{\frac{L^2}{\gamma}} \approx \frac{\gamma}{uL} \quad (4.12)$$

Em termos de ordem de grandeza para o ar atmosférico:

$$\frac{\nu}{\gamma} \approx 0,73$$

$$\frac{\nu}{\gamma} \approx 1$$

O que significa que:

$$\frac{T_t}{T_m} \approx \frac{\nu}{uL} = \frac{1}{R_e}$$

$$\frac{T_m}{T_t} \approx R_e \quad (4.13)$$

de onde se conclui que o Número de Reynolds de um escoamento turbulento pode ser interpretado como uma relação entre a escala de tempo molecular e a escala de tempo turbulenta, o que seria uma alternativa a interpretação clássica do Número de Reynolds, como uma relação entre força de inércia e força viscosa atuantes no escoamento.

Finalmente considerando a equação 4.9 sob o ponto de vista da análise dimensional:

$$\frac{\Delta\theta}{Tt} \approx \gamma_t \frac{\Delta\theta}{L^2}$$

$$T_t \approx \frac{L^2}{\gamma_t} \quad (4.14)$$

Comparando-se as equações (4.11) e (4.14), resulta:

$$\gamma_i \approx uL \quad (4.15)$$

Portanto:

$$\frac{\gamma_i}{\gamma} \approx \frac{uL}{\gamma} \approx \frac{uL}{\nu} \approx R_e \approx \frac{v_i}{v} \quad (4.16)$$

O Número de Reynolds apresentado através da equação (4.16) é interpretado, portanto, como uma relação entre a viscosidade turbulenta (aparente) e a viscosidade molecular e, dentro desse conceito, poderíamos interpretar a condição de $R_e \rightarrow 1$ para os turbilhões muito pequenos tendendo as escalas moleculares.

4.8. Microescalas de Kolmogorov

Partindo-se do conceito de Número de Reynolds Local e utilizando-se as equações 4.4 e 4.5, temos:

$$Re_\lambda = \frac{v_\lambda \lambda}{\nu} \approx \frac{(\varepsilon \lambda)^{1/3} \lambda}{\nu} \approx \frac{(\frac{u^3}{l} \lambda)^{1/3} \lambda}{\nu} \approx \frac{u \lambda^{4/3}}{l^{1/3} \nu}$$

Que multiplicada por l/l , resulta:

$$Re_\lambda \approx \frac{u \lambda^{4/3}}{l^{1/3} \nu} \frac{l}{l} \approx \frac{ul}{\nu} \frac{\lambda^{4/3}}{l^{4/3}} \approx Re \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{4/3} \quad (4.8)$$

Portanto o número de Reynolds local pode ser expresso pelo produto do número de Reynolds do escoamento e a relação das escalas local e integral de comprimento.

Para $\lambda < \lambda_0 \Rightarrow$ escalas internas (dissipativas) $Re \approx \frac{v_i}{\nu} \approx 1$

E substituindo na equação (4.8) resulta:

$$\begin{aligned} \text{Re}_{\lambda_0} &\approx \text{Re} \left(\frac{\lambda_0}{l} \right)^{\frac{4}{3}} \approx 1 \\ \left(\frac{\lambda_0}{l} \right)^{\frac{4}{3}} &\approx \frac{1}{\text{Re}} \Rightarrow \frac{\lambda_0}{l} \approx \frac{1}{\text{Re}^{\frac{3}{4}}} \\ \lambda_0 &\approx \frac{l}{\text{Re}^{\frac{3}{4}}} \approx \frac{l}{\left(\frac{ul}{\nu} \right)^{\frac{3}{4}}} \approx \nu^{\frac{3}{4}} \frac{l^{\frac{1}{4}}}{u^{\frac{3}{4}}} \approx \frac{\nu^{\frac{3}{4}}}{\left(\frac{u^3}{l} \right)^{\frac{1}{4}}} \approx \frac{\nu^{\frac{3}{4}}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\lambda_0 = \eta \approx \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.17a)$$

que é a chamada micro-escala de comprimento de Kolmogorov e que depende exclusivamente da viscosidade e da taxa de dissipação de energia, de acordo com a primeira hipótese de Kolmogorov..

Analogamente, poderiam ser obtidas as demais micro-escalas de Kolmogorov:

$$\tau \approx \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \text{micro-escala de tempo}; \quad (4.17b)$$

$$\nu \approx (\nu\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \quad \rightarrow \text{micro-escala de velocidade}. \quad (4.17c)$$

4.9. Relações Entre as Micro-Escalas de Kolmogorov e a Escala Integral

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{l} &\approx \frac{\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}}{l} \approx \frac{\nu^{\frac{3}{4}}}{\left(\frac{u^3}{l} \right)^{\frac{1}{4}} l} \approx \left(\frac{\nu}{ul} \right)^{\frac{3}{4}} \approx \text{Re}^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{\tau}{T} &\approx \frac{\left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}}{l/u} \approx \left(\frac{\nu}{u^3/l} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{u}{l} \approx \left(\frac{\nu}{ul} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\nu}{u} &\approx \frac{(\nu\varepsilon)^{\frac{1}{4}}}{u} \approx \nu^{\frac{1}{4}} \left(\frac{u^3}{l} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{u} \approx \left(\frac{\nu}{ul} \right)^{\frac{1}{4}} \approx \text{Re}^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

(4.18)

Essas relações mostram que as escalas de comprimento, tempo e velocidade dos menores turbilhões são muito menores do que dos maiores turbilhões. Verifica-se através dessas relações que a separação entre essas escalas aumenta com o aumento do valor de Re , o que leva a crer que a independência estatística do estado de equilíbrio dinâmico da estrutura de pequenas escalas será mais evidente para valores de Re muito altos. Além disso, quanto maior o valor de Re do escoamento, maior a distância entre a escala de Kolmogorov e a escala integral, conforme ilustrado nas *figuras 4.8, 4.9 e 4.10*.

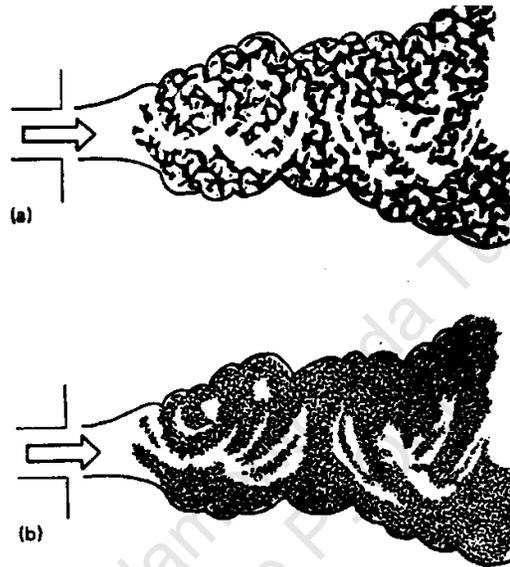


Figura 4.8 Representação esquemática de um jato livre com Re do escoamento mais baixo (a) e Re mais alto (b). (Fonte: TENNEKES & LUMLEY, 1972)

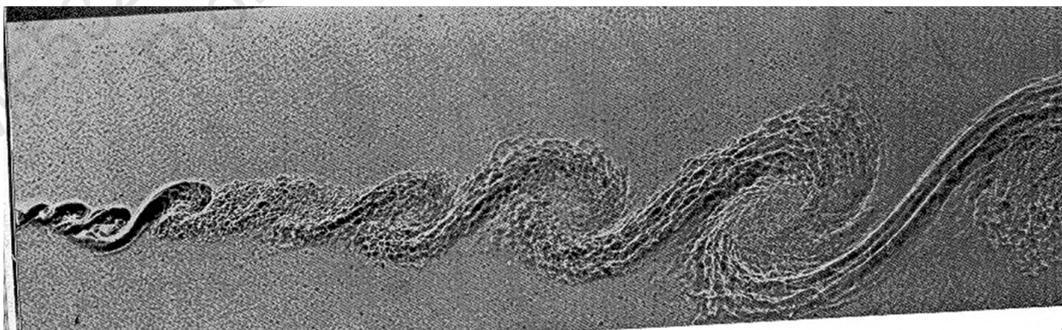


Figura 4.9 Escoamento turbulento em camada de mistura (nitrogênio escoando a 10 m/s sobre uma camada de uma mistura de hélio com argônio a velocidade de 3,80 m/s e pressão de 4 atm). (Fonte: VAN DIKE, 1982)

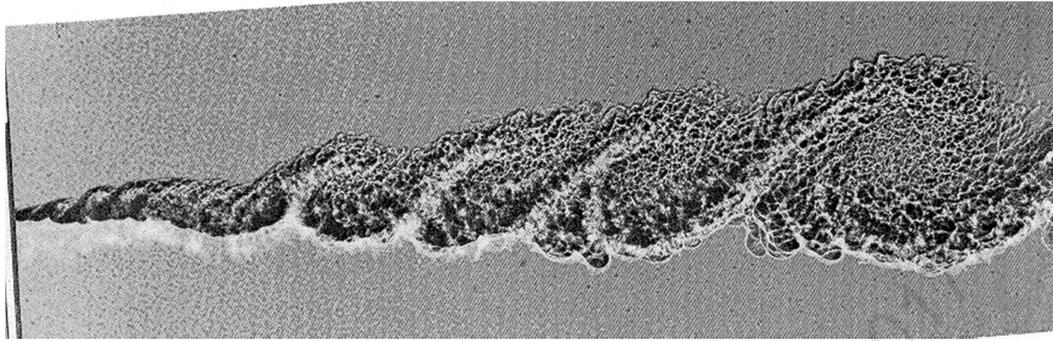


Figura 4.10 Mesmo escoamento turbulento em camada de mistura representado na figura 4.9, mas dobrando o Re do escoamento. (Fonte: VAN DIKE, 1982)

4.10. Micro-Escala de Taylor

A micro-escala de Taylor é definida na literatura para os pequenos turbilhões na zona inercial, portanto não dissipativa:

$$\lambda_0 \leq \lambda \leq l$$

com ε , neste caso, dado por:

$$\varepsilon \approx \nu \frac{u^2}{\lambda^2} \quad (4.19a)$$

Tennekes & Lumley 1972 sugerem para esta equação:

$$\varepsilon = 15\nu \frac{u^2}{\lambda^2} \quad (4.19b)$$

4.11. A Hipótese do Contínuo Para Escoamento Turbulento

A relação entre a escala de comprimento de Kolmogorov η e o comprimento de mistura da teoria molecular ξ (número de Knudsen) é dada por:

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{\nu/a}{\left(\nu^3/\varepsilon\right)^{1/4}} = \frac{\nu/a}{\left(\nu^3/u^3/l\right)^{1/4}} = \frac{\nu^{1/4}u^{3/4}}{al^{1/4}} = \frac{u/a}{\left(\frac{ul}{\nu}\right)^{1/4}} = \frac{Ma}{Re^{1/4}} \quad (4.20)$$

Pela equação (4.20) pode-se concluir que a micro-escala de Kolmogorov tende a escala molecular para altos valores de número de Mach e baixos valores de número de Reynolds, que não é uma situação muito viável de ocorrer.

Um exemplo extremo citado em Tennekes & Lumley (1972) é o caso de escoamento em nebulosas gasosas: $Ma = 10$ e $Re = 10^7$. Neste caso, temos:

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{Ma}{Re^{1/4}} \approx \frac{1}{6} \rightarrow \text{que foge completamente a condição dos escoamentos}$$

incompressíveis, e portanto foge ao escôpo dessa publicação.

Dessa forma podemos concluir que a *hipótese do contínuo* se aplica à grande maioria dos casos práticos envolvendo o estudo de escoamentos turbulentos.

4.12. Número de Reynolds e Graus de Liberdade

Em sistemas dinâmicos ditos caóticos o número de graus de liberdade é muito inferior quando comparado com escoamentos turbulentos que dependem fortemente do número de Reynolds e das condições iniciais (*constraints*), o que torna difícil a simulação numérica de escoamentos sujeitos a altos números de Reynolds.

Da equação (4.18) tem-se que a região inercial se estende a uma faixa de escalas crescendo a potência $3/4$ do número de Reynolds:

$$\frac{l}{\eta} \approx Re^{3/4}$$

Para a descrição do escoamento utilizando a simulação numérica é necessário a utilização de uma malha, retangular, por exemplo, com o número mínimo de nós representado a seguir:

$$N = \left(\frac{l}{\eta}\right)^3 = Re^{9/4} \quad (4.21)$$

Admitindo-se um caso típico de escoamento turbulento com $Re = 10^6$, tem-se que:

$$N = (10^6)^{9/4} = 10^{54/4} \cong 10^{13}$$

o que torna ainda impraticável a reprodução numérica de escoamentos turbulentos com altos valores de número de Reynolds.

4.13. Exercícios Seleccionados

4.13.1. Extraído e Adaptado de TENNEKES & LUMLEY (1972)

Uma caixa cúbica com volume L^3 é preenchida com fluido em movimento turbulento. Nenhuma fonte externa de energia está presente, de tal forma, que a turbulência decai no tempo. Como a turbulência está confinada na caixa, a escala integral de comprimento pode ser assumida igual a L , para qualquer tempo.

- a) Derive uma expressão de decaimento da energia cinética da turbulência (na forma $3/2 u^2$) como uma função do tempo.

Como a turbulência decai, o número de Reynolds (Re) diminui e se $Re = uL/\nu$ torna-se menor que 10, então a estimativa não viscosa de Kolmogorov (segunda hipótese) , $\varepsilon = u^3/L$, deve ser substituída pela estimativa viscosa do tipo $\varepsilon = C\nu u^2/L^2$, porque turbilhões para número de Reynolds mais baixos perdem energia diretamente pela dissipação viscosa.

- b) Calcule C assumindo que a taxa de dissipação é contínua para $Re = 10$.
 c) Derive uma expressão de decaimento de energia cinética de turbulência quando $Re < 10$ (corresponde a situação de período final de decaimento).

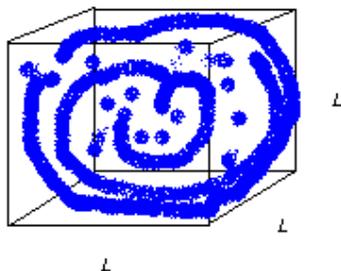
Admitindo: $L = 1\text{ m}$; $\nu = 15 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$; $u = 1\text{ m/s}$; para o tempo $t = 0$:

- d) Quanto tempo leva para que a turbulência entre em seu período final de decaimento?

Assumir que os efeitos de parede da caixa no decaimento da turbulência podem ser ignorados.

- e) Esta hipótese é válida?

Solução:



- a) Derive uma expressão de decaimento da energia cinética da turbulência (na forma $3/2 u^2$) como uma função do tempo:

Para $Re > 10 \Rightarrow \varepsilon = A u^3/L$ e considerando a variação de energia cinética de turbulência com o tempo, tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} u^2 \right) &= -A \frac{u^3}{L} \\ \frac{3}{2} 2u \frac{du}{dt} &= -A \frac{u^3}{L} \\ \frac{1}{u^2} du &= -\frac{A}{3L} dt\end{aligned}$$

Integrando a equação acima:

$$\begin{aligned}\int_{u_0}^u \frac{1}{u^2} du &= \int_{t_0}^t -\frac{A}{3L} dt \\ \int_{u_0}^u -u^{-2} du &= \int_{t_0}^t \frac{A}{3L} dt \\ \left[\frac{1}{u} \right]_{u_0}^u &= \left[\frac{A}{3L} t \right]_{t_0}^t\end{aligned}$$

para $t_0 = 0$ e $A = 1$, tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{u} &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{3L} t \\ \frac{1}{u} &= \frac{3L + u_0 t}{u_0 3L}\end{aligned}$$

$$u = \frac{u_0 3L}{3L + u_0 t} \rightarrow \text{decaimento linear da turbulência em função do tempo.}$$

$$\frac{3}{2} u^2 = \frac{3}{2} \left[\frac{9u_0^2 L^2}{(3L + u_0 t)^2} \right] \rightarrow \text{decaimento da energia cinética de turbulência em}$$

função do tempo (estimativa não viscosa com $Re > 10$).

- b) Calcule C assumindo que a taxa de dissipação é contínua para $Re = 10$:

Sabe-se que:

$$\text{Re} = \frac{uL}{\nu} \succ 10 \Rightarrow \varepsilon = \frac{u^3}{L}$$

$$\text{Re} = \frac{uL}{\nu} \prec 10 \Rightarrow \varepsilon = C \frac{\nu u^2}{L^2}$$

Portanto, admitindo-se a hipótese da continuidade para $\text{Re} = 10$, resulta:

$$\varepsilon = \frac{u^3}{L} = C \frac{\nu u^2}{L^2}$$

$$u = \frac{C\nu}{L}$$

$$C = \frac{uL}{\nu} = \text{Re}$$

Portanto: $C = 10$

Observação: A taxa de dissipação correspondente à estimativa viscosa está associada a micro escala de Taylor, conforme apresentado na equação (4.19b) diferindo apenas no valor da constante C .

- c) Derive uma expressão de decaimento de energia cinética de turbulência quando $\text{Re} < 10$ (corresponde a situação de período final de decaimento).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} u^2 \right) = -C\nu \frac{u^2}{L^2}$$

$$3u \frac{du}{dt} = -C\nu \frac{u^2}{L^2}$$

$$\frac{1}{u} du = -\frac{C\nu}{3L^2} dt$$

Integrando esta última equação:

$$\int_{u_1}^u \frac{1}{u} du = \int_{t_1}^t -\frac{C\nu}{3L^2} dt$$

$$[\ln u]_{u_1}^u = -\frac{C\nu}{3L^2} (t - t_1)$$

$$u = u_1 e^{-\frac{C\nu}{3L^2}(t-t_1)} \rightarrow \text{decaimento exponencial da turbulência em função do tempo.}$$

$$Re = C = \frac{u_1 L}{\nu} = 10$$

Para

$$u_1 = \frac{10\nu}{L}$$

Portanto:

$$\frac{3}{2} u^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{10\nu}{L} \right)^2 e^{\frac{-210\nu}{3L^2}(t-t_1)} \rightarrow \text{decaimento exponencial da energia cinética da turbulência em função do tempo (estimativa viscosa com } Re < 10).$$

d) Admitindo: $L = 1 \text{ m}$; $\nu = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $u = 1 \text{ m/s}$; para o tempo $t = 0$, quanto tempo ocorre para que a turbulência entre em seu período final de decaimento? Sabe-se para a estimativa não viscosa, com $Re=10$, que:

$$u = \frac{u_0 3L}{3L + u_0 t}$$

$$t = \left(\frac{u_0 3L}{u} - 3L \right) \frac{1}{u_0}$$

Considerando-se a hipótese de que L é constante para todo o tempo:

$$u = \frac{10\nu}{L} = \frac{10 \times 15 \times 10^{-6}}{1} = 1,5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$t = \left(\frac{1 \times 3 \times 1}{1,5 \times 10^{-4}} - 3 \times 1 \right) \frac{1}{1} = 19970 \text{ s} \cong 5,5 \text{ h} \rightarrow \text{estimativa irreal a primeira vista!!}$$

e) Assumir que os efeitos de parede da caixa no decaimento da turbulência podem ser ignorados. Esta hipótese é válida?

A hipótese de que a taxa de decaimento da energia cinética é da ordem de u^3/L pode ser considerada correta durante o intervalo de tempo em que as forças de inércia são apreciáveis. Assumindo-se os efeitos de parede no decaimento da turbulência, sabe-se que as forças viscosas são predominantes junto as paredes, e, nesse caso, a hipótese de decaimento de energia cinética citada anteriormente não é totalmente verdadeira. Por outro lado, a *teoria de Kolmogorov* pressupõe turbulência desenvolvida, homogênea e isotrópica, o que não é o caso do exemplo.

Admitindo-se uma caixa muito grande de modo que o volume de fluido em contato com a parede é relativamente pequeno quando comparado com o restante do volume, nesse caso a teoria de Kolmogorov forneceria resultados mais precisos, principalmente se considerarmos o incremento do Re .

4.13.2. Exercício Adaptado dos Resultados de Saltara & Ortiz (1994)

Um ressalto hidráulico afogado é formado a jusante de uma comporta de fundo instalada no vertedor de um canal ($\nu_{H_2O} = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$). Sabendo-se que o ressalto hidráulico é submerso com índice de submergência $S_{\text{sub}} = 0,24$, número de Froude na entrada do ressalto $Fr_1 = 8,19$, altura conjugada na entrada do ressalto $Y_1 = 0,015 \text{ m}$ e velocidade média na entrada do ressalto $U_1 = 3,14 \text{ m/s}$, pede-se calcular as micro-escalas de Kolmogorov, (comprimento, velocidade e tempo) nas seções $x/Y_1 = 12, 44$ e 84 , a jusante do início do ressalto.

Solução:

O trabalho de Saltara & Ortiz 1994 apresenta valores de profundidades da lâmina d'água ao longo do ressalto e de valores de RMS de flutuação da velocidade na direção do escoamento, para as condições de contorno acima discriminadas. Esses valores foram obtidos a partir de um trabalho de mestrado envolvendo simulação numérica utilizando modelo $k-\epsilon$ desenvolvido por Saltara (ver Saltara & Ortiz, 1994) e comparando-se os resultados com valores experimentais obtidos por Long et al, 1990, a partir da medição com um sistema LDV, conforme tabelas anexas:

Dados: $Y_1 = 0,015 \text{ m}$; $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $U_1 = 3,14 \text{ m/s}$;

$$Re = \frac{U_1 Y_1}{\nu} = \frac{3,14 \times 0,015}{10^{-6}} = 4,7 \times 10^4$$

Para $x/Y_1 = 12 \Rightarrow L = 9,8 Y_1 = 0,147 \text{ m}$.

Profundidade $Y \text{ (m)}$	$\sqrt{u'^2}$ (m/s)	$\left(\sqrt{u'^2}\right)^3 / L = \epsilon$ (m^2/s^3)	$\eta \approx \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$ (m)	$v \approx (\nu \epsilon)^{\frac{1}{4}}$ (m/s)	$\tau \approx \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$ (s)
---------------------------------	------------------------	--	---	---	---

0	0,220	0,0724	$6,096 \times 10^{-5}$	0,0164	0,0037
0,015	0,377	0,365	$4,068 \times 10^{-5}$	0,0246	0,0017
0,030	0,440	0,579	$3,625 \times 10^{-5}$	0,0276	0,0013
0,045	0,440	0,579	$3,625 \times 10^{-5}$	0,0276	0,0013
0,060	0,440	0,579	$3,625 \times 10^{-5}$	0,0276	0,0013
0,075	0,440	0,579	$3,625 \times 10^{-5}$	0,0276	0,0013
0,090	0,408	0,462	$3,836 \times 10^{-5}$	0,0261	0,0015

Para $x/Y_1 = 84 \Rightarrow L = 13,0 \ Y_1 = 0,195 \ m$

Profundidade $Y \ (m)$	$\sqrt{u'^2}$ (m/s)	$\left(\sqrt{u'^2}\right)^3 / L = \varepsilon$ (m^2/s^3)	$\eta \approx \left(\frac{v^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$ (m)	$v \approx (v\varepsilon)^{1/4}$ (m/s)	$\tau \approx \left(\frac{v}{\varepsilon}\right)^{1/2}$ (s)
0	0,126	0,0103	$9,900 \times 10^{-5}$	0,0101	0,00985
0,015	0,157	0,0198	$8,400 \times 10^{-5}$	0,0119	0,00711
0,030	0,157	0,0198	$8,400 \times 10^{-5}$	0,0119	0,00711
0,045	0,157	0,0198	$8,400 \times 10^{-5}$	0,0119	0,00711
0,060	0,188	0,0341	$7,400 \times 10^{-5}$	0,0136	0,00542
0,075	0,188	0,0341	$7,400 \times 10^{-5}$	0,0136	0,00542
0,090	0,188	0,0341	$7,400 \times 10^{-5}$	0,0136	0,00542

COMENTÁRIOS: Verifica-se pela análise dos resultados que as escalas de comprimento e de tempo de Kolmogorov são menores na região próxima a parede e na região crítica inicial do ressalto. Por sua vez, as escalas de velocidade de Kolmogorov aumentam nestas regiões, o que comprova o processo de geração de turbulência na região inicial do ressalto, com maiores taxas de dissipação na região de parede.

4.13.3. Exercício adaptado de Vilalta Alonso & Ortiz (2000)

Em um pequeno canal de laboratório mediu-se o campo de velocidades de um escoamento de água e do escoamento de água misturada com um polímero solúvel (Iqapol). As medições do campo de velocidade foram feitas com um sistema LDA (*Laser Doppler Anemometer*) para número de Reynolds do escoamento $Re_0 \cong 8 \times 10^3$.

As medições foram feitas na região de parede do canal para concentrações de polímero de 5, 10, 15, 20 ppm.

Determinar as escalas de Kolmogorov para estas situações de escoamento, considerando constante e igual a da água, a viscosidade cinemática da solução polimérica ($\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$).

Solução:

Adotando-se a largura do canal como sendo a escala integral de comprimento tem-se que: $L = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$.

Região de parede

ESCOAMENTO	$\varepsilon \text{ (m}^2/\text{s}^3)$	$L \text{ (m)}$	$u \text{ (m/s)}$
Água	0,00057	0,03	0,0257
Iqapol – 5 ppm	0,00050	0,03	0,0246
Iqapol – 10 ppm	0,00043	0,03	0,0234
Iqapol – 15 ppm	0,00036	0,03	0,0222
Iqapol – 20 ppm	0,00033	0,03	0,0214

Utilizando-se a teoria de Kolmogorov resultam para as micro-escalas os seguintes valores:

Região de parede

ESCOAMENTO	$\eta \text{ (m)}$	$\nu \text{ (m}^2/\text{s)}$	$\tau \text{ (s)}$
Água	0,00020	0,00489	0,04189
Iqapol – 5 ppm	0,00021	0,00473	0,04472
Iqapol – 10 ppm	0,00022	0,00455	0,04822
Iqapol – 15 ppm	0,00023	0,00436	0,05270
Iqapol – 20 ppm	0,00023	0,00426	0,05505

4.13.4. Exercício aplicado ao sistema vascular

Determinar a micro-escala de Kolmogorov para escoamento sanguíneo na raiz da aorta, considerado tipicamente turbulento. De que forma estas escalas afetam o

comportamento das células vermelhas e conseqüentemente, o processo de hemólise, após cirurgias utilizando endopróteses em aneurismas.

$$\text{Dados: } D_{aorta} = 2,24 \text{ cm}$$

$$\rho_{sangue} = 1060 \text{ kg/m}^3$$

$$V = 0,65 \text{ m/s}$$

$$2 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s} \leq \mu_{sangue} \leq 4 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$$

Solução:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{1060 \times 0,65 \times 0,0224}{2 \times 10^{-3}} \cong 7716,80$$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{1060 \times 0,65 \times 0,0224}{4 \times 10^{-3}} \cong 3858,40$$

Os valores de número de Reynolds obtidos caracterizam um escoamento tipicamente turbulento na entrada da aorta.

Utilizando as condições abaixo estabelecidas em Pinotti (2000), com $\sigma_N = 25000 \text{ N/m}^2$, tem-se:

$$\sigma_N = -\rho (\overline{u^2})$$

$$(\overline{u^2}) = -\frac{\sigma_N}{\rho}$$

$$\eta = \frac{\rho^{0,375} v^{0,75} L^{0,25}}{\sigma_N^{0,375}} = \frac{1060^{0,375} \times (1,89 \times 10^{-6})^{0,75} \times 0,0224^{0,25}}{25000^{0,375}} = 6,03 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\eta = 6,03 \times 10^{-3} \text{ mm} = 6,03 \mu\text{m}$$

$$\eta_1 = \frac{\rho^{0,375} v^{0,75} L^{0,25}}{\sigma_N^{0,375}} = \frac{1060^{0,375} \times (3,77 \times 10^{-6})^{0,75} \times 0,0224^{0,25}}{25000^{0,375}} = 1,01 \times 10^{-5}$$

$$\eta_2 = 1,01 \times 10^{-2} \text{ mm} = 10,12 \mu\text{m}$$

Percebe-se que, nesse caso, caracteriza-se um escoamento tipicamente turbulento, de acordo com a teoria de escoamento em conduto forçado, caracterizando-se as microescala de Kolmogorov, como sendo da ordem de grandeza das dimensões médias das células vermelhas do escoamento (10 μm). Microescalas da ordem de grandeza da dimensão média das células vermelhas podem causar danos a essas células pelo comportamento das tensões turbulentas e viscosas.

4.13.5. Extraído e adaptado de Kleinstreuer (1997)

Considere-se 1 litro de água a ser misturado em um recipiente de 10 cm de diâmetro, sendo a potência transmitida para a mistura nas seguintes situações:

- a) utilização de um misturador manual de 10 W;
- b) utilização de um misturador mecânico de 1000 W

Determinar o tamanho das menores escalas de turbulência e de que forma elas afetam a eficiência do sistema.

Dado: $\nu_{H_2O} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Respostas:

- misturador manual: $\varepsilon = 1 \text{ W/kg}$; $\eta = 0,02 \text{ mm}$;
- misturador mecânica: $\varepsilon = 100 \text{ W/kg}$; $\eta = 0,01 \text{ mm}$.

Observação: No segundo caso tem-se estabelecida uma maior taxa de dissipação e uma menor escala de Kolmogorov, o que significa uma maior geração de turbulência e um processo mais eficaz de mistura.

4.14. Comparação de alguns resultados dos exercícios selecionados

Percebe-se que para um espectro de escalas de escoamento turbulento, partindo de sistemas vasculares até escoamentos em canais hidráulicos, as escalas de comprimento de Kolmogorov variam entre valores da ordem de 10 a 200 μm . Nos casos em que se dispõe de dados, junto da parede as menores escalas de comprimento e tempo são menores, enquanto que as menores escalas de velocidade são maiores, ou seja, a turbulência é maior. É interessante também observar que as escalas dissipativas de Kolmogorov são da ordem de grandeza das dimensões médias das células sanguíneas (10 μm).