Eletromagnetismo I

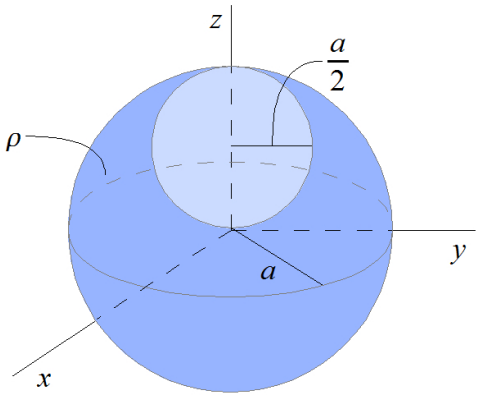
Prof. Ricardo Galvão - 2º Semestre 2015

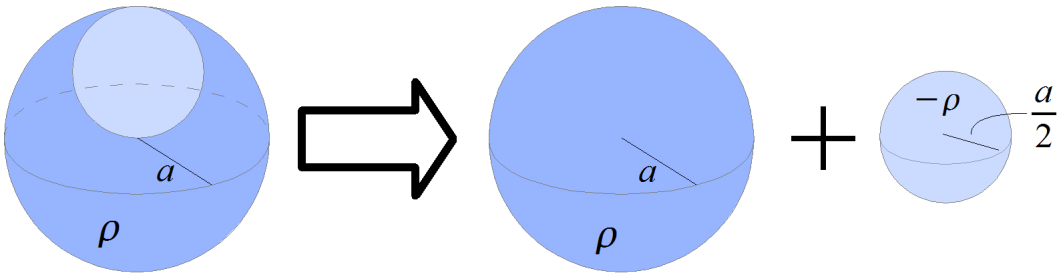
Preparo: Diego Oliveira

Aula 5

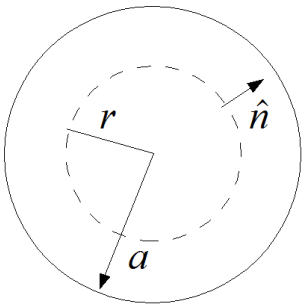
Aplicação: Esfera Oca uniformemente carregada

Podemos modelar este sistema considerando que a esfera oca é equivalente a uma esfera uniforme, com densidade de carga positiva ρ (digamos, Esfera 1 de raio a), mais uma esfera de raio $a/2$ (Esfera 2), na posição da cavidade, com densidade volumétrica de carga $-\rho$:





Assim, temos que:



Esfera 1: $\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}dS = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho d\tau$

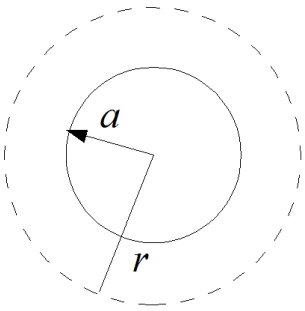
Dentro: $\vec{E}_1 = E_1(r)\hat{e}_r$ - argumento de simetria

$$\therefore \oint_S \vec{E}_1\cdot\hat{n}dS = \oint_S \vec{E}_1\cdot\hat{e}_r dS = 4\pi r^2 E_1$$

$$\int_V \rho d\tau = \rho\int dV = \frac{4\pi r^3}{3}\rho$$

$$\therefore 4\pi r^2 E_1 = \frac{4\pi r^3}{3}\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \therefore E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0}r \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}_1}$$

Fora:
$$\left.\begin{aligned} \oint_S \vec{E}_1\cdot\hat{n}dS &= 4\pi r^2 E_1 \\ \int \rho d\tau &= \frac{4\pi a^3}{3}\rho \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\vec{E}_1 = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r_1^3}\vec{r}_1}$$



Esfera 2: Os resultados serão os mesmos para a esfera 2, só que temos que lembrar que, na expressão para o campo fora dela, o raio é $a/2$ e não a. Portanto

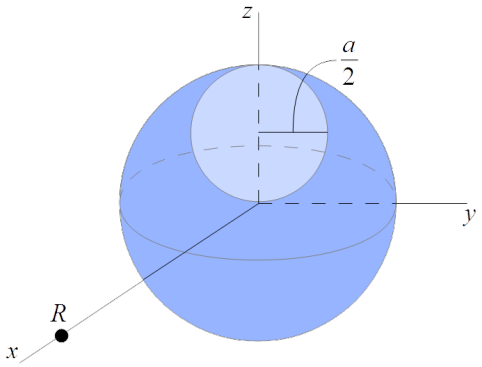
$$\boxed{\vec{E}_{2\ \text{dentro}} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}_2; \qquad \vec{E}_{2\ \text{fora}} = -\rho\frac{(a/2)^2}{3\epsilon_0 r_2^3}\vec{r}_2;}$$

A. Campo resultante a uma distância $R > a$ no plano equatorial da esfera

$$\vec{r}_1 = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z;$$

$$\vec{r}_2 = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + \left(z - \frac{a}{2}\right)\hat{e}_z;$$

$$\vec{E} = \left[\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right]_{fora} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\rho a^3}{24\epsilon_0}\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}$$



No ponto $x = R$, $y = z = 0$

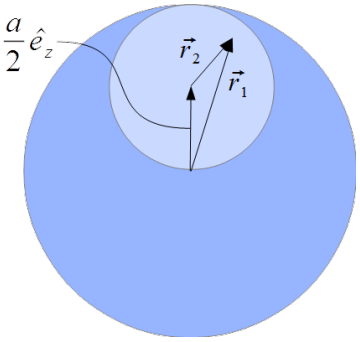
$$\therefore \vec{r}_1 = R\hat{e}_x; \qquad \vec{r}_2 = R\hat{e}_x - \frac{a}{2}\hat{e}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}\left[R\hat{e}_x - \frac{1}{8}\left(R\hat{e}_x - \frac{a}{2}\hat{e}_z\right)\right] \qquad \therefore \boxed{\vec{E} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}\left[\frac{7}{8}R\hat{e}_x + \frac{a}{16}\hat{e}_z\right]}$$

B. Campo em qualquer ponto dentro da cavidade

$$\vec{E} = \left[\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right]_{dentro} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}_{a/2\hat{e}_z}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho a}{6\epsilon_0}\hat{e}_z} \qquad \text{constante!}$$



Usando esta técnica se pode resolver muitos problemas especiais. Recomendo que os alunos estudem o exemplo 2.5 e façam os problemas 2.13, 2.15, 2.16 e 2.18 do livro texto.

Potencial Eletrostático

Para resolver problemas com configurações de carga e condições de contorno mais complexas, é melhor calcular primeiro o potencial e depois calcular o campo elétrico calculando seu gradiente.

Como em eletrostática $\partial\vec{A}/\partial t = 0$, o campo elétrico é dado por

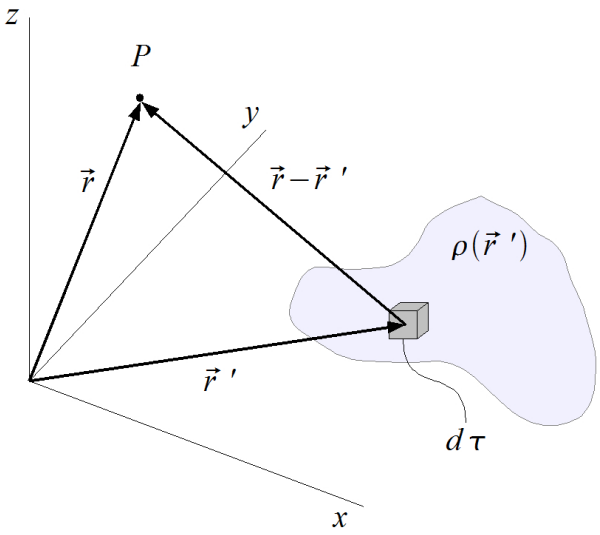
$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Por outro lado, como o campo eletrostático é conservativo ($\nabla \times \vec{E} = 0$), a diferença de potencial entre dois pontos independe do percurso entre eles:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\ell = -\int_A^B \nabla\phi\cdot d\vec{\ell} = -\int_A^B \frac{d\phi}{d\ell}d\ell = -\int_A^B d\phi = -\left[\phi(B)-\phi(A)\right]$$

Potencial de uma distribuição localizada de cargas

Consideremos uma distribuição de cargas com densidade $\rho(\vec{r}\,')$, que pode ser variável. Se considerarmos um elemento de volume $d\tau'$ na posição dada pelo raio vetor $\vec{r}\,'$, o elemento de carga neste volume será,



$$dq' = \rho(\vec{r}\,')d\tau'$$

o campo elétrico devido a este elemento de carga no ponto P, na posição dada pelo raio vetor $\vec{r}$ é

$$d\vec{E} = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Portanto o campo devido a toda distribuição de carga será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}d\tau'$$

Agora vamos utilizar um resultado importante que revisamos

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Quanto o ponto estiver fora da origem escrevemos

$$\nabla_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

onde o índice r em ∇ significa que estamos tomando a derivada com relação às coordenadas de $\vec{r}$ e não de $\vec{r}\,'$! Usando este resultado, podemos escrever a expressão do campo elétrico como

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}\,') \left[\nabla_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] d\tau';$$

mas como a integral é sobre $\vec{r}\,'$ e não sobre $\vec{r}$, podemos escrever ∇_r fora da integral, ou seja,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla_r \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau' \right] = -\nabla_r \phi(\vec{r})$$

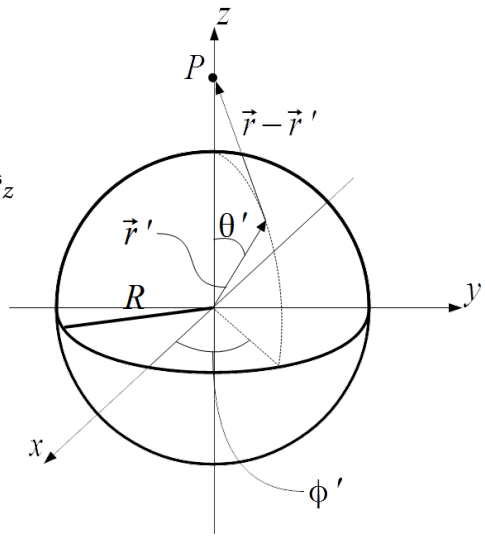
Portanto

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau'}$$

Nem sempre é simples usar esta fórmula para calcular o potencial. O livro texto mostra um exemplo muito instrutivo, o cálculo do potencial de uma casca esférica uniformemente carregada com densidade superficial de carga σ. No exemplo 2.6 o cálculo é feito calculando o primeiro campo elétrico, o que pode ser facilmente feito usando a lei de Gauss. Depois o potencial é calculado fazendo a integral $\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. Peço aos alunos estudarem este exemplo detalhadamente, verificando todas as passagens. Em aula vamos fazer o Exemplo 2.7, que é mais difícil algebricamente.

Exemplo 2.7:

$$\vec{r} = z\hat{e}_z; \qquad \vec{r}\,' = R\hat{e}'_R$$



$$\therefore \vec{r}\,' = Rsen\theta'cos\varphi'\hat{e}_x + Rsen\theta'sen\varphi'\hat{e}_y + Rcos\theta'\hat{e}_z$$

$$\vec{r}-\vec{r}\,' = Rsen\theta'cos\varphi'\hat{e}_x + Rsen\theta'sen\varphi'\hat{e}_y + \\ +(Rcos\theta'-z)\hat{e}_z$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \left[R^2sen^2\theta'cos^2\varphi' + R^2sen^2\theta'sen^2\varphi' + \right. \\ \left. +(Rcos\theta'-z)^2\right]^{1/2}$$

$$\therefore |\vec{r}-\vec{r}\,'| = \left[R^2 - 2Rzcos\theta' + z^2\right]^{1/2}$$

$$\rho(\vec{r}\,')d\tau' = \sigma dS'; \qquad dS' = R^2sen\theta'\,d\theta'd\varphi'$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{R^2sen\theta'\,d\theta'd\varphi'}{\left[R^2+z^2-2Rzcos\theta'\right]^{1/2}} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\int_0^\pi \frac{sen\theta'd\theta'}{\left[R^2+z^2-2Rzcos\theta'\right]^{1/2}}$$

$$\therefore \phi(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\frac{1}{Rz}\left[\sqrt{R^2+z^2-2Rzcos\theta'}\right]_0^\pi$$

$$\therefore \phi(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z}\left[\sqrt{R^2+z^2+2Rz} - \sqrt{R^2+z^2-2Rz}\right]$$

$$\therefore \phi(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z}\left[\sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(R-z)^2}\right]$$

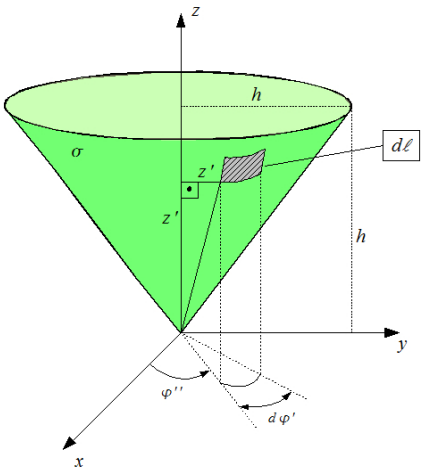
Ao extrair a segunda raiz, é necessário levar em conta que tem que ser positiva. Então

Fora da esfera: $z > R \quad \Rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{2z\epsilon_0}[R+z-(z-R)]$ $\qquad \boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 z}}$

Dentro da esfera: $z < R \quad \Rightarrow \quad \phi_f(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{2z\epsilon_0}[R+z-(R-z)]$ $\qquad \boxed{\phi_d(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}}$

Prob. 2.26

Considere uma superfície cônica de altura h e raio da base também igual a h, carregada com uma densidade de carga constante σ. Calcule a expressão do campo elétrico e do potencial eletrostático ao longo do eixo da superfície cônica.

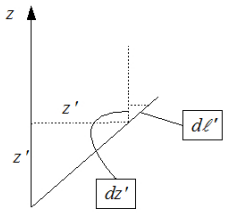


Como a densidade de carga é superficial

$$\rho(\vec{r}\,')d\tau' = \sigma(\vec{r}\,')dS' = \underset{cte}{\sigma}\, dS'$$

$$\vec{r} = z\hat{e}_z$$

$$\vec{r}\,' = z'\cos\phi'\hat{e}_x + z'\sin\phi'\hat{e}_y + z'\hat{e}_z$$



$$dS' = (z'd\phi')d\ell';\;\; d\ell' = \sqrt{2}dz' \qquad \therefore dS' = \sqrt{2}z'dz'd\phi'$$

Das expressões de $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$, temos

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = [z'^2 cos^2\phi' + z'^2 sen^2\phi' + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}} = [z'^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \phi(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h \frac{\sqrt{2}z'dz'}{[z'^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\epsilon_0}\int_0^h \frac{z'dz'}{[z'^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \phi(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\epsilon_0}\int_0^h \frac{z'dz'}{[2z'^2-2zz'+z^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Tabela de Integrais

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a\sqrt{a}}\,ln\left|2\sqrt{a}\,\sqrt{ax^2+bx+c}+2ax+b\right|$$

No nosso caso: $a=2$; $b=-2z$; $c=z^2$

$$\therefore \int_0^h \frac{z'\,dz'}{\left[2z'^2-2zz'+z^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \left[\frac{\sqrt{2z^2-2zz'+z^2}}{2} + \frac{z}{2\sqrt{2}}\,ln\left[2\sqrt{2}\sqrt{2z'^2-2zz'+z^2}+4z'-2z\right]\right]_0^h =$$

$$\left[\frac{\sqrt{2h^2-2hz+z^2}}{2} + \frac{z}{2\sqrt{2}}\,ln\left[2\sqrt{2}\sqrt{2h^2-2zh+z^2}+4h-2z\right] - \frac{|z|}{2} - \frac{z}{2\sqrt{2}}\,ln\left[2\sqrt{2}|z|-2z\right]\right]$$

$$\boxed{\phi(z) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2}\epsilon_0}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2h^2-2hz+z^2} - \frac{|z|}{2} + \frac{z}{2\sqrt{2}}\,ln\left(\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2h^2-2zh+z^2}+4h-z}{2\left(\sqrt{2}|z|-z\right)}\right)\right]}$$

A seguir, no problema original é pedido para calcular $\phi(h)-\phi(0)$, que não é uma informação tão útil. Mais importante é utilizar esta expressão para o potencial para calcular o campo elétrico ao longo do eixo z. Sabendo que $\vec{E} = -\nabla\phi$, temos que

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

e, portanto

$$E_z = -\frac{\sigma}{\sqrt{2}\epsilon_0}\frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{2h^2-2hz+z^2}}{2} - \frac{|z|}{2} + \frac{z}{2\sqrt{2}}\,ln\left(2\sqrt{2}\sqrt{2h^2-2hz+z^2}+4h-2z\right) - \frac{z}{2\sqrt{2}}\,ln\left(2\sqrt{2}|z|-2z\right)\right]$$

Esta derivada é longa, mas pode ser feita sem dificuldade. Fica para os alunos a fazerem e verificarem o comportamento de E_z como função de z/h.

A expressão para o potencial pode ser obtida também para pontos fora do eixo z. No entanto, neste caso a integral só pode ser obtida em termos das integrais elípticas, que discutiremos mais tarde.